Perturbaciones de medidas y polinomios ortogonales

Javier Hernández Benítez

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2013

Perturbaciones de medidas y polinomios ortogonales

Por

Javier Hernández Benítez

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Titular en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2013

Perturbaciones de medidas y polinomios ortogonales

Resumen

En este trabajo se analiza algunas transformaciones espectrales de medidas soportadas tanto en la recta real como en el circunferencia unidad. Se estudia además, la conexión entre transformaciones espectrales de medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ y en el círculo unidad; en esta conexión interviene la transformación de Szegő y las funciones de Stieltjes y de Carathéodory. También se presentan algunos resultados de la transformación de Geronimus de cierta medida soportada en el círculo unidad, desde el punto de vista de las matrices de Hessenberg que se originan de la representación matricial del operador de multiplicación por z en términos de una base de polinomios ortogonales asociados a dicha medida y su perturbada.

Índice general

Introducción

La teoría de polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real ha sido objeto de atención no sólo desde una perspectiva analítica (propiedades asintóticas, distribución de sus ceros) sino desde un amplio espectro de aplicaciones (integración numérica, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, teoría de grafos, sistemas integrables, etc). Más recientemente, se ha desarrollado un tratamiento basado en las propiedades espectrales de las matrices de Jacobi asociadas a dichos polinomios ortogonales. De hecho, las matrices de Jacobi representan, en forma matricial, el operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales. En **[38]** y **[43]** se ha abierto una interesante aproximación a la conexión entre perturbaciones de medidas y factorización LU de matrices de Jacobi que ha sido desarrollada tanto desde el aspecto teórico ([**4**], [**5**], [**42**]) como numérico ([**2**], [**3**]) en el marco de las denominadas transformaciones de Darboux que tienen su origen en los problemas biespectrales (véase **[38]**), así como a través de la factorización QR ([**6**]).

La teoría de polinomios ortogonales respecto a una medida positiva no trivial soportada sobre la circunferencia unidad se inicia con los trabajos de G. Szegő (véase **[39]** y su exhaustivo conjunto de referencias) y se desarrolla desde una perspectiva analítica por Ya L. Geronimus ([12], [13] y [14]) basada en la teoría clásica de funciones de variable compleja. La conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios discretos constituyen un importante eje de actividad investigadora en la década de los cincuenta (véase a modo de ejemplo [20]). En la década de los ochenta se asiste un renovado interés por el tema tanto desde la perspectiva de la teoría de aproximación (fracciones continuas [25] y aproximación por polinomios trigonométricos [35]) como desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización QR de matrices unitarias de Hessenberg de dimensión finita ([19]). En los años noventa se desarrolla una teoría constructiva de familias de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad (véase [1], [15], [16], [24], [26], [28], [31], [32], [34], entre otros) junto a una novedosa interpretación basada en la representación matricial del operador de multiplicación respecto a una base ortonormal en relación a medidas soportadas en un arco de la circunferencia unidad ([17], [18]).

Sin duda alguna, el hito más relevante al comienzo del siglo XXI es la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon [37] que constituyen la descripción mas exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (véase también [36] a modo de síntesis). Una de sus aportaciones fundamentales es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent $\Lambda = span\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias $S = \left\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots\right\}$ y $T = \left\{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \ldots\right\}$. La matriz resultante es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques de dimensión 2 la primera y de un único bloque de dimensión 1 y los restantes de dimensión 2 la segunda, cuyas entradas están relacionadas con los denominados parámetros de reflexión, i. e. las evaluaciones en el punto $z = 0$ de los polinomios ortonormales. Este resultado debido a D. S. Watkins ([41]) fue obtenido mediante una demostración alternativa e independiente en [7].

A continuación, explicamos los contenidos y aportaciones específicas de cada capítulo que conforma esta memoria. El capítulo 1 es una introducción que contiene conceptos básicos acerca de la teoría de polinomios ortogonales asociados a medidas de Borel positivas tanto en la recta real como en el círculo unidad.

En el capítulo 2 trataremos las perturbaciones de medidas estudiadas desde el punto de vista de transformaciones espectrales a las funciones de Stieltjes (caso real) y las funciones de Carathéodory (caso círculo unidad) asociadas a la medida respectiva. En la sección 2.3 de este capítulo, estudiamos la conexión de medidas sobre el intervalo $[-1, 1]$ y medidas sobre el círculo unitario. Mediante la llamada Transformación de Szegő establecemos relaciones entre la función de Stieltjes y Carathéodory, así como entre los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos en el caso real, y los llamados coeficientes de Verblunsky en el caso de la circunferencia unitaria.

En el capítulo 3 presentamos algunos resultados relacionados con la transformación de Geronimus en el círculo unitario, desde el punto de vista de obtener la familia de polinomios ortogonales asociados a la medida perturbada en función de los polinomios ortogonales asociados a la medida original estudiados en diferentes trabajos (ver [16], [21], [22], [30]). En la sección 3.3 se estudia una extensión natural de los trabajos [22] y [30], que no es más que la transformación de Geronimus general, si se puede llamar así, ya que consiste en la transformación de Geronimus canónica con la adición de masas.

1 Polinomios ortogonales

Sea μ una medida de Borel positiva en el plano complejo y consideremos el espacio de Hilbert $\mathbb{L}_2(\mu)$ de las funciones $\phi(z)$ tales que

$$\int |\phi(z)|^2 d\mu(z) < \infty.$$

En $\mathbb{L}_2(\mu)$ tenemos el siguiente producto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi(z)\overline{\psi(z)} d\mu(z), \qquad \phi, \psi \in \mathbb{L}_2(\mu).$$

Supongamos que las funciones $\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z), \ldots$ forman un sistema linealmente independiente en $\mathbb{L}_2(\mu)$. Muy a menudo es más conveniente transformar este sistema en otro sistema de funciones linealmente independiente $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots$ tales que $\varphi_n(z)$ es una combinación lineal de $n+1$ funciones $\phi_0(z), \phi_1(z), \ldots, \phi_n(z)$ y

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = 0, \qquad n \neq m.$$

Este nuevo sistema de funciones se denomina *sistema ortogonal de funciones* respecto a μ. Más aún, si además se tiene

$$||\varphi_n||^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \int |\varphi_n(z)|^2 d\mu(z) = 1, \quad n \geqslant 0.$$

entonces se dice que $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ es un *sistema ortonormal de funciones* con respecto a μ.

La *matriz de Gram*

$$G = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

El menor principal de orden n

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{pmatrix},$$

debido al carácter de independencia lineal del conjunto $\{\phi_n\}_{n\geqslant 0}$, es hermitiana definida positiva, ya que $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$ y

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_0 & \overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_n \end{pmatrix} G_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_k \overline{x}_j \langle \phi_k, \phi_j \rangle.$$

Si escribimos $\psi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{x}\phi_k(z)$, entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_0 & \overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_n \end{pmatrix} G_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = ||\psi_n||^2$$

el cual siempre es no negativo y sólo se anula cuando ψ_n es cero en casi todas partes (asociada a μ).

Como consecuencia, tenemos que el determinante $\Delta_n := |G_n|$ es real y positivo.

Teorema 1.1 (ver [40]) *Las funciones ortonormales $\varphi_n(z)$ están dadas por*

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{vmatrix}, \qquad (1.1)$$

Nuestro interés se centra en sistemas linealmente independientes de monomios $1, z, z^2, \ldots$ y de esta base en el espacio lineal de los polinomios, queremos obtener un sistema de polinomios ortogonales con respecto a una medida dada μ. El sistema de polinomios ortonormales es único si imponemos que el coeficiente líder es positivo. De esta forma, tendríamos un sistema de polinomios $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que

$$\int \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}d\mu(z) = \delta_{n,m}, \quad m, n \geqslant 0,$$

con $\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots$ y $\kappa_n > 0$.

Una de las principales ventajas de trabajar con funciones ortogonales es la fácil obtención de la expansión de Fourier de funciones en $\mathbb{L}_2(\mu)$. Sea $f \in \mathbb{L}_2(\mu)$, entonces podemos escribir la expresión formal

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(z), \tag{1.2}$$

donde f_n son llamados *coeficientes de Fourier* y están dados por

$$f_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int f(z)\overline{\varphi_n(z)}d\mu(z). \tag{1.3}$$

La suma parcial de orden n de la expansión de Fourier (1.2) dada por

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(z), \tag{1.4}$$

tiene una propiedad extremal muy útil la cual es la mejor aproximación en $\mathbb{L}_2(\mu)$ de f con polinomios de grado a lo más n.

Teorema 1.2 (ver [40]) *Sea $f \in \mathbb{L}_2(\mu)$, entonces la integral*

$$\int |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z)$$

alcanza su valor mínimo sobre todos los polinomios $q_(z)$ de grado a lo más n, cuando $q_n(z)$ es la n-ésima suma parcial $f_n(z)$ de la serie de Fourier. Dicho valor es

$$||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2. \tag{1.5}$$

Como consecuencia inmediata tenemos la desigualdad

$$||f||^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$$

y como $n \to \infty$, la anterior expresión nos da la *desigualdad de Bessel*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Usando la expresión (1.3), en la n-ésima suma parcial (1.4) de la expansión de Fourier, obtenemos

$$f_n(z) = \int K_n(z,\xi) f(\xi) d\mu(\xi),$$

donde $K_n(z,\xi)$ viene dado por

$$K_n(z,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)}. \tag{1.6}$$

Debido a la ortonormalidad del sistema $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, si $f(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo n, entonces le n-ésima suma parcial $f_n(z)$ con $f(z)$ y en consecuencia tenemos que para todo polinomio $q_n(z)$ de grado a lo sumo n

$$q_n(z) = \int K_n(z,\xi) q_n(\xi) d\mu(\xi).$$

Por esta razón es que se llama en la literatura a $K_n(z,\xi)$ *núcleo reproductor*

1.1. Polinomios ortogonales en la recta real

Sea μ una medida de Borel positiva soportada en la recta real y consideremos la base canónica $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$ en el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{P}$. Asumiremos que μ cumple

$$\int x^n d\mu(x) < \infty, \quad \text{para cada } \ n \geqslant 0,$$

y que su soporte

$$supp(\mu) = \{x \in \mathbb{R} : \mu(x-\varepsilon, x+\varepsilon) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\}$$

contiene infinitos puntos. Sin perder generalidad, asumamos también que μ es una medida de probabilidad, esto es, $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Si ortogonalizamos la base canónica del espacio lineal de lo polinomios, se obtiene un sistema de polinomios ortogonales en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3 *Diremos que $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la medida μ si*

(i) $\deg p_n(x) = n$ *para todo* $n \geqslant 0$.

(ii) $\langle p_n(x), p_m(x)\rangle = \mathbf{k}_n\delta_{n,m}$, *con* $\mathbf{k}_n > 0$ *y* $\delta_{n,m}$ *es la delta de Kronecker definida por*

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & si \quad n = m, \\ 0 & si \quad n \neq m. \end{cases}$$

Si $\mathbf{k}_n = 1$ *para cada* $n \geqslant 0$, *entonces decimos que* $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ *es una sucesión de polinomios ortonormales.*

Debido al carácter real de las funciones, no necesitamos la conjugación en el producto interno, esto es

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)d\mu(x), \quad f, g \in \mathbb{L}_2(\mu).$$

En la literatura, este producto interno es comúnmente llamado producto interno estándar, y como consecuencia se menciona el tipo de ortogonalidad como estándar (ver [33]).

La unicidad de la familia ortonormal $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ se garantiza imponiendo que el coeficiente líder de cada $p_n(x)$ sea positivo, esto es, asumiremos que $p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \cdots$ con $\gamma > 0$.

Definición 1.4 *La sucesión* $\{m_n\}_{n\geqslant 0}$ *definida por*

$$m_n := \int x^n d\mu(x) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

se denomina sucesión de momentos. El valor m_n *se denomina momento de orden* n*.*

La matriz de Gram H cuyas entradas están dadas por $h_{k,j} = m_{k+j}$, $k, j = 0, 1, \ldots$, también se denomina *matriz de momentos estándar* asociada a la medida μ. H es una matriz de Hankel, esto es, una matriz cuyos elementos de las anti-diagonales son idénticos (ver [23])

$$H = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Denotaremos H_n la submatriz principal de H de dimensión $(n+1) \times (n+1)$

$$H = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{bmatrix}.$$

Así de lo anterior y la expresión (1.1), se tiene la familia de polinomios ortonormales $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ está dada por

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

donde $\Delta_n = |H_n|$ es el determinante de la matriz de Hankel de orden n. En consecuencia se tiene

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}},$$

y si denotamos por $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos, podemos obtener la sucesión $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ a partir de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ mediante

$$p_n(x) = \gamma_n P_n(x), \quad \text{con} \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_n}}.$$

1.1.1. Relación de recurrencia

La representación en términos de la matriz de Hankel (1.1) para el cómputo del n-ésimo polinomio ortogonal usando la expresión no es muy ventajosa desde el punto de vista práctico, ya que involucra cálculos de determinantes. Para polinomios ortogonales soportados en la recta real, existe una manera más eficiente de computar dichos polinomios usando la llamada relación de recurrencia a tres términos.

Teorema 1.5 ([40]) *Sean μ una medida de Borel positiva soportada en la recta real y $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ una familia de polinomios ortogonales asociada a μ.* $p_n(x) = \gamma_n x^n +$

$\delta_n x^{n-1} + \cdots$ satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0 \tag{1.9}$$

con la condición inicial $p_{-1}(x) = 0$. Los coeficientes de la relación se obtienen mediante

$$\begin{aligned} a_n &= \langle xp_{n-1}, p_n \rangle = \int xp_{n-1}(x)p_n(x)d\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}, \\ b_n &= \langle xp_n, p_n \rangle = \int xp_n^2(x)d\mu(x) = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}, \end{aligned}$$

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos satisface la relación

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_n^2 P_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.10}$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$.

En forma matricial, la relación de recurrencia (1.9) la podemos escribir como

$$x\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & \ddots \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

donde la matriz semi-infinita, la cual denotaremos por J, se denomina matriz de Jacobi. El menor principal J_n de J satisface lo siguiente

$$x\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} + a_n p_n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

La matriz J_n es tridiagonal y simétrica y se conoce como matriz de Jacobi finita. También se deduce fácilmente de la expresión anterior que los autovalores de J_n coincide con los ceros del polinomio $p_n(x)$, y en consecuencia, por tener J_n sólo autovalores reales, entonces los polinomios ortogonales asociados tienen los ceros sobre la recta real.

En el caso de la familia de los polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ se tiene la siguiente relación de recurrencia en forma matricial

$$x\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & b_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-2}^2 & b_{n-2} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^2 & b_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.13)$$

En el estudio de las transformaciones espectrales o perturbaciones de medidas, las matrices de Jacobi juegan un papel primordial en la obtención de la familia de los polinomios ortogonales asociados a la medida perturbada.

1.2. Polinomios ortogonales en el círculo unidad

Sea ν una medida positiva de Borel en $[0, 2\pi)$, esta medida induce otra medida que también denotamos por ν en el círculo unidad $\mathbb{T} = \left\{e^{i\theta} \,:\, \theta \in [0, 2\pi)\right\}$ dada por

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)d\nu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\nu(\theta).$$

Sin perder generalidad supongamos que ν es una medida de probabilidad, esto es, $\nu(\mathbb{T}) = 1$. las entradas de la matriz de Gram son

$$\langle z^n, z^m \rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta} d\nu(\theta) = c_{n-m},$$

donde c_k, $k \in \mathbb{Z}$ son los llamados *momentos trigonométricos* de la medida ν. La matriz de Gram (finita) denotada por

$$T_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix},$$

es una matriz hermitiana (ya que $c_{-k} = \overline{c_k}$) y tiene valores constantes a lo largo de sus diagonales. Este tipo de matrices son conocidas como *matrices Toeplitz* (ver [20]). La familia de polinomios ortonormales asociados a ν viene dadas por

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} = \kappa_n z^n + \cdots, \tag{1.14}$$

donde $\Delta_n = \det T_n$ y $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$

La familia $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$, definida por $\Phi_n(z) = \kappa_n^{-1}\varphi_n(z)$ se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida ν (ver [13], [25]).

Proposición 1.6 ([13], [37], [39]) *La sucesión* $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ *satisface dos tipos de relaciones de recurrencia*

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z). \tag{1.15}$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$\Phi_{n+1}(z) = \left(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2\right) z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \tag{1.16}$$

donde $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(\bar{z}^{-1})}$ *es conocido como el* polinomio recíproco. *En el caso de los polinomios ortonormales* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, *tenemos*

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$\kappa_n\varphi_{n+1}(z) = \kappa_{n+1}z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^*(z). \tag{1.17}$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$\kappa_{n+1}\varphi_{n+1}(z) = z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_{n+1}^*(z), \tag{1.18}$$

Las evaluaciones $\Phi_n(0)$ de los polinomios ortogonales en $z = 0$ se denominan *coeficientes de reflexión* o también *coeficientes de Verblunsky* y tienen gran importancia en el estudio de los polinomios ortogonales en el círculo unidad.

De la expresión (1.15), se obtiene fácilmente

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)}z\Phi_n(z). \tag{1.19}$$

En el caso del círculo unitario, el núcleo reproductor de grado n, $K_n(z,\zeta)$ asociado a la familia $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, viene dado por

$$K_n(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)}, \tag{1.20}$$

y satisface

Teorema 1.7 ([14], [20], [37], [39]) *Sean* $\zeta \in \mathbb{C}$ *y* $p \in \mathbb{P}_n$. *Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) ***Propiedad reproductora:***

$$\langle p(z), K_n(z,\zeta)\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z)K_n(z,\zeta)d\nu(z) = p(\zeta). \tag{1.21}$$

(ii) ***Fórmula de Christoffel-Darboux:***

$$K_n(z,\zeta) = \frac{\varphi_{n+1}^*(z)\overline{\varphi_{n+1}^*(\zeta)} - \varphi_{n+1}(z)\overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})}. \tag{1.22}$$

Además,

Proposición 1.8 (ver [37]) *Si* $K_n(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)}$ *es el núcleo reproductor asociado a* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, *entonces*

$$K_n(z,0) = \sum_{j=0}^{n} \overline{\varphi_j(0)}\varphi_j(z) = \kappa_n\varphi_n^*(z), \tag{1.23}$$

y

$$K_n(0,0) = \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2. \tag{1.24}$$

De la relación (1.24) se tiene

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2|\Phi_n(0)|^2,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 = 1 - |\Phi_n(0)|^2,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Con esta última expresión se establece la relación entre las expresiones (1.16) y (1.18). Además, el núcleo reproductor de grado n está asociado con el siguiente problema extremal

$$\lambda_n(y) = \text{mín}\left\{\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^2 d\nu(\theta) : \deg p \leqslant n,\ p(y) = 1\right\}.$$

De hecho,

$$\lambda_n(y) := \frac{1}{K_n(y, y)},$$

siendo $\dfrac{K_n(z, y)}{K_n(y, y)}$ el polinomio en el que se alcanza dicho mínimo.

Para cada $y \in \mathbb{C}$, $\lambda_n(y)$ es una función decreciente con respecto a n y, en consecuencia, podemos definir

$$\begin{aligned}\lambda_\infty(y) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y)\\ &= \text{ínf}\left\{\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^2 d\nu(\theta) :\ p \in \mathbb{P},\ p(y) = 1\right\} \geqslant 0.\end{aligned}$$

λ_∞ se denomina *Función de Christoffel asociada a ν*. Uno de los resultados principales de relativos a la función de Christoffel se muestra a continuación

Proposición 1.9 ([37], Thm. 2.2.1) *Sea ν una medida de probabilidad no trivial soportada en el círculo unidad.*

(*i*) *Si $|y| > 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$.*

(*ii*) *Si $|y| = 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = \nu(\{y\})$.*

(*iii*) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.*

(*iv*) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.*

Por otra parte,

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - |\Phi_n(0)|^2\right).$$

1.2.1. Matrices de Hessenberg asociadas a polinomios ortogonales

Teniendo en cuenta que $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ es una base ortogonal en $\mathbb{P}$, y combinando la fórmula de Christoffel-Darboux y las relaciones de recurrencia (1.15) y (1.16) se obtiene

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\kappa_j^2}{\kappa_n^2} \Phi_{n+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z). \tag{1.26}$$

En notación matricial la relación anterior se traduce en

$$z\Phi(z) = H_\Phi \Phi(z)$$

donde $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \ldots]^t$ y H_Φ es una matriz de Hessenberg inferior

$$H_\Phi = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ h_{1,0} & h_{1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

cuyas entradas son

$$h_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = k+1, \\ \frac{\kappa_j^2}{\kappa_k^2}\Phi_{k+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, & \text{si} \quad j \leqslant k, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases}$$

En lo sucesivo, diremos que H_Φ es la *matriz de Hessenberg* asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Si $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ es la base de $\mathbb{P}$ formada por los polinomios ortonormales, la relación

(1.26) se convierte en

$$z\varphi_n(z) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\varphi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\kappa_n}\sum_{j=0}^{n}\kappa_j\overline{\Phi_j(0)}\varphi_j(z),\ n \geqslant 0. \tag{1.28}$$

Si escribimos la relación anterior en forma matricial obtenemos

$$z\varphi(z) = H_\varphi\varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots]^t$ y H_φ es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$h_{n,j} = \begin{cases} -\frac{\kappa_j}{\kappa_n}\Phi_{n+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \\ \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si} \quad j = n+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > n+1. \end{cases}$$

Nota 1.10 (*i*) *Sea* $\Phi(z) := [p_0(z), p_1(z), \ldots]^t$ *con* $p_k(z) \in \mathbb{P}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *La expresión* $\langle\Phi, \Phi^t\rangle$ *denota una matriz semi-infinita cuyas entradas están dadas por*

$$\left(\langle\Phi, \Phi^t\rangle\right)_{k,j} = \langle p_k, p_j\rangle,\ \ k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

(*ii*) *Sea* A *una matriz con entradas complejas. En lo sucesivo, las expresiones* $A_{(n)}$ *y* $(A)_{(n)}$ *denotan la* n*-ésima fila de la matriz* A*. Análogamente,* $A^{(n)}$ *y* $(A)^{(n)}$ *denotan la* n*-ésima columna de* A*.*

Proposición 1.11 (ver [21]) *Sea* ν *una medida de probabilidad sobre el círculo unidad. Si* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *es la sucesión de polinomios ortonormales asociado a* ν *y* H_φ *es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\varphi(z) = H_\varphi\varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots]^t$*, entonces* *(i)* $H_\varphi H_\varphi^* = I$,

(ii) $H_\varphi^* H_\varphi = I - \lambda_\infty(0)\varphi(0)\varphi(0)^*$,

donde I *es la matriz unidad semi-infinita.*

Corolario 1.12 ([21]) *La matriz* H_φ *es unitaria si y sólo si* $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = +\infty$, *lo que se traduce en términos de la medida* ν *en que* $\log \nu' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, *esto es, la medida* ν *no pertenece a la clase de Szegő (ver* **[37]***).*

1.2.2. La transformación de Szegő: Conexión con polinomios ortogonales en $[-1, 1]$

A partir de una medida de Borel positiva no trivial μ, soportada en el intervalo $[-1, 1]$, se puede definir ν en el intervalo $[-\pi, \pi]$ mediante

$$d\nu(\theta) = \frac{1}{2}|d\mu(cos\theta)|, \tag{1.29}$$

de esta manera, si $d\mu(x) = \omega(x)dx$, entonces se tiene

$$d\nu(\theta) = \frac{1}{2}\omega(cos\theta)|sen\theta|d\theta.$$

Si μ es una medida de probabilidad, i.e., $\int_{-1}^{1} d\mu = 1$, entonces ν también lo es en $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y en consecuencia existe una sucesión de polinomios ortonormales que satisface (2.6), así como su correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos. En este caso,

$$\Phi_n(0) \in (-1, 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Esta conexión se conoce como la *Transformación de Szegő* (ver [33]). Existe una relación entre los polinomios ortogonales asociados con la medida μ soportada en $[-1, 1]$ y los polinomios ortogonales asociados a ν definida por (1.29), la cual está soportada sobre la circunferencia unitaria.

Teorema 1.13 ([39]) *La sucesión de polinomios ortogonales* $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ *asociados con* ν *tiene coeficientes reales. Además, Si* $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ *entonces*

$$p_n(x) = \frac{\kappa_{2n}}{2(\sqrt{1+\Phi_{2n}(0)})}[z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)].$$

Por otra parte, los coeficientes de las relaciones de recurrencia (1.9), (1.17), y (1.18) están relacionadas mediante (ver [40])

$$\begin{aligned} 2a_n &= \sqrt{[1-\Phi_{2n}(0)][1-\Phi^2_{2n-1}(0)][1+\Phi_{2n-2}(0)]}, \quad n \geqslant 1 \qquad (1.30)\\ 2b_n &= \Phi_{2n-1}(0)[1-\Phi_{2n}(0)] - \Phi_{2n+1}(0)[1+\Phi_{2n}(0)], \quad n \geqslant 0. \qquad (1.31)\end{aligned}$$

Cabe destacar que si definimos una sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$, definida por

$$u_k = \frac{1}{2}(1-\Phi_k(0))(1+\Phi_{k-1}(0)), \tag{1.32}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} a_k^2 &= u_{2k}u_{2k-1}, \quad k \geqslant 1 \qquad (1.33)\\ b_k + 1 &= u_{2k} + u_{2k+1}, \quad k \geqslant 0, \qquad (1.34)\end{aligned}$$

y como consecuencia, podemos obtener una única factorización

$$\tilde{J} + I = LU$$

donde I es la matriz identidad, L y U son matrices bidiagonales inferior y superior respectivamente, de la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_4 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & u_6 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_5 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & u_7 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Luego, de (1.32)

$$\Phi_k(0) = 1 - \frac{2u_k}{1 + \Phi_{k-1}(0)}, \tag{1.35}$$

o bien,

$$\Phi_k(0) = 1 - \cfrac{2u_k}{2 - \cfrac{2u_{k-1}}{2 - \cfrac{2u_{k-2}}{2 - \cfrac{\vdots}{2 - \cfrac{2u_2}{2 - 2u_1}}}}}. \tag{1.36}$$

De esta manera, se obtiene una sucesión a partir de la cual podemos determinar en forma recursiva los coeficientes de reflexión $\Phi_k(0)$ de la medida ν.

2

Transformaciones espectrales

2.1. Transformaciones espectrales sobre la recta

Sea μ una medida positiva de Borel soportada en un subconjunto E de la recta real y consideremos la sucesión de polinomios ortonormales $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ asociada a μ con

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \cdots, \quad \gamma > 0.$$

Las funciones

$$S_n(x) = \int_E \frac{p_n(t)d\mu(t)}{x-t}$$

constituyen también solución de la relación de recurrencia a tres términos (1.9) y se denominan funciones de segunda especie asociadas a la medida μ. en particular, la función de Stieltjes

$$S(x) = S_0(x) = \int_E \frac{d\mu(t)}{x-t}$$

tiene una gran importancia en la teoría de polinomios ortogonales (ver [37]). La función de Stieltjes admite el siguiente desarrollo en serie

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{x^{k+1}} \tag{2.1}$$

donde m_k son los momentos asociados a μ dados por

$$m_k = \int_E x^k d\mu(x), \quad k \geqslant 0.$$

Para una medida μ soportada en el eje real, se estudió en [4], [43] algunos ejemplos de perturbaciones a dicha medida. En particular consideraron tres casos canónicos

(i) La perturbación $d\tilde{\mu} = (x-\beta)d\mu$, $\beta \notin supp(\mu)$, es llamada transformación canónica de Christoffel.

(ii) la perturbación $d\tilde{\mu} = d\mu + \mathrm{m}_r\delta_\beta$, $\beta \notin supp(\mu)$, $\mathrm{m}_r \in \mathbb{R}$, se conoce como la transformación canónica de Uvarov.

(iii) La perturbación $d\tilde{\mu} = \frac{d\mu}{x-\beta} + \mathrm{m}_r\delta_\beta$, $\beta \notin supp(\mu)$, $\mathrm{m}_r \in \mathbb{R}$, se llama transformación canónica de Geronimus.

En [4], se estudia cómo obtener la matriz de Jacobi mónica asociada a cada una de las tres perturbaciones canónicas a partir de la matriz de Jacobi mónica asociada a μ tomando como herramientas las factorizaciones LU y UL.

Definición 2.1 *Llamaremos transformación racional de una función de Stieltjes $S(x)$, a una transformación de la forma*

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{C(x)S(x) + D(x)}, \tag{2.2}$$

donde $A(x), B(x), C(x)$, y $D(x)$ son polinomios en x. Cuando $C(x) = 0$, diremos que la transformación es lineal.

Las tres perturbaciones mencionadas anteriormente corresponden a transformaciones espectrales lineales si se expresan en términos de las funciones de Stieltjes.

2.1.1. Transformación de Christoffel

Consideremos la función de Stieltjes $S(x)$ dada por (2.1), asociada a la medida μ y sea $\tilde{\mu}$ una perturbación de la medida μ dada por

$$d\tilde{\mu} = \frac{(x-\beta)}{\mu_1-\beta}d\mu, \quad \beta \notin supp(\mu),$$

donde la división por $\mu_1-\beta$ es para preservar que la medida sea de probabilidad (sin perder generalidad). Entonces se tiene

$$\tilde{\mu}_k = \int_E x^k d\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{\mu_1-\beta}\int_E x^k(x-\beta)d\mu(x),$$

de ahí que

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_{k+1}-\beta\mu_k}{\mu_1-\beta}.$$

Luego, de la expresión anterior,

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{\mu}_k}{x^{k+1}} = \frac{1}{\mu_1-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{k+1}-\beta\mu_k}{x^{k+1}},$$

como consecuencia, se tiene

$$\widetilde{S}(x) = \frac{x}{\mu_1-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{x^{k+1}} - \frac{1}{\mu_1-\beta} - \frac{\beta}{\mu_1-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{x^{k+1}}.$$

Así, la función de Stieltjes $\widetilde{S}(x)$ asociada a $\tilde{\mu}$ queda

$$\widetilde{S}(x) = \frac{(x-\beta)S(x)-1}{\mu_1-\beta}, \tag{2.3}$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= x-\beta, & B(x) &= -1, \\ C(x) &= 0, & D(x) &= \mu_1-\beta \end{aligned}$$

2.1.2. Transformación de Uvarov

Ahora consideremos la perturbación $\tilde{\mu}$ de la medida μ dada por

$$d\tilde{\mu} = \frac{d\mu + \mathrm{m}_r\delta_\beta}{1 + \mathrm{m}_r}, \quad \beta \notin supp(\mu), \ \ \mathrm{m}_r \in \mathbb{R}$$

Los momentos asociados a $\tilde{\mu}$ satisfacen

$$\tilde{\mu}_k = \int_E x^k d\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{m}_r} \int_E x^k d\mu(x) + \frac{\mathrm{m}_r}{1 + \mathrm{m}_r}\beta^k,$$

de ahí que

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k + \mathrm{m}_r\beta^k}{1 + \mathrm{m}_r}.$$

Luego, de la expresión anterior,

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{x^{k+1}} = \frac{1}{1 + \mathrm{m}_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}} + \frac{\mathrm{m}_r}{1 + \mathrm{m}_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{x^{k+1}},$$

así tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(x) &= \frac{1}{1 + \mathrm{m}_r} S(x) + \frac{\mathrm{m}_r}{1 + \mathrm{m}_r}(x - \beta)^{-1} \\ &= \frac{(x - \beta)S(x) + \mathrm{m}_r}{(1 + \mathrm{m}_r)(x - \beta)} \end{aligned}$$

En este caso, también tenemos una transformación espectral lineal con

$$\begin{aligned} A(x) &= x - \beta, \qquad & B(x) &= \mathrm{m}_r, \\ C(x) &= 0, \qquad & D(x) &= (1 + \mathrm{m}_r)(x - \beta). \end{aligned}$$

2.1.3. Transformación de Geronimus

La transformación de Geronimus de la función de Stieltjes $S(x)$ asociada a la medida μ viene dada por la siguiente expresión

$$\widetilde{S}(x) = \frac{-S(x) + \mathrm{m}_r + S(\beta)}{(x-\beta)(\mathrm{m}_r + S(\beta))}, \tag{2.4}$$

y representa la siguiente transformación de la medida μ (para detalles ver [13], [39])

$$d\tilde{\mu} = \frac{\frac{1}{x-\beta} d\mu + \mathrm{m}_r \delta_\beta}{\mathrm{m}_r + S(\beta)}, \tag{2.5}$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= -1, & B(x) &= \mathrm{m}_r + S(\beta), \\ C(x) &= 0, & D(x) &= (\mathrm{m}_r + S(\beta))(x-\beta). \end{aligned}$$

Notemos que la medida $\tilde{\mu}$ también es una medida de probabilidad.

2.2. Transformaciones espectrales en el círculo unitario.

Consideremos una medida de Borel positiva no trivial ν, soportada en el círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Entonces existe una sucesión de polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots, \quad \kappa_n > 0,$$

que satisface

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})} d\nu(\theta) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geqslant 0. \tag{2.6}$$

La correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos esta dada por

$$\Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}.$$

El momento de orden k, c_k, asociado con la medida ν,

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\nu(\theta).$$

define una función mediante

$$F(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k.$$

La función $F(z)$ es analítica en el disco abierto y además $\mathfrak{Re} F(z) > 0$ en dicho disco. La función $F(z)$ se denomina *función de Carathéodory* y se puede representar como una transformación de Riesz-Herglotz de la medida ν de la siguiente manera

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta).$$

Como en el caso de la recta real, consideremos los tres casos de transformaciones canónicas más comunes en la literatura

(i) La transformación canónica de Christoffel: $d\tilde{\nu} = |z-a|^2 d\nu$, $|z| = 1$,$a \in \mathbb{C}$, (ver [29]).

(ii) La transformación canónica de Uvarov: $d\tilde{\nu} = d\nu + M_c\delta_a + \overline{M}_c\delta_{\bar{a}^{-1}}$, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M_c \in \mathbb{C}$, (ver [27]).

(iii) La transformación canónica de Geronimus: $d\tilde{\nu} = \dfrac{d\nu}{|z-a|^2}$, $|z| = 1$, and $|a| \neq 1$, (ver [27], [16], [30]).

Estas tres transformaciones corresponden de manera análoga al caso de la recta real, a transformaciones lineales de las correspondientes funciones de Carathéodory. Esto ha sido estudiado en [27]. También, en [9], se analizaron estas transformaciones desde el punto de vista de las relaciones con las matrices de Hessenberg asociadas, que surgen de la representación matricial análoga a (1.10), donde juegan un papel importante las factorizaciones LU y QR.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de transformaciones racionales.

2.2.1. Transformación de Christoffel

Consideremos la transformación de la medida ν, dada por

$$d\tilde{\nu} = |z-a|^2 d\nu, \quad |z| = 1,$$

con $a \in \mathbb{C}$. Su correspondiente función de Carathéodory viene dada por

Proposición 2.2 (ver [21])

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= -\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a, \\ B(z) &= -\bar{a}c_0 z^2 + (ac_1 - \bar{a}c_{-1})\, z + ac_0, \\ D(z) &= z. \end{aligned}$$

2.2.2. Transformación de Uvarov

Si consideramos ahora la transformación de la medida ν, dada por

$$d\tilde{\nu} = d\nu + M_c\delta_a + \overline{M}_c\delta_{\bar{a}^{-1}},$$

donde $M_c \in \mathbb{C}$. Entonces, la función de Carathéodory asociada a $\tilde{\nu}$ está dada por

Proposición 2.3 (ver [21])

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$A(z) = D(z) = (z-a)(\bar{a}z-1),$$
$$B(z) = (a - \bar{a}z^2)\left(\mathrm{m}_r + \overline{\mathrm{m}_r}\right) - \left(1-|a|^2\right)\left(\mathrm{m}_r - \overline{\mathrm{m}_r}\right) z.$$

2.2.3. Transformación de Geronimus

Sea $\tilde{\nu}$ la transformación de Geronimus de la medida ν, dada por

$$d\tilde{\nu} = \frac{d\nu}{|z-a|^2}, \quad |z| = 1,$$

con $a \notin \mathbb{C}$. La función de Carathéodory asociada a $\tilde{\nu}$ la obtenemos de

Proposición 2.4 (ver [21])

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z, \\ B(z) &= \bar{a}v_0 z^2 - 2i\Im\mathrm{m}\,(q_0)\, z - a v_0, \\ D(z) &= -\bar{a}z^2 + \left(1+|a|^2\right) z - a. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{B(z)}{D(z)} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\bar{a}v_0 z^2 - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\,z - av_0}{-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\frac{\bar{a}z^2-a}{1-|a|^2}\,(2\mathfrak{Re}\,(q_0) - c_0) - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\,z}{-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)(q_0 + \bar{q}_0 - c_0) - \left(1 - |a|^2\right)(q_0 - \bar{q}_0)\,z}{(1-|a|^2)\,(-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a)} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1 - |a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right)z}{-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a}
\end{aligned}$$

con $l_0 = \dfrac{q_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$.

En conclusión

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) - \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1 - |a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right)z}{(1 - \bar{a}z)\,(a - z)} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + M_c\frac{a+z}{a-z} + \overline{M_c}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z},
\end{aligned}$$

donde $M_c = \bar{l}_0 = \dfrac{\bar{q}_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$.

2.3. Transformaciones espectrales en recta real y en la circunferencia unitaria y su conexión a través de la transformación de Szegő.

Nuestro objetivo es aplicar transformaciones espectrales racionales a la función de Stieltjes asociada a la medida μ y analizar la transformación obtenida en la correspondiente función de Carathéodory $F(z)$.

Dado que la sucesión de momentos $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ es real, la función de Carathéodory $F(z)$ asociada a ν tiene coeficientes reales. Y de esta manera se tiene

$$\Re\mathfrak{e}F(e^{i\theta}) = \Re\mathfrak{e}F(e^{i(2\pi-\theta)}),$$

y entonces $d\nu(\theta) + d\nu(2\pi - \theta) = 0$. Así, existe una relación entre las funciones de Stieltjes y Carathéodory asociadas con μ y ν, respectivamente de la forma siguiente

$$F(z) = \frac{1-z^2}{2z}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu(t)}{x-t} = \frac{1-z^2}{2z}S(x) \tag{2.7}$$

con $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $z = x + \sqrt{x^2-1}$ (ver [34]).

2.3.1. Transformación de Christoffel.

Consideremos la transformación espectral de Christoffel de $S(x)$ dada por

$$\tilde{S}(x) = \frac{(x-\beta)S(x) - 1}{\mu_1 - \beta}, \tag{2.8}$$

que en realidad, representa una perturbación en la medida μ

$$d\tilde{\mu} = \frac{(x-\beta)}{\mu_1 - \beta}d\mu,$$

de esta manera se tiene que $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad. Si usamos (2.7) en (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{2z}{1-z^2}\tilde{F}(z) &= \frac{(\frac{z+z^{-1}}{2}-\beta)\frac{2z}{1-z^2}F(z)-1}{\mu_1-\beta} \\
\tilde{F}(z) &= \frac{\frac{z+z^{-1}-2\beta}{2}F(z)-\frac{1-z^2}{2z}}{\mu_1-\beta} \\
&= \frac{(z^2-2\beta z+1)F(z)+z^2-1}{2z(\mu_1-\beta)}
\end{aligned}$$

Entonces, la transformación obtenida para las funciones de Carathéodory se pueden representar mediante una transformación racional

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z)+B(z)}{D(z)},$$

donde $A(z) = \dfrac{z^2-2\beta z+1}{2(\mu_1-\beta)}$,$B(z) = \dfrac{z^2-1}{2(\mu_1-\beta)}$, y $D(z) = z$.

En [27], se muestra que la transformación de Christoffel de una función de Carathéodory se convierte en

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)F_1(z)+B_1(z)}{D_1(z)},$$

donde $A_1(z) = -\bar{\alpha}z^2+(1+|\alpha|^2)z-\bar{\alpha}$, $B_1(z) = -\bar{\alpha}z^2+(\alpha c_1-\bar{\alpha}\bar{c}_1)z+\alpha$, y $D_1(z) = z$. Normalizando $\tilde{F}_1(z)$ para obtener $\tilde{c}_0 = 1$, los polinomios de la transformación se convierten en

$$A_1(z) = \frac{-\bar{\alpha}z^2+(1+|\alpha|^2)z-\bar{\alpha}}{(1+|\alpha|^2)-2\mathfrak{Re}\alpha c_1}$$

$$B_1(z) = \frac{-\bar{\alpha}z^2+(\alpha c_1-\bar{\alpha}\bar{c}_1)z+\alpha}{(1+|\alpha|^2)-2\mathfrak{Re}\alpha c_1}$$

$$D_1(z) = z.$$

Así, comparando los coeficientes de $B(z)$ y $B_1(z)$, se tiene

$$(\alpha c_1 - \bar{\alpha} c_{-1}) = 0.$$

de donde se sigue $\alpha \in \mathbb{R}$, y comparando los coeficientes de $A(z)$ y los restantes de $B(z)$ con los coeficientes de $A_1(z)$ y $B_1(z)$, respectivamente, podemos obtener

$$\frac{-\alpha}{(1+|\alpha|^2) - 2\alpha c_1} = \frac{1}{2(\mu_1 - \beta)} \tag{2.9}$$

y

$$\frac{(1+\alpha^2)}{(1+|\alpha|^2) - 2\alpha c_1} = \frac{-2\beta}{2(\mu_1 - \beta)}. \tag{2.10}$$

De (2.9),

$$-2\alpha(\mu_1 - \beta) = (1+|\alpha|^2) - 2\alpha c_1 \tag{2.11}$$

y de (2.10) and (2.11)

$$\frac{-(1+\alpha^2)}{2\alpha(\mu_1 - \beta)} = \frac{-2\beta}{2(\mu_1 - \beta)}.$$

Entonces

$$\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0$$

y en consecuencia

$$\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \text{ con } |\beta| \geqslant 1.$$

Así, la raíz de un polinomio con coeficientes complejo de grado 1 en la transformación de Christoffel canónica debe ser real.

2.3.2. Transformación de Uvarov.

Consideremos ahora la transformación de Uvarov de la función de Stieltjes $S(x)$ asociado a μ

$$\tilde{S}(x) = \frac{S(x) + M_r(x-\beta)^{-1}}{1+M_r}, \tag{2.12}$$

correspondiente a una transformación de la medida μ definida por

$$d\tilde{\mu} = \frac{d\mu + M_r\delta_\beta}{1+M_r}.$$

Nuevamente, $\tilde{\mu}$ es también una medida de probabilidad. Si usamos (2.7) y (2.12) obtenemos

$$\frac{2z}{1-z^2}\tilde{F}(z) = \frac{\frac{2z}{1-z^2}F(z) + M_r\left(\frac{z+z^{-1}}{2} - \beta\right)^{-1}}{1+M_r} \tag{2.13}$$

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z) + M_r\left(\frac{2}{z+z^{-1}-2\beta}\right)\left(\frac{1-z^2}{2z}\right)}{1+M_r} \tag{2.14}$$

$$= \frac{F(z) + M_r\left(\frac{1-z^2}{z^2-2\beta z+1}\right)}{1+M_r}. \tag{2.15}$$

Es decir, $A(z) = \frac{z^2-2\beta z+1}{1+M_r}$, $B(z) = \frac{(1-z^2)M_r}{1+M_r}$, y $D(z) = z^2 - 2\beta z + 1$.

Por otra parte, de [27] conocemos

$$\tilde{F}_1(z) = F(z) + \frac{B_1(z)}{D_1(z)}, \tag{2.16}$$

donde$B_1(z) = (\alpha - \bar{\alpha}z^2)(M_c + \overline{M}_c) - (1-|\alpha|^2)(M_c - \overline{M}_c)z$, $D_1(z) = (z-\alpha)(\bar{\alpha}z - 1)$, y $F(z)$, $\tilde{F}_1(z)$ son las funciones de Carathéodory asociadas a σ y su transformación de Uvarov $\tilde{\sigma}_1$, respectivamente, dadas por

$$(p,q)_{\tilde{\sigma}_1} = (p,q)_\sigma + M_c p(\alpha)\overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{M}_c p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}, \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Tomando en cuenta

$$\tilde{F}_1(z) = (1 + M_c + \overline{M}_c)F(z)$$

se tiene

$$M_r = 2\Re\mathfrak{e} M_c.$$

La comparación entre (2.15) y (2.16) nos da

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}z^2}{(z-\alpha)(\bar{\alpha}z - 1)} = \frac{1 - z^2}{z^2 - 2\beta z + 1} \tag{2.17}$$

así como

$$(1 - |\alpha|^2)(M_c - \overline{M}_c) = 0.$$

Como consecuencia, se presentan dos situaciones

(i) Si $|\alpha| = 1$, entonces de (2.17), $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = 1$ y $\beta = 1$. Lo que se traduce en $\alpha_\pm = \pm 1$. Así la transformación de Uvarov de la medida σ aparece mediante la aparición de una masa M_r en el punto $\alpha_\pm = \pm 1$.

(ii) Si $|\alpha| \neq 1$, entonces $M_c \in \Re$ y $M_c = \frac{M_r}{2}$. Por otra parte, de (2.17), $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = 1$ así como $\frac{1+\alpha^2}{\alpha} = 2\beta$, i.e. $\alpha = \bar{\alpha}$ y $\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0$. Lo que se traduce

$$\alpha_\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad |\beta| > 1.$$

Como conclusión, la transformación de Uvarov de la medida σ es el resultado de la adición de dos masas reales $\frac{M_r}{2}$ en los puntos $\alpha_\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$, con $|\beta| > 1$.

2.3.3. Transformación de Geronimus.

La transformación de Geronimus de la función de Stieltjes $S(x)$ asociada a μ esta dada por

$$\tilde{S}(x) = \frac{S(\beta) + M_r - S(x)}{(x-\beta)(M_r + S(\beta))}$$

y representa una transformación de μ por

$$d\tilde{\mu} = \frac{(x-\beta)^{-1}d\mu + M_r\delta_\beta}{M_r + S(\beta)}.$$

Notemos que $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad. La correspondiente función de Carathéodory $\tilde{F}(z)$ se puede obtener de

$$\begin{aligned} \frac{2z}{1-z^2}\tilde{F}(z) &= \frac{S(\beta) + M_r - \frac{2z}{1-z^2}F(z)}{(\frac{z+z^{-1}}{2} - \beta)(M_r + S(\beta))} \\ \tilde{F}(z) &= \frac{-2zF(z) + (1-z^2)[S(\beta) + M_r]}{(z^2 - 2\beta z + 1)(S(\beta) + M_r)}. \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\tilde{F}(z) = \frac{zF(z) + \frac{1}{2}(z^2-1)[S(\beta) + M_r]}{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\beta z + 1)[S(\beta) + M_r]}. \tag{2.18}$$

Así, tenemos $A(z) = z$, $B(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1)[S(\beta) + M_R]$, y $D(z) = -\frac{1}{2}(z^2 - 2\beta z + 1)[S(\beta) + M_r]$.

Por otra parte, en [27] se muestra

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)F(z) + B_1(z)}{D_1(z)}, \tag{2.19}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(z) &= z, \\ B_1(z) &= \bar{\alpha}z^2 - 2i\mathfrak{Im}(q_0)z - \alpha, \\ D_1(z) &= -\bar{\alpha}z^2 + (1+|\alpha|^2)z - \alpha, \end{aligned}$$

y q_0 es un parámetro libre definido por

$$q_0 = \tilde{c}_0 - \bar{\alpha}\tilde{c}_1.$$

Comparando los coeficientes de $B(z)$ y $B_1(z)$, obtenemos $q_0 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, (2.19) se puede expresar de la manera siguiente

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)}{D_1(z)}F(z) + M_c\frac{\alpha+z}{\alpha-z} + \overline{M}_c\frac{1+\bar{\alpha}z}{1-\bar{\alpha}z} \tag{2.20}$$

con $M_c = \frac{\bar{q}_0 - \frac{1}{2}}{1-|\alpha|^2}$.

De esta forma, $M_c \in \mathbb{R}$ y (2.20) viene a ser

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{zF(z) - 2M_c(-\bar{\alpha}z^2 + \alpha)}{(-\bar{\alpha}z^2 + (1+|\alpha|^2)z - \alpha)A_g} \tag{2.21}$$

donde A_g es el factor de normalización. Comparando los coeficientes de los polinomios en (2.18) y (2.21) se tiene

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad M_c = \frac{S(\beta) + M_r}{4\alpha},$$

y

$$\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0.$$

Entonces,

$$\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \text{con} \quad |\beta| > 1.$$

Esto es, en la transformación de Geronimus canónica, se añaden dos masas reales en los puntos $\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$.

En [10], se estudió varios ejemplos usando "distintas especies" en la familia de polinomios clásicos de Jacobi asociada a la medida

$$d\mu = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx, \quad \alpha, \beta > -1, \tag{2.22}$$

2.3.4. Ejemplos

Caso Jacobi

Consideremos la familia de los polinomios ortogonales asociados a la medida

$$d\mu = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx, \quad \alpha, \beta > -1, \tag{2.23}$$

soportada en el intervalo $(-1, 1)$.

Es bien sabido que (ver [8], [39]) la relación

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}, \quad n \geqslant 0, \\ a_n^2 &= \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Analizaremos algunos casos representativos de los polinomios de Jacobi

Polinomios de Tchebichef de primer especie, ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$)**.**

En este caso

$$b_n = 0, n \geqslant 0, \quad a_1^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geqslant 2.$$

Entonces,

$$\tilde{J}+I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

De la factorización LU, se obtiene

$$u_1 = 1 \quad \text{and} \quad u_n = \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 2,$$

y de (1.35)

$$\Phi_n(0) = 0, \quad n \geqslant 1,$$

Como era de esperarse, dado que la medida en el círculo unitario asociado con (2.23) para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ es la medida de Lebesgue normalizada.

Polinomios de Tchebichev de segunda especie, ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$).

En este caso,

$$b_n = 0, n \geqslant 0, \quad \text{and} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geqslant 1.$$

Por tanto, $\tilde{J}+I$ queda de la forma

$$\tilde{J}+I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculando la factorización LU de esta matriz, obtenemos los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$,

$$u_1 = 1 \quad u_2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} \quad u_4 = \frac{1}{3}$$

$$u_5 = \frac{2}{3} \quad u_6 = \frac{3}{8}$$

$$u_7 = \frac{5}{8} \quad u_8 = \frac{2}{5}$$

$$u_9 = \frac{3}{5} \quad u_{10} = \frac{5}{12}, \ldots$$

y de (1.35) obtenemos

$$\Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_2(0) = \frac{1}{2},$$

$$\Phi_3(0) = 0, \quad \Phi_4(0) = \frac{1}{3},$$

$$\Phi_5(0) = 0, \quad \Phi_6(0) = \frac{1}{4},$$

$$\Phi_7(0) = 0, \quad \Phi_8(0) = \frac{1}{5},$$

$$\Phi_9(0) = 0, \quad \Phi_{10}(0) = \frac{1}{6}, \ldots$$

Como consecuencia,

$$\Phi_{2n}(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\Phi_{2n+1}(0) = 0, \quad n \geqslant 0.$$

Ésta es la perturbación de la medida de Lebesgue dad por

$$d\tilde{\mu} = |z^2 - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Polinomios de Tchebichev de tercera especie ($\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$)**.**

Para esta familia, se obtiene

$$b_0 = -\frac{1}{2}, \quad b_n = 0, n \geqslant 1, \quad \text{and} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geqslant 1,$$

de modo que

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculamos la factorización LU de esta matriz, se obtiene

$$u_k = \frac{1}{2}, \quad k \geqslant 1,$$

y de (1.35) se deduce

$$\Phi_1(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi_2(0) = \frac{1}{3},$$

$$\Phi_3(0) = \frac{1}{4}, \quad \Phi_4(0) = \frac{1}{5},$$

$$\Phi_5(0) = \frac{1}{6}, \quad \Phi_6(0) = \frac{1}{7},$$

$$\Phi_7(0) = \frac{1}{8}, \quad \Phi_8(0) = \frac{1}{9},$$

$$\Phi_9(0) = \frac{1}{10}, \quad \Phi_{10}(0) = \frac{1}{11}, \ldots$$

y como consecuencia,

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Esto corresponde a la medida de Lebesgue dado por (see [29])

$$d\tilde{\mu} = |z-1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Polinomios de Tchebichev de cuarta especie ($\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$).

Obtenemos

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0, n \geqslant 1, \quad \text{and} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geqslant 1,$$

de modo que

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si calculamos la factorización LU, obtenemos para los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$

$$u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{6},$$
$$u_3 = \frac{5}{6}, \quad u_4 = \frac{3}{10},$$
$$u_5 = \frac{7}{10}, \quad u_6 = \frac{5}{14},$$
$$u_7 = \frac{9}{14}, \quad u_8 = \frac{7}{18},$$
$$u_9 = \frac{11}{18}, \quad u_{10} = \frac{9}{22}, \ldots$$

y de (1.35) deducimos

$$\Phi_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad \Phi_2(0) = \frac{1}{3},$$

$$\Phi_3(0) = -\frac{1}{4}, \quad \Phi_4(0) = \frac{1}{5},$$

$$\Phi_5(0) = -\frac{1}{6}, \quad \Phi_6(0) = \frac{1}{7},$$

$$\Phi_7(0) = -\frac{1}{8}, \quad \Phi_8(0) = \frac{1}{9},$$

$$\Phi_9(0) = -\frac{1}{10}, \quad \Phi_{10}(0) = \frac{1}{11}, \ldots$$

Así

$$\Phi_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Esto corresponde a la perturbación de la medida de Lebesgue dada por (see [14],[29])

$$d\tilde{\mu} = |z+1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Polinomios de Gegenbauer, con $\alpha = \beta = 1$.

En este caso

$$b_n = 0, n \geqslant 0, \quad a_n^2 = \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, n \geqslant 1.$$

Por lo tanto, realizando la factorización LU de $\tilde{J} + I$ obtenemos, para los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{5},$$

$$u_3 = \frac{4}{5}, \quad u_4 = \frac{2}{7},$$

$$u_5 = \frac{5}{7}, \quad u_6 = \frac{3}{9},$$

$$u_7 = \frac{6}{9}, \quad u_8 = \frac{4}{11},$$

$$u_9 = \frac{7}{11}, \quad u_{10} = \frac{5}{13}, \ldots$$

y de (1.35) se obtiene

$$\Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_2(0) = \frac{3}{5},$$

$$\Phi_3(0) = 0, \quad \Phi_4(0) = \frac{3}{7},$$

$$\Phi_5(0) = 0, \quad \Phi_6(0) = \frac{3}{9},$$

$$\Phi_7(0) = 0, \quad \Phi_8(0) = \frac{3}{11},$$

$$\Phi_9(0) = 0, \quad \Phi_{10}(0) = \frac{3}{13}, \ldots$$

En efecto,

$$\Phi_{2n}(0) = \frac{3}{2n+3}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\Phi_{2n+1}(0) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Esto corresponde a la perturbación de la medida e Lebesgue definida por

$$d\tilde{\mu} = |z^2 - 1|^3 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

2.3.5. Uvarov tranformation.

Consideremos el caso de Legendre $d\mu = dx$, i.e., el caso de Jacobi con $\alpha = \beta = 0$, y su perturbación de Uvarov, definida por

$$d\tilde{\mu} = dx + \delta(x+1) + \delta(x-1). \tag{2.24}$$

Denotemos por J la matriz de Jacobi asociada a μ. Del corolario 4.5 en [4], si nosotros aplicamos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned}
J-\alpha I &= L_1U_1\\
J_1 &:= U_1L_1\\
J_1 &= U_2L_2\\
J_2 &:= L_2U_2+I\\
J_2+I &= L_3U_3\\
J_3 &:= U_3L_3\\
J_3 &= U_4L_4\\
J_4 &:= L_4U_4-I
\end{aligned}$$

entonces J_4 es la matriz de Jacobi mónica de (2.24). Ahora calculamos la factorización LU de J_4+I a fin de obtener la sucesión $\{u_k\}_{n\geqslant 1}$, cuyos primeros elementos son

$$\begin{gathered}
u_1=1,\quad u_2=\frac{7}{9},\\
u_3=\frac{2}{9},\quad u_4=\frac{24}{35},\\
u_5=\frac{9}{35},\quad u_6=\frac{9}{13},\\
u_7=\frac{4}{13},\quad u_8=\frac{124}{189},\\
u_9=\frac{65}{189},\quad u_{10}=\frac{215}{341},\ldots
\end{gathered}$$

y de (1.35) obtenemos

$$\begin{gathered}
\Phi_1(0)=0,\quad \Phi_2(0)=-\frac{5}{9},\\
\Phi_3(0)=0,\quad \Phi_4(0)=-\frac{17}{35},
\end{gathered}$$

$$\Phi_5(0) = 0, \quad \Phi_6(0) = -\frac{5}{13},$$
$$\Phi_7(0) = 0, \quad \Phi_8(0) = -\frac{59}{189},$$
$$\Phi_9(0) = 0, \quad \Phi_{10}(0) = -\frac{89}{341}, \ldots$$

3

Transformación de Geronimus en el círculo unitario

Sea ν una medida de Borel positiva soportada en el círculo unitario $\mathbb{T} = \left\{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$. Como hemos visto anteriormente, ν induce un producto interno en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos de la forma

$$\langle p, q\rangle_\nu = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\nu(\theta), \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Sea $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto a ν y $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ la correspondiente familia de polinomios ortonormales. Estas sucesiones satisfacen

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\kappa_n(\nu)}\varphi_n(z), \quad n \geqslant 0,$$

y vienen dadas por la expresión (1.1). El núcleo reproductor de orden n asociado a la familia $\{\varphi_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ está definido por

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^{n} \overline{\varphi_j(y)}\varphi_j(z).$$

Las funciones

$$q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{t-z} d\nu(z), \quad t \notin \mathbb{T}, \quad j \geqslant 0, \tag{3.1}$$

se denominan *funciones de segunda especie* asociadas a ν. A partir de estas funciones, definimos

$$Q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{P_j(z)}}{t-z} d\nu(z) = \frac{1}{\kappa_j(\nu)} q_j(t).$$

Ahora, dado $\alpha \notin \mathbb{T}$, consideremos la siguiente perturbación de la medida ν

$$d\nu_1 = \frac{d\nu}{|z-\alpha|^2}. \tag{3.2}$$

Esta clase de perturbación fue estudiada en **[16] y [30]** , así como la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Este tipo de perturbación es un ejemplo de transformación canónica de Geronimus de la medida ν.

Sean $\left\{\tilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ con respecto a ν_1 y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ su correspondiente familia de polinomios ortonormales. Nuevamente , vamos a estudiar la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ asociadas con el operador multiplicación por z, respecto a $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Nuestro primer objetivo es encontrar una expresión para obtener la familia $\left\{\tilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ en términos de la sucesión $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Proposición 3.1 (ver [30]) *Sea* $\varepsilon_n(\alpha) = \|\nu_1\| - \sum_{l=0}^{n} |q_l(\alpha)|^2$, $n \geqslant 0$. *Entonces*

$$\frac{\Delta_n(\nu_1)}{\Delta_{n-1}(\nu)} = \varepsilon_{n-1}(\alpha), \quad n \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Notemos que $\|\nu_1\| = \Delta_0(\nu_1)$.

Demostración: Si consideramos la familia $\{1, z-\alpha, \ldots, (z-\alpha)^n, \ldots\}$ y definiendo

$$d_{k,j}(\nu) = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^k \overline{(z-\alpha)^j} d\nu = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^{k+1} \overline{(z-\alpha)^{j+1}} d\nu_1 = d_{k+1,j+1}(\nu_1),$$

con $k, j \geqslant 0$, entonces los polinomios ortogonales mónicos $\Phi_n(z)$ están dados por

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(\nu)} \begin{vmatrix} d_{0,0}(\nu) & d_{1,0}(\nu) & \cdots & d_{n,0}(\nu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n-1}(\nu) & d_{1,n-1}(\nu) & \cdots & d_{n,n-1}(\nu) \\ 1 & z-\alpha & \cdots & (z-\alpha)^n \end{vmatrix},$$

donde

$$\Delta_n(\nu_1) = \begin{vmatrix} d_{0,0}(\nu_1) & \cdots & d_{n,0}(\nu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ d_{0,n}(\nu_1) & \cdots & d_{n,n}(\nu_1) \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|cccc} d_{0,0}(\nu_1) & d_{1,0}(\nu_1) & \cdots & d_{n,0}(\nu_1) \\ \hline d_{0,1}(\nu_1) & d_{0,0}(\nu) & \cdots & d_{n-1,0}(\nu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n}(\nu_1) & d_{0,n-1,}(\nu) & \cdots & d_{n-1,n-1}(\nu) \end{array}\right|.$$

Si usamos la identidad de Sylvester (ver **[23]**, pag. 22), entonces obtenemos

$$\Delta_n(\nu_1)\Delta_{n-2}(\nu) = \Delta_{n-1}(\nu_1)\Delta_{n-1}(\nu) - \left(\frac{\Delta_{n-2}(\nu)}{\kappa_{n-1}(\nu)}\right)^2 |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

De ahí, deducimos

$$\frac{\Delta_n(\nu_1)}{\Delta_{n-1}(\nu)} = \frac{\Delta_{n-1}(\nu_1)}{\Delta_{n-2}(\nu)} - |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

De esta manera

$$\frac{\Delta_n(\nu_1)}{\Delta_{n-1}(\nu)} = \Delta_0(\nu_1) - \sum_{l=0}^{n-1} |q_l(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

Dado que $\Delta_0(\nu_1) = \|\nu_1\|$, el enunciado queda demostrado. ■

A continuación, como consecuencia del resultado anterior, se tiene

Corolario 3.2
$$\left(\frac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geqslant 0,$$
donde $\varepsilon_{-1}(\alpha) = \|\nu_1\|$.

Demostración: Es fácil comprobar que

$$\left(\frac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_{n+1}(\nu_1)}{\Delta_n(\nu)} \frac{\Delta_{n-1}(\nu)}{\Delta_n(\nu_1)},$$

y usando (3.3) en la proposición anterior, obtenemos

$$\left(\frac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geqslant 1.$$

Si $n = 0$, entonces se tiene

$$\left(\frac{\kappa_0(\nu)}{\kappa_1(\nu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_1(\nu_1)}{\Delta_0(\nu_1)\Delta_0(\nu)} = \frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\nu_1\|}.$$

■

Proposición 3.3 *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos* $\left\{\tilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ *se pueden obtener mediante la relación*

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{n+1}(z) = &\quad (z-\alpha)\Phi_n(z) + \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} S_n(z,\alpha), \quad n \geqslant 1, \\ &\tilde{\Phi}_0(z) = 1, \quad \tilde{\Phi}_1(z) = z - \alpha + \tfrac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\nu_1\|}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde
$$S_n(z,\alpha) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z-t}{\alpha - t} K_{n-1}(z,t)d\nu(t), \quad n \geqslant 1, \tag{3.5}$$

y $K_{n-1}(z,\alpha)$ *es el núcleo reproductor de grado* $n-1$ *asociado a la familia* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Demostración: Como $\{(z-\alpha)\varphi_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ es una base ortonormal en $(z-\alpha)\mathbb{P}$ con respecto al producto escalar

$$\langle f,g\rangle_{\nu_1}=\int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}d\nu_1,$$

entonces el desarrollo de Fourier del polinomio $\psi_{n+1}(z)-\psi_{n+1}(\alpha)$ en términos de la base mencionada es

$$\psi_{n+1}(z)-\psi_{n+1}(\alpha)=(z-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\lambda_{n+1,j}\varphi_j(z),\ \text{para todo } n\geqslant 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1,j} &= \int_{\mathbb{T}}(\psi_{n+1}(t)-\psi_{n+1}(\alpha))\,\overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\nu_1(t)\\
&= \int_{\mathbb{T}}\psi_{n+1}(t)\overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\nu_1(t)-\psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}}\overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\nu_1(t)\\
&= \tfrac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\delta_{n,j}+\psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}}\frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha-t}d\nu(t).
\end{aligned}$$

Así obtenemos,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(z) &= \psi_{n+1}(\alpha)\left(1+(z-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\mathbb{T}}\frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha-t}\varphi_j(z)d\nu(t)\right)+\\
&\quad+\left[\tfrac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}+q_n(\alpha)\psi_{n+1}(\alpha)\right](z-\alpha)\varphi_n(z)\\
&= \psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}}\frac{z-t}{\alpha-t}K_{n-1}(z,t)d\nu(t)+\\
&\quad+\left[\tfrac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}+q_n(\alpha)\psi_{n+1}(\alpha)\right](z-\alpha)\varphi_n(z).
\end{aligned}$$

Si re-escribimos la expresión anterior en términos de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\left\{\tilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$, tenemos

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) = \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)S_n(z,\alpha) + \left(\left(\tfrac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\right)^2 + \kappa_n(\nu)^2 Q_n(\alpha)\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)\right)(z-\alpha)\Phi_n(z). \quad (3.6)$$

Notemos que $S_n(z,\alpha;\nu)$ es un polinomio de grado n. Entonces, para cada $n \geqslant 0$, teniendo en cuenta los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de (3.6), se deduce

$$\frac{1}{\kappa_n(\nu)} - \frac{1}{\kappa_{n+1}(\nu_1)} = Q_n(\alpha)\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha), \quad (3.7)$$

y del corolario 3.2,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) = & \left(\frac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\right)^2 \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_n(\alpha)} \\ = & \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}.\end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (3.6), obtenemos

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) = (z-\alpha)\Phi_n(z) + \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} S_n(z,\alpha;\nu).$$

■

Nota 3.4 *Si usamos en (3.5) la fórmula de Christoffel-Darboux (1.22), entonces la sucesión* $\left\{\tilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ *satisface*

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) = \left(z - \alpha\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)\Phi_n(z) + \frac{\overline{q_n(\alpha)}\,\overline{q_n(\bar{\alpha}^{-1})}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\alpha^{n+1}}\Phi_n^*(z), \quad n \geqslant 1. \quad (3.8)$$

Este resultado se puede ver con más detalle en **[16]**.

3.1. Matrices de Hessenberg y la transformación de Geronimus

Con el fin de obtener una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ, la expresión (3.2), es equivalente a

$$d\nu = |z-\alpha|^2 d\nu_1. \tag{3.9}$$

En **[9]** se ha obtenido una relación entre dichas matrices

$$H_\psi - \alpha I = LM, \quad \text{y} \quad H_\varphi - \alpha I = ML, \tag{3.10}$$

donde L es una matriz triangular inferior, tal que

$$\psi(z) = L\varphi(z)$$

y M es una matriz de Hessenberg inferior que satisface

$$(z-\alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$ y $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots]^t$.

Por tanto, nuestro segundo objetivo es encontrar expresiones explícitas para M y L.

Proposición 3.5 ([30]) *Las sucesiones* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *y* $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ *satisfacen*

$$(z-\alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$, $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots]^t$, *y* M *es una matriz de*

Hessenberg inferior con entradas

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\sqrt{\|\nu_1\|}}, & si \quad j=0, k \geqslant 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\nu_1\|}}, & si \quad k=0, j=1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)} q_0(\alpha)}{\sqrt{\|\nu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)}}, & si \quad j=1, k \geqslant 1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)} q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}, & si \quad 2 \leqslant j \leqslant k, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & si \quad j=k+1, \\ 0, & si \quad j>k+1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Demostración: Teniendo en cuenta (3.4) para $n=0$, obtenemos

$$\tilde{\Phi}_1(z) - \frac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\nu_1\|}\tilde{\Phi}_0(z) = (z-\alpha)\Phi_0(z)$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\kappa_0(\nu)}{\kappa_1(\nu_1)}\psi_1(z) - \frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\|\nu_1\|^{\frac{1}{2}}}\psi_0(z) = (z-\alpha)\varphi_0(z).$$

Ahora, para $n=1$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(z) - \beta_2\frac{\|\nu_1\|}{Q_0(\alpha)}\tilde{\Phi}_1(z) &= (z-\alpha)\left[\Phi_1(z) + \beta_2\left(q_0(\alpha)\varphi_0(z) - \frac{\|\nu_1\|}{Q_0(\alpha)}\Phi_0(z)\right)\right] \\ \tilde{\Phi}_2(z) - \frac{\overline{Q_1(\alpha)}\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)\overline{Q_0(\alpha)}}\tilde{\Phi}_1(z) &= (z-\alpha)\left[\Phi_1(z) - \left(\frac{\overline{Q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\right)\varphi_0(z)\right]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\kappa_1(\nu)}{\kappa_2(\nu_1)}\psi_2(z) - \frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\frac{\kappa_0(\nu)}{\kappa_1(\nu_1)}\psi_1(z) = (z-\alpha)\left(\varphi_1(z) - \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\varphi_0(z)\right).$$

Finalmente, para $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\tilde{\Phi}_n(z) = &\quad (z-\alpha)\Big[\Phi_n(z) - \tfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\Phi_{n-1}(z) +\\ &\quad +\beta_{n+1}q_{n-1}(\alpha)\varphi_{n-1}(z)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{Q_{n-1}(\alpha)\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\tilde{\Phi}_n(z) = &\quad (z-\alpha)\Big[\Phi_n(z)\\ &\quad -\tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\left(\tfrac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\kappa_{n-1}(\nu)\overline{Q_{n-1}(\alpha)}} - q_{n-1}(\alpha)\right)\varphi_{n-1}(z)\Big],\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\overline{Q_{n-1}(\alpha)}}\tfrac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\tilde{\Phi}_n(z) = &\quad (z-\alpha)\Big[\Phi_n(z)\\ &\quad -\beta_{n+1}\left(\tfrac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}} - q_{n-1}(\alpha)\right)\varphi_{n-1}(z)\Big].\end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tfrac{\kappa_{n-1}(\nu)}{\kappa_n(\nu)}\tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\tfrac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)(\nu)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)(\nu_1)}\tilde{\Phi}_n(z) = \quad (z-\alpha)\left[\Phi_n(z) - \tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\kappa_n(\nu)\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

o, equivalentemente, para los polinomios ortonormales

$$\tfrac{\kappa_n(\nu)}{\kappa_{n+1}(\nu_1)}\psi_{n+1}(z) - \tfrac{\kappa_n(\nu_1)}{\kappa_{n-1}(\nu)}\tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\psi_n(z) = \quad (z-\alpha)\left[\varphi_n(z) - \tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

De esta forma, teniendo en cuenta el Corolario 3.2

$$\left(\tfrac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2}\psi_{n+1}(z) - \left(\tfrac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2}\tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\psi_n(z) = (z-\alpha)\left[\varphi_n(z) - \tfrac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

Si representamos las expresiones anteriores en forma matricial, se obtiene

$$(z-\alpha)\tilde{M}\varphi(z) = \hat{M}\psi(z), \tag{3.12}$$

donde $\tilde{M}$ y $\hat{M}$ son matrices bidiagonales inferior y superior respectivamente, con entradas

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 1, & j=k, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}, & j=k-1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \hat{m}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|\nu_1\|}}, & j=k=0, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}, & j=k=1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j=k\geqslant 2, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\nu_1\|}}, & k=0,\, j=1, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j=k+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que $\tilde{M}$ es una matriz no singular. Por tanto, la expresión (3.12) es equivalente a

$$(z-\alpha)\varphi(z) = \tilde{M}^{-1}\hat{M}\psi(z).$$

Como consecuencia,

$$M = \tilde{M}^{-1}\hat{M}. \tag{3.13}$$

$\tilde{M}^{-1}$ es una matriz triangular inferior con entradas $\tilde{m}^{(-1)}_{k,j}$ dadas por

$$\tilde{m}^{(-1)}_{k,j} = \begin{cases} \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_j(\alpha)}}, & 0\leqslant j\leqslant k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, la multiplicación en (3.13) produce (3.11).

■

Por otra parte, la matriz M es cuasi-unitaria (ver **[29]**). De hecho se tiene

Proposición 3.6

(i) $MM^* = I$

(ii) $M^*M = I - \varepsilon_\infty(\alpha)\psi(\alpha)\psi(\alpha)^*$ *donde*

$$\varepsilon_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(\alpha) = \|\nu_1\| - \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \geqslant 0,$$

Demostración: (i)

$$\begin{aligned} I &= \langle \varphi(z), \varphi(z)^t \rangle_\nu \\ &= \langle (z-\alpha)\varphi(z), (z-\alpha)\varphi(z)^t \rangle_{\nu_1} \\ &= \langle M\psi(z), \psi(z)^t M^t \rangle_{\nu_1} \\ &= M\langle \psi(z), \psi(z)^t \rangle_{\nu_1} M^* = MM^* \end{aligned}$$

(ii)

$$(M^*)_{(0)}M^{(0)} = \kappa_0(\nu_1)^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 = 1 - \frac{\varepsilon_\infty(\alpha)}{\|\nu_1\|}$$

$$\begin{aligned} (M^*)_{(1)}M^{(1)} &= \tfrac{1}{\varepsilon_0(\alpha)} \left(\varepsilon_0(\alpha)^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= \tfrac{1}{\|\nu_1\|\varepsilon_0(\alpha)} \left(\|\nu_1\|\varepsilon_0(\alpha) - \|\nu_1\||q_0(\alpha)|^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \right) \\ &= 1 - \tfrac{|q_0(\alpha)|^2}{\|\nu_1\|\varepsilon_0(\alpha)} \varepsilon_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

Para $j \geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
(M^*)_{(j)}M^{(j)} &= \frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(1+\frac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\left(\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2+|q_{j-1}(\alpha)|^2\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right)\\
&= 1-\frac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\varepsilon_\infty(\alpha).
\end{aligned}
$$

$$
(M^*)_{(0)}M^{(1)} = -\frac{q_0(\alpha)}{\|\nu_1\|\sqrt{\|\nu_1\|-|q_0(\alpha)|^2}}\varepsilon_\infty(\alpha).
$$

Para $j \geqslant 2$,

$$
(M^*)_{(0)}M^{(j)} = -\frac{q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\nu_1\|}\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha)
$$

$$
\begin{aligned}
(M^*)_{(1)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\|\nu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1-\frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right]\\
&= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\nu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).
\end{aligned}
$$

Finalmente, para $2 \leqslant k < j$,

$$
\begin{aligned}
(M^*)_{(k)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1-\frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right]\\
&= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).
\end{aligned}
$$

Dado que $\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) = \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}$ con $n \geqslant 1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}(\alpha) &= \frac{\frac{\kappa_{n+1}(\nu_1)}{\kappa_n(\nu)}\frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}}{}\\
&= \frac{q_n(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\varepsilon_n(\alpha)}}, \quad n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

■

Ahora, sea L la matriz triangular inferior tal que $\psi(z) = L\varphi(z)$. Entonces, teniendo en cuenta (3.12), obtenemos

$$\hat{M}L = \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I). \tag{3.14}$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} := \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I)$ están dadas por

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_1(0)\overline{\varphi_0(0)}}{\kappa_1(\nu)\kappa_0(\nu)}, & j = k = 0, \\ -\frac{\kappa_{k-1}(\nu)\overline{q_k(\alpha)}}{\kappa_k(\nu)\overline{q_{k-1}(\alpha)}} - \frac{\varphi_{k+1}(0)\overline{\varphi_k(0)}}{\kappa_k(\nu)\kappa_{k+1}(\nu)}, & j = k, \\ \frac{\kappa_k(\nu)}{\kappa_{k+1}(\nu)}, & j = k+1, \\ \frac{\overline{\varphi_j(0)}}{\kappa_k(\nu)}\left(\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\frac{\varphi_k(0)}{\kappa_{k-1}(\nu)} - \frac{\varphi_{k+1}(0)}{\kappa_{k+1}(\nu)}\right), & j \leqslant k-1, \\ 0, & j > k+1, \end{cases}$$

y las entradas $\hat{l}_{k,j}$ de $\hat{L} = \hat{M}L$ son

$$\hat{l}_{k,j} = \begin{cases} -\dfrac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|v_1\|}} l_{0,0} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,0}, & j = k = 0, \\ -\dfrac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\dfrac{\|v_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,1} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{2,1}, & j = k = 1, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|v_1\|}} l_{1,1}, & k = 0, j = 1, \\ -\dfrac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}} \sqrt{\dfrac{\|v_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{1,0} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}} l_{2,0}, & k = 1, j = 0, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|v_1\|}} l_{1,1}, & k = 0, j = 1, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k+1,k+1}, & j = k + 1, \\ -\dfrac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k,j} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} l_{k+1,j}, & j \leqslant k, \\ 0, & j > k + 1. \end{cases}$$

Dado que $l_{0,0} = \sqrt{\frac{\|v\|}{\|v_1\|}}$ y teniendo en cuenta (3.14), las entradas $l_{k,j}$ de L satisfacen

$$
\begin{aligned}
l_{1,0} &= \sqrt{\frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{0,0} + \frac{\overline{q_0(\alpha)}\sqrt{\|\nu\|}}{\|\nu_1\|}\right),\\
l_{2,0} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\varepsilon_1(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{1,0} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,0}\right),\\
l_{k+1,0} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,0} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,0}\right), \quad k \geqslant 2.\\
\\
l_{1,1} &= \sqrt{\frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}\tilde{h}_{0,1},\\
l_{2,1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\varepsilon_1(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{1,1} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\nu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,1}\right),\\
l_{k+1,1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,1} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,1}\right), \quad k \geqslant 2.\\
\\
l_{k+1,k+1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\tilde{h}_{k,k+1}, \quad k \geqslant 1,\\
l_{k+1,j} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,j} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,j}\right), \quad k \geqslant 1, j \geqslant 2, j \leqslant k+1.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

O, de manera más explícita,

$$
l_{k,j} = \begin{cases}
\sqrt{\frac{\|\nu\|}{\|\nu_1\|}}, & \text{si} \quad j = k = 0,\\
\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\left(\sqrt{\|\nu\|} + \sum_{l=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,0}\right), & \text{si} \quad j = 0, k > 1,\\
\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,1}, & \text{si} \quad j = 1, k \geqslant 0,\\
\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\tilde{h}_{k-1,k}, & \text{si} \quad j = k \geqslant 1,\\
\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\sum_{l=j-1}^{k}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,j}, & \text{si} \quad j < k.
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

Para las submatrices principales se tiene la siguiente

Proposición 3.7 *Sean $(H_\psi - \alpha I)_n$, M_n y L_n las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de $H_\psi - \alpha I$, M y L respectivamente. Entonces*

(i) $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.

(ii) *La factorización QR de* $(H_\psi - \alpha I)_n^*$ *es*

$$(H_\psi - \alpha I)_n^* = \hat{Q}_n^* \hat{R}_n^*,$$

donde $\hat{Q}_n = E M_n$, $\hat{R}_n = L_n E^{-1}$ *y* E *es una matriz diagonal con entradas* $E_{k,k}$ *dadas por*

$$E_{k,k} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \frac{|q_n(\alpha)|}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}}, & k = n. \end{cases}$$

Demostración: (i) La expresión (3.10) escrita mediante matrices por bloques, resulta ser

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= \left[\begin{array}{c|c} L_n & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M_n & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} L_n M_n & L_n M_{12} \\ \hline L_{21} M_n + L_{22} M_{21} & L_{21} M_{12} + L_{22} M_{22} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.

(ii) La matriz $\hat{R}_n$ es triangular inferior con entradas positivas en su diagonal principal, de manera que, basta probar que la matriz $\hat{Q}_n$ es unitaria. De hecho,

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(0)} = \frac{1}{||v_1||} \left(\sum_{l=0}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right) = 1,$$

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(n-1)} = \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} + \frac{|q_{n-2}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} = 1.$$

Para $1 \leqslant k \leqslant n-2$, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}\left(\sum_{l=k}^{n-2}|q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha)\right)\\ &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|v_1\|}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\left[\sum_{l=k}^{n-2}|q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha)\right]\right)\\ &= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|v_1\|}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Ahora, para $1 \leqslant j < k \leqslant n-2$

$$\begin{aligned}\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\left[\sum_{l=j}^{n-2}|q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha)\right]\right)\\ &= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_{j-1}(\alpha)\right) = 0.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} = \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{n-3}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)}}\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}} = 0.$$

Así pues, $\hat{Q}_n$ es una matriz unitaria.

■

3.2. Ejemplos

Ejemplo 3.8 *Consideremos en la circunferencia unidad, la medida*

$$d\nu = |z-1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta},$$

donde $d\theta$ es la medida de Lebesgue. Entonces la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ respecto a ν es (véase **[15]**, **[37]***)*

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1} z^k, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Es fácil comprobar que

$$\kappa_n(\nu) = \left(\int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2 d\nu \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

En consecuencia $\|\nu\| = 2$ y la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a ν es

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k \\ &= \frac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(z-1)^2}, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ahora, definimos la transformación de Geronimus de la medida ν mediante

$$d\nu_1 = \frac{d\nu}{|z-\alpha|^2} = \frac{|z-1|^2}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad |\alpha| > 1, \; z = e^{i\theta}.$$

Entonces, se obtiene

$$\|\nu_1\| = \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1}. \tag{3.17}$$

De (3.1), obtenemos las funciones de segunda especie asociadas a ν

$$q_n(\alpha) = \left(1-\alpha^{-1}\right)^2 \varphi_n(\alpha^{-1}), \tag{3.18}$$

y de (3.17) y (3.18) se tiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(\alpha) = & \; \|\nu_1\| - \sum_{l=0}^{n} |q_l(\alpha)|^2 \\
= & \; \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - \left|1-\alpha^{-1}\right|^4 \sum_{l=0}^{n} \left|\varphi_l(\alpha^{-1})\right|^2 \\
= & \; \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - \left|1-\alpha^{-1}\right|^4 K_n(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(\alpha) = & \; \tfrac{1}{|\alpha|^2-1}\left[2|\alpha|^2 - (\alpha+\bar{\alpha}) - \tfrac{1}{(n+1)(n+2)|\alpha|^{2(n+2)}}\left(\left|(n+1)\alpha^{n+3} - (n+2)\alpha^{n+1} + \alpha\right|^2 \right.\right. \\
& \left.\left. - \left|\alpha^{n+2} - (n+2)\alpha + n + 1\right|^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases}
-\dfrac{1}{2}, & j = k = 0, \\
-\dfrac{k}{k+1}\left(\dfrac{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha} + k + 1}{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha}^2 + k\bar{\alpha}} + \dfrac{1}{k(k+2)}\right), & j = k \geqslant 1, \\
\dfrac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & j = k+1, \\
\dfrac{\sqrt{k+1}\left(1-\bar{\alpha}^{-1}\right)^2}{\sqrt{(j+1)(j+2)(k+2)}\,(\bar{\alpha}^{k+1} - (k+2)\bar{\alpha} + k)}, & j \leqslant k-1, \\
0, & j > k.
\end{cases} \tag{3.20}$$

Las entradas $m_{k,j}$ y $l_{k,j}$ de M y L, respectivamente, se obtienen sustituyendo *las expresiones (3.17), (3.18), (3.19), y (3.20) en (3.11) y (3.16).*

Ejemplo 3.9 *Consideremos ahora la siguiente medida en la circunferencia unidad*

$$d\nu = \frac{d\theta}{2\pi} + \mathrm{m}_c\delta(\mathrm{e}^{i\theta} - 1),$$

donde $\mathrm{m}_c > 0$.

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ *asociados a* ν *es (ver* **[9]** *y* **[37]***)*

$$\Phi_n(z) = z^n - \frac{\mathrm{m}_c}{1 + n\mathrm{m}_c}\sum_{k=0}^{n-1} z^k,$$

para todo $n \geqslant 1$.

Entonces, obtenemos para $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \kappa_n(\nu) = & \left(\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + \mathrm{m}_c\Phi_n(1)\right)^{-\frac{1}{2}}, \ z = \mathrm{e}^{i\theta}, \\ = & \left(\int_0^{2\pi} \left(z^n - \frac{\mathrm{m}_c}{1 + n\mathrm{m}_c}\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)\bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{\mathrm{m}_c}{1 + n\mathrm{m}_c}\right)^{-\frac{1}{2}}, \ z = \mathrm{e}^{i\theta}, \end{aligned}$$

Luego,

$$\kappa_n(\nu) = \sqrt{\frac{1 + n\mathrm{m}_c}{1 + (n+1)\mathrm{m}_c}}, \tag{3.21}$$

así como $\|\nu\| = 1 + \mathrm{m}_c$. *La familia* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *de polinomios ortonormales asociados a* ν *está dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = & \sqrt{\tfrac{1+n\mathrm{m}_c}{1+(n+1)\mathrm{m}_c}}z^n - \tfrac{\mathrm{m}_c}{\sqrt{(1+n\mathrm{m}_c)(1+(n+1)\mathrm{m}_c)}}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \\ = & \frac{(1 + n\mathrm{m}_c)z^{n+1} - \mathrm{m}_c z^n + \mathrm{m}_c}{\sqrt{(1 + n\mathrm{m}_c)(1 + (n+1)\mathrm{m}_c)}(z-1)}, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\mathrm{m}_c^2}{1+\mathrm{m}_c}, & j = k = 0, \\ -\frac{1+(k-1)\mathrm{m}_c}{1+k\mathrm{m}_c}\left(\frac{(1+(k+1)\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}-(1+k\mathrm{m}_c)}{(1+k\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}^2-(1+(k-1)\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}} + \frac{\mathrm{m}_c^2}{(1+(k-1)\mathrm{m}_c)(1+(k+1)\mathrm{m}_c)}\right), & j = k \geqslant 1, \\ \frac{\sqrt{(1+k\mathrm{m}_c)(1+(k+2)\mathrm{m}_c)}}{1+(k+1)\mathrm{m}_c}, & j = k+1, \\ \frac{\mathrm{m}_c}{\sqrt{(1+j\mathrm{m}_c)(1+(j+1)\mathrm{m}_c)(1+k\mathrm{m}_c)(1+(k+1)\mathrm{m}_c)}}\left(\frac{(1+(k+1)\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}-(1+k\mathrm{m}_c)}{(1+k\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}^2-(1+(k-1)\mathrm{m}_c)\bar{\alpha}} - \mathrm{m}_c\right), & j \leqslant k-1, \\ 0, & j > k. \end{cases} \tag{3.22}$$

Sea ν_2 la transformación de Geronimus de ν, dada por

$$d\nu_2 = \frac{d\nu}{|z-\alpha|^2} = \frac{1}{|z-\alpha|^2}\frac{d\theta}{2\pi} + \frac{\mathrm{m}_c}{|\alpha-1|^2}\delta(z-1), \quad |\alpha| > 1,\ z = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Entonces

$$\|\nu_2\| = \frac{1}{|\alpha|^2-1} + \frac{\mathrm{m}_c}{|\alpha-1|^2}. \tag{3.23}$$

Las funciones de segunda especie asociadas a ν evaluadas en α son

$$q_n(\alpha) = \frac{(1+(n+1)\mathrm{m}_c)\alpha - (1+n\mathrm{m}_c)}{\sqrt{(1+n\mathrm{m}_c)(1+(n+1)\mathrm{m}_c)}(\alpha-1)\alpha^{n+1}}. \tag{3.24}$$

De (3.23) y (3.24) obtenemos

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2-1} + \frac{1}{|\alpha-1|^2|\alpha|^2}\left(\mathrm{m}_c|\alpha|^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{|(1+(k+1)\mathrm{m}_c)\alpha-(1+k\mathrm{m}_c)|^2}{(1+k\mathrm{m}_c)(1+(k+1)\mathrm{m}_c)|\alpha|^{2k}}\right). \tag{3.25}$$

Las expresiones de las entradas de las matrices M y L son muy engorrosas, pero se obtienen sustituyendo las expresiones (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), y (3.25) en(3.11) y (3.16).

3.3. Transformación de Geronimus con masas

Sea ν una medida en el círculo unidad $\mathbb{T} = \{z \ : \ |z| = 1\}$ y sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales asociada a ν. Consideremos la transformación de Geronimus de ν dada por

$$d\tilde{\nu} = \frac{d\nu}{|z-\alpha|^2} + \mathrm{m}_c\delta_\alpha + \overline{\mathrm{m}_c}\delta_{\bar{\alpha}^{-1}}; \tag{3.26}$$

donde $|\alpha| > 1; \mathrm{m}_c \in \mathbb{C}$ y con el siguiente producto interno asociado

$$\langle p, q\rangle_{\tilde{\nu}} = \int_{\Pi} p(z)\overline{q(z)}\frac{d\nu}{|z-\alpha|^2} + \mathrm{m}_c p(\alpha)\overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{\mathrm{m}_c} p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}.$$

Consideremos la base $\{1, (z-\alpha), ..., (z-\alpha)^n\}$ y supongamos que el funcional asociado a $\tilde{\nu}$ es cuasi-definido, entonces podemos expresar momentos $\tilde{c}_{k,j}$ asociados a $\tilde{\nu}$ como

$$\tilde{c}_{k,j} = \left\langle (z-\alpha)^k, (z-\alpha)^j \right\rangle_{\tilde{\nu}} = \left\langle (z-\alpha)^{k-1}, (z-\alpha)^{j-1} \right\rangle_{\nu} = c_{k-1,j-1}, \ \ k, j = 1, 2, \ldots.$$

Así,

$$\widetilde{T}_n = \left|\begin{array}{c|ccc|c} \tilde{c}_{0,0} & \tilde{c}_{0,1} & \cdots & \tilde{c}_{0,n-1} & \tilde{c}_{0,n} \\ \hline \tilde{c}_{1,0} & & & & c_{0,n-1} \\ \vdots & & T_{n-2} & & \vdots \\ \tilde{c}_{n-1,0} & & & & c_{n-2,n-1} \\ \hline \tilde{c}_{n,0} & c_{n-1,0} & \cdots & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} \end{array}\right| \tag{3.27}$$

con

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{0,j} &= \left\langle 1,(z-\alpha)^j \right\rangle_{\tilde{\nu}} = \left\langle \frac{1}{z-\alpha},(z-\alpha)^{j-1} \right\rangle_{\nu} + \mathrm{m}_c\overline{(\bar{\alpha}^{-1}-\alpha)}^{j}, \quad j=1,2,\ldots \\
\tilde{c}_{0,0} &= \langle 1,1\rangle_{\tilde{\nu}} = \left\langle \frac{1}{z-\alpha},\frac{1}{z-\alpha} \right\rangle_{\nu} + \mathrm{m}_c + \overline{\mathrm{m}_c}
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Sylvester, obtenemos

$$\widetilde{T}_n T_{n-2} = \widetilde{T}_{n-1} T_{n-1} - D_{n-1}\overline{D}_{n-1}$$

donde

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix}
\tilde{c}_{0,1} & \tilde{c}_{0,1} & \cdots & \cdots & \tilde{c}_{0,n} \\
c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & \cdots & c_{0,n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & \cdots & c_{n-1,n-1}
\end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
D_{n-1} &= (-1)^n T_{n-2} Q_{n-1}(\alpha) + (-1)^{n-1} T_{n-2}\overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})}\mathrm{m}_c(\alpha^{-1}-\bar{\alpha}) \\
&= (-1)^{n-1} T_{n-2}\left(-Q_{n-1}(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1}-\bar{\alpha})\overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_n T_{n-2} &= \widetilde{T}_{n-1} T_{n-1} - T_{n-2}^2\left|-Q_{n-1}(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1}-\bar{\alpha})\overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})}\right|^2 \\
&= \widetilde{T}_{n-1} T_{n-1} - \frac{T_{n-2}^2}{\kappa_{n-1(\nu)}^2}\left|-q_{n-1}(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1}-\bar{\alpha})\overline{\varphi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})}\right|^2 \\
&= \widetilde{T}_{n-1} T_{n-1} - T_{n-2} T_{n-1}\left|-q_{n-1}(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1}-\bar{\alpha})\overline{\varphi_{n-1}(\overline{\alpha}^{-1})}\right|^2
\end{aligned}$$

de ahí que:

$$\frac{\widetilde{T}_n}{T_{n-1}} = \frac{\widetilde{T}_{n-1}}{T_{n-2}} - \left| -q_{n-1}(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 .$$

Entonces podemos deducir de manera recursiva

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{T}_n}{T_{n-1}} &= \frac{\widetilde{T}_0}{T_{-1}} - \sum_{j=0}^{n-1} \left| -q_j(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 \\ &= \|\tilde{\nu}\| - \sum_{j=0}^{n-1} \left| -q_j(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 . \end{aligned}$$

Como conclusión, tenemos

Proposición 3.10 (ver [11]) *El funcional* $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}}(p,q) = \int p(z)\overline{q(z)}\frac{d\nu}{|z-\alpha|^2} + \mathrm{m}_c p(\alpha)\overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{\mathrm{m}_c} p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}$ *es cuasi-definido si y sólo si*

$$\varepsilon_n(\alpha) := \|\tilde{\nu}\| - \sum_{j=0}^{n-1} \left| -q_j(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}}$ es cuasi-definido. Entonces existe $\{\tilde{\Phi}_n\}$ sucesión de polinomios ortogonales mónicos tal que:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Phi}_m) = \tilde{\mathbf{k}}_n \delta_{n,m},$$

con $\tilde{\mathbf{k}}_n \neq 0$.

Consideremos el polinomio $\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)$ de grado $n+1$ y nulo en $z = \alpha$. Entonces

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) = (z-\alpha)\sum_{j=0}^{n} \lambda_{n+1,j}\varphi_j(z), \quad j = 1, 2, ..., n.$$

con

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1,j} &= \left\langle \tilde{\Phi}_{n+1}(z) - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha), (z-\alpha)\varphi_j(z) \right\rangle_{\tilde{\nu}} \\ &= \left\langle \tilde{\Phi}_{n+1}(z), (z-\alpha)\varphi_j(z) \right\rangle_{\tilde{\nu}} - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) \left\langle 1, (z-\alpha)\varphi_j(z) \right\rangle_{\tilde{\nu}}; \quad j = 0, 1, 2, ..., n.\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\lambda_{n+1,j} = \kappa_n(\nu)\tilde{\mathbf{k}}_{n+1}\delta_{n,j} - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)(-q_j(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})}); \quad j = 0, 1, 2, ..., n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n+1}(z) &= \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) + (z-\alpha)\Big[\Big(\kappa_n(\nu)\tilde{\mathbf{k}}_{n+1} - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)(-q_n(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})})\Big)\varphi_n(z) \\ &\quad -\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)\sum_{j=0}^{n-1}(-q_j(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})})\varphi_j(z)\Big]\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes principales

$$1 = \Big(\kappa_n(\nu)\tilde{\mathbf{k}}_{n+1} - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)(-q_n(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})})\Big)\kappa_n(\nu).$$

Si llamamos $a_n = (-q_n(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\overline{\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})})$, tenemos

$$\begin{aligned}\kappa_n^2(\nu)\tilde{\mathbf{k}}_{n+1} - \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)a_n\kappa_n(\nu) &= 1 \\ \tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)a_n\kappa_n(\nu) &= \frac{\tilde{\mathbf{k}}_{n+1}}{\mathbf{k}_n} - 1 \\ &= \frac{\widetilde{T}_{n+1}}{T_n}\frac{T_{n-1}}{\widetilde{T}_n} \\ &= \frac{|a_n|^2}{||\tilde{\nu}|| - \sum_{j=0}^{n-1}|a_n|^2}\end{aligned}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha) &= \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\left(\|\tilde{\nu}\| - \sum_{j=0}^{n-1}|a_n|^2\right)} \\
&= \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}
\end{aligned}
$$

Ahora construiremos la sucesión de polinomios y probaremos que son ortogonales. Sea

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{n+1}(z) &= (z-\alpha)\Phi_n(z) + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\Bigg[1 - (z-\alpha)\int \frac{K_{n-1}(z,t)}{t-\alpha}d\nu(t) \\
&\quad -\mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})(z-\alpha)K_{n-1}(z,\bar{\alpha}^{-1})\Bigg]
\end{aligned}
$$

Para $k = 1, 2, ..., n+1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\Phi}_{n+1}(z), (z-\alpha)^k \right\rangle_{\tilde{\nu}} &= \left\langle (z-\alpha)\Phi_n(z), (z-\alpha)^k \right\rangle_{\tilde{\nu}} + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left\langle 1, (z-\alpha)^k \right\rangle_{\tilde{\nu}} \\
&\quad -\tilde{\Phi}_{n+1}(\alpha)\left[\left\langle \int \frac{K_{n-1}(z,t)}{t-\alpha}d\nu(t), (z-\alpha)^{k-1} \right\rangle_{\nu}\right. \\
&\quad \left. +\mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})\left\langle K_{n-1}(z,\overline{\alpha}^{-1}), (z-\alpha)^{k-1} \right\rangle_{\nu}\right] \\
&= \mathbf{k}_n\delta_{n+1,k} + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[\int \frac{\overline{(z-\alpha)}^k}{|z-\alpha|^2}d\nu + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k \right. \\
&\quad \left. -\int \frac{K_{n-1}(z,t)}{t-\alpha}d\nu(t)\overline{(z-\alpha)}^{k-1}d\nu(z) - \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k\right] \\
&= \mathbf{k}_n\delta_{n+1,k} + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[\int \frac{\overline{(z-\alpha)}^{k-1}}{z-\alpha}d\nu(z) - \int \frac{\overline{(t-\alpha)}^{k-1}}{t-\alpha}d\nu(t)\right] \\
&= \mathbf{k}_n\delta_{n+1,k}
\end{aligned}
$$

y para $k = 0$ tomamos

$$\tilde{\Phi}_{n+1}(z) = (z-\alpha)\Phi_n(z) + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[1-(z-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1} a_j\varphi_j(z)\right]$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\Phi}_{n+1}(z), 1\right\rangle_{\tilde{\nu}} &= \langle (z-\alpha)\Phi_n(z), 1\rangle_{\tilde{\nu}} + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[\langle 1, 1\rangle_{\tilde{\nu}} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left\langle (z-\alpha)\varphi_j(z), 1\right\rangle_{\tilde{\nu}}\right] \\
&= \int \frac{(z-\alpha)\Phi_n(z)}{|z-\alpha|^2} d\nu(z) + \overline{\mathrm{m}_c}(\bar{\alpha}^{-1}-\alpha)\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \\
&\quad + \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[\|\tilde{\nu}\| - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left\langle (z-\alpha)\varphi_j(z), 1\right\rangle_{\tilde{\nu}}\right] \\
&= -\frac{\overline{a}_n}{\kappa_n(\nu)} - \frac{-\overline{a_n}}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}\left[\|\tilde{\nu}\| - \sum_{j=0}^{n-1} \left|a_j\right|^2\right] \\
&= -\frac{\overline{a}_n}{\kappa_n(\nu)} + \frac{\overline{a}_n}{\kappa_n(\nu)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.11 *Las sucesiones* $\{\widetilde{\Phi}_n(z)\}_{n\geq 0}$ *y* $\{\Phi_n(z)\}_{n\geq 0}$ *satisfacen*

$$(z-\alpha)P(z) = \mathrm{m}_{\mathbf{c}}\widetilde{\Phi}(z) \tag{3.28}$$

donde $P(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), ...]^t, \widetilde{\Phi}(z) = [\widetilde{\Phi}_0(z), \widetilde{\Phi}_1(z), ...]^t$, *y* $\mathbf{M}$ *es una matriz*

Hessenberg inferior con entradas:

$$m_{k,j} = \begin{cases} 1 & si \quad j = k+1 \\ -B_0 & si \quad j = k = 0 \\ \frac{\overline{A}_j \overline{A}_{j-1}}{\varepsilon_j(\nu)} & si \quad j = k \\ \frac{A_k}{\|\widetilde{\nu}\|} & si \quad j = 0 \\ \frac{\overline{A}_k}{\overline{A}_{j-1}} - \frac{\overline{A}_k B_j}{\overline{A}_j B_{j-1}} & si \quad 1 \leq j \leq k-1 \\ 0 & si \quad j > k+1 \end{cases}$$

con $B_n = \frac{-\overline{a}_n}{\kappa_n(\nu)\varepsilon_n(\alpha)}$, $A_n = -Q_n(\alpha) + \mathrm{m}_c(\alpha^{-1} - \overline{\alpha})\Phi_n(\overline{\alpha}^{-1})$.

Demostración. Tomamos

$$\widetilde{\Phi}_{n+1}(z) = (z-\alpha)\Phi_n(z) + B_n\left[1 + (z-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1} C_j\Phi_j(z)\right]$$

con $C_n = -\kappa_n(\nu)a_n$. Entonces, para $n = 0$, tenemos:

$$\widetilde{\Phi}_1(z) - \widetilde{\Phi}_0(z) = (z-\alpha)\Phi_0(z).$$

Tomando $n = 1$, obtenemos

$$\widetilde{\Phi}_2(z) - \frac{B_1}{B_0}\widetilde{\Phi}_1(z) = (z-\alpha)\left[\Phi_1(z) + \left(B_1C_0 - \frac{B_1}{B_0}\right)\Phi_0(z)\right].$$

Finalmente, para $n \geq 2$,

$$\widetilde{\Phi}_{n+1}(z) - \frac{B_n}{B_{n-1}}\widetilde{\Phi}_n(z) = (z-\alpha)\left[\Phi_n(z) + \left(B_nC_{n-1} - \frac{B_n}{B_{n-1}}\right)\Phi_{n-1}(z)\right]$$

Expresando lo anterior en forma matricial

$$(z-\alpha)\widehat{\mathbf{M}}P(z) = \widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\Phi}(z) \tag{3.29}$$

donde $\widetilde{\mathbf{M}}$ y $\widehat{\mathbf{M}}$ son matrices bidiagonales inferior y superior, respectivamente, con los siguientes elementos:

$$\widetilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k+1 \\ -B_0 & \text{si} \quad j = k = 0 \\ -\frac{B_k}{B_{j-1}} & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \widehat{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ -\frac{\overline{A}_k}{\overline{A}_{k-1}} & \text{si} \quad j = k-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Dado que $\widehat{\mathbf{M}}$ es no singular, podemos escribir

$$(z-\alpha)P(z) = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\Phi}(z),$$

y por tanto

$$\mathbf{M} = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}.$$

$\widehat{\mathbf{M}}^{-1}$ tiene elementos

$$\widehat{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ -\frac{\overline{a}_k}{\overline{a}_j} & \text{si} \quad j = k-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

multiplicando $\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}$ tenemos el resultado.

■

Proposición 3.12 *Sea L la matriz triangular inferior con* 1 *en la diagonal prin-*

cipal, tal que $\tilde{\Phi}(z) = LP(z)$. *Entonces*

$$H_P - \alpha I = \mathbf{M}L \tag{3.30}$$

y

$$H_{\tilde{\Phi}} - \alpha I = L\mathbf{M}. \tag{3.31}$$

Demostración. De la relación (3.28), se tiene

$$\begin{aligned} (H_P - \alpha I)\, P(z) &= (z-\alpha)P(z) \\ &= \mathbf{M}\tilde{\Phi}(z) \\ &= \mathbf{M}LP(z). \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(H_{\tilde{\Phi}} - \alpha I\right) P(z) &= (z-\alpha)\tilde{\Phi}(z) \\ &= (z-\alpha)LP(z) \\ &= L\mathbf{M}\tilde{\Phi}(z). \end{aligned}$$

■

De la expresión (3.29) se tiene

$$\widehat{\mathbf{M}}\,(H_P - \alpha I) = \widetilde{\mathbf{M}}L. \tag{3.32}$$

Como consecuencia, las entradas $l_{k,j}$, $0 \leqslant j \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$ de la matriz L vienen dadas por

$$l_{k+1,j} = B_k \sum_{r=j-1}^{k} \frac{\hat{h}_{r,j}}{B_j}, \tag{3.33}$$

donde $\hat{h}_{r,j}$ son la entradas de la matriz $\hat{H} = \widehat{\mathbf{M}}\,(H_P - \alpha I)$.

Bibliografía

[1] A. Branquinho, L. Golinskii y F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modification of the Lebesgue measure on the unit circle. An inverse problem*, Complex Variables **38** (1999), 137–154.

[2] M. I. Bueno y F. M. Dopico, *Stability and sensitivity of tridiagonal LU factorization without pivoting*, BIT **44** (2004), 651–673.

[3] ———, *Stability and sensivity of Darboux tranformation without parameter*, Electr. Trans. on Numer. Anal. **18** (2004), 101–136.

[4] M. I. Bueno y F. Marcellán, *Darboux transformations and perturbation of linear functionals*, Linear Alg. and Appl. **384** (2004), 215–242.

[5] ———, *Polynomial perturbations of bilinear functionals and Hessenberg matrices*, Linear Alg. and Appl. **414** (2006), 64–83.

[6] M. Buhmann y A. Iserles, *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm*, J. Comput. Appl. Math. **43** (1992), 117–134.

[7] M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials*, Linear Alg. and Appl. **362** (2003), 29–56.

[8] T. S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[9] L. Daruis, J. Hernández y F. Marcellán, *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*, J. Comput. Appl. Math. **202** (2007), 155–176.

[10] L Garza, J. Hernández y F. Marcellán, *Spectral transformations of measures supported on the unit circle and the Szegő transformation*, Numer. Algor. **DOI 10.1007/s11075-008-9156-0** (2008), 1–17.

[11] ______, *Orthogonal polynomials and measures on the unit circle. The Geronimus transformations*, J. Comput. Appl. Math **233** (2010), 1220–1231.

[12] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, Ann. of Math. **47** (1946), 742–761.

[13] ______, *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.

[14] ______, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, AMS Transl. **1** (1962), 1–78.

[15] E. Godoy y F. Marcellán, *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, Boll. Un. Mat. Ital A **5** (1991), 1–12.

[16] ______, *Orthogonal polynomials and rational modification of measures*, Canad. J. Math. **45** (1993), 930–943.

[17] L. Golinskii, P. Nevai y W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory **83** (1995), 392–422.

[18] L. Golinskii, P. Nevai, W. Van Assche y F. Pintér, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II*, J. Approx. Theory **96** (1999), 1–32.

[19] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.

[20] U. Grenander y G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, 2^{nd} ed., University of California Press, Berkeley 1958, Chelsea, New York, 1984.

[21] J. Hernández, *Transformaciones espectrales, funciones de transferencia y polinomios ortogonales*, Ph.D. thesis, Universidad carlos III de Madrid, 2007.

[22] ______, *Transformaciones espectrales y polinomios ortogonales*, Trabajo de ascenso asociado, UCLA, septiembre 2008.

[23] R. Horn y C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[24] M. E. H. Ismail y R. W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weigths*, J. Approx. Theory **71** (1992), 39–60.

[25] W. B. Jones, O. Njåstad y W. J. Thron, *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.

[26] X. Li y F. Marcellán, *Representation of Orthogonal Polynomials for modified measures*, Comm. in the Anal. Theory of Cont. Fract. **7** (1999), 9–22.

[27] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **30** (2006), no. 117, 563–579.

[28] F. Marcellán y M. Alfaro, *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*, En Erice International Symposium on Orthogonal Polynomials and Their Applications, IMACS Annals on Comput. and Appl. Math. J. C. Baltzer, Basel (Basel), C. Brezinski et al. Editors, 1991, 3–14.

[29] F. Marcellán y J. Hernández, *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals*, Mediterr. J. Math. **2** (2005), 451–458.

[30] ———, *Geronimus spectral transforms and measures on the complex plane*, J. Comput. Appl. Math. **219** (2008), 441–456.

[31] F. Marcellán, F. Peherstorfer y R. Steinbauer, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials I*, Adv. in Comput. Math. **5** (1996), 281–295.

[32] ———, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials II*, Adv. in Comput. Math. **7** (1997), 401–428.

[33] F. Marcellán y Y. Quintana, *Polinomios ortogonales no estándar. propiedades algebraicas y analíticas*, XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2009.

[34] F. Peherstorfer, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, Constr. Approx. **12** (1996), 161–185.

[35] L. Reichel, G.S. Ammar y W.B. Gragg, *Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials*, Math. Comp. **57** (1991), 273–289.

[36] B. Simon, *OPUC on one foot*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 431–460.

[37] ———, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, vol. 1 y 2, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series, vol. 54, Providence, RI, 2005.

[38] V. Spiridonov, L. Vinet y A. Zhedanov, *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 7621–7637.

[39] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4^{th} ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[40] W. Van Assche, *Analytic aspects of orthogonal polynomials*, Tech. report, Kathilieke Universiteit Leuven, 1993.

[41] D. S. Watkins, *Some perspectives on the eigenvalue problem*, SIAM Review **35** (1993), 430–471.

[42] G. J. Yoon, *Darboux transforms and orthogonal polynomials*, Bull. Korean Math. Soc. **39** (2002), 359–376.

[43] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **85** (1997), 67–83.