Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Postgrado en Matemática

SISTEMAS COMPETITIVOS DEL TIPO LOTKA–VOLTERRA CON RETARDO INFINITO.

Autor: M.Sc. Liliana R. Pérez.

Tutor: Dr. Francisco Montes De Oca.

Tesis Doctoral
Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctor en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, Octubre 2012

A Dios por permitirme alcanzar esta meta y por regalarme muchas otras bendiciones. A mi hijo Santiago Alejandro por ser la inspiración mas grande de mi vida.

Agradecimientos

Antes de comenzar a nombrar a todas las personas que han sido de gran importancia para la culminación de este trabajo, deseo comenzar primeramente dando gracias a mi Dios todo poderoso, pues él, es quien me ha dado la fortaleza y paciencia para seguir adelante, los conocimientos para poder culminar esta meta y por ponerme en el camino a personas e instituciones que me han apoyado. Para ti mi Dios mil gracias.

Quiero agradecer a la persona mas importante de mi vida, mi hijo Santiago, por ser un niño maravilloso, por entender en muchos momentos que mami estaba estudiando y por regalarme siempre un te amo.

A mi madre que siempre ha confiado en mí y ha tenido una palabra de aliento en aquellos momentos en que sentía que flaqueaba, pero sobre todo por esas bendiciones que me da cuando las necesito.

Quiero dar gracias a mi familia, pues ellos son parte fundamental en mi vida y siempre me han apoyado en todas las decisiones que he tomado y por supuesto en esta, que ha sido un camino largo, con tropiezos, con tristeza, con alegría pero sobre todo con muchas satisfacciones.

A mi tutor Dr. Francisco montes de Oca por ser parte fundamental en el logro de esta meta, por compartir conmigo parte de sus conocimientos, sus consejos, su tiempo e incluso agradezco hasta sus regaños, pero lo más valioso de todo, para mí, es su amistad. Mil gracias.

A todos los profesores que contribuyerón con mi formación Academica.

A mis más que amigas, ¡hermanas!, Lucy y Jurancy por estimularme y darme áni-

mo en aquellos momentos de tristeza o decaimiento. Además por compartir y disfrutar los momentos de alegría.

A mis amigos Miguel, Mireya, Ebner, Alexander por estar allí durante todo este camino recorrido y al profesor Víctor Bernal por su ayuda en muchos momentos que lo necesite durante este trayecto.

A mis compañeros del departamento de matemática del Decanato de Ciencias de la UCLA, muchos de cuales me han dado frecuentes ánimos y apoyo para el desarrollo de este trabajo.

A la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y La Universidad Central de Venezuela, por permitirme desarrollar mis estudios de Doctorado.

Por ultimo a todas las personas que han estado pendientes y se han preocupado por mí durante todo este recorrido.

A todos muchas Gracias y miles de bendiciones.

Resumen

En el presente trabajo, se estudian las propiedades cualitativas de cierto tipo de sistemas competitivos no autónomos de Lotka-Volterra con retardo infinito que modelan una comunidad de n-especies en competencia.
Mediante la construcción de funcionales apropiados del tipo de Lyapunov, establecemos una serie de condiciones algebraicas sobre los coeficientes y los núcleos, de fácil verificación, que son suficientes para garantizar la extinción y sobrevivencia de un determinado número de especies. La parte sobreviviente se estabiliza alrededor de cualquier solución de un sub sistema de los sistemas en estudio. Estas series de condiciones también garantizan la persistencia, estabilidad extrema y comportamiento asintótico de los sistemas. Al final de los capítulos 2 y 3 se presentan ejemplos para justificar la viabilidad de los resultados principales.

Palabras Claves: Lotka-Volterra; Retardo Infinito; Extinción; Sobrevivencia; Persistencia; Estabilidad; Extremadamente Estable; Funcional tipo Lyapunov.

Competitive Systems of the type Lotka-Volterra with Infinite Delay.

Abstract

In the present paper, we study the qualitative properties of certain type of nonautonomous competitive Lotka-Volterra systems with infinite delay, which describe a model of n-species in competitive.

By constructing suitable Lyapunov-type functional, we establish a series of easily verifiable algebraic conditions on the coefficients and the kernels, which are sufficient to ensure the extinction and survival of a determined number of species. The part surviving stabilizes around any solution of a subsystem of the systems in study. These conditions also guarantee the persistence, extreme stability and asymptotic behavior of the systems. Examples are presented to verify the viability of the main results.

.

Keywords: Lotka-Volterra; Infinite delay; Extinction; Persistence; Survival; Stability; Extremely stable; Lyapunov-type-functional.

Índice

Introducción.

La Ecología es la ciencia que estudia a los seres vivos, su ambiente, la distribución y abundancia, esas propiedades son afectadas por la interacción entre los organismos y su ambiente. El objeto principal de la Ecología es la evolución de las poblaciones. La descripción matemática de un sistema del mundo real es a menudo llamada modelo matemático. El interés general de la modelación matemática de poblaciones biológicas ha aumentado sustancialmente durante las últimas cuatro décadas. Esta área interdisciplinaria de investigación ha atraído un número grande de biólogos, ingenieros, físicos y matemáticos en los últimos años. La mayoría de estos investigadores ha intentado entender los fenómenos biólogicos, usando ambas técnicas, tanto las ciencias físicas como la matemática.

En estas aplicaciones, el comportamiento futuro de muchos fenómenos se supone que son descritos por la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). En otras palabras, el sistema es gobernado por un principio de causalidad; es decir, el estado futuro del sistema es independiente de sus estados pasados y es exclusivamente determinado por el presente. Sin embargo retrasos o retardos son componentes naturales de los sistemas biológicos y existen muchas razones para incluirlos en los modelos matemáticos. Por ejemplo, los retardos podrían ser incluidos para representar:

(a) Lapsos de regeneración de recursos,

(b) Períodos de maduración,

(c) Lapsos por alimentación, etc.

Precisamente, es en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (EDR), o mas generalmente Ecuaciones Diferenciales Funcionales (EDF), donde el pasado ejerce influencia sobre el futuro de una manera muy significativa. La gran mayoría de los fenómenos biológicos son representados de mejor manera por EDF que a través de EDO.

Durante los últimos 60 años y especialmente los últimos 40, las EDR han sido y continúan siendo investigadas intensamente; ver [15], [16], [17], [20] y [37]. Una de las motivaciones de su desarrollo se ha centrado, en particular, en la Biomatemática. El uso de estos modelos con retardo se remonta a la época del matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) y el matemático frances Marcel Brelot (1903-1987) en sus publicaciones [36] y [9] , respectivamente, donde estudiaron el modelo clásico de presa–depredador con retardo continuo infinito.

Volterra (1931) investigó el siguiente modelo de presa–depredador

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)\left[r_1 - \alpha_1 N_2(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds\right], \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)\left[-r_2 + \alpha_2 N_1(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds\right]; \end{cases}$$

donde N_1 representa el número de individuos presa en el instante t y N_2 el número de individuos depredadores, α_i, con $i = 1, 2$, son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies, r_1 es la tasa de crecimiento de la presa y r_2 es la tasa de mortalidad del depredador; F_1 y F_2:$[0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ son funciones continuas y satisfacen, para cada $i = 1, 2$,

$$\int_0^{+\infty} F_i(s)ds = 1.$$

Las integrales

$$\int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds$$

expresan el impacto de cada especie sobre la otra en el pasado. Si la existencia de la población es limitada, el límite inferior de la integración puede ser cambiado por $(t-\tau)$, con τ constante.

Volterra probó que existe una única solución $col(N_1(t), N_2(t))$ con $N_i(t) > 0$, para todo i, $i = 1, 2$ y $t \geq 0$. Además si las soluciones no son estacionarias, ellas fluctúan indefinidamente y las soluciones periódicas son imposibles.

Brelot (1931) estudió una modificación del sistema anterior incluyendo términos que representan la competencia intraespecie alrededor de la presa y del depredador para obtener el sistema siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)\left[r_1 - \lambda_1 N_1(t) - \alpha_1 N_2(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds\right], \\ \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)\left[-r_2 - \lambda_2 N_2(t) + \alpha_2 N_1(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds\right]; \end{cases}$$

donde los términos $-\lambda_i N_i$ representan la competencia intraespecie, F_1 y F_2 satisfacen las mismas condiciones que el sistema estudiado por Volterra, mencionado anteriormente.

Brelot probó la existencia de una única solución para su sistema, la cual es acotada. Si $\lambda_1 \neq 0$ y (la presa) N_1 es acotada por un número positivo; N_2 puede ser acotada también, más aún se puede aproximar a cero, de acuerdo con la relación que puedan tener los parámetros en la ecuación.

Consideremos ahora dos especies, (por ejemplo, de animales, plantas o bacterias) cuyas poblaciones son $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las cuales compiten una con la otra por un abastecimiento limitado en un ambiente común. Para construir un modelo matemático tan realista como sea posible, se supuso que en ausencia de la otra especie, una de ellas tendría una población limitada. Cuando no se da interacción entre las especies, la población satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = b_1 x_1(t) - a_{11}x_1^2(t), \\ x_2'(t) = b_2 x_2(t) - a_{22}x_2^2(t). \end{cases}$$

Si suponemos que la competencia tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional a su producto $x_1(t)x_2(t)$, insertaremos tales términos con una constante de proporcionalidad negativa en las ecuaciones del sistema anterior, para obtener las ecuaciones de competencia o sistemas competitivos del tipo Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} x_1'(t) = b_1 x_1(t) - a_{11}x_1^2(t) - a_{12}x_1(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = b_2 x_2(t) - a_{21}x_1(t)x_2(t) - a_{22}x_2^2(t)\ ; \end{cases}$$

donde los coeficientes b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son números reales positivos. Las constantes b_1 y b_2 representan la razón de crecimiento de las especies x_1, x_2 respectivamente;

a_{11}, a_{22} representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia razón de crecimiento y a_{12}, a_{21}, representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra (interacción).
El análisis del plano fase muestra que las condiciones

$$b_1 > \frac{a_{12}b_2}{a_{22}}, \qquad b_2 > \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$$

son necesarias y suficientes para la existencia de un punto de equilibrio, (x_0, y_0), estable del sistema, de forma que ambas componentes sean positivas y atraigan todas las soluciones con condiciones iniciales en el primer cuadrante x_1, x_2.
Si se satisfacen las condiciones:

$$b_1 > \frac{a_{12}b_2}{a_{22}}, \qquad b_2 \leq \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$$

entonces toda solución con condiciones iniciales tiende a la solución de equilibrio, la cual esta dada por $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$, $x_2 = 0$, cuando $t \to \infty$. Esto se conoce como el principio de exclusión competitiva.
Este último sistema se generalizó a los sistemas:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)\right], \qquad i = 1, ..., n,$$

y a partir de la década de 1980, comenzaron a considerar los sistemas no autónomos competitivos de Lotka-Volterra:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right], \qquad i = 1, ..., n$$

donde las funciones $b_i(t)$, $a_{ij}(t)$ con $1 \leq i, j \leq n$, son continuas, positivas y acotadas, superior e inferiormente, por constantes positivas; ver [3], [4], [5], [6], [14], [25], [32], [33] y [34]. Este tipo de modelo es el que se estudia en este trabajo pero con retardo infinito.
Se investigan las propiedades cualitativas de los sistemas competitivos de ecuaciones diferenciales con retardo infinito:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \;\; t > 0, \; i = 1, ..., n.$$

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],\ \ t>0,\ i=1,...,n,$$

donde las funciones $x_i(t)$, $i=1,...,n$, en el pasado, satisfacen que $x_i(t)=\varphi_i(t), \quad t\leq 0$, con $\varphi_i(t)$ funciones continuas, positivas y acotadas.

En adelante se usará la siguiente notación.

Dada una función $g: Dom(g)\to\mathbb{R}$ acotada. Se definen

$$g^l = \inf_{t\in Dom(g)} g(t), \quad g^u = \sup_{t\in Dom(g)} g(t).$$

Montes de Oca y Vivas en [25], consideraron el sistema integro–diferencial de Lotka–Volterra con retardo infinito

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\left[a_1(t) - b_{11}(t)x_1(t) - b_{12}(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds\right], \\ x_2'(t) = x_2(t)\left[a_2(t) - b_{21}(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_1(s)ds - b_{22}(t)x_2(t)\ \right], \end{cases}$$

donde los coeficientes satisfacen las siguientes condiciones:

1) a_k y b_{kj} $(1\leq k,j\leq 2)$ son funciones continuas acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty,+\infty)$.

2) Los núcleos $K_i:[0,\infty)\to(0,\infty)$, son funciones tales que

$$\int_0^{\infty} K_i(s)ds = 1, \quad i=1,2.$$

Ellos probaron que el principio de exclusión competitiva se cumple, si los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$\frac{a_1^l}{b_{12}^l} > \frac{a_2^u}{b_{22}^l}, \qquad \frac{a_2^u}{b_{21}^l} \leq \frac{a_1^l}{b_{11}^u}.$$

Es decir, para cualquier solución $col(x_1(t),x_2(t))$ del sistema dado, con condiciones iniciales en un espacio apropiado, se cumple que

$$x_2(t)\to 0 \quad \text{y} \quad x_1(t)-u^*(t)\to 0,$$

cuando $t\to\infty$, donde $u^*(t)$ es la única solución de la ecuación logística

$$x'(t) = x(t)\left[a_{11}(t) - b_{11}(t)x(t)\right],$$

que cumple que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\delta \leq u^*(t) \leq \Delta$, donde Δ y δ satisfacen $0 < \delta < \dfrac{a_1^l}{b_{11}^u}$ y $\dfrac{a_1^u}{b_{11}^l} < \Delta$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} (u(t) - u^*(t)) = 0$ para cualquier solución $u(t)$ de esta ecuación con condición inicial positiva.

Montes de Oca y Zeeman en [26] y [27], consideraron el sistema competitivo no autónomo de Lotka–Volterra

$$x_i'(t) = x_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \right], \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde los coeficientes $b_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq n$, son funciones continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, +\infty)$. En [27], probaron que si los coeficientes satisfacen que para cada k, $2 \leq k \leq n$, existe un entero $i_k < k$ tal que

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_k j}^u}, \; j = 1, \ldots, k,$$

entonces cualquier solución $col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema, con valores iniciales positivos, tiene la propiedad que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente para $i = 2, \ldots, n$, cuando $t \to +\infty$ y $x_1(t) - u^*(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$, donde $u^*(t)$ es la única solución de la ecuación diferencial logística $x'(t) = x(t)\,[a_{11}(t) - b_{11}(t)x(t)]$, que satisface las condiciones mencionadas arriba.

En [26], probaron que si se satisfacen las hipótesis:

a) Para cada entero k, $r + 1 \leq k \leq n$, existe un entero i_k, $i_k < k$ tal que

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_k j}^u}, \; j = 1, \ldots, k.$$

b) Para cada entero i, $1 \leq i \leq r$, se cumple

$$b_i^l > \sum_{j=1, j \neq i}^{r} a_{ij}^u \left(\frac{b_j^u}{a_{jj}^l} \right),$$

entonces cualquier solución $col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema, con condiciones iniciales positivas, satisfacen que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente para $i = r + 1, \ldots, n$, cuando $t \to +\infty$ y $x_i(t) - u_i^*(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$ para $i = 1, \ldots, r$, donde $u^*(t) = col\,(u_1^*(t), \ldots, u_r^*(t))$ es la única solución del sistema

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)x_j(t)\right]; \qquad 1 \le i \le r,$$

que satisface lo siguiente:

i) $u^*(t)$ está definida sobre $\mathbb{R}$ y sus componentes están acotadas superior e inferiormente por constantes positivas.

ii) Cada solución $col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t))$ de este sistema con condiciones iniciales positivas satisface que $\lim\limits_{t \to +\infty} (x_i(t) - u_i^*(t)) = 0$ para $i = 1, ..., r$.

La hipótesis $b)$ garantiza la existencia de esta solución $u^*(t)$.

En este trabajo consideramos los sistemas competitivos no autónomos de Lotka–Volterra con retardo infinito de la forma:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \;\; t > 0,\; i = 1, ..., n. \tag{1}$$

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \;\; t > 0,\; i = 1, ..., n, \tag{2}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t) \quad \text{para} \quad t \le 0, \qquad i = 1, ..., n, \tag{3}$$

donde $b_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $1 \le i, j \le n$, son funciones continuas, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $\mathbb{R}$. Los núcleos $K_{ij} \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $1 \le i, j \le n$, son funciones continuas tales que $\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1$. Las condiciones iniciales φ_i, $1 \le i \le n$, satisfacen que, $\varphi_i \in C\left[(-\infty, 0], [0, \infty)\right]$, $\varphi_i(0) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ y son acotadas.

Usando el análisis matemático, la teoría de ecuaciones diferenciales con retardo, teoría de las ecuaciones integrales de Volterra, métodos y técnicas utilizadas en algunos de los trabajos citados y mediante la construcción de funcionales del tipo Lyapunov establecemos una serie de condiciones algebraicas sobre los coeficientes y núcleos, de fácil verificación, que son suficientes para garantizar la extensión de los resultados logrados en [26] y [27]. La tesis está estructurada en tres capítulos. En el primero de ellos, el capítulo de los preliminares, está dedicado a resultados y definiciones que son necesarias para el desarrollo de los capítulos subsiguientes. Los capítulos 2 y 3, forman el corazón de esta investigación, en el primero de estos, se consideran las hipótesis:

H_1 : Para cada entero k, $2 \leq k \leq n$, existe un entero i_k, $i_k < k$ tal que para cualquier entero j, $1 \leq j \leq k$, se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_kj}^u}.$$

H_2 : $\mu_{ij} = \displaystyle\int_0^\infty sK_{ij}(s)ds < \infty, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$

H_3 : $\int_0^\infty s^2 K_{11}(s)ds < \infty$ y $a_{11}^l > M_0\left(a_{11}^u\right)^2 \mu_{11}$, donde $M_0 = \dfrac{b_1^u}{a_{11}^l \int_0^\infty K_{11} e^{-b_1^u s} ds}.$

Logrando los siguientes resultados principales

1) Si las hipótesis H_1 y H_2 se satisfacen, entonces la solución $col\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (1), con condición inicial (3), tiene la propiedad que para cada i, $2 \leq i \leq n$, se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, y $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u^*(t)$ es una cierta solución de la ecuación diferencial logística $u'(t) = u(t)\left[b_1(t) - a_{11}(t)u(t)\right]$.

2) Si las hipótesis H_1, H_2 y H_3 se satisfacen, entonces la solución $col\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (2), con condición inicial (3), tiene la propiedad que para cada i, $2 \leq i \leq n$, se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, y $u(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u(t)$ es cualquier solución de la ecuación logística integro–diferencial

$$u'(t) = u(t)\left[b_1(t) - a_{11}(t)\int_0^\infty K_{11}(s)u(t-s)ds\right],$$

.

Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en la revista "Nonlinear Analysis" ver [23].

En el capítulo 3, bajo las siguientes hipótesis

$\widehat{H}_1:$ Para cada entero k, $r+1 \leq k \leq n$, existe un entero $i_k < k$ tal que para cualquier entero j, $1 \leq j \leq k$, se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_k j}^u}.$$

$\widehat{H}_2:$ Para cada entero i, $1 \leq i \leq r$, se cumple $b_i^l > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \left(\frac{b_j^u}{a_{jj}^l} \right)$.

$\widehat{H}_3:$ $\mu_{ij} = \int_0^\infty sK_{ij}(s)ds < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, r.$

$\widehat{H}_4:$ Para cada cada i, $1 \leq i \leq r$, se cumple $b_i^l > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j$, donde

$$\widetilde{M}_j = \frac{b_j^u}{a_{jj}^l \int_0^{+\infty} K_{jj}(s) e^{-b_j^u s} ds}.$$

$\widehat{H}_5:$ Para cada par de enteros i, j , $1 \leq i, j \leq n$, se cumple $\int_0^{+\infty} s^2 K_{ij}(s)ds < +\infty$, y para todo i, $1 \leq i \leq r$,

$$\frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 (a_{ii}^u)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} < a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds,$$

donde $\widehat{m}_i = \dfrac{b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u e^{L_i}}$, $\quad L_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_i \mu_{ij} \quad$ y $\quad \widetilde{M}_i$ como en $\widetilde{H}_4$.

Se prueban los siguientes resultados principales

1) Si las hipótesis $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_2$ y $\widehat{H}_3$ se satisfacen, entonces la solución *col* $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (1), con condición inicial (3), tiene la propiedad que para cada i, $r+1 \leq i \leq n$, se cumple $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, y para i,

$1 \leq i \leq r$, $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $y(t) = col\,(y_1(t), \ldots, y_r(t))$ es cualquier solución del sistema

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{r} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

$$t \geq 0,\ i = 1, \ldots, r. \quad (4)$$

2) Si las hipótesis $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_3$, $\widehat{H}_4$ y $\widehat{H}_5$ se satisfacen y la matriz $C = (c_{ij})_{r\times r}$, cuyo coeficientes están dados por

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}^{l}\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)e^{-b_i^u s}ds - \frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 \left(a_{ii}^u\right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \text{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u\left[1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}\right], & \text{para } i \neq j, \end{cases}$$

es una M-matriz. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (2) con condición inicial (3), satisface que para cada i, $r+1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$, y para i, $1 \leq i \leq r$, se cumple que $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde $y(t) = col\,(y_1(t), \ldots, y_r(t))$ es cualquier solución del sistema

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

$$t \geq 0,\ i = 1, \ldots, r. \quad (5)$$

Estos últimos resultados están siendo preparados para su publicación, ver [24]. Al final de los capítulos 2 y 3 damos ejemplos que ilustran la viabilidad de los resultados antes mencionados.

Capítulo 1

Preliminares.

Este capítulo esta compuesto por definiciones, lemas y teoremas, necesarios para las demostraciones establecidas en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

§1.1. Teoría básica.

Definición 1.1. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y acotada. Denotamos por*

$$f^l = \text{ínf}\{f(t) : t \in Dom(f)\} \qquad y \qquad f^u = \sup\{f(t) : t \in Dom(f)\}.$$

Definición 1.2. *Una función $K:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua, no negativa y con la propiedad $\int_0^\infty K(s)ds = 1$, se denomina núcleo normalizado.*

Observación 1.1. *Denotaremos como BC^+ al siguiente conjunto:*

$$BC^+ = \{\varphi \in C\left[(-\infty,0],[0,\infty)\right] : \varphi(0) > 0 \;\; y \; \varphi \; es \; acotada \;\}.$$

Este conjunto se conoce como conjunto de las funciones iniciales.

Lema 1.1. *Sean K un núcleo normalizado y $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y acotada. Sea*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds = \int_0^{+\infty} K(u)x(t-u)du.$$

Entonces la integral impropia definida por f converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, para cualquier $T > 0$ se tiene que

$$\left|\int_0^{+\infty} K(u)x(t-u)du - \int_0^T K(u)x(t-u)du\right| = \left|\int_T^{+\infty} K(u)x(t-u)du\right|.$$

Por ser x acotada se tiene que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así

$$\begin{aligned} \left|\int_T^{+\infty} K(u)x(t-u)du\right| &\leq \int_T^{+\infty} MK(u)du \\ &= M\int_T^{+\infty} K(u)du. \qquad (1) \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos $\int_0^{+\infty} K(u)du = 1$. Esto implica que dado $\epsilon > 0$ existe un número positivo $\Lambda_0 \in N$ tal que

$$\left|\int_0^{+\infty} K(u)du - \int_0^T K(u)du\right| = \left|\int_T^{+\infty} K(u)du\right| < \frac{\epsilon}{M}, \quad \text{para todo} \quad T \geq \Lambda_0. \qquad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2) se tiene la convergencia uniforme de g en $\mathbb{R}$. □

Los dos resultados siguientes, se encuentran completamente demostrados en ([10], pág. 333).

Teorema 1.2. *Sean $f(x,y)$ y D_2f funciones continuas en $[a,\infty) \times [c,d]$. Supongamos que para cada $y \in [c,d]$, la integral $F(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge y la integral $G(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} D_2f(x,y)dx$ converge uniformemente en $[c,d]$. Entonces F es derivable en $[c,d]$ y $F'(y) = G(y)$.*

Teorema 1.3. *Sea $f(x,y)$ una función definida y continua sobre $[a,\infty) \times [c,d]$ y supongamos que $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformemente sobre $[c,d]$. Entonces*

$$\int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

Los siguientes lemas se encuentran demostrados en la publicación [25].

Lema 1.4. *Sea $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa, acotada y sea $K : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ un núcleo normalizado. Entonces*

$$\begin{aligned} \underline{x} = \liminf_{t\to+\infty} x(t) \leq \liminf_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds \\ \leq \limsup_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds \leq \limsup_{t\to+\infty} x(t) = \overline{x}. \end{aligned}$$

Lema 1.5. *Sean K un núcleo normalizado y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa y acotada. Si $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$, entonces*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds = x_0.$$

Teorema 1.6. *(***De Comparación entre dos ecuaciones diferenciales escalares***) Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(t,y)$ y $g(t,y)$ funciones continuas $f,g : D \to \mathbb{R}$ e $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones, f o g, es localmente lipschitziana en D con respecto de la variable y. Sean $y, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t,y)$ e $y' = g(t,y)$. Supongamos que se verifica*

$$g(t,y) \le f(t,y) \quad \text{en } D, \quad \text{y que} \quad z(a) \le y(a).$$

Entonces

$$z(t) \le y(t).$$

Demostración. Ver ([29], Pág. 161).

Lema 1.7. *Sean f, g son funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$ y K un núcleo normalizado que satisface $\int_0^{+\infty} sK(s)ds < +\infty$. Entonces la función*

$$H(t) = \int_0^{+\infty} K(s)\left(\int_{t-s}^{t} f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right)ds,$$

con $t \in [0,+\infty)$, está bien definida, es derivable y su derivada está dada por

$$H'(t) = g(t)\int_0^{+\infty} K(s)f(s+t)ds - f(t)\int_0^{+\infty} K(s)g(t-s)ds.$$

Demostración. En virtud de que f y g son funciones acotadas, se garantiza que existen constantes positivas M_1 y M_2 tal que $|f(t)| \le M_1$ y $|g(t)| \le M_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Veamos que H está bien definida

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty} K(s)\left(\int_{t-s}^{t} f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right)ds\right| \\
\le\ & \int_0^{+\infty} K(s)\int_{t-s}^{t} |f(s+\theta)g(\theta)|\, d\theta ds \\
\le\ & M_1M_2\int_0^{+\infty} sK(s)ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Demostremos ahora que H es derivable, en primer lugar veamos que $\int_0^{+\infty} D_2h(s,t)ds$ converge uniformemente en $[0,+\infty)$, donde $h(s,t) = \displaystyle\int_{t-s}^{t} K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta$. En efecto, usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned}
D_2h(s,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{t-s}^{0} K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta + \int_0^t K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-s}^{0} K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right)\right] \\
&= [-K(s)f(t)g(t-s) + K(s)f(s+t)g(t)\ ] \\
&= [K(s)f(s+t)g(t) - K(s)f(t)g(t-s)\ ]\,.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
|D_2h(s,t)| &\leq |K(s)f(s+t)g(t)| + |K(s)f(t)g(t-s)\ | \\
&\leq 2K(s)M_1M_2.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{+\infty} 2M_1M_2K(s)ds = 2M_1M_2,$$

se concluye por el Criterio de Weierstrass para Convergencia Uniforme de Integrales Impropias, ver ([7], pág. 268), que $\int_0^{+\infty} D_2h(s,t)ds$ converge uniformemente en $[0,+\infty)$. Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
H(t) &= \int_0^{+\infty} K(s)\left(\int_{t-s}^{t} f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right)ds \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_{t-s}^{t} K(s)f(s+\theta)g(\theta)d\theta\right)ds \\
&= \int_0^{+\infty} h(s,t)ds \quad \text{converge para todo } t \in [0,+\infty).
\end{aligned}$$

Entonces por Teorema 1.2, se tiene que H es derivable en cualquier subintervalo $[0,d]$

de $[0,+\infty)$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_0^{+\infty} D_2 h(s,t)ds \\ &= \int_0^{+\infty} [K(s)f(s+t)g(t) - K(s)f(t)g(t-s)\ ]\,ds \\ &= g(t)\int_0^{+\infty} K(s)f(s+t)ds - f(t)\int_0^{+\infty} K(s)g(t-s)ds. \end{aligned}$$

Esto prueba el lema. □

Lema 1.8 (Ahmad, Colemam)**.** *La ecuación logística,*

$$v'(t) = v(t)[b_1(t) - a_{11}(t)v(t)], \tag{1.1}$$

tiene una única solución $u^*(t)$ *tal que para todo* $t \in \mathbb{R}$, $\delta \le u^*(t) \le \Delta$, *donde* Δ *y* δ *son números que satisfacen* $0 < \delta < \dfrac{b_1^l}{a_{11}^u}$ *y* $\dfrac{b_1^u}{a_{11}^l} < \Delta$. *Y si* $u(t)$ *es una solución de la ecuación logística* (1.1) *con* $u(0) > 0$, *entonces* $u^*(t) - u(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$.

Demostración. Ver [2] y [11]. □

El siguiente lema es un resultado, de Gopalsamy y He, que se encuentra en [18]. Se presenta su demostración para mostrar la técnica utilizada.

Lema 1.9. *Sean* K_{11} *un núcleo normalizado,* b_1 *y* a_{11} *funciones no negativas, continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en* $\mathbb{R}$. *Supongamos que* $u(t)$ *es cualquier solución de la ecuación integro–diferencial*

$$v'(t) = v(t)\left[b_1(t) - a_{11}(t)\int_0^{+\infty} K_{11}(s)v(t-s)ds\right], \quad t \ge 0, \tag{1.2}$$

con función inicial $u(t) = \varphi(t)$, *para* $t \le 0$, *donde* $\varphi \in BC^+$. *Entonces* $u(t) > 0$ *para todo* t *en su dominio,* $u(t)$ *está definida en todo el intervalo* $[0,+\infty)$, *y además*

$$\limsup_{t\to+\infty} u(t) \le M_0 = \frac{b_1^u}{a_{11}^l \int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s}ds}.$$

Demostración. Como $u(t)$ es solución la ecuación integro–diferencial (1.2), se cumple que $u'(t) = u(t)P(t)$, donde

$$P(t) = \left[b_1(t) - a_{11}(t)\int_0^{+\infty} K_{11}(s)v(t-s)ds\right].$$

De acá, se deduce que $u(t) = \varphi(0)\exp\left\{\int_0^t P(s)ds\right\}$. Como $\varphi(0) > 0$, tenemos que $u(t) > 0$, para $t \geq 0$ en su dominio. Por la positividad de la solución $u(t)$ de (1.2), se tiene que para todo $t \geq 0$ en su dominio

$$u'(t) \leq b_1^u u(t).$$

Integrando la desigualdad anterior desde $t-s$ hasta t con $t-s \geq 0$, se obtiene

$$u(t-s) \geq u(t)e^{-b_1^u s} \quad \text{para } t \geq s \geq 0. \tag{1.3}$$

Nuevamente, usando la positividad de la solución y la desigualdad anterior obtenemos, de la ecuacioón (1.2), la siguiente desigualdad diferencial para todo t no negativo en el dominio de $u(t)$:

$$\begin{aligned} u'(t) \leq& u(t)\left[b_1^u - a_{11}^l\left(\int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s}ds\right)u(t)\right] \\ =& u(t)\left[b_1^u - B_1 u(t)\right], \end{aligned}$$

donde $B_1 = a_{11}^l\left(\int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s}ds\right)$.
Por Teorema de Comparación 1.6 se tiene que $u(t) \leq z(t)$, donde $z(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística $z'(t) = z(t)\left[b_1^u - B_1 z(t)\right]$ con condición $z(0) = u(0) = \varphi(0)$. En virtud de que la solución $z(t)$ está definida y es acotada en el intervalo $[0,+\infty)$ y por el teorema de prolongación para ecuaciones diferenciales con retardo ver ([19], teorema 3.1, pág. 45), se tiene que $u(t)$ está definido en el intervalo $[0,+\infty)$. Como $\dfrac{b_1^u}{B_1}$ es un atractor global para las soluciones de la ecuación diferencial logística con condiciones iniciales positivas y puesto que $\limsup\limits_{t\to+\infty} u(t) \leq \limsup\limits_{t\to+\infty} z(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t)$, entonces

$$\limsup_{t\to+\infty} u(t) \leq \frac{b_1^u}{B_1} = \frac{b_1^u}{a_{11}^l\int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s}ds}.$$

Así queda demostrado el lema. $\square$

Observación 1.2. *El lema anterior implica que cualquier solución de la ecuación integro–diferencial* (1.2)*, con función inicial en el conjunto* BC^+*, está acotada superiormente en el intervalo* $[0,+\infty)$*. Como la función inicial está acotada superiormente en el intervalo* $(-\infty, 0]$*, entonces para cualquier solución* $v(t)$ *de* (1.2) *con función inicial en* BC^+ *se tiene que* $v^u = \sup\{v(t) : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$*.*

El siguiente lema es un resultado que se encuentra en el artículo [13] de Chunhua Feng. Nosotros damos una prueba distinta a la realizada por él.

Lema 1.10. *Supongamos que K_{11} es un núcleo normalizado, b_1 y a_{11} son funciones no negativas, continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $\mathbb{R}$, además $\mu = \int_0^{+\infty} sK_{11}(s)ds < +\infty$. Si $v(t)$ es la solución de la ecuación integro–diferencial (1.2) con función inicial $v(s) = \varphi(s)$, para $s \leq 0$, donde $\varphi \in BC^+$. Entonces existe un número positivo $\alpha = \alpha(v)$ que depende de la solución $v(t)$, tal que $v(t) \geq \alpha$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $v(t)$ la solución de la ecuación integro–diferencial (1.2) con función inicial $v(s) = \varphi(s)$, para $s \leq 0$. Definamos la siguiente función $\omega(t) = v(t)\exp(-H(t))$, donde $H(t) = \int_0^{+\infty} K_{11}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{11}(\theta+s)\,v(\theta)d\theta\right] ds$, para todo $t \geq 0$. De la observación (1.2) se tiene que $v(t)$ es acotada superiormente en $\mathbb{R}$ y además es positiva. Por hipótesis $a_{11}(t)$ es acotada y $\mu = \int_0^{+\infty} sK_{11}(s)ds < +\infty$. En consecuencia, usando el Lema (1.7) concluimos que la funcion $H(t)$ está bien definida, es derivable en $[0, +\infty)$ y su derivadas está dada por

$$H'(t) = v(t)\int_0^{+\infty} K_{11}(s)a_{11}(t+s)ds - a_{11}(t)\int_0^{+\infty} K_{11}(s)v(t-s)ds.$$

Así, se puede concluir que $\omega(t)$ está bien definida, es derivable y además es positiva en $[0, +\infty)$. Claramente se cumple que $\omega(t) < v(t)$ para todo $t \geq 0$. Probemos que

$$v(t) < \exp(L)\,\omega(t), \quad \text{donde } L = a_{11}^u v^u \mu. \tag{1.4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} v(t) &= \omega(t)\exp\left(\int_0^{+\infty} K_{11}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{11}(\theta+s)v(\theta)d\theta\right] ds\right) \\ &< \omega(t)\exp\left(\int_0^{+\infty} K_{11}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{11}^u v^u d\theta\right] ds\right) \\ &= \omega(t)\exp\left(a_{11}^u v^u\int_0^{+\infty} sK_{11}(s)ds\right) \\ &= \omega(t)\exp\left(a_{11}^u v^u\mu\right) = \omega(t)\exp(L). \end{aligned}$$

Demostremos ahora que $\omega(t)$ está acotada inferiormente por una constante positiva para todo t en $[0, +\infty)$; en efecto, usando la positividad de $v(t)$ y $\omega(t)$ para todo t

en $[0, +\infty)$ y del hecho de que $v(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística con retardo, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= v'(t)\exp(-H(t)) - \omega(t)H'(t) \\ &= \omega(t)\left[b_1(t) - v(t)\int_0^{+\infty} a_{11}(t+s)K_{11}(s)ds\right] \\ &\geq \omega(t)\left[b_1^l - a_{11}^u v(t)\right]. \end{aligned}$$

De esta última expresión y de la desigualdad (1.4), obtenemos que para todo t en el intervalo $[0, +\infty)$ se cumple

$$\omega'(t) > \omega(t)\left(b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,\omega(t)\right).$$

Demostremos que la desigualdad anterior implica que $\omega(t) > z(t)$ para todo $t \geq 0$, donde $z(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística $z'(t) = z(t)\left[b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,z(t)\right]$ con $\omega(0) = z(0)$. En efecto, como $\omega'(0) > z(0)\left(b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,z(0)\right) = z'(0)$ se puede garantizar por la continuidad de $\omega'(t)$ y $z'(t)$, que existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [0, \delta)$ se cumple que $\omega'(t) > z'(t)$, integrando esta desigualdad desde 0 hasta t, se cumple que $\omega(t) > z(t)$ para todo $t \in [0, \delta)$. Si la desigualdad no fuese cierta para todo $t \geq 0$, existiría un primer tiempo $t_1, t_1 > \delta > 0$ tal que $\omega(t) - z(t) > 0$ para todo $0 \leq t < t_1$ y $\omega(t_1) - z(t_1) = 0$. Claramente, de la definición de derivada, se tiene que $(\omega - z)'(t_1) \leq 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \omega'(t_1) &> \omega(t_1)\left[b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,\omega(t_1)\right] \\ &= z(t_1)\left[b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,z(t_1)\right] = z'(t_1). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Con esto se prueba que, $\omega(t) > z(t)$ para todo $t \geq 0$.
En resumen: $z(t) < \omega(t) < v(t)$ y además $\dfrac{b_1^u}{a_{11}^u \exp(L)}$ es un atractor global para las soluciones de la ecuación diferencial logística $z'(t) = z(t)\left[b_1^l - a_{11}^u \exp(L)\,z(t)\right]$, con condiciones iniciales positivas. Esto implica que $\liminf_{t\to+\infty} v(t) \geq \dfrac{b_1^l}{a_{11}^u \exp(L)} = \alpha_1$. De la definición de límite inferior tenemos que existe un número positivo T, tal que para todo $t \geq T$ se tiene $v(t) > \liminf_{t\to+\infty} v(t) - \dfrac{\alpha_1}{2} \geq \dfrac{\alpha_1}{2}$. Claramente $\alpha = \alpha(v) = \min\left\{\dfrac{\alpha_1}{2}, \alpha_2(v)\right\}$, donde $\alpha_2(v) = \min\{v(t) : t \in [0, t]\}$ satisface que $v(t) \geq \alpha$ para todo $t \geq 0$. Así queda demostrado el lema. □

Definición 1.3. *Se dice que la ecuación diferencial* (1.2) *es extremadamente estable, si para cualquiera dos soluciones* $x(t)$ *y* $y(t)$ *de* (1.2) *con funciones iniciales* $x(s) = \varphi(s)$, $y(s) = \psi(s)$ *para* $s \leq 0$, *donde* $\varphi, \psi \in BC^+$, *se satisface que*

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t) - y(t)) = 0.$$

Observación 1.3. *La definición anterior se conoce por muchos autores como globalmente asíntoticamente estable.*

El siguiente lema se encuentra enunciado y demostrado en la publicación [18] de Gopalsamy y He. Este lema garantiza que la ecuación (1.2), bajo ciertas hipótesis es extremadamente estable.

Lema 1.11. *Supongamos que se satisface las hipótesis del Lema 1.9, y además*

$$\int_0^{+\infty} s^2 K_{11}(s)ds < +\infty, \quad y \quad \left(a_{11}^u\right)^2 \sigma M_0 < a_{11}^l,$$

donde $M_0 = \dfrac{b_1^u}{a_{11}^l \int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s}ds}$ *y* $\sigma = \int_0^{+\infty} sK_{11}(s)ds < +\infty$.
Si $u_1(t)$ *y* $u_2(t)$ *son dos soluciones cualquiera de la ecuación* (1.2), *entonces*

$$\lim_{t\to+\infty} (u_1(t) - u_2(t)) = 0.$$

El siguiente resultado se encuentra completamente demostrado en las publicaciones [32] ó [22].

Lema 1.12. *(***Lema de Fluctuaciones***) Sea* $x(t)$ *una función derivable y acotada sobre* (α, ∞). *Entonces existen sucesiones* $\tau_n \to \infty$, $\sigma_n \to \infty$ *tales que*

i) $x'(\sigma_n) \to 0 \quad y \quad x(\sigma_n) \to \overline{x} = \limsup_{t\to+\infty} x(t), \quad$ *cuando* $n \to \infty$.

ii) $x'(\tau_n) \to 0 \quad y \quad x(\tau_n) \to \underline{x} = \liminf_{t\to+\infty} x(t), \quad$ *cuando* $n \to \infty$.

Lema 1.13. *Sean la matriz* $A = (\alpha_{ij})$ *y el vector* $b = col\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ *con* $\alpha_{ij} \geq 0$, *y* $\alpha_{ii}, \beta_i > 0$, $1 \leq i, j \leq r$. *Supongamos que se satisfacen las desigualades*

$$\beta_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_{ij} \left(\frac{\beta_j}{\alpha_{jj}}\right), \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{1.5}$$

Entonces existen números positivos λ_i, $i = 1, \ldots, r$, *y* R *tales que para todo* $j = 1, ..., r$,

$$-\lambda_j \alpha_{jj} + \sum_{i=1, i\neq j}^{r} \lambda_i \alpha_{ij} < -R.$$

Demostración. Ver ([31], teorema 2.2 y corolario 2.3). □

Lema 1.14. *Sean la matriz* $A = (a_{ij})$ *y el vector* $b = col(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ *con* $a_{ij} \geq 0$, *y* $a_{ii}\,, b_i > 0$, $1 \leq i, j \leq r$. *Supongamos que se satisface la desigualdad (1.5). Entonces la matriz* $2D - A$, *donde* D *es la matriz diagonal dada por* $D = diag\,(a_{11}, ..., a_{rr})$, *es invertible y su inversa está dada por* $\sum_{i=1}^{\infty} (AD^{-1} - I)^i$ *la cual es no negativa; debido a que sus entradas son números no negativos.*

Demostración. Ver ([35], lema 4.1). □

Lema 1.15. *Sean* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una función derivable,*
$D = \{t \in (a, b) : f(t) = 0 \neq f'(t)\}$ *y* $g(t) = |f(t)|$. *Entonces* g *es derivable en* $(a, b)\backslash D$, $g'(t) = f'(t)sgn\,(f(t))$ *y* D *es un conjunto discreto y en consecuencia es un conjunto numerable.*

Demostración. La función $\varphi(t) = |t|$ es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $\varphi'(t) = sgn(t)$. Por el Teorema (Regla de la Cadena) la función $g(t) = |f(t)| = (\varphi_0 f)(t)$ es derivable en $(a, b)\backslash D$ y $g'(t) = \varphi'(f(t))f'(t) = sgn(f(t))f'(t)$. Probemos que D es discreto; en efecto, supongamos lo contrario; es decir, exite un punto de acumulación $t_o \in D$. Esto implica que existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en D con $t_n \neq t_0$ para todo n tal que $t_n \to t_0$. De la definición de derivada de la función f en el punto t_0, se tiene que $f'(t_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = 0$, ya que $t_n, t_0 \in D$ y se cumple que $f(t_n) = f(t_0) = 0$ y $t_n \neq t_0$. Esto contradice que $t_0 \in D$. En consecuencia D es discreto y por tanto numerable. Así queda demostrado el lema. □

El siguiente lema se encuentra enunciado y demostrado en la publicación [1], dentro de la prueba del Lema 2.4, página 382.

Lema 1.16. *Sea* $g(t)$ *una función derivable en* $[0, +\infty)$. *Si existe un número positivo* M *tal que* $|g'(t)| \leq M$ *para todo* $t \geq 0$ *y* $\int_0^{+\infty} |g(t)|\,dt < +\infty$, *entonces* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

Lema 1.17. *Para todo $x, y \in (-\infty, \beta]$ se cumple que*

$$(x-y)\left(e^x - e^y\right) \geq e^{-\beta}\left(e^x - e^y\right)^2.$$

Demostración. Sean $x, y \in (-\infty, \beta]$. Aplicando el Teorema del Valor Medio a la funcioń $f(t) = e^t$, se tiene que existe θ con $0 < \theta < 1$ tal que $e^x - e^y = e^{[(1-\theta)x+\theta y]}(x-y)$ ó $(x-y) = (e^x - e^y)\, e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}$. Multiplicando en ambos lados de la igualdad anterior por $e^x - e^y$, se tiene

$$(x-y)\left(e^x - e^y\right) = \left(e^x - e^y\right)^2 e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}. \tag{1.6}$$

Por otro lado, se tiene por hipótesis que $x \leq \beta$ y $y \leq \beta$, por tanto se cumple que

$$(1-\theta)x + \theta y \leq (1-\theta)\beta + \theta\beta = \beta;$$

de acá se obtiene que $e^{-\beta} \leq e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}$, sustituyendo esta desigualdad en (1.6), se tiene que

$$(x-y)\left(e^x - e^y\right) \geq e^{-\beta}\left(e^x - e^y\right)^2.$$

Por lo que queda demostrado el Lema. □

Capítulo 2

Extinción en Sistemas Competitivos No Autonómos con Retardo Infinito.

En este capítulo consideramos los sistemas competitivos de ecuaciones integro–diferenciales de Lotka–Volterra con retardo infinito,

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

$$t \geq 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad (2.1)$$

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

$$t \geq 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad (2.2)$$

junto con la condición inicial

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (2.3)$$

donde $\varphi_i \in BC^+$, $i = 1, \ldots, n$. Para el estudio de estos sistemas, supondremos que siempre será requerida la siguiente hipótesis.

H_0 : Los coeficiente $b_i(t),\ a_{ij}(t),\ 1 \leq i, j \leq n$, son funciones continuas acotadas superior e inferiormente por constantes positivas sobre $\mathbb{R}$. Los núcleos $K_{ij} \colon [0, +\infty) \to$

$[0, +\infty)$, $1 \leq i, j \leq n$, son funciones continuas tales que

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1.$$

Estos sistemas han sido estudiados profundamente por algunos autores, en los que podemos citar [15], [21] y [28], quienes han enfatizado su trabajo sobre la existencia de puntos de equilibrio, soluciones periódicas, cuasi-periódicas y han demostrado teoremas de estabilidad global. También es conocido que si se satisface la hipótesis H_0, las soluciones de estos sistemas existen y son únicas ver [12], [19] y [30].

Además de la hipótesis H_0, consideremos las siguientes hipótesis adicionales:

H_1 : Para cada entero k, $2 \leq k \leq n$, existe un entero i_k, $i_k < k$ tal que para cualquier entero j, $1 \leq j \leq k$, se satisface la desigualdad

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_k j}^u}.$$

H_2 : $\mu_{ij} = \displaystyle\int_0^{\infty} sK_{ij}(s)ds < \infty, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$

H_3 : $\int_0^{\infty} s^2 K_{11}(s)ds < \infty$ y $a_{11}^l > M_0 \left(a_{11}^u\right)^2 \mu_{11}$, donde $M_0 = \dfrac{b_1^u}{a_{11}^l \int_0^{\infty} K_{11} e^{-b_1^u s} ds}$.

El objetivo de este capítulo es desarrollar de forma exhaustiva la publicación [23], donde se obtuvieron los siguientes resultados:

1) Si las hipótesis H_0, H_1 y H_2 se satisfacen, entonces la solución *col* $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (2.1), con condición inicial (2.3) tiene la propiedad que para cada i, $2 \leq i \leq n$, se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u^*(t)$ es la solución de la ecuación diferencial logística descrita en el Lema 1.8.

2) Si las hipótesis H_0, H_1, H_2 y H_3 se satisfacen, entonces la solución $x(t) =$ *col* $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (2.2), con condición inicial (2.3) tiene la propiedad que para cada i, $2 \leq i \leq n$, se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente

cuando $t \to +\infty$ y $u(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u(t)$ es cualquier solución de la ecuación integro–diferencial

$$u'(t) = u(t)\left[b_1(t) - a_{11}(t)\int_0^{\infty} K_{11}(s)u(t-s)ds\right]. \tag{2.4}$$

.

Al final de este capítulo damos ejemplos que ilustran los resultados anteriores.

§2.1. Positividad, prolongación y acotamiento de las soluciones de los Sistemas (2.1) y (2.2).

En esta sección estudiamos las soluciones de los sistemas (2.1) y (2.2), junto con la condición inicial (2.3) y demostramos que dichas soluciones son positivas y prolongable sobre todo el intervalo $(0, +\infty)$. También se prueba que las sumas de las componentes de cada solución de estos sistemas, son acotadas superior e inferiormente por constantes positivas.

En todos los resultados de esta sección, se supone que se satisface la hipótesis H_0.

Lema 2.1. *Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$ es la solución del sistema (2.1) con condición inicial* (2.3)*, entonces $x_i(t) > 0$ para todo t en el intervalo maximal de existencia, con $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Cada ecuación diferencial del sistema (2.1), se puede escribir como $x_i'(t) = x_i(t)P_i(t)$, donde

$$P_i(t) = \left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad i = 1, ..., n.$$

De acá se deduce que $x_i(t) = x_i(0)\exp\left\{\int_0^t P_i(s)ds\right\} \quad i = 1, ..., n$. Como $x_i(0) = \varphi_i(0) > 0$, tenemos que $x_i(t) > 0$, para $i = 1, ..., n$ y t perteneciente al intervalo maximal de existencia. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 2.2. *Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$ es la solución del sistema* (2.2) *con condición inicial* (2.3)*, entonces $x_i(t) > 0$ para todo t en el intervalo maximal de existencia, con $i = 1, ..., n$.*

Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 2.1. □

Lema 2.3. *Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ es la solución del sistema (2.1) con condiciones iniciales (2.3), entonces existen números positivos M_i con $1 \leq i \leq n$, tales que para cualquier i, $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \leq M_i$ para todo $t \in (-\infty, \beta)$, donde $[0, \beta)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$.*

Demostración. Sea $M_i > \text{máx}\left\{\varphi_i^u, \dfrac{2b_i^u}{a_{ii}^l}\right\}$, $1 \leq i \leq n$. Afirmación: $x_i(t) < M_i$, para todo $t \in (-\infty, \beta)$. En efecto, claramente $x_i(t) < M_i$ para $t \in (-\infty, 0]$. Por lo tanto, esta desigualdad se satisface para todo t cerca de cero y $t \in (0, \beta)$. Si esto no se cumple para todo $t \in (0, \beta)$, entonces existe un entero p y un número t_1, $0 < t_1 < \beta$, tal que $x_i(t) < M_i$, $i = 1, ..., n$, para $0 < t < t_1$ y $x_p(t_1) = R_p$. Por la definición de derivada se tiene que $x_p'(t_1) \geq 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} x_p'(t_1) &= x_p(t_1)\left[b_p(t_1) - a_{pp}(t_1)x_p(t_1) - \sum_{j=1 j\neq p}^{n} a_{pj}(t_1)\int_{-\infty}^{t_1} K_{pj}(t_1 - s)x_j(s)ds\right] \\ &\leq R_p\left[b_p^u - a_{pp}^l R_p\right] = R_p a_{pp}^l\left[\frac{b_p^u}{a_{pp}^l} - R_p\right] < -R_p b_p^u < 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Así para $1 \leq i \leq n$ y $t \in (-\infty, \beta)$, $x_i(t) < M_i$. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 2.4. *Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ es la solución del sistema (2.2) con condiciones iniciales (2.3), entonces existen números positivos $\widehat{M_i}$ con $1 \leq i \leq n$ tales que para cualquier i, $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \leq \widehat{M_i}$ para todo $t \in (-\infty, \beta)$, donde $[0, \beta)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$.*

Demostración. Se sigue de la positividad de la solución $x(t)$ del sistema (2.2) con las condiciones iniciales (2.3), que para t perteneciente al intervalo maximal de existencia,

$$x_i'(t) < b_i^u x_i(t), \quad i = 1, ..., n.$$

De acá, se deriva que $x_i(t) < x_i(t-s)\exp\left(b_i^u s\right)$ para $0 \leq s \leq t < \beta$ y $i = 1, ..., n$. De está desigualdad y la positividad de la solución $x(t)$, se tiene que para $i = 1, ..., n$,

$$x_i'(t) \leq x_i(t)\gamma_i a_{ii}^l\left[\frac{b_i^u}{\gamma_i a_{ii}^l} - x_i(t)\right], \quad \text{donde} \quad \gamma_i = \int_0^{+\infty} K_{ii}(s)\exp\left(-b_i^u s\right)ds.$$

Sea $\widehat{M_i} > \text{máx}\left\{\varphi_i^u, \dfrac{2b_i^u}{\gamma_i a_{ii}^l}\right\}$, $1 \leq i \leq n$. Por el mismo argumento usado en la prueba del Lema 2.3 y por la desigualdad anterior, se obtiene que para todo $t \in (-\infty, \beta)$, $x_i(t) < \widehat{M_i}$, $1 \leq i \leq n$. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 2.5. *Si $x(t)$ es la solución del sistema* (2.1) *con condición inicial* (2.3)*, entonces el intervalo maximal* $[0, \beta) = [0, +\infty)$.

Demostración. En virtud de los Lemas 2.1 y 2.3, se tiene que $0 < x_i(t) \leq M_i$ para $i = 1, ..., n$ y t perteneciente al intervalo maximal de existencia $[0, \beta)$. Por tanto, si fuese $\beta < +\infty$ se tendria que para cualquier $t \in [0, \beta)$, el par $(t, x(t))$ perteneceria al subconjunto compacto $\in [0, \beta] \times [0, M_1] \times [0, M_2] \times ... \times [0, M_n]$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y esto contradice el teorema de prolongación para ecuaciones diferenciales con retardo, ver ([19], teorema 3.1, pág 45). En consecuencia $[0, \beta) = [0, +\infty)$. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 2.6. *Si $x(t)$ es la solución del sistema* (2.2) *con condición inicial* (2.3)*, entonces el intervalo maximal* $[0, \beta) = [0, +\infty)$.

Demostración. La demostración es análoga a la prueba del Lema 2.5, ya que por los Lemas 2.2 y 2.4 se tiene $0 < x_i(t) \leq \widehat{M_i}$ para $i = 1, ..., n$ con t perteneciente al intervalo maximal de existencia $[0, \beta)$. □

Lema 2.7. *Supongamos que la hipótesis H_2 se satisface. Si $x(t) = col\,(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ es la solución del sistema* (2.1) *con condiciones iniciales (2.3), entonces existen números positivos δ y Δ tal que $\delta \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Gracias a los Lemas 2.3 y 2.5, se tiene que para i, $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) < M_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pongamos $\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i$, así

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta \quad \text{para } \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Veamos ahora la existencia de $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$. En efecto; para cada i, $1 \leq i \leq n$, definamos la función

$$w_i(t) = x_i(t) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} H_{ij}(t)\right) \tag{2.6}$$

en el intervalo $[0,+\infty)$, donde $H_{ij}(t)=\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t}a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds$ con $1\leq i,j\leq n$, $i\neq j$. En vista de que para cada i, $1\leq i\leq n$, $x_i(t)$ es no negativa y acotada superiormente en $\mathbb{R}$, las funciones $a_{ij}(t)$ con $1\leq i,j\leq n$, $i\neq j$ son acotada superior e inferiormente por constantes positivas y se cumple la hipótesis H_2, entonces por el lema 1.7 se tiene que $H_{ij}(t)$, $1\leq i,j\leq n$, están bien definidas y son derivables en $[0,+\infty)$. Por lo anterior las funciones $w_i(t)$ con $1\leq i\leq n$, están bien definidas, son no negativas y derivables para $t\geq 0$. Afirmación. Para cada i, $1\leq i\leq n$ y $t\geq 0$,

$$w_i(t)<x_i(t)<w_i(t)\exp\left(L_i\right), \tag{2.7}$$

donde $L_i=\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}^uM_j\mu_{ij}$. En efecto; claramente, $w_i(t)<x_i(t)$ para todo $t\geq 0$. Para probar la otra desigualdad, consideremos la función (2.6) de la cual se obteniene que para cada i con $1\leq i\leq n$,

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= w_i(t)\exp\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t}a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds\right)\\
&< w_i(t)\exp\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t}a_{ij}^uM_jd\theta\right]ds\right)\\
&= w_i(t)\exp\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}^uM_j\int_0^{+\infty}sK_{ij}(s)ds\right)\\
&= w_i(t)\exp\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}^uM_j\mu_{ij}\right)=w_i(t)\exp\left(L_i\right).
\end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación.

Sea δ cualquier número positivo tal que

$$\delta<\text{mín}\left\{\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(0)\exp\left(-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}^u\varphi_j^u\mu_{ij}\right),\frac{b_1^l}{2\sum\limits_{j=1}^{n}e^{L_j}a_{1j}^u},\frac{b_2^l}{2\sum\limits_{j=1}^{n}e^{L_j}a_{2j}^u},\cdots,\frac{b_n^l}{2\sum\limits_{j=1}^{n}e^{L_j}a_{nj}^u}\right\}.$$

Afirmamos que $\delta<\sum\limits_{i=1}^{n}w_i(t)$ para todo $t\geq 0$. En efecto, esta desigualdad se satisface para t cerca de cero y $t > 0$, ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i(0) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} \int_{-s}^{0} a_{ij}(\theta+s) K_{ij}(s) x_j(\theta) d\theta ds\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} \int_{-s}^{0} a_{ij}(\theta+s) K_{ij}(s) \varphi_j(\theta) d\theta ds\right) \\
&> \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} \int_{-s}^{0} a_{ij}^u K_{ij}(s) \varphi_j^u d\theta ds\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}^u \varphi_j^u \int_0^{+\infty} s K_{ij}(s) ds\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}^u \varphi_j^u \mu_{ij}\right) > \delta.
\end{aligned}$$

Si la desigualdad $\delta < \sum_{i=1}^{n} w_i(t)$ no se cumple para todo $t > 0$, entonces existe un número t_1, $t_1 > 0$, tal que $\delta < \sum_{i=1}^{n} w_i(t)$ para $0 \leq t < t_1$ y $\delta = \sum_{i=1}^{n} w_i(t_1)$. De la definición de derivada se obtiene que $\sum_{i=1}^{n} w_i'(t_1) \leq 0$. Por otro lado, en virtud de la desigualdad $w_j(t_1) < \delta$ para cada j, con $1 \leq j \leq n$, y puesto que para cada i, con $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
w_i'(t_1) &= w_i(t_1)\left(b_i(t_1) - a_{ii}(t_1)x_i(t_1) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j(t_1) \int_0^{+\infty} a_{ij}(t_1+s) K_{ij}(s) ds\right) \\
&\geq w_i(t_1)\left(b_i^l - a_{ii}^u x_i(t_1) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j(t_1) a_{ij}^u\right) \\
&= w_i(t_1)\left(b_i^l - \sum_{j=1}^{n} x_j(t_1) a_{ij}^u\right) \\
&> w_i(t_1)\left(b_i^l - \sum_{j=1}^{n} e^{L_j} w_j(t_1) a_{ij}^u\right) \\
&> w_i(t_1)\left(b_i^l - \sum_{j=1}^{n} e^{L_j} \delta a_{ij}^u\right).
\end{aligned}$$

Sacando factor común $\sum_{j=1}^{n} e^{L_j} a_{ij}^u$, se obtiene que

$$\begin{aligned} w_i'(t_1) &> w_i(t_1) \sum_{j=1}^{n} e^{L_j} a_{ij}^u \left(\frac{b_i^l}{\sum_{j=1}^{n} e^{L_j} a_{ij}^u} - \delta \right) \\ &> w_i(t_1) \frac{b_i^l}{2} > 0. \end{aligned}$$

Lo cual contradice que $\sum_{i=1}^{n} w_i'(t_1) \leq 0$. Así para todo $t \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i(t) > \delta$. De esta desigualdad y del hecho de que $w_i(t) < x_i(t)$ para todo $t \geq 0$, se cumple que

$$\delta < \sum_{i=1}^{n} x_i(t). \tag{2.8}$$

Hemos demostrado que existen números positivos δ y Δ tales que se satisfacen las desigualdades (2.5) y (2.8). Con esto queda demostrado el lema. $\square$

Lema 2.8. *Supongamos que la hipótesis H_2 se satisface. Si $x(t) = col\,(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ es la solución del sistema* (2.2) *con condiciones iniciales (2.3), entonces existen números positivos $\widehat{\delta}$ y $\widehat{\Delta}$ tal que $\widehat{\delta} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \widehat{\Delta}$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Del Lema 2.4 se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) < \widehat{M}_i$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, definamos $w_i(t) = x_i(t) \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} H_{ij}(t)\right)$, donde $H_{ij}(t) = \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta + s) x_j(\theta) d\theta\right] ds$, con $1 \leq i, j \leq n$. Entonces por el mismo argumento usado en la prueba del lema anterior se tiene que para i, $1 \leq i \leq n$ y $t \geq 0$, $w_i(t)$ está bien definida, es no negativa, diferenciable y $w_i(t) < x_i(t) < e^{\widehat{L}_i} w_i(t)$, donde $\widehat{L}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u \widehat{M}_j \mu_{ij}$. Tomando $\widehat{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{M}_j$ y $\widehat{\delta}$ un número positivo tal que

$$\widehat{\delta} < \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u \varphi_j^u \mu_{ij}\right), \frac{b_1^l}{2\sum_{j=1}^{n} e^{\widehat{L}_j} a_{1j}^u}, \cdots, \frac{b_n^l}{2\sum_{j=1}^{n} e^{\widehat{L}_j} a_{nj}^u} \right\},$$

se demuestra, en forma análoga al Lema 2.7, que $\widehat{\delta} < \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \widehat{\Delta}$ para todo $t \geq 0$. Esto prueba el lema. $\square$

§2.2. Resultados principales.

En esta sección se exponen los resultados principales de la publicación [23], específicamente se prueba que para cualquier solución $x(t) = col\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$ del sistema (2.1) ó del sistema (2.2) con condiciónes iniciales (2.3), se satisfacen que para cada i con $2 \leq i \leq n$, las especies $x_i(t)$ se extinguen, mientras que $x_1(t)$ se estabiliza a una solución $u^*(t)$.

§2.2.1. Extinción

Proposición 2.1. *Supongamos que las hipótesis H_0, H_1 y H_2 se satisfacen. Si $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es la solución del sistema* (2.1) *con condiciones inicial* (2.3)*, entonces para todo i, $2 \leq i \leq n$, se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Además, existe un número positivo $\alpha = \alpha(x)$ tal que $x_1(t) \geq \alpha$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Usaremos una modificación al razonamiento usado en [27] para demostrar que para i, $2 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. La prueba se realizará por inducción. Primero demostremos que $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Sea $i = i_n$ dado por la hipótesis H_1. Por tanto, para j, $1 \leq j \leq n$, se cumple que $b_n^u a_{ij}^u - b_i^l a_{nj}^l < 0$. En consecuencia, podemos denotar por $\max\left\{b_n^u a_{i1}^u - b_i^l a_{n1}^l, \ldots, b_n^u a_{in}^u - b_i^l a_{nn}^l\right\} = -\alpha_n$, donde $\alpha_n > 0$. Definamos en el intervalo $[0, +\infty)$ la función

$$w_n(t) \quad = \quad (x_i(t))^{-b_n^u} \left(x_n(t)\right)^{b_i^l} \exp\left(H_{ij}(t) - G_{ij}(t)\right);$$

donde

$$H_{ij}(t) = b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta + s) x_j(\theta) d\theta\right] ds$$

y

$$G_{ij}(t) = b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{nj}(\theta + s) x_j(\theta) d\theta\right] ds.$$

Por los Lemas 2.1 y 2.3, junto con las hipótesis H_0 y H_2, se satisfacen los requerimientos del Lema 1.7, garantizando que $H_{ij}(t)$ y $G_{ij}(t)$ con $1 \leq i, j \leq n$, están bien definidas y son derivables en $[0,+\infty)$. En consecuencia $w_n(t)$ está bien definida, es positiva y diferenciable para $t \geq 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\ln(w_n(t)) &= -b_n^u \ln(x_i(t)) + b_i^l \ln(x_n(t)) \\
&\quad +b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right] ds \\
&\quad -b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{nj}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right] ds.
\end{aligned}$$

Aplicando derivadas a ambos lados de la ecuación anterior se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{w_n'(t)}{w_n(t)} &= -b_n^u \frac{x_i'(t)}{x_i(t)} + b_i^l \frac{x_n'(t)}{x_n(t)} - b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds \\
&\quad +b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)a_{ij}(t+s)ds \\
&\quad +b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)x_j(t-s)ds \\
&\quad -b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)a_{nj}(t+s)ds.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dfrac{x_i'(t)}{x_i(t)}$ y $\dfrac{x_n'(t)}{x_n(t)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
w_n'(t) &= w_n(t) \Bigg[-b_n^u \left(b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right) \\
&\quad +b_i^l \left(b_n(t) - a_{nn}(t)x_n(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)x_j(t-s)ds\right) \\
&\quad -b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds + b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)a_{ij}(t+s)ds \\
&\quad +b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)x_j(t-s)ds - b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)a_{nj}(t+s)ds\Bigg] \\
&= w_n(t) \Bigg[-b_n^u b_i(t) + b_n^u a_{ii}(t)x_i(t) + b_n^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)a_{ij}(t+s)ds \\
&\quad +b_i^l b_n(t) - b_i^l a_{nn}(t)x_n(t) - b_i^l \sum_{j=1}^{n-1} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s)a_{nj}(t+s)ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Cambiando los coeficientes $b_i(t)$, $a_{nj}(t)$, $a_{ij}(t)$ y $b_n(t)$ por b_i^l, a_{nj}^l, a_{ij}^u y b_n^u para todo j, $1 \leq j \leq n$, respectivamente, nos queda la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} w_n'(t) &\leq w_n(t)\left[-b_n^u b_i^l + \sum_{j=1}^{n} b_n^u a_{ij}^u x_j(t) + b_i^l b_n^u - \sum_{j=1}^{n} b_i^l a_{nj}^l x_j(t)\right] \\ &= w_n(t)\sum_{j=1}^{n}\left(b_n^u a_{ij}^u - b_i^l a_{nj}^l\right) x_j(t) \\ &\leq w_n(t)\,\text{máx}\left\{b_n^u a_{i1}^u - b_i^l a_{n1}^l, ..., b_n^u a_{in}^u - b_i^l a_{nn}^l\right\}\sum_{j=1}^{n} x_j(t) \\ &< -w_n(t)\alpha_n\delta; \quad \text{por el Lema 2.7.} \end{aligned}$$

Así, $\dfrac{d}{dt}\left(w_n(t)\exp\left(\alpha_n\delta t\right)\right) < 0$. Integrando esta desigualdad desde 0 hasta t, se obtiene

$$w_n(t) \leq w_n(0)\exp\left(-\alpha_n\delta t\right). \tag{2.9}$$

Por otro lado, para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} w_n(t) &\geq (x_i(t))^{-b_n^u}(x_n(t))^{b_i^l}\exp\left(-b_i^l\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^{+\infty} K_{nj}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{nj}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds\right) \\ &\geq (x_i(t))^{-b_n^u}(x_n(t))^{b_i^l}\exp\left(-b_i^l\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^{+\infty} a_{nj}^u M_j s K_{nj}(s)ds\right) \\ &= (x_i(t))^{-b_n^u}(x_n(t))^{b_i^l}\exp\left(-b_i^l\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}^u M_j\mu_{nj}\right) = (x_i(t))^{-b_n^u}(x_n(t))^{b_i^l}K, \end{aligned}$$

donde $K = \exp\left(-b_i^l\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}^u M_j\mu_{nj}\right)$. Así para todo $t \geq 0$

$$w_n(t) \geq K\left(x_i(t)\right)^{-b_n^u}\left(x_n(t)\right)^{b_i^l}. \tag{2.10}$$

De las desigualdades (2.9) y (2.10) se obtiene que para todo $t \geq 0$

$$\left(x_n(t)\right)^{b_i^l} \leq K^{-1}\left(x_i(t)\right)^{b_n^u} w_n(0)e^{-\alpha_n\delta t} \leq K^{-1}\left(M_i\right)^{b_n^u} w_n(0)e^{-\alpha_n\delta t}.$$

De acá se concluye que $x_n(t) \leq T_n e^{-\gamma_n t}$ para todo $t \geq 0$, donde $T_n = \left(K^{-1}\left(M_i\right)^{b_n^u} w_n(0)\right)^{\frac{1}{b_1^l}}$ y $\gamma_n = \dfrac{\alpha_n\delta}{b_1^l} > 0$. En consecuencia, $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$.

Ahora supongamos que para $j, r < j \leq n$, se satisface la desigualdad $x_j(t) \leq T_j \exp(-\gamma_j t)$ para todo $t \geq 0$ y probemos que $x_r(t) \leq T_r \exp(-\gamma_r t)$ para todo $t \geq 0$ y $1 < r < n$. En efecto, sea $i = i_r$ dado por la hipótesis H_1. Por lo tanto para j, $1 \leq j \leq r$, se tiene que $b_r^u a_{ij}^u - b_i^l a_{rj}^l < 0$, así $-\alpha_r = \text{máx}\left\{b_r^u a_{i1}^u - b_i^l a_{r1}^l, ..., b_r^u a_{ir}^u - b_i^l a_{rr}^l\right\}$, donde $\alpha_r > 0$. Definamos la función

$$\begin{aligned} w_r(t) &= (x_i(t))^{-b_r^u} (x_r(t))^{b_i^l} \exp\left(b_r^u \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds \right. \\ & \left. \quad - b_i^l \sum_{j=1, j\neq r}^{n} \int_0^{+\infty} K_{rj}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{rj}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds \right). \end{aligned}$$

Entonces por el mismo argumento usado en la función $w_n(t)$, se tiene

$$w_r'(t) \leq w_r(t) \left[\sum_{j=1}^{n} \left(b_r^u a_{ij}^u - b_i^l a_{rj}^l\right) x_j(t)\right].$$

Claramente $\sum\limits_{j=1}^{r} \left(b_r^u a_{ij}^u - b_i^l a_{rj}^l\right) x_j(t) \leq -\alpha_r \sum\limits_{j=1}^{r} x_j(t)$. Como $\delta < \sum\limits_{j=1}^{r} x_j(t) + \sum\limits_{j=r+1}^{n} x_j(t)$ y $\sum\limits_{j=r+1}^{n} x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, entonces existe t_1, $t_1 > 0$, tal que $\sum\limits_{j=1}^{r} x_j(t) > \dfrac{\delta}{2}$ para todo $t \geq t_1$. Escojamos $\beta > 0$ tal que $\beta < \dfrac{\delta \alpha_r}{2}$. Como $\sum\limits_{j=r+1}^{n} x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, existe t_2, $t_2 > 0$, tal que para $t \geq t_2$, se cumple que $\sum\limits_{j=r+1}^{n} \left(b_r^u a_{ij}^u - b_i^l a_{rj}^l\right) x_j(t) < \beta$. Por tanto para $t \geq \text{máx}\{t_1, t_2\} = \bar{t}$, se tiene $\dfrac{d}{dt}\left(w_r(t) \exp(\rho t)\right) \leq 0$, donde $\rho = \dfrac{\delta \alpha_r}{2} - \beta > 0$. Integrando desde t hasta $\bar{t}$, se obtiene

$$w_r(t) \leq K \exp\{-\rho\left(t - \bar{t}\right)\}, \tag{2.11}$$

donde $K = w_r(\bar{t})$. Por otro lado para todo $t, t \geq 0$

$$w_r(t) \geq (x_i(t))^{-b_r^u} (x_r(t))^{b_i^l} \exp\left(-b_i^l \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}^u M_j \mu_{rj}\right) = (x_i(t))^{-b_r^u} (x_r(t))^{b_i^l} H, \tag{2.12}$$

donde $H = \exp\left(-b_i^l \sum\limits_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj}^u M_j \mu_{rj}\right)$. De las desigualdades (2.11) y (2.12) se obtiene

$$x_r(t) \leq T_r \exp\left\{-\gamma_r\left(t - \bar{t}\right)\right\}$$

para todo $t \geq \bar{t}$, donde T_r y γ_r son constantes positivas. En consecuencia, $x_r(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Esto prueba que para i, $2 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Sólo falta demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha$ para todo $t \geq 0$. En efecto, por el Lema 2.7 se tiene que, $\delta \leq \sum_{j=1}^{n} x_j(t)$ y como $\lim_{t\to+\infty} \sum_{j=2}^{n} x_j(t) = 0$, entonces $\delta \leq \liminf_{t\to+\infty} x_1(t)$. Usando el mismo argumento que se dío al final de la prueba del Lema 1.10, concluimos que existe $\alpha = \alpha(x) > 0$ tal que $x_1(t) \geq \alpha$ para todo $t \geq 0$. Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Proposición 2.2. *Supongamos que las hipótesis H_0, H_1, H_2 se satisfacen. Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es la solución del sistema (2.2) con condiciones iniciales (2.3), entonces para todo i, $2 \leq i \leq n$ se cumple que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$. Además, existe un número positivo $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x)$ tal que $x_1(t) \geq \overline{\alpha}$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Para probar que para i con $2 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, trabajemos de forma análoga a la prueba de la Proposición 2.1. Probemos por inducción que para $i = 2, ..., n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Primero demostremos que $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Sea $i = i_n$ dado por la hipótesis H_1. Por lo que se cumple que para j con $1 \leq j \leq n$, $b_n^u a_{ij}^u - b_i^l a_{nj}^l < 0$, así $\max\left\{b_n^u a_{i1}^u - b_i^l a_{n1}^l, \ldots, b_n^u a_{in}^u - b_i^l a_{nn}^l\right\} = -\alpha_n$, donde $\alpha_n > 0$. Definamos en el intervalo $[0, +\infty)$ la función

$$w_n(t) \;=\; (x_i(t))^{-b_n^u} (x_n(t))^{b_i^l} \exp\left(\widehat{H}_{ij}(t) - \widehat{G}_{ij}(t)\right);$$

donde

$$\widehat{H}_{ij}(t) = b_n^u \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta + s) x_j(\theta) d\theta\right] ds$$

y

$$\widehat{G}_{ij}(t) = b_i^l \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{nj}(\theta + s) x_j(\theta) d\theta\right] ds.$$

Trabajando de forma análoga a la demostración de la Proposición 2.1, se obtiene que

$w_n(t)$ está bien definida, es positiva y diferenciable para $t \geq 0$. Además

$$\begin{aligned}
\ln\left(w_n(t)\right) &= -b_n^u \ln\left(x_i(t)\right) + b_i^l \ln\left(x_n(t)\right) \\
&\quad + b_n^u \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds \\
&\quad - b_i^l \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{nj}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds.
\end{aligned}$$

Derivando ambos lados de la igualdad anterior, despejando $w_n'(t)$ y sustituyendo $\dfrac{x_i'(t)}{x_i(t)}$, $\dfrac{x_n'(t)}{x_n(t)}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
w_n'(t) &= w_n(t) \left[-b_n^u \left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) x_j(t-s) ds \right) \right. \\
&\quad + b_i^l \left(b_n(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) x_j(t-s) ds \right) \\
&\quad - b_n^u \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) x_j(t-s) ds + b_n^u \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds \\
&\quad \left. + b_i^l \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) x_j(t-s) ds - b_i^l \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) a_{nj}(t+s) ds \right] \\
&= w_n(t) \left[-b_n^u b_i(t) + b_n^u \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds \right. \\
&\quad \left. + b_i^l b_n(t) - b_i^l \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \int_0^{+\infty} K_{nj}(s) a_{nj}(t+s) ds \right] \\
&\leq w_n(t) \left[-b_n^u b_i^l + \sum_{j=1}^{n} b_n^u a_{ij}^u x_j(t) + b_i^l b_n^u - \sum_{j=1}^{n} b_i^l a_{nj}^l x_j(t) \right] \\
&= w_n(t) \sum_{j=1}^{n} \left(b_n^u a_{ij}^u - b_i^l a_{nj}^l \right) x_j(t) \\
&\leq w_n(t) \max \left\{ b_n^u a_{i1}^u - b_i^l a_{n1}^l, ..., b_n^u a_{in}^u - b_i^l a_{nn}^l \right\} \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \\
&< -w_n(t) \alpha_n \delta.
\end{aligned}$$

De acá se puede concluir que

$$w_n(t) \leq w_n(0) \exp\left(-\overline{\alpha}_n \delta t\right). \tag{2.13}$$

Por otro lado, de forma análoga a la proposición anterior se prueba que para todo $t \geq 0$,

$$w_n(t) \geq K\left(x_i(t)\right)^{-b_n^u}\left(x_n(t)\right)^{b_i^l}, \tag{2.14}$$

donde $K = \exp\left(-b_i^l \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^u \widehat{M}_j \mu_{nj}\right)$. Combinando las desigualdades (2.13) y (2.14) se obtiene que para todo $t \geq 0$, $x_n(t) \leq T_n e^{-\gamma_n t}$, donde $T_n = \left[K^{-1}\left(\widehat{M}_i\right)^{b_n^u} w_n(0)\right]^{\frac{1}{b_1^l}}$ y $\gamma_n = \dfrac{\alpha_n \widehat{\delta}}{b_1^l} > 0$. En consecuencia, $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$.

Ahora supongamos que para $j, r < j \leq n$, se satisface la desigualdad $x_j(t) \leq T_j \exp\left(-\gamma_j t\right)$ para todo $t \geq 0$ y probemos que $x_r(t) \leq T_r \exp\left(-\gamma_r t\right)$ para todo $t \geq 0$ y $1 < r < n$. En efecto, sea $i = i_r$ dado por la hipótesis H_1. Por tanto para $j = 1, ..., r$, se tiene que $b_r^u a_{ij}^u - b_i^l a_{rj}^l < 0$, así $-\alpha_r = \text{máx}\left\{b_r^u a_{i1}^u - b_i^l a_{r1}^l, ..., b_r^u a_{ir}^u - b_i^l a_{rr}^l\right\}$, donde $\alpha_r > 0$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} w_r(t) &= \left(x_i(t)\right)^{-b_r^u}\left(x_r(t)\right)^{b_i^l} \exp\left(b_r^u \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds \right. \\ &\quad \left. -b_i^l \sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} K_{rj}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{rj}(\theta+s) x_j(\theta) d\theta\right] ds\right). \end{aligned}$$

De forma análoga para $t \geq \text{máx}\left\{t_1, t_2\right\} = \overline{t}$,

$$w_r(t) \leq K \exp\{-\rho\left(t - \overline{t}\right)\}, \tag{2.15}$$

donde $K = w_r(\overline{t})$ y $\rho = \dfrac{\widehat{\delta}\alpha_r}{2} - \beta > 0$. Por otro lado para todo $t, t \geq 0$

$$w_r(t) \geq \left(x_i(t)\right)^{-b_r^u}\left(x_r(t)\right)^{b_i^l} \exp\left(-b_i^l \sum_{j=1}^{n} a_{rj}^u \widehat{M}_j \mu_{rj}\right) = \left(x_i(t)\right)^{-b_r^u}\left(x_r(t)\right)^{b_i^l} H, \tag{2.16}$$

donde $H = \exp\left(-b_i^l \sum_{j=1}^{n} a_{rj}^u \widehat{M}_j \mu_{rj}\right)$. De las desigualdades (2.15) y (2.16) se obtiene

$$x_r(t) \leq T_r \exp\left\{-\gamma_r\left(t - \overline{t}\right)\right\}$$

para todo $t \geq \bar{t}$, donde T_r y γ_r son constantes positivas. En consecuencia, $x_r(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Esto prueba que para $i = 2, ..., n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Para demostrar que existe $\overline{\alpha} > 0$ tal que $x_1(t) \geq \overline{\alpha}$ para todo $t \geq 0$, se hace de forma análoga a la prueba de la Proposición 2.1 utilizando el Lema 2.8. Esto completa la prueba de la proposición. □

§2.2.2. Comportamiento asintótico.

Teorema 2.9. *Supongamos que las hipótesis H_0, H_1 y H_2 se satisfacen. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema* (2.1) *con la condición inicial (2.3), tiene la propiedad para i, $2 \leq i \leq n$, se cumple $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ donde $u^*(t)$ es la solución de la ecuación diferencial logística descrita en el lema 1.8.*

Demostración. Sea $x(t) = col\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ la solución del sistema (2.1) con la condición inicial (2.3). Por la Proposición 2.1 existe un número positivo α tal que $x_1(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq 0$ y $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ para $i = 2, \ldots, n$. Por tanto, $x_1(t)$ está acotada inferiormente y más aún por Lema 2.3, está acotada superiormente. En consecuencia $x_1(t)$ esta acotada superior e inferiormente por constantes positivas. Sólo nos falta probar que $\lim\limits_{t\to+\infty} (x_1(t) - u^*(t)) = 0$. Como $x_1'(t) \leq x_1(t)\,[b_1(t) - a_{11}(t)x_1(t)]$, se sigue por el Teorema de Comparación 1.6, que $x_1(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq 0$; donde $u(t)$ es la solución de la ecuación diferencial lógística $z'(t) = z(t)\,[b_1(t) - a_{11}(t)z(t)]$ con $u(0) = x_1(0)$. Claramente la solución $u(t)$ está acotada superior e inferiormente por constantes positivas. Definamos la función V sobre el intervalo $[0, +\infty)$ como

$$V(t) = V(x(t), u(t)) = -\ln\left(\frac{x_1(t)}{u(t)}\right) + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^u \int_0^\infty \left(\int_{t-\theta}^{t} K_{1j}(\theta)x_j(s)ds\right) d\theta.$$

Veamos que V está bien definida, es positiva, acotada superiormente y es derivable en $[0, +\infty)$. En efecto, por ser $x_1(t), u(t)$ derivables, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas y satisfacen $x_1(t) \leq u(t)$, se tiene que $G(t) = -\ln\left(\dfrac{x_1(t)}{u(t)}\right)$ está bien definida, $0 \leq G(t) \leq d$, es derivable y su derivada está dada por

$$\frac{d}{dt}\left(-\ln\left(\frac{x_1(t)}{u(t)}\right)\right) = -a_{11}(t)[u(t) - x_1(t)] + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s)x_j(s)ds.$$

Por otro lado, el Lema 1.7 implica que la función $F(t) = \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} \int_0^\infty \left(\int_{t-\theta}^{t} K_{1j}(\theta) x_j(s) ds \right) d\theta$, está bien definida, es derivable y su derivada es

$$\frac{d}{dt}\left[F(t)\right] \;=\; \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} x_j(t) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s) x_j(s) ds.$$

Además $F(t)$ es positiva y satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} F(t) \;&\leq\; \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} \int_0^\infty \left(\int_{t-\theta}^{t} K_{1j}(\theta) M_j ds \right) d\theta \\ &=\; \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} M_j \int_0^\infty s K_{1j}(\theta) d\theta = \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} M_j \mu_{1j} = C. \end{aligned}$$

En consecuencia V está bien definida, es positiva, acotada superiomente por $d + C$ y es derivable en $[0, +\infty)$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} V'(t) = &- a_{11}(t)[u(t) - x_1(t)] + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s) x_j(s) ds \\ &+ \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} x_j(t) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s) x_j(s) ds. \end{aligned}$$

Además se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} V'(t) \leq &- a_{11}^{l}[u(t) - x_1(t)] + \sum_{j=2}^{n} \left(a_{1j}(t) - a_{1j}^{u} \right) \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s) x_j(s) ds \\ &+ \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} x_j(t) \\ \leq &- a_{11}^{l}[u(t) - x_1(t)] + g(t), \qquad \text{para} \qquad t \geq 0; \end{aligned} \tag{2.17}$$

con $g(t) = \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}^{u} x_j(t)$. Debido a que $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ para todo j, $2 \leq j \leq n$, se cumple que $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s) ds < +\infty$. La desigualdad (2.17) implica que

$$\frac{d}{dt}\left(-V(t) - a_{11}^{l} \int_0^t \left(u(s) - x_1(s)\right) ds + \int_0^t g(s) ds \right) \geq 0.$$

Así

$$-V(t) - a_{11}^{l} \int_0^t \left(u(s) - x_1(s)\right) ds + \int_0^t g(s) ds \geq -V(0)$$

ó

$$a_{11}^{l}\int_{0}^{t}\left(u(s)-x_1(s)\right)ds\leq V(0)-V(t)+\int_{0}^{t}g(s)ds.$$

En virtud de que $V(t)\geq 0$, $u(t)-x_1(t)\geq 0$ y $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}g(s)ds<+\infty$, obtenemos

$$0\leq\int_{0}^{\infty}\left(u(s)-x_1(s)\right)ds<\frac{1}{a_{11}^{l}}\left(V(0)+\int_{0}^{+\infty}g(s)ds\right)<+\infty.$$

Por otro lado, la función $u(t)-x_1(t)$ es no negativa, acotada superiormente, derivable y $u'(t)-x_1'(t)$ es acotada sobre $[0,\infty)$. Por tanto, por el Lema 1.16 se cumple

$$\lim_{t\to+\infty}\left(u(t)-x_1(t)\right)=0. \tag{2.18}$$

Por otra parte, el Lema 1.8 implica que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(u(t)-u^{*}(t)\right)=0. \tag{2.19}$$

De las igualdades (2.18) y (2.19), se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(u^{*}(t)-x_1(t)\right)=0.$$

Con esto queda demostrado la prueba de el teorema. □

Cuando los coeficientes del sistema (2.1) son constantes, la convergencia de la primera componente de cualquier solución del sistema (2.1) con condiciones iniciales (2.3) al punto de equilibrio positivo de la ecuación diferencial logística $x'(t)=x(t)\left[b_1-a_{11}x(t)\right]$, se puede demostrar de una manera más directa usando el Teorema de Fluctuaciones, como lo hacemos a continuación.

Teorema 2.10. *Si en el sistema* (2.1) *los coeficientes* b_i, a_{ij}, $1\leq i,j\leq n$ *son constantes, los* K_{ij} *son núcleos normalizados y se satisfacen las hipótesis* H_1 *y* H_2*. Entonces la solución col* $(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ *del sistema* (2.1) *con condición inicial* (2.3)*, satisface que para cada* i, $2\leq i\leq n$, *se cumple que* $x_i(t)\to 0$ *exponencialmente cuando* $t\to+\infty$ *y* $x_1(t)\to\dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Demostración. Sea *col* $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ solución del sistema (2.1), para probar que $x_i(t)\to 0$ exponencialmente para todo i, $2\leq i\leq n$, cuando t tiende a $+\infty$, se hace de forma análoga a la prueba de la Proposición 2.1. De este hecho y en virtud del Lema 1.5, se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds = 0, \qquad j = 2, ..., n. \tag{2.20}$$

Por otro lado, por el Lema 1.12 (de fluctuaciones), existe una sucesión $\tau_n^1 \to +\infty$ conforme $n \to +\infty$ tal que $x_1'(\tau_n^1) \to 0$ y $x_1(\tau_n^1) \to \underline{x}_1$, cuando $n \to +\infty$, donde $\underline{x}_1 = \liminf_{t\to+\infty} x_1(t)$. De la ecuacion (2.20), se obtiene que $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{\tau_n^1} K_{ij}(\tau_n^1-s)x_j(s)ds = 0$ para $i = 2, ..., n$. Sustituyendo τ_n^1 en la primera ecuación del sistema (2.1), se tiene

$$x_1'(\tau_n^1) = x_1(\tau_n^1)\left[b_1 - a_{11}x_1(\tau_n^1) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\int_{-\infty}^{\tau_n^1} K_{1j}(\tau_n^1 - s)x_j(s)ds\right]. \tag{2.21}$$

Aplicandole a esta ecuación límite cuando $n \to \infty$ se obtiene que $0 = \underline{x}_1[b_1 - a_{11}\underline{x}_1]$, y en virtud Lema 1.14 se tiene que $\underline{x}_1 > 0$, lo que implica que

$$\underline{x}_1 = \liminf_{t\to+\infty} x_1(t) = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2.22}$$

Por otro lado, por la positividad de las soluciones se tiene que

$$x_1'(t) < x_1(t)\left[b_1 - a_{11}x_1(t)\right],$$

por el Teorema de Comparación 1.6, se satisface que $x_1(t) < v_1(t)$, donde $v_1(t)$ es solución de la ecuación logística $z_1'(t) = z_1(t)\left[b_1 - a_{11}z_1(t)\right]$ con $v_1(0) = x_1(0) = \varphi_1(0)$. Por lo que se concluye que

$$\limsup_{t\to+\infty} x_1(t) \le \limsup_{t\to+\infty} v_1(t) = \lim_{t\to+\infty} v_1(t) = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2.23}$$

De (2.22) y (2.23) se tiene la siguiente desigualdad

$$\liminf_{t\to+\infty} x_1(t) = \frac{b_1}{a_{11}} \le \limsup_{t\to+\infty} x_1(t) \le \frac{b_1}{a_{11}}.$$

En consecuencia $\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \dfrac{b_1}{a_{11}}$. Con esto queda demostrado el teorema. □

Corolario 2.11. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis H_0 y H_2. Además supongamos que para cada entero k, $1 < k \le n$ y para todo entero positivo j, $j \le k$ se satisface*

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_kj}^u}. \tag{2.24}$$

Entonces la solución $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ *del sistema* (2.1) *con condición inicial* (2.3)*, satisfacen que para cada* i*,* $2 \leq i \leq n$*,* $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to +\infty$ *y* $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*.*

Demostración. La demostración se sigue directamente del Teorema 2.9 escogiendo $i_k = 1$ para cada k. □

Corolario 2.12. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* H_0 *y* H_2*. Además supongamos que para cada entero* k*,* $1 < k \leq n$ *y para todo entero* j*,* $1 < j < k$ *se verifica que*

$$\frac{b_j^u}{a_{jj}^l} < \frac{b_1^l}{a_{1j}^u} \quad y \qquad \frac{b_j^l}{a_{jj}^u} > \frac{b_k^u}{a_{kj}^l}. \tag{2.25}$$

Entonces la solución $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ *del sistema* (2.1) *con condición inicial* (2.3)*, satisfacen que para cada* i*,* $2 \leq i \leq n$*,* $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to +\infty$ *y* $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*.*

Demostración. De (2.25), se tiene que para $k > j$

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_j^l}{a_{jj}^u} \leq \frac{b_j^u}{a_{jj}^l} < \frac{b_1^l}{a_{1j}^u},$$

cuando $j = k$, se tiene

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} = \frac{b_j^u}{a_{jj}^l} < \frac{b_1^l}{a_{1j}^u},$$

por lo que se satisfaces la hipótesis de el Corolario 2.11. Esto completa la prueba del lema. □

Corolario 2.13. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* H_0 *y* H_2*. Además supogamos que para cada enteros positivos* i, j*, con* $i < j \leq n$ *se satisfacen que* $\dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} < \dfrac{b_i^l}{a_{ij}^u}$ *y para cada enteros positivos* i, j*, con* $j < i \leq n$*,* $\dfrac{b_j^l}{a_{jj}^u} > \dfrac{b_i^u}{a_{ij}^l}$ *. Entonces la solución* $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ *del sistema* (2.1) *con condición inicial* (2.3)*, satisfacen que para cada* i*,* $2 \leq i \leq n$*,* $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to +\infty$ *y* $u^*(t) - x_1(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*.*

Demostración. La demostración se sigue directamente del Corolario 2.12. □

Teorema 2.14. *Supongamos que las hipótesis H_0, H_1, H_2 y H_3 se satisfacen. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema* (2.2) *con condiciones iniciales* (2.3)*, tiene la propiedad que para cada i, $2 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente $t \to +\infty$ y $u(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u(t)$ es cualquier solución de la ecuación diferencial logística*

$$v'(t) = v(t)\left[b_1(t) - a_{11}(t)\int_0^{+\infty} K_{11}(s)v(t-s)ds\right]. \tag{2.26}$$

Demostración. Sean $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ la solución de la ecuación diferencial logística (2.2) con condiciones iniciales (2.3) y $u(t)$ cualquier solución de la ecuación diferencial (2.26). Por la Proposición 2.2, existe un número positivo $\overline{\alpha}$ tal que $x_1(t) \geq \overline{\alpha}$ para todo $t \geq 0$ y $x_i(t) \to 0$ exponencialmente para $i = 2, \ldots, n$, cuando $t \to +\infty$. Además por el Lema 2.4 se tiene que $x_1(t)$ está acotado superiormente. En consecuencia $x_1(t)$ está acotada superior e inferiormente por constantes positivas sobre $[0, +\infty)$. Por el lema 1.10, se tiene que $u(t)$ está acotada inferiormente por una constante positivas sobre $[0, +\infty)$. Por otra parte, el Lema 1.9, garantiza que $\limsup\limits_{t\to+\infty} u(t) \leq M_0$. Esto implica que $u(t)$ está acotada superiormente. En resumen $x_1(t)$ y $u(t)$ están acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Veamos que $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_1(t) \leq M_0$. En efecto;

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\left[b_1(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s)x_j(s)ds\right] \\ &\leq x_1(t)\left[b_1^u - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^l \int_{-\infty}^{t} K_{1j}(t-s)x_j(s)ds\right]. \end{aligned}$$

Argumentando como en la prueba del Lema 1.9, se tiene $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_1(t) \leq M_0$. Así tenemos que tanto $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_1(t) \leq M_0$, como $\limsup\limits_{t\to+\infty} u(t) \leq M_0$. En consecuencia existe $T > 0$ tal que

$$x_1(t) \leq M_0 + \delta, \quad u(t) \leq M_0 + \delta \quad \text{for} \quad t \geq T. \tag{2.27}$$

De la hipótesis H_3 se tiene la siguiente desigualdad, $a_{11}^l > M_0\,(a_{11}^u)^2\,\mu_{11}$, es claro que podemos escoger un $\delta > 0$ tal que

$$a_{11}^l > (M_0 + \delta)\,(a_{11}^u)^2\,\mu_{11}. \tag{2.28}$$

Consideremos $z(t) = \ln[u(t)]$ y $w(t) = \ln[x_1(t)]$. Por el Lema (1.17) y las desigualdades (2.27), haciendo $x = z(t)$, $y = w(t)$ y $\beta = \ln(M_0 + \delta)$, se tiene

$$(z(t) - w(t))\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right) \geq \frac{1}{M_0 + \delta}\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2, \quad t \geq T. \tag{2.29}$$

Como $u(t)$ y $x_1(t)$ son acotadas superior e inferiormente por constantes positivas sobre $[0, +\infty)$, se garantiza que $z(t)$ y $w(t)$ están acotadas superior e inferiormente. Sean c_1, c_2 y c_3 constantes positivas tales que $|z(t)| \leq c_1$, $|w(t)| \leq c_2$ y $\left|e^{z(\theta)}\right| + \left|e^{w(\theta)}\right| \leq c_3$. Definamos la siguiente función

$$V_1(t) = z(t) - w(t) - \int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^{t} a_{11}(\theta + s)\left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right) d\theta\right) ds.$$

Veamos que $V_1(t)$ es acotada, es decir, existe $L > 0$ tal que $|V_1(t)| \leq L$ para todo $t \geq 0$; en efecto,

$$\begin{aligned}
|V_1(t)| &= \left|z(t) - w(t) - \int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^{t} a_{11}(\theta + s)\left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right) d\theta\right) ds\right| \\
&\leq |z(t)| + |w(t)| + \left|\int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^{t} a_{11}(\theta + s)\left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right) d\theta\right) ds\right| \\
&\leq |z(t)| + |w(t)| + \int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^{t} a_{11}^u\left(\left|e^{z(\theta)}\right| + \left|e^{w(\theta)}\right|\right) d\theta\right) ds \\
&\leq c_1 + c_2 + a_{11}^u c_3 \int_0^{\infty} s K_{11}(s) ds = L.
\end{aligned}$$

De la hipótesis H_2 y por el Lema 1.7, se tiene que $V_1(t)$ está bien definida, es derivable sobre $[0, +\infty)$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned}
V_1'(t) &= -a_{11}(t)\int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(e^{z(t-s)} - e^{w(t-s)}\right) ds + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\int_0^{\infty} K_{1j}(s) x_j(t-s) ds \\
&\quad - \left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)\int_0^{\infty} K_{11}(s) a_{11}(t+s) ds + a_{11}(t)\int_0^{\infty} K_{11}(s)\left(e^{z(t-s)} - e^{w(t-s)}\right) ds \\
&= -\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)\int_0^{\infty} K_{11}(s) a_{11}(t+s) ds + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\int_0^{\infty} K_{1j}(s) x_j(t-s) ds \\
&= -\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right) T(t) + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)\int_0^{\infty} K_{1j}(s) x_j(t-s) ds, \quad \text{for all} \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

donde $T(t) = \int_0^{\infty} K_{11}(s) a_{11}(t+s) ds$.

Para demostrar que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u^*(t) - x_1(t)) = 0$, consideremos las siguientes funciones

$$V_2(t) = [V_1(t)]^2,$$

$$V_3(t) = (a_{11}^u)^2 \int_0^\infty K_{11}(s) \left\{ \int_{t-s}^t \left(\int_\theta^t \left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma \right) d\theta \right\} ds,$$

$$V_4(t) = 2L \sum_{j=2}^n a_{1j}^u \int_0^\infty K_{1j}(s) \left(\int_{t-s}^t x_j(\sigma) d\sigma \right) ds,$$

y

$$V(t) = V_2(t) + V_3(t) + V_4(t).$$

De las hipótesis H_2, H_3 y el hecho de que $u(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_n(t)$ son positivas y acotadas superiormente sobre $\mathbb{R}$, se sigue que V_3 y V_4 están bien definidas y son acotadas sobre $[0, +\infty)$. Claramente la función $V(t)$ es no negativa. Calculando las derivadas de $V_2(t)$, $V_3(t)$, $V_4(t)$ y $V(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} V_2'(t) &= 2V_1(t)V_1'(t) \\ &= -2\left(z(t) - w(t)\right)\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)\ T(t) \\ &\quad +2\int_0^\infty K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^t a_{11}(\theta+s)\left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right)d\theta\right)ds\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)T(t) \\ &\quad +2V_1(t)\sum_{j=2}^n a_{1j}(t)\int_0^\infty K_{1j}(s)x_j(t-s)ds. \end{aligned}$$

En virtud de la desigualdad (2.29), del hecho que $a_{11}^l \leq \int_0^{+\infty} K_{11}(s) a_1(\theta+s) ds$ y $V_1(t) \leq L$, se tiene para $t \geq T$

$$\begin{aligned} V_2'(t) &\leq -\frac{2a_{11}^l}{M_0+\delta}\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 + 2L\sum_{j=2}^n a_{1j}^u \int_0^\infty K_{1j}(s)x_j(t-s)ds \\ &\quad +2\int_0^\infty K_{11}(s)\left(\int_{t-s}^t a_{11}(\theta+s)\left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right)d\theta\right)ds\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)T(t). \end{aligned}$$

Haciendo $\alpha = \left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right)$ y $\beta = \left(e^{z(t)} - e^{w(t}\right)$ en la desigualdada $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_2'(t) &\leq -\frac{2a_{11}^l}{M_0+\delta}\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 + (a_{11}^u)^2\int_0^{+\infty} K_{11}(s)\int_{t-s}^t \left(e^{z(\theta)} - e^{w(\theta)}\right)^2 d\theta ds \\ &\quad +(a_{11}^u)^2 \mu_{11}\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 + 2L\sum_{j=2}^n a_{1j}^u \int_0^\infty K_{1j}(s)x_j(t-s)ds. \end{aligned}$$

Calculemos ahora la derivada de V_3. Probemos primeramente que ésta es una función derivable. En efecto; observemos que V_3 se puede escribir como

$$V_3(t) = (a_{11}^u)^2 \int_0^\infty f(s,t) ds,$$

donde $f(t,s) = K_{11}(s)\left\{\int_{t-s}^{t}\left(\int_{\theta}^{t}\left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma\right) d\theta\right\}$, Por la fórmula de Leibnitz's, ver ([7] pág. 245), se tiene que

$$D_2\left[f(s,t)\right] = K_{11}(s)s\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 - K_{11}(s)\int_{t-s}^{t}\left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma.$$

Por tanto

$$\left|D_2\left[f(s,t)\right]\right| \leq K_{11}(s)sN + K_{11}(s)\int_{t-s}^{t} N d\sigma = 2NsK_{11}(s),$$

donde N es la cota superior de $\{\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 : t \in \mathbb{R}\}$. Como

$$\int_0^{+\infty} 2NsK_{11}(s)ds = 2N\int_0^{+\infty} sK_{11}(s)ds < +\infty,$$

se concluye por el Criterio de Weierstrass para Convergencia Uniforme, ver ([7] pág. 268), que $\int_0^{+\infty} D_2 f(s,t)ds$ converge uniformenmente en $[0,+\infty)$. Por otro lado,

$$V_3(t) = \left(a_{11}^u\right)^2\int_0^{+\infty} f(s,t)ds \quad \text{converge para todo}\, t \in [0,+\infty).$$

Entonces por el Teorema 1.2, se tiene que V_3 es derivable en cualquier subintervalo $[0,a]$ de $[0,+\infty)$ y su derivada está dada por

$$\begin{aligned}
V_3'(t) &= \left(a_{11}^u\right)^2\int_0^{+\infty} D_2 f(t,s)ds \\
&= \left(a_{11}^u\right)^2\int_0^{+\infty}\left[K_{11}(s)s\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 - K_{11}(s)\int_{t-s}^{t}\left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma\right] ds \\
&= \left(a_{11}^u\right)^2\int_0^{+\infty} K_{11}(s)\left[s\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 - \int_{t-s}^{t}\left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma\right].
\end{aligned}$$

Aplicando la linealidad de las integrales y el hecho de que $\mu_{11} = \int_0^{+\infty} sK_{11}(s)$, se obtiene

$$V_3'(t) = \left(a_{11}^u\right)^2\mu_{11}\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 - \left(a_{11}^u\right)^2\int_0^{+\infty} K_{11}(s)\int_{t-s}^{t}\left(e^{z(\sigma)} - e^{w(\sigma)}\right)^2 d\sigma ds.$$

Por último aplicando el Lema 1.7 a $V_4(t)$, se obtiene que dicha función es derivable y su derivada está dada por

$$V_4'(t) = 2L\sum_{j=2}^{n} a_{1j}^u x_j(t) - 2L\sum_{j=2}^{n} a_{1j}^u\int_0^{+\infty} K_{1j}(s)x_j(t-s)ds.$$

Sustituyendo cada una de las derivadas anteriores en $V'(t)$ y utilizando la desigualdad (2.28), se obtiene

$$V'(t) \;\leq\; -2\gamma\left(e^{z(t)} - e^{w(t)}\right)^2 + g(t) = -2\gamma\left(u(t) - x_1(t)\right)^2 + g(t), \quad t \geq T,$$

donde $\gamma = \left(\dfrac{a_{11}^l}{M_0+\delta} - \mu_{11}\left(a_{11}^u\right)^2\right) > 0$ y $g(t) = 2L\sum_{j=2}^{n} a_{1j}^u x_j(t)$. Esta desigualdad implica que para todo $t \geq T$

$$\frac{d}{dt}\left(V(t) + 2\gamma\int_0^t \left(u(t) - x_1(t)\right)^2 ds - \int_0^t g(s)ds\right) \leq 0.$$

Integrando desde T hasta t, se obtiene

$$\begin{aligned} 2\gamma\int_T^t \left(u(s) - x_1(s)\right)^2 ds \;&\leq\; V(T) - V(t) + \int_T^t g(s)ds \\ &\leq\; V(T) + \int_T^{+\infty} g(s)ds. \end{aligned}$$

Del hecho de que $\int_0^{+\infty} g(s)ds < +\infty$; debido a que $x_j(t) \to 0$ exponencialmente para todo j, $2 \leq j \leq n$, se sigue que

$$0 \leq \int_T^{+\infty} \left(u(s) - x_1(s)\right)^2 ds < +\infty.$$

Por otro lado, la función $\left(u(t) - x_1(t)\right)^2$ es no negativa, acotada superiormente, derivable y $\left[\left(u(t) - x_1(t)\right)^2\right]'$ es acotada sobre $[0, \infty)$, por el Lema 1.16 se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} \left(u(t) - x_1(t)\right)^2 = 0.$$

Esto implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \left(u(t) - x_1(t)\right) = 0.$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Observación 2.1. *Cuando los coeficientes de la ecuación integro–diferencial* (2.26) *son casi–periódicos, Gopalsamy y He en [18], dierón condiciones para garantizar la existencia de una única solución $u^*(t)$, tal que $u(t) - u^*(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$, para cualquier solución $u(t)$ de* (2.26). *Por tanto, si en el sistema integro–diferencial* (2.2), *los coeficientes son casi–periódicos y satisfacen las hipótesis del teorema anterior, se tiene garantizado que para cualquier solución $x(t) = col\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ del sistema* (2.2), *se satisface que para cada i, $2 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $x_1(t) - u^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.*

§2.3. Ejemplos.

En esta sección se dan dos ejemplos para ilustrar las conclusiones de los Teoremas 2.9 y 2.14. En el primero de ellos se ilustra las conclusiones del Teorema 2.9 y en el segundo se ilustra las conclusiones del Teorema 2.14.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el sistema*

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{3} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right), \ i = 1,2,3 \tag{2.30}$$

donde los coeficientes son funciones continuas, no negativas dadas por

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= 7/2 + \sin t, & b_2(t) &= 3/2 + \cos t, & b_3(t) &= 5/2 + \sin t,\\
a_{11}(t) &= 1 + \sin^2 t, & a_{12}(t) &= 1 + \cos^2 t, & a_{13}(t) &= 2 + \sin t,\\
a_{21}(t) &= 7/2 + \sin t, & a_{22}(t) &= 7/2 + \cos t, & a_{23}(t) &= (1/7)\left(2 + \sin t\right),\\
a_{31}(t) &= 32(1 + \cos^2 t), & a_{32}(t) &= 32(1 + \sin^2 t), & a_{33}(t) &= 8\left(5 + \sin t\right),\\
K_{12}(t) &= \beta_{12}e^{-\beta_{12}t}, & K_{13}(t) &= \beta_{13}e^{-\beta_{13}t}, & K_{21}(t) &= \beta_{21}e^{-\beta_{21}t},\\
K_{23}(t) &= \beta_{23}e^{-\beta_{23}t}, & K_{31}(t) &= \beta_{31}e^{-\beta_{31}t}, & K_{32}(t) &= \beta_{32}e^{-\beta_{32}t},
\end{aligned}$$

y β_{ij}, $1 \leq i,j \leq 3$, $i \neq j$ son números positivos. Claramente se satisface la hipótesis H_0. Observemos que

$$\begin{aligned}
b_1^u &= \frac{9}{2}, & b_1^l &= \frac{5}{2}, & b_2^u &= \frac{5}{2}, & b_2^l &= \frac{1}{2}, & b_3^u &= \frac{7}{2}, & b_3^l &= \frac{3}{2},\\
a_{11}^u &= 2, & a_{11}^l &= 1, & a_{12}^u &= 2, & a_{12}^l &= 1, & a_{13}^u &= 3, & a_{13}^l &= 1,\\
a_{21}^u &= \frac{9}{2}, & a_{21}^l &= \frac{5}{2}, & a_{22}^u &= \frac{9}{2}, & a_{22}^l &= \frac{5}{2}, & a_{23}^u &= \frac{3}{7}, & a_{23}^l &= \frac{1}{7},\\
a_{31}^u &= 64, & a_{31}^l &= 32, & a_{32}^u &= 64, & a_{32}^l &= 32, & a_{33}^u &= 48, & a_{33}^l &= 32,
\end{aligned}$$

además, para $k = 2$ existe $i_2 = 1$ tal que

$$b_2^u a_{11}^u - b_1^l a_{21}^l = b_2^u a_{12}^u - b_1^l a_{22}^l = \frac{5}{2}(2) - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0.$$

Y para $k = 3$ existe $i_3 = 2$ tal que

$$b_3^u a_{21}^u - b_2^l a_{31}^l = b_3^u a_{22}^u - b_2^l a_{32}^l = \frac{7}{2}\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)32 = -\frac{1}{4} < 0,$$

$$b_3^u a_{23}^u - b_2^l a_{33}^l = \frac{7}{2}\left(\frac{3}{7}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)32 = -\frac{29}{2} < 0.$$

Por lo que la hipótesis H_1 se satisface. Claramente $\mu_{ij} = \dfrac{1}{\beta_{ij}}$ para $1 \leq i, j \leq 3$ y $i \neq j$. Esto muestra que la hipótesis H_2 se satisface. Por tanto todas las condiciones del Teorema 2.9 se cumple, y así para cualquier solución $col(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ del sistema (2.30)*, con condiciones iniciales* (2.3) *tiene la propiedad que las especies $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se extinguen y $\lim\limits_{t\to+\infty}(u^*(t)-x_1(t)) = 0$, donde $u^*(t)$ es la solución de la ecuación diferencial logística $x'(t) = x(t)\left[(\frac{7}{2} + \sin t) - (1 + \sin^2 t)x(t)\right]$ descrita en el Lema 1.8.*

Ejemplo 2.2. *Consideremos el sistema*

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right), \; i = 1, 2, 3, \tag{2.31}$$

donde $K_{11}(t) = (44)^2\, te^{-44t}$, $K_{22}(t) = \beta_{22}e^{-\beta_{22}t}$, $K_{33}(t) = \beta_{33}e^{-\beta_{33}t}$ con β_{22}, β_{33} números positivos, los coeficientes y los otros núcleos son como en el ejemplo anterior. En este caso $\mu_{11} = \dfrac{1}{22}$. Sabemos por el ejemplo anterior que las hipótesis H_0, H_1 y H_2 se satisfacen. Por otro lado, $\int_0^\infty s^2 K_{11}(s)ds = \dfrac{3}{968}$,

$$M_0 = \frac{b_1^u}{a_{11}^l}\left(\frac{44 + b_1^u}{44}\right)^2 = \frac{9}{2}\left(\frac{97}{88}\right)^2 = \frac{84681}{15488}, \quad y$$

$$a_{11}^l - M_0\left(a_{11}^u\right)^2 \mu_{11} = 1 - \frac{84681}{15488}(2)^2\frac{1}{22} = \frac{503}{85184} \approx 0{,}006 > 0.$$

Así la hipótesis H_3 se satisface. Por tanto todas las condiciones del teorema se cumplen. Así se obtiene que cualquier solución $col(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ del sistema (2.31)*, con condiciones iniciales* (2.3) *tiene la propiedad que las especies $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se extinguen y $u(t) - x_1(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $u(t)$ es cualquier solución de la ecuación integro–diferencial logística $u'(t) = u(t)\left[\left(\frac{7}{2} + \sin t\right) + \left(1 + \sin^2 t\right)\int_0^{+\infty}(44)^2\, se^{-44s}u(t-s)ds\right]$.*

Capítulo 3

Extinción y Sobrevivencia de Varias Especies en Sistemas con Retardo Infinito.

En este capítulo, consideramos los sistemas competitivos de ecuaciones integro-diferenciales de Lotka–Volterra con retardo infinito,

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t \geq 0,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.1}$$

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t \geq 0,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.2}$$

junto con la condición inicial

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \leq 0, \quad i = 1,\ldots,n, \quad \text{donde } \varphi_i \in BC^+. \tag{3.3}$$

Y los subsistemas integro–diferenciales

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{r} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t \geq 0,\ i = 1,\ldots,r, \tag{3.4}$$

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

$$t \geq 0,\ i = 1, \ldots, r, \quad (3.5)$$

donde r es un entero con $1 < r < n$. Con la condición inicial

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r, \quad \text{donde } \varphi_i \in BC^+, \quad (3.6)$$

Para el estudio de estos sistemas, supondremos que siempre se satisface la siguiente hipótesis.

$\widehat{H}_0$: Para cada i, j con $1 \leq i, j \leq n$, las funciones $b_i(t)$, $a_{ij}(t)$, son continuas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas sobre $\mathbb{R}$. Los núcleos $K_{ij}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $1 \leq i, j \leq n$, son funciones continuas tales que

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1.$$

Además de la hipótesis $\widehat{H}_0$, consideremos las siguientes hipótesis adicionales:

$\widehat{H}_1$: Para cada entero k, $r+1 \leq k \leq n$, existe un entero i_k, $i_k < k$ tal que para cualquier entero j, $1 \leq j \leq k$, se satisface la desigualdad

$$\frac{b_k^u}{a_{kj}^l} < \frac{b_{i_k}^l}{a_{i_k j}^u}.$$

$\widehat{H}_2$: Para cada entero i, $1 \leq i \leq r$, se satisface $b_i^l > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \left(\dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}\right)$.

$\widehat{H}_3$: $\mu_{ij} = \displaystyle\int_0^{\infty} sK_{ij}(s)ds < \infty, \quad 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq r.$

$\widehat{H}_4$: Para cada entero i, $1 \leq i \leq r$, se cumple que $b_i^l > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j$, donde

$$\widetilde{M}_j = \frac{b_j^u}{a_{jj}^l \int_0^{+\infty} K_{jj}(s)e^{-b_j^u s}ds}.$$

$\widehat{H}_5$: Para cada par de enteros i, j , $1 \leq i, j \leq n$, se cumple $\int_0^{+\infty} s^2 K_{ij}(s)ds < +\infty$, y para todo i, $1 \leq i \leq r$,

$$\frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 (a_{ii}^u)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} < a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds,$$

donde $\widehat{m}_i = \dfrac{b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u e^{L_i}}$, $\quad L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_i \mu_{ij}$ $\quad$ y $\quad \widetilde{M}_i$ como en $\widehat{H}_4$.

Observación 3.1. *Es fácil probar que* $\widehat{H}_4$ *implica* $\widehat{H}_2$.

Observación 3.2. $\widehat{H}_2$ *implica que existen números positivos* λ_i*,* $1 \leq i \leq r$*, y* R *tales que para todo* j*,* $1 \leq j \leq r$*, se cumplen las desigualdades*

$$-\lambda_j a_{jj}^l + \sum_{i=1, i\neq j} \lambda_i a_{ij}^u < -R.$$

En efecto, sean (α_{ij}) *la* $r \times r$ *matriz definida por* $\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ii}^l, & \text{para } i = j \\ \\ a_{ij}^u, & \text{para } i \neq j \end{cases}$*, con* $1 \leq i, j \leq r$ *y los números* $\beta_1 = b_1^l$*,* $\beta_2 = b_2^l$*, ...,* $\beta_r = b_r^l$ *. La hipótesis* $\widehat{H}_2$ *y las desigualdades* $b_j^u > b_j^l$*,* $1 \leq j \leq r$*, implican que se satisface la hipótesis del Lema 1.13; esto es* $\beta_i > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_{ij} \left(\dfrac{\beta_j}{\alpha_{jj}}\right)$ *para todo* i*,* $1 \leq i \leq r$*. Por tanto existen números positivos* λ_i*,* $1 \leq i \leq r$*, y* R *tales que para todo* j*,* $1 \leq j \leq r$*, se cumplen las desigualdades* $\lambda_j \alpha_{jj} > R + \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{r} \lambda_i \alpha_{ij}$*. De acá se deduce que para todo* j*,* $1 \leq j \leq r$*,*

$$\lambda_j a_{jj}^l > R + \sum_{i=1, i\neq j}^{r} \lambda_i a_{ij}^u.$$

□

El objetivo de este capítulo es demostrar los siguientes resultados:

1) Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_2$ y $\widehat{H}_3$ se satisfacen. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (3.1), con condición inicial (3.3), tiene la propiedad que para cada i, $r+1 \leq i \leq n$, se satisface que $x_i(t) \rightarrow$

0 exponencialmente cuando $t \to +\infty$, y para i, $1 \leq i \leq r$, $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ donde $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ es cualquier solución del sistema integro–diferencial (3.4).

2) Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_3$, $\widehat{H}_4$ y $\widehat{H}_5$ se satisfacen y la matriz $C = (c_{ij})_{r\times r}$, cuyo coeficientes están dados por

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s)e^{-b_i^u s}ds - \frac{(\widetilde{M}_i)^2 (a_{ii}^u)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \text{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u \left[1 + \frac{(\widetilde{M}_i)^2 a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}\right], & \text{para } i \neq j, \end{cases}$$

es una M-matriz. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ del sistema (3.2) con condición inicial (3.3), satisface que para cada i, $r+1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$, y para i, $1 \leq i \leq r$, se cumple que $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ donde $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ es una cierta solución positiva y acotada del sistema (3.5).

Al final de este capítulo damos ejemplos que ilustran los resultados anteriores.

Observación 3.3. *Si $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ es la solución del sistema integro–diferencial (3.5), con condición inicial (3.6). Entonces para cada i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$ se cumple que $y_i(t)$ son positivas y acotadas en el intervalo $[0, +\infty)$. La prueba de estos resultados, se hacen de forma análoga a la realizada en el Lema (1.9) y Lema (2.4).*

§3.1. Persistencia, disipatividad y estabilidad de los sub–sistema (3.4) y (3.5).

Definición 3.1. *Un sistema r–dimensional de ecuaciones integro–diferenciales con retardo infinito, se dice que es fuertemente persistente si dada cualquier función inicial $\varphi(t) = col\,(\varphi_1(t), ..., \varphi_r(t))$, las componentes de la solución $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ correspondiente a esa función inicial satisfacen las desigualdades, $\liminf_{t\to+\infty} y_i(t) > 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r$.*

Definición 3.2. *Un sistema r-dimensional de ecuaciones integro–diferenciales con retardo infinito, se dice que es disipativo si existe una constante positiva L tales que* *dada cualquier función inicial* $\varphi(t) = col\,(\varphi_1(t), ..., \varphi_r(t))$, *existe un* $T = T\,(\varphi)$ *tal que las componentes de la solución* $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ *correspondiente a esa función inicial satisfacen las desigualdades,* $y_i(t) \leq L$ *para* $t \geq T$, $1 \leq i \leq r$.

Lema 3.1. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* $\widehat{H}_0$ *para* $n = r$. *Si* $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ *es solución del sistema* (3.4), *con condición inicial* (3.6), *entonces para todo* i, $1 \leq i \leq r$, $\limsup_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l}$. *En consecuencia el sistema* (3.4) *es disipativo.*

Demostración. Sea $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ la solución del sistema (3.4), con condición inicial (3.6). Por la positividad de $y_i(t)$ para cada i, $1 \leq i \leq r$, se tiene que para todo $t \geq 0$ en su dominio

$$y_i'(t) \leq b_i^u y_i(t).$$

Integrando la desigualdad anterior desde $t - s$ hasta t con $t - s \geq 0$, se obtiene

$$y_i(t-s) \geq y_i(t) e^{-b_1^u s} \quad \text{para } t \geq s \geq 0. \tag{3.7}$$

Nuevamente, usando la positividad de $y_i(t)$ para cada i, $1 \leq i \leq r$ y la desigualdad anterior obtenemos, del sistema (3.4), la siguiente desigualdad diferencial para todo t,

$$y_i'(t) \leq y_i(t)\left[b_i^u - a_{ii}^l y_i(t)\right].$$

Por Teorema de Comparación 1.6 se tiene que $y_i(t) \leq z_i(t)$, donde $z_i(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística $z_i'(t) = z_i(t)\,[b_i^u - a_{ii} z(t)]$ con condición $z_i(0) = y_i(0) = \varphi_i(0)$. Como $\dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l}$ es un atractor global para las soluciones de la ecuación diferencial logística con condiciones iniciales positivas y puesto que

$$\limsup_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} z_i(t) = \lim_{t\to+\infty} z_i(t).$$

Como i es arbitrario, se tiene que

$$\limsup_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \frac{b_i^u}{a_{ii}^l}, \quad i = 1, ..., r.$$

En consecuencia si tomamos $L > \max\left\{\dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l} : i = 1, ..., r\right\}$ y usamos la definición de límite superior con $\epsilon_i = L - \dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l} > 0$, se tiene que existe un $T_i = T_i(\varphi)$ tal que $y_i(t) < L$ para todo $t \geq T_i$. Por tanto $y_i(t) < L$ para todo $t \geq T(\varphi) = \max\{T_i : 1 \leq i \leq r\}$. Así queda demostrado el lema. $\square$

Lema 3.2. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* $\widehat{H}_0$*,* $\widehat{H}_2$ *y* $\widehat{H}_3$ *para* $n = r$*. Si* $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ *es solución del sistema* (3.4)*, con condición inicial* (3.6)*, entonces para todo* i*,* $1 \leq i \leq r$*,*

$$\liminf_{t\to+\infty} y_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \left(\dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}\right)}{a_{ii}^u e^{L_i}}.$$

donde $L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^u M_i \mu_{ij}$ *y* $M_i > \max\left\{\varphi_i^u, \dfrac{2b_i^u}{a_{ii}^l}\right\}$*,* $1 \leq i \leq r$*, (ver Lema 2.3). En consecuencia, el sistema* (3.4) *es fuertemente persistente.*

Demostración. Sea $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ la solución del sistema (3.4), con condición inicial (3.6). Definamos para i, $1 \leq i \leq r$, las siguientes funciónes

$$w_i(t) = y_i(t) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) y_j(\theta) d\theta\right] ds\right).$$

De la prueba del Lema 2.7, se tiene que para i, $1 \leq i \leq r$, $w_i(t)$ están bien definidas, son positivas y diferenciables. Además se cumple la siguiente relación

$$w_i(t) < y_i(t) < \exp(L_i)\, w_i(t), \tag{3.8}$$

donde $L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^u M_i \mu_{ij}$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$. Derivando la función $w_i(t)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
w_i'(t) &= y_i'(t) \exp\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) y_j(\theta) d\theta\right] ds\right) \\
&\quad -w_i(t) \frac{d}{dt}\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s) y_j(\theta) d\theta\right] ds\right) \\
&= w_i(t) \left(b_i(t) - a_{ii}(t) y_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) y_j(s) ds\right) \\
&\quad -w_i(t) \left[\sum_{j=1, j\neq i}^{r} y_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_j(t-s) ds\right] \\
&= w_i(t) \left[b_i(t) - a_{ii}(t) y_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} y_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds\right].
\end{aligned}$$

En virtud de que $b_i(t) \geq b_i^l$, $a_{ij}(t) \leq a_{ij}^u$ y $\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)ds = 1$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$w_i'(t) > w_i(t)\left[b_i^l - a_{ii}^u y_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u y_j(t)\right]. \tag{3.9}$$

Por otro lado de Lema 3.1, se tiene que $\limsup\limits_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l}$, $1 \leq i \leq r$, y como por la hipótesis $\widehat{H}_2$ se cumple que $\left(b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}\right) > 0$, entonces para cualquier ϵ, $0 < \epsilon < \left(b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}\right)$, existe $T > 0$ tal que

$$y_i(t) < \frac{b_i^u}{a_{ii}^l} + \frac{\epsilon}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u}, \text{ para todo } t \geq T,\ i, j = 1, ..., r. \tag{3.10}$$

De las desigualdades (3.8), (3.9) y (3.10), se obtiene que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &> w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \frac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \epsilon - a_{ii}^u y_i(t)\right] \\ &= w_i(t)\left[B_i - a_{ii}^u y_i(t)\right] \\ &> w_i(t)\left[B_i - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) w_i(t)\right], \end{aligned}$$

donde $B_i = b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \epsilon > 0$. Por Teorema de Comparación 1.6, se tiene que $w_i(t) > z_i(t)$ para todo $t \geq T$, donde $z_i(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística $z_i'(t) = z_i(t)\left[B_i - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) z_i(t)\right]$ con $z_i(T) = w_i(T) = \varphi_i(T)$. Esto implica que

$$\liminf_{t\to+\infty} w_i(t) \geq \liminf_{t\to+\infty} z_i(t) = \lim_{t\to+\infty} z_i(t) = \frac{B_i}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)} = \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \epsilon}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)}.$$

Haciendo ϵ tender a cero por la derecha y usando (3.8), se tiene que para todo $1 \leq i \leq r$,

$$\liminf_{t\to+\infty} y_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)}. \tag{3.11}$$

De la hipótesis $\widehat{H}_2$, se obtiene que el numerador de la fracción involucrada en (3.11) es positivo. Por tanto, se obtiene que el sistema (3.4) es fuertemente persistente. Con esto queda demostrado el lema. $\square$

El siguiente resultado fue demostrado por He en la publicación [21], con las hipótesis: existe $\delta > 0$ tal que $\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)\exp\left[-\left(b_i^l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u \widetilde{M}_j\right)s + \delta s\right] ds < +\infty$, $\widehat{H}_3$ y $\widehat{H}_4$. Presentamos a continuacion una prueba diferente, donde eliminamos la primera hipótesis.

Lema 3.3. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis $\widehat{H}_0$ para $n = r$. Si $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ es la solución del sistema* (3.5)*, con condición inicial* (3.6)*, entonces para todo i, $1 \leq i \leq r$,*

$$\limsup_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \frac{b_i^u}{a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s)e^{-b_i^u s}ds} = \widetilde{M}_i. \tag{3.12}$$

En consecuencia, el sistema (3.5) *es disipativo.*

Demostración. La prueba de (3.12), es similar a la demostración del Lema (1.9). Para probar que el sistema (3.5) es disipativo, tomamos $\widehat{L} > \text{máx}\left\{\widetilde{M}_i : i = 1, ..., r\right\}$ y por la definición de límite superior con $\epsilon_i = \widehat{L} - \widetilde{M}_i > 0$, se tiene que existe un $T_i = T_i(\varphi)$ tal que $y_i(t) < \widehat{L}$ para todo $t \geq T_i$. Por tanto $y_i(t) < \widehat{L}$ para todo $t \geq T(\varphi) = \text{máx}\{T_i : 1 \leq i \leq r\}$. Así queda demostrado el lema. □

Lema 3.4. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_3$ y $\widehat{H}_4$ para $n = r$. Si $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ es la solución del sistema* (3.5)*, con condición inicial* (3.6)*, entonces para todo i, $1 \leq i \leq r$,*

$$\liminf_{t\to+\infty} y_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u \exp(L_i)} = \widetilde{m}_i, \tag{3.13}$$

donde $L_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widehat{M}_i \mu_{ij}$ y $\widehat{M}_i > \text{máx}\left\{\varphi_i^u, \dfrac{2b_i^u}{\gamma_i a_{ii}^l}\right\}$, $1 \leq i \leq r$, (ver Lema 2.4). En consecuencia, el sistema (3.5) *es fuertemente persistente.*

Demostración. Sea $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ la solución del sistema (3.5), con condición inicial (3.6). Definamos para i, $1 \leq i \leq r$, las siguientes funciónes

$$w_i(t) = y_i(t)\exp\left(-\sum_{j=1,}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s)y_j(\theta)d\theta\right]ds\right).$$

De la prueba del Lema 2.8, se tiene que para i, $1 \leq i \leq r$, $w_i(t)$ están bien definidas, son positivas y diferenciables. Además se cumple la siguiente relación

$$w_i(t) < y_i(t) < \exp\left(L_i\right) w_i(t), \tag{3.14}$$

donde $L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widehat{M}_i \mu_{ij}$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$. Derivando la función $w_i(t)$ como en el Lema 3.1, se obtiene que

$$w_i'(t) \;=\; w_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} y_j(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds\right].$$

En virtud de que $b_i(t) \geq b_i^l$, $a_{ij}(t) \leq a_{ij}^u$ y $\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)ds = 1$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$w_i'(t) > w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u y_j(t)\right]. \tag{3.15}$$

Por otro, del Lema 3.3 se tiene que $\limsup\limits_{t\to+\infty} y_i(t) \leq \widetilde{M}_i$, $1 \leq i \leq r$, y como por la hipótesis $\widehat{H}_4$ se cumple que $\left(b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j\right) > 0$, entonces para cualquier ϵ, $0 < \epsilon < \left(b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j\right)$, existe $T > 0$ tal que

$$y_i(t) < \widetilde{M}_i + \frac{\epsilon}{\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}, \text{ para todo } t \geq T,\ i, j = 1, ..., r. \tag{3.16}$$

De las desigualdades (3.14), (3.15) y (3.16), se obtiene que

$$\begin{aligned} w_i'(t) \;&>\; w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon - a_{ii}^u y_i(t)\right] \\ &>\; w_i(t)\left[B_i - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) w_i(t)\right], \end{aligned}$$

donde $B_i = b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon > 0$. Trabajando como en el Lema 3.1, se tiene que

$$\liminf_{t\to+\infty} w_i(t) \geq \liminf \frac{B_i}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)} = \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)}.$$

Haciendo ϵ tender a cero por la derecha y usando (3.14), se tiene que para todo $1 \leq i \leq r$,

$$\liminf_{t\to+\infty} y_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u \exp{(L_i)}} = \widetilde{m}_i.$$

De la hipótesis $\widehat{H}_4$, se obtiene que el numerador de $\widetilde{m}_i$ es positivo. Por tanto, se obtiene que el sistema (3.5) es fuertemente persistente. Con esto queda demostrado el lema. $\square$

Lema 3.5. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_3$ y $\widehat{H}_4$ para $n = r$. Entonces existe una solución $y^*(t) = col\,(y_{1*}(t), ..., y_{r*}(t))$ del sistema (3.5), que satisface que para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \in \mathbb{R}$,*

$$\widehat{m}_i < y_{i*}(t) < \widetilde{M}_i,$$

donde $\widehat{m}_i = \dfrac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u e^{L_i}}$, $\quad L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_i \mu_{ij}$ *y* $\widetilde{M}_i = \dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l \int_0^\infty K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds}$.

Demostración. Es fácil verificar que para cada i, $1 \leq i \leq r$, se cumple que

$$\widehat{m}_i < \beta_i < \widetilde{M}_i, \qquad \text{donde} \qquad \beta_i = \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u} \quad \text{para todo} \quad i,\ 1 \leq i \leq r.$$

Sea $y^*(t) = col\,(y_{1*}(t), ..., y_{r*}(t))$ la solución del sistema (3.5) con la condición inicial $\varphi_i(t) = \beta_i$ para i, $1 \leq i \leq r$ y $t \in (-\infty, 0]$. Así, $\widehat{m}_i < \varphi_i(t) < \dfrac{b_i^u}{a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds} = \widetilde{M}_i$, para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \leq 0$. Sólo resta probar que estas desigualdades se satisfacen para todo $t \in [0, +\infty)$. Veamos que para cada i, $1 \leq i \leq r$, $y_{i*}(t) < \widetilde{M}_i$ para todo $t \in [0, +\infty)$. En efecto, para cada i, $1 \leq i \leq r$ se tiene que $y_{i*}(0) < \widetilde{M}_i$. La continuidad de $y_{i*}(t)$ implica que esta desigualdad se verifica para valores de t cercanos a cero por la derecha. Si esta desigualdad no fuese cierta, se tendría que existe $t_1 > 0$ tal que $y_{i*}(t) < \widetilde{M}_i$ para $0 \leq t < t_1$ y $y_{i*}(t_1) = \widetilde{M}_i$. De la definición de derivada se tiene que $y'_{i*}(t_1) \geq 0$. Por otro lado, la positividad de cada una de las componentes de la solución y la desigualdad $y_{i*}(t - s) > y_{i*}(t) e^{-b_i^u s}$ para todo $t > s \geq 0$, implican que

$$\begin{aligned} y'_{i*}(t_1) &< y_{i*}(t_1) \left[b_i^u - a_{ii}^l \left(\int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds \right) y_{i*}(t_1) \right] \\ &= y_{i*}(t_1) \left[b_i^u - a_{ii}^l \left(\int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds \right) \widetilde{M}_i \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo cual produce una contradicción. Por tanto para cada i, $1 \leq i \leq r$, $y_{i*}(t) < \widetilde{M}_i$ para todo $t \in [0, +\infty)$.
Como estas desiguldades tambien se verifican para $t \in (-\infty, 0]$, entonces hemos demostrado que para cada i, $1 \leq i \leq r$,

$$y_{i*}(t) < \widetilde{M}_i \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Para demostrar que para cada i, $1 \leq i \leq r$, $y_{i*}(t) > \widehat{m}_i$ para todo $t \in [0, +\infty)$, recordemos que la función

$$w_i(t) = y_{i*}(t) \exp\left(-\sum_{j=1,}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta + s) y_{j*}(\theta) d\theta\right] ds\right),$$

para todo $1 \leq i \leq r$, satisface las desigualdades $w_i(t) < y_{i*}(t)$. Además, como se satisface (3.17), se prueba fácilmente que

$$y_{i*}(t) < \exp(L_i)\, w_i(t) \quad \text{donde} \quad L_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_i \mu_{ij}. \tag{3.18}$$

También

$$w_i'(t) = w_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} y_{j*}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(t+s) ds\right], \tag{3.19}$$

y

$$\begin{aligned}
w_i(0) &= y_{i*}(0) \exp\left(-\sum_{j=1,}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{-s}^{0} a_{ij}(\theta + s) \varphi_j(\theta) d\theta\right] ds\right) \\
&= \beta_i \exp\left(-\sum_{j=1,}^{r} \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left[\int_{-s}^{0} a_{ij}(\theta + s) \beta_j d\theta\right] ds\right) \\
&> \beta_i \exp\left(-\sum_{j=1,}^{r} \beta_j a_{ij}^u \mu_{ij}\right).
\end{aligned}$$

En virtud de las desigualdades $\beta_j < \widetilde{M}_j$, $1 \leq j \leq r$, se tiene que

$$\begin{aligned}
w_i(0) &> \beta_i \exp\left(-\sum_{j=1,}^{r} \widetilde{M}_j a_{ij}^u \mu_{ij}\right) \\
&= \beta_i \exp(-L_i) = \widehat{m}_i.
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (3.17) y (3.18), la positividad de las componentes de las soluciones, el acotamiento de los coeficientes, en (3.19), se obtiene que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &> w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - a_{ii}^u y_{i*}(t)\right] \\ &> w_i(t)\left[\left(b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j\right) - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) w_i(t)\right]. \end{aligned}$$

Así, si $z_i(t)$ es la solución de la ecuación diferencial logística

$$y_i'(t) = y_i(t)\left[\left(b_i^l - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j\right) - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) y_i(t)\right],$$

con $y_i(0) = w_i(0) > \widehat{m}_i$, se tiene que $w_i(t) > z_i(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Además por unicidad de las soluciones, $z_i(t) > \widehat{m}_i$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Por lo tanto $y_{i*}(t) > w_i(t) > z_i(t) > \widehat{m}_i$ para todo $t \in [0, +\infty)$. En consecuencia $y_{i*}(t) > \widehat{m}_i$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \in [0, +\infty)$. Con esto queda demostrado el lema. □

Definición 3.3. *Se dice que un sistema r–dimensional de ecuaciones integro–diferenciales con retardo infinito es extremadamente estable, si para cualquiera dos soluciones $z(t) = col\,(z_1(t), ..., z_r(t))$ y $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ del sistema, se satisface que para todo i, $1 \leq i \leq r$,*

$$\lim_{t\to+\infty}\left(z_i(t) - y_i(t)\right) = 0.$$

Proposición 3.1. *Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_2$ y $\widehat{H}_3$ se satisfacen. Entonces el sistema* (3.4) *con condiciones iniciales* (3.6) *es extremadamente estable.*

Demostración. Sean $y(t) = col\,(y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t))$ y $z(t) = col\,(z_1(t), ..., z_r(t))$ soluciones del sistema (3.4) con función inicial $\varphi(t) = col\,(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_r(t))$ y $\psi(t) = col\,(\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_r(t))$ respectivamente. Por ser el sistema (3.4) fuertemente persistente y disipativo se cumplen que las componentes $y_i(t)$ y $z_i(t)$ para i, $1 \leq i \leq r$, están acotadas superior e inferiormente por constantes positivas para todo en $[0, +\infty)$.
En virtud de la Observación 3.2, se tiene existen números positivos λ_i, $1 \leq i \leq r$, y R tales que para todo j, $1 \leq j \leq r$, se cumplen las desigualdades

$$-\lambda_j a_{jj}^l + \sum_{i=1, i\neq j}^{r} \lambda_i a_{ij}^u < -R. \tag{3.20}$$

Definamos la función V sobre $[0,+\infty)$ como

$$V(t) = V_1(t) + G(t)$$

donde

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left| \ln\left(\frac{y_i(t)}{z_i(t)}\right) \right|$$

y

$$G(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \int_0^{+\infty} \left(\int_{t-\delta}^{t} K_{ij}(\delta) a_{ij}(s+\delta) \left| y_j(s) - z_j(s) \right| ds \right) d\delta.$$

El acotamiento de las componentes de $y(t)$ y $z(t)$ por constantes positivas implica que $V_1(t)$ está bien definida, es acotada; esto es, existe una constante $L > 0$ tal que $V_1(t) \leq L$ para todo $t \in [0,\infty)$. Claramente se tiene que $V_1(t)$ es no negativa. Por el lema 1.15 se tiene que $V_1(t)$ es derivable en $[0,+\infty)\backslash D$, donde $D = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$, $D_j = \left\{ t \in [0,+\infty) : y_j(t) = z_j(t), y_j'(t) \neq z_j'(t) \right\}$ y D es numerable por ser unión finita de numerables. Además para $t \in [0,+\infty)\backslash D$ se tiene que

$$V_1'(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\frac{d}{dt} \left[\ln\left(\frac{y_i(t)}{z_i(t)}\right) \right] \right) sgn \left(\ln\left(\frac{y_i(t)}{z_i(t)}\right) \right).$$

Se puede probar, fácilmente, que $sgn\left(\ln\left(\frac{y_i(t)}{z_i(t)}\right)\right) = sgn\left(y_i(t) - z_i(t)\right)$ para todo i, $1 \leq i \leq r$, por tanto

$$\begin{aligned}
V_1'(t) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} - \frac{(z_i)'(t)}{z_i(t)} \right] sgn\left(y_i(t) - z_i(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Bigg[-a_{ii}(t)(y_i(t) - z_i(t)) \\
&\quad - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)(y_j(s) - z_j(s)) ds \Bigg] sgn\left(y_i(t) - z_i(t)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ii}(t)(y_i(t) - z_i(t)) sgn\left(y_i(t) - z_i(t)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)(y_j(s) - z_j(s)) sgn\left(y_i(t) - z_i(t)\right) ds.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} V_1'(t) \;&\leq\; -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ii}(t)\left|y_i(t)-z_i(t)\right| \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left|y_j(s)-z_j(s)\right| ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, el acotamiento las componentes $y_i(t)$ y $z_i(t)$ para i, $1 \leq i \leq r$, implican que existen constantes positivas $c_1, \cdots, c_r$ tales que $|y_j(s) - z_j(s)| \leq c_j$ para todo $s \in [0, +\infty)$. Además para i, $1 \leq i \leq r$ la función $|y_j(s) - z_j(s)|$ es continua en $[0, +\infty)$. Así en virtud del lema 1.7, $G(t)$ está bien definida, es derivable y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} G'(t) =&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i\left|y_j(t)-z_j(t)\right|\int_{0}^{+\infty} K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\ &-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i a_{ij}(t)\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(\delta)\left|y_j(t-\delta)-z_j(t-\delta)\right| d\delta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En resumen, tenemos que la función $V(t)$ es no negativa en $[0, +\infty)$ y para todo $t \in [0, +\infty)$ se tiene el acotamiento

$$\begin{aligned} V(t) \leq& L+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i a_{ij}^{l} c_j\int_{0}^{\infty} \delta K_{ij}(\delta)d\delta \\ \leq& L+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i a_{ij}^{l} c_j \mu_{ij} = C < +\infty. \end{aligned}$$

Además es derivable en $\in [0, \infty)\backslash D$ y su derivada satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} V'(t) \;&\leq\; -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ii}(t)\left|y_i(t)-z_i(t)\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \lambda_i\left|y_j(t)-z_j(t)\right|\int_{0}^{+\infty} K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\ &\leq\; \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left(-a_{ii}^{l}\left|y_i(t)-z_i(t)\right| + \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^{u}\left|y_j(t)-z_j(t)\right|\right). \end{aligned}$$

En consecuencia para $t \in [0, +\infty)\backslash D$ se cumple que

$$\begin{aligned} V'(t) \;&\leq\; -\sum_{i=i}^{r} \lambda_i a_{ii}^{l}\left|y_i(t)-z_i(t)\right| + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^{u}\left|y_j(t)-z_j(t)\right|\right) \\ &=\; \left(-\lambda_1 a_{11}^{l}+\lambda_2 a_{21}^{l}+\cdots+\lambda_r a_{r1}^{l}\right)\left|y_1(t)-z_1(t)\right| + \cdots + \\ &\quad\; \left(-\lambda_r a_{rr}^{l}+\lambda_2 a_{2r}^{l}+\cdots+\lambda_{(r-1)} a_{(r-1)(r)}^{l}\right)\left|y_r(t)-z_r(t)\right|. \end{aligned}$$

De (3.20), se tiene que

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -R\left(|y_1(t)-z_1(t)|+\cdots+|y_r(t)-z_r(t)|\right) \\ &= -R\sum_{j=1}^{r}|y_j(t)-z_j(t)|\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Así para $t \in [0,\infty)\backslash D$ se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left(-V(t)-R\sum_{j=1}^{r}\int_0^t |y_j(s)-z_j(s)|\,ds\right) \geq 0.$$

Como D es numerable, la desigualdad anterior se satisface en casi todas partes, por tanto se puede integrar en $[0,t]$ para obtener que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^t |y_j(s)-z_j(s)|\,ds \leq \sum_{j=1}^{r}\int_0^t |y_j(s)-z_j(s)|\,ds &\leq \frac{1}{R}\left(V(0)-V(t)\right) \\ &< \frac{1}{R}V(0) = C < +\infty, \end{aligned}$$

donde C es una constante independiente de t. Por tanto se cumple que

$$\int_0^{+\infty} |y_j(s)-z_j(s)|\,ds < +\infty, \quad j=1,\ldots,r.$$

Por otro lado, la funciones $|y_j(t)-z_j(t)|$, $j=1,\ldots,r$, son no negativas, acotadas superiormente, derivables y $\left|y_j'(t)-(z_j)'(t)\right|$, $j=1,\ldots,r$, son acotadas sobre $[0,\infty)$. Por el Lema 1.16, se tiene

$$\lim_{t\to+\infty}|y_j(t)-z_j(t)| = 0, \quad j=1,\ldots,r.$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

El siguiente resultado se encuentra el la publicación [21] de He, donde garantiza que bajo ciertas condiciones, el sistema (3.5), es extremadamente estable, sin embargo cabe destacar que la hipótesis considerada por él, de la existencia de un $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)\exp\left[-\left(b_i^l-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^u\widetilde{M}_j\right)s+\delta s\right]ds < +\infty, \quad i=1,...,n.$$

no es necesaria gracias al Lema 3.5. Además se hacen unas pequeñas correcciones y modificaciones a los coeficientes de la M-matriz.

Proposición 3.2. *Supongamos que se satisfacen las hipotesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_3$, $\widehat{H}_4$, $\widehat{H}_5$ y la matriz $C = (c_{ij})_{r\times r}$, cuyo coeficientes están dados, para cada $1 \leq i, j \leq r$, por*

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 \left(a_{ii}^u\right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \textit{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u \left[1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}\right], & \textit{para } i \neq j. \end{cases}$$

es una M-matriz, donde $\widehat{m}_i$ y $\widetilde{M}_i$ son como en el lema 3.5. Entonces el sistema (3.5) *con condiciones iniciales* (3.6)*, es extremadamente estable.*

Demostración. Es suficiente demostrar que cualquier solución $z(t) = col\,(z_1(t), ..., z_r(t))$ del sistema (3.5), tiene la propiedad de que

$$\lim_{t\to+\infty} (z_i(t) - y_{i*}(t)) = 0, \quad i = 1, ..., r,$$

donde $y^*(t) = col\,(y_{1*}(t), ..., y_{r*}(t))$ es la solución dada en el Lema 3.5.
En virtud de que la matriz $C = (c_{ij})_{r\times r}$ es una M-matriz, se tiene (ver [8] pág. 137) que existen números α_i para i, $1 \leq i \leq r$ positivos, tales que

$$\alpha_i c_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_j \left|c_{ij}\right|.$$

Denotemos por $C(\epsilon)$, con $\epsilon \geq 0$, la $r \times r$ matriz cuyos elementos están dados por

$$c_{ij}(\epsilon) = \begin{cases} a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_i+\epsilon\right)\widetilde{M}_i \left(a_{ii}^u\right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \text{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u \left[1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i+\epsilon\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}\right], & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Definamos las funciones $f_i(t) = \alpha_i\,(c_{ii} - t) - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_j \left|c_{ij} - t\right|$ y $g_i(t) = c_{ii} - t > 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$. Como $f_i(0) > 0$ y $g_i(0) > 0$ para $1 \leq i \leq r$, por continuidad podemos seleccionar $\epsilon_0 > 0$ tales que $f_i(t) > 0$ y $g_i(t) > 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \in (0, \epsilon_0]$. Como para $i \neq j$ los coeficientes c_{ij} son negativos, se satisface que

$$\left|c_{ij} - \epsilon_0\right| = -\left(c_{ij} - \epsilon_0\right) = -c_{ij} + \epsilon = \left|c_{ij}\right| + \epsilon_0.$$

De las igualdades anteriores y las desigualdades $f_i(\epsilon_0) > 0$ para i, $1 \leq i \leq r$, se obtiene

$$\alpha_i \left(c_{ii} - \epsilon_0\right) > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_j \left(|c_{ij}| + \epsilon_0\right), \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{3.23}$$

Como para todo i, j, $1 \leq i, j \leq r$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} c_{ij}(\epsilon) = c_{ij}$ entonces podemos garantizar que existe un $\overline{\epsilon} \in (0, \epsilon_0)$ tal que para todo i, j, $1 \leq i, j \leq r$,

$$c_{ij}(\overline{\epsilon}) > c_{ij} - \epsilon_0 \qquad y \qquad c_{ii}(\overline{\epsilon}) > c_{ii} - \epsilon_0. \tag{3.24}$$

Sea $w_i(t) = \ln\left(\dfrac{z_i(t)}{y_{i*}(t)}\right)$ para cada i, $1 \leq i \leq r$. Por ser *col* $(z_1(t), ..., z_r(t))$ y *col* $(y_{1*}(t), ..., y_{r*}(t))$ soluciones del sistema (3.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
w_i'(t) &= -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left(z_j(t-s) - y_{j*}(t-s)\right) ds \\
&= -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s) \left(\frac{z_j(t-s)}{y_{j*}(t-s)} - 1\right) ds \\
&= -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s) \left(e^{w_j(t-s)} - 1\right) ds \\
&= -a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) e^{w_i(t-s)} ds + a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) ds \\
&\quad - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s) \left(e^{w_j(t-s)} - 1\right) ds.
\end{aligned}$$

Sumando y restando el término $a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) e^{w_i(t)} ds$ y agrupando, se tiene que

$$\begin{aligned}
w_i'(t) &= a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) \left(e^{w_i(t)} - e^{w_i(t-s)}\right) ds \\
&\quad - a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) \left(e^{w_i(t)} - 1\right) ds \\
&\quad - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s) \left(e^{w_j(t-s)} - 1\right) ds.
\end{aligned}$$

Reemplazando $\left(e^{w_i(t)} - e^{w_i(t-s)}\right)$ por $\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)} w_i'(\sigma) d\sigma$, en el primer término de la igualdad anterior y en vista de que

$$w_i'(\sigma) = -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\sigma) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(\sigma - s) \left(e^{w_j(\sigma - s)} - 1\right) ds,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= -a_{ii}(t)\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\left(e^{w_i(t)}-1\right)ds - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}(t)F(t) \\ &\quad -a_{ii}(t)\sum_{j=1}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)F_{ij}(\sigma)d\sigma ds, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde $F_{ij}(t) = \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left(e^{w_j(t-s)}-1\right)ds$ está definida en $[0,+\infty)$.
Definamos la función V sobre $[0,+\infty)$ como

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \tag{3.26}$$

donde

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left|w_i(t)\right|,$$

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r} \alpha_i \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left(\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\sigma+s)y_{j*}(\sigma)\left|e^{w_j(\sigma)}-1\right|d\sigma\right)ds,$$

$$V_3(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t} a_{ii}(\rho+s)y_{i*}(\rho)\left(\int_\rho^t e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)\left|F_{ij}(\sigma)\right|d\sigma\right)d\rho ds$$

y

$$V_4(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\int_{t-s}^{t} y_{i*}(\sigma)\left|e^{w_i(\sigma)}-1\right|d\sigma ds.$$

Como el sistema (3.5) es fuertemente persistente y disipativo se cumple que las componentes $z_i(t)$, $y_{i*}(t)$ para $i = 1,...,r$, están acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Esto implica que $V_1(t)$ está bien definida y además es acotada; esto es, existe una constante $L > 0$ tal que $V_1(t) \leq L$ para todo $t \in [0,\infty)$, además $V_1(t)$ es no negativa. Por el Lema 1.15 se tiene que $V_1(t)$ es derivable en $[0,+\infty)\backslash D$, donde $D = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$, $D_j = \left\{t \in [0,+\infty) : y_{j*}(t) = z_j(t), y_{j*}'(t) \neq z_j'(t)\right\}$ y D es numerable. Además para $t \in [0,+\infty)\backslash D$ se tiene que

$$V_1'(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i'(t) sgn\left(w_i(t)\right).$$

Se puede probar, fácilmente, que $sgn\,(w_i(t)) = sgn\left(e^{w_i(t)} - 1\right)$ y $y_{i*}(t)\left|e^{w_i(t)} - 1\right| = |z_i(t) - y_{i*}(t)|$. Usando esto, (3.25) y las desigualdades $y_{i*}(t-s) \geq y_{i*}(t)e^{-b_i^u s}$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq s > 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} V_1'(t) \;\; &\leq \;\; -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ii}(t)\,|z_i(t) - y_{i*}(t)| \int_0^{+\infty} e^{-b_i^u s} K_{ii}(s)ds + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}(t)\,|F_{ij}(t)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i a_{ii}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) y_{i*}(t-s) \int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)} a_{ij}(\sigma)\,|F_{ij}(\sigma)|\, d\sigma ds. \end{aligned}$$

En virtud del acotamiento de los coeficientes, que $e^{w_i(t)}$ para $1 \leq i \leq r$ son positivas y acotadas sobre $\mathbb{R}$, los núcleos son normalizados, de las hipótesis $\widehat{H}_3$ y $\int_0^{+\infty} s^2 K_{ij}(s)ds < +\infty$, la cual está incluida en $\widehat{H}_5$, se garantiza que las funciones $V_2(t)$, $V_3(t)$ y $V_4(t)$ están bien definidas, son no negativa y acotadas. En consecuencia $V(t)$ está bien definida, es no negativa y acotada. Además de la hipótesis $\widehat{H}_3$ y por el Lema 1.7 se tiene que $V_2(t)$ y $V_4(t)$ son diferenciables y sus derivadas están dadas por

$$\begin{aligned} V_2'(t) \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i y_{j*}(t)\left|e^{w_j(t)} - 1\right| \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(s+t) ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)} - 1\right| ds \\ &= \;\; \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i\,|z_j(t) - y_{j*}(t)| \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) a_{ij}(s+t) ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)} - 1\right| ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4'(t) \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u y_{j*}(t)\left|e^{w_j(t)} - 1\right| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)} - 1\right| ds \\ &= \;\; \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u\,|z_j(t) - y_{j*}(t)| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)} - 1\right| ds. \end{aligned}$$

Para calcular la derivada de $V_3(t)$, se trabaja como en la prueba del Teorema 2.14 y por la fórmula de Leibnitz's, se tiene que

$$\begin{aligned} V_3'(t) &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i a_{ii}(t)\int_0^\infty K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)\left|F_{ij}(\sigma)\right|d\sigma \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}(t)\left|F_{ij}(t)\right|\int_0^\infty K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t} a_{ii}(\rho+s)y_{i*}(\rho)d\rho ds \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i a_{ii}(t)\int_0^\infty K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)\left|F_{ij}(\sigma)\right|d\sigma ds \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}(t)\left|F_{ij}(t)\right|d_i(t), \end{aligned}$$

donde $d_i(t)=\int_0^\infty K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t} a_{ii}(\rho+s)y_{i*}(\rho)d\rho ds$ para $1\le i\le r$.

En resumen se tiene que $V(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}\backslash D$ y es acotada. Por el hecho de que

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}(t)\left|F_{ij}(t)\right|-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}(t)\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)}-1\right|ds\le 0,$$

y que $a_{ij}^l\le a_{ij}(t)\le a_{ij}^u$ para todo i,j, $1\le i,j\le r$, se cumple que para $t\in[0,+\infty)\backslash D$,

$$\begin{aligned} V'(t) &\le -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a_{ii}^l\left|z_i(t)-y_{i*}(t)\right|\int_0^{+\infty}e^{-b_i^u s}K_{ii}(s)ds+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}^u\left|z_j(t)-y_{j*}(t)\right| \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}^u\left|F_{ij}(t)\right|d_i(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u\left|z_j(t)-y_{j*}(t)\right| \\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)}-1\right|ds. \end{aligned}$$

El Lema 3.5 garantiza que $\widehat{m}_i<y_{i*}(t)<\widetilde{M}_i$ para todo i, $1\le i\le r$ y $t\in\mathbb{R}$, por tanto

$$d_i(t)\le\int_0^\infty K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t}a_{ii}^u\widetilde{M}_i d\rho ds=a_{ii}^u\widetilde{M}_i\int_0^\infty sK_{ii}(s)ds=a_{ii}^u\widetilde{M}_i\mu_{ii}.$$

Por el Lema 3.3, se tiene que para $1\le i\le r$, $\limsup_{t\to+\infty}z_i(t)\le\widetilde{M}_i$, por lo que se garantiza que existe $T_0>0$ tal que $z_i(t)<\widetilde{M}_i+\bar{\epsilon}$ para todo i, $1\le i\le r$ y $t\ge T_0$. En consecuencia para todo i, $1\le i\le r$ y $t\ge T_0$ se cumple que

$$e^{w_i(t)}=\frac{z_i(t)}{y_{i*}(t)}<\frac{\widetilde{M}_i+\bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i}.$$

Sustituyendo lo anterior, en el tercer término de la desigualdad de $V'(t)$, se tiene que para todo $t \geq T_0$,

$$\begin{aligned}
V'(t) \;\leq\; & -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ii}^{l} \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right| \int_0^{+\infty} e^{-b_i^u s} K_{ii}(s) ds + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}^{u} \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\
& + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) a_{ij}^{u} a_{ii}^{u} \widetilde{M}_i \mu_{ii} \left| F_{ij}(t) \right| \\
& + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^{u} \mu_{ii} a_{ij}^{u} \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\
& - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^{u} \mu_{ii} a_{ij}^{u} \left| F_{ij}(t) \right| \\
= \; & -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ii}^{l} \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right| \int_0^{+\infty} e^{-b_i^u s} K_{ii}(s) ds + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}^{u} \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\
& + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^{u} \mu_{ii} a_{ij}^{u} \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\
= \; & \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[-\left(a_{ii}^{l} \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i \left(a_{ii}^{u} \right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right| \right. \\
& \left. + \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^{u} \left(1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^{u} \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \right].
\end{aligned}$$

Por la definición de los coeficientes de la matriz $C(\bar{\epsilon})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[-c_{ii}(\bar{\epsilon}) \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right| - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} c_{ij}(\bar{\epsilon}) \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \right] \\
&= -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i c_{ij}(\bar{\epsilon}) \left| z_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\
&= -\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j c_{ji}(\bar{\epsilon}) \right) \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right| \\
&= -\sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i c_i(\bar{\epsilon}) + \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_j c_{ji}(\bar{\epsilon}) \right) \left| z_i(t) - y_{i*}(t) \right|,
\end{aligned}$$

De (3.24) y del hecho de que los coeficientes c_{ji} para $i \neq j$ son negativos, se obtiene que para todo $t \geq T_0$,

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r}\left((c_{ii}-\epsilon_0)\alpha_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j\left|c_{ji}-\epsilon_0)\right|\right)|z_i(t)-y_{i*}(t)| \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\left((c_{ii}-\epsilon_0)\alpha_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j\left(|c_{ji}|+\epsilon_0\right)\right)|z_i(t)-y_{i*}(t)| \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\beta_i\left|z_i(t)-y_{i*}(t)\right|, \end{aligned}$$

donde $\beta_i = (c_{ii}-\epsilon_0)\alpha_i - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j(|c_{ji}|+\epsilon_0)$ es positivo por la desigualdad (3.23). En consecuencia para todo $t \in [T_0,+\infty)\backslash D$ se cumple

$$\frac{d}{dt}\left[-V(t) - \sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\left|z_i(s)-y_{i*}(s)\right|ds\right] \geq 0.$$

Como D es numerable, la desigualdad anterior se satisface en casi todas partes y por tanto se puede integrar en $[T_0,t]$, para obtener

$$-V(t) - \sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\left|z_i(s)-y_{i*}(s)\right|ds \geq -V(T_0).$$

Además por ser $V(t)$ no negativa, se cumple que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{T_0}^{t}|z_j(s)-y_{j*}(s)|\,ds \leq \sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\left|z_i(s)-y_{i*}(s)\right|ds &\leq (V(T_0)-V(t)) \\ &\leq V(T_0). \end{aligned}$$

Es decir, para todo j, $1 \leq j \leq r$,

$$\int_{T_0}^{t}\beta_j\left|z_j(s)-y_{j*}(s)\right|ds \leq \frac{1}{\beta_j}V(T_0) = C,$$

donde C es una constante independiente de t. Por tanto,

$$\int_{0}^{+\infty}|z_j(s)-y_{j*}(s)|\,ds < +\infty, \quad j = 1,\ldots,r.$$

Por otro lado, la funciones $|z_j(t)-y_{j*}(t)|$, $j = 1,\ldots,r$, son no negativas, acotadas superiormente, derivables y $\left|z'_j(t)-y'_{j*}(t)\right|$, $j = 1,\ldots,r$, son acotadas sobre $[0,\infty)$. En virtud del Lema 1.16, se tiene

$$\lim_{t\to+\infty}|z_j(t)-y_{j*}(t)| = 0, \quad j = 1,\ldots,r.$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

§3.2. Acotamiento y extinción para algunas de las soluciones de los sistemas de ecuaciones (3.1) y (3.2).

Por los Lemas 2.3 y 2.4 del capítulo 3, se tiene que tanto las componentes de cada solución del sistema (3.1) como las del sistema (3.2), están acotadas superiormente en el intervalo $[0, +\infty)$. En las siguientes proposiciones se demostrará que las primeras r componentes de cada solución de estos sistemas, están acotadas inferiormente por una constante positiva y las restantes tienden exponencialmente a cero.

Proposición 3.3. *Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_2$ y $\widehat{H}_3$ se satisfacen. Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es la solución del sistema (3.1) con condiciones iniciales (3.3). Entonces $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$, para $i = r+1, \ldots, n$. Además, existe $\alpha = \alpha(x) > 0$ tal que $x_i(t) > \alpha$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ la solución del sistema (3.1) con condiciones iniciales (3.3). La primera conclusión de esta proposición es un caso especial de la Proposición 2.1 en el capítulo 3, para el cual $r = 2$. Debido a que el método usado en la prueba de la Proposición 2.1 consiste en probar primero la conclusión para x_n, y luego trabajar por inducción matemática desde x_n hasta x_2, la prueba de que para $i = r+1, ..., n$, $x_i(t)$ tiende exponencialmente a cero cuando t tienda a $+\infty$ es un subconjunto de la prueba de la Proposición 2.1 en el capítulo 3. Probemos ahora que existe $\alpha > 0$, tal que $x_i(t) > \alpha$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y $t \geq 0$. En efecto, sea i, $1 \leq i \leq r$, fijo pero arbitrario. Sabemos por la parte anterior que para todo j, $r+1 \leq j \leq n$, $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Por tanto, se sigue del Lema 1.5 que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds = 0, \quad j = r+1, \ldots n.$$

Esto implica que

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}^{l} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds = \lim_{t \to +\infty} \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}^{u} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds = 0.$$

En consecuencia, si $g_i(t) = \sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds$ entonces

$$\lim_{t \to +\infty} g_i(t) = 0. \tag{3.27}$$

Por otro lado, para cualquier j, $1 \leq j \leq r$, se tiene

$$\begin{aligned} x_j'(t) =& x_j(t)\left[b_j(t) - a_{jj}(t)x_j(t) - \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{jk}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{jk}(t-s)x_k(s)ds\right] \\ \leq& x_j(t)\left[b_j^u - a_{jj}^l x_j(t)\right]. \end{aligned}$$

Por Teorema de Comparación, $0 \leq x_j(t) \leq w_j(t)$ para todo j, $1 \leq j \leq r$ y $t \geq 0$, donde $w_j(t)$ es la solución de la ecuación diferencial logística $v_j'(t) = v_j(t)\left[b_j^u - a_{jj}^l v_j(t)\right]$, con $v_j(0) = x_j(0) = \varphi_j(0)$. Así,

$$\limsup_{t\to+\infty} x_j(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} \omega_j(t) = \lim_{t\to+\infty} \omega_j(t) = \frac{b_j^u}{a_{jj}^l}.$$

Por el Lema 1.4, se tiene que para todo j, $1 \leq j \leq r$, se cumple que

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds \leq \limsup_{t\to+\infty} x_j(t) = \overline{x}_j.$$

De estas dos últimas desigualdades, se concluye que cada j, $1 \leq j \leq r$,

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds \leq \frac{b_j^u}{a_{jj}^l}. \tag{3.28}$$

De la hipótesis $\widehat{H}_2$, se cumple que $b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} > 0$. De (3.27) y (3.28), se tiene que para cualquier $\overline{\epsilon}$, $0 < \overline{\epsilon} < \dfrac{\left(b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}\right)}{1 + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u}$, existe $T > 0$ tal que para $t \geq T$ y todo j, $1 \leq j \leq r$, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds < \limsup_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds + \overline{\epsilon} \leq \frac{b_j^u}{a_{jj}^l} + \overline{\epsilon},$$

y

$$-\overline{\epsilon} < g_i(t) < \overline{\epsilon}.$$

En consecuencia, para todo $t \geq T$,

$$\begin{aligned} x_i'(t) >& x_i(t)\left[b_i^l - a_{ii}^u x_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \left(\frac{b_j^u}{a_{jj}^l} + \overline{\epsilon}\right) - g_i(t)\right] \\ >& x_i(t)\left[\left(b_i^l - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \frac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \overline{\epsilon}\left(1 + \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u\right)\right) - a_{ii}^u x_i(t)\right]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$x_i'(t) > x_i(t)\left[L_i - a_{ii}^u x_i(t)\right],$$

donde $L_i = b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \overline{\epsilon}\left(\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u + 1\right) > 0$. Por teorema de comparación, $x_i(t) > \theta_i(t)$ para todo $t \geq T$, donde $\theta_i(t)$ es la solución de la ecuación diferecial logística $z_i'(t) = z_i(t)\left[L_i - a_{ii}^u z_i(t)\right]$ con $\theta_i(T) = z_i(T)$. Por tanto para todo $t \geq T$,

$$\liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \geq \liminf_{t\to+\infty} \theta_i(t) = \lim_{t\to+\infty} \theta_i(t) = \frac{L_i}{a_{ii}^u} = \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l} - \overline{\epsilon}\left(\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u + 1\right)}{a_{ii}^u}.$$

Haciendo $\overline{\epsilon}$ tender a cero por la derecha, se tiene que

$$\liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \dfrac{b_j^u}{a_{jj}^l}}{a_{ii}^u} = \alpha_i. \tag{3.29}$$

Como i es arbitrario, la desigualdad (3.29) se cumple para todo i, $1 \leq i \leq r$. Por un argumento similar a la prueba del Lema 1.10 aplicado a cada componente $x_i(t)$ de la solución $x(t)$, se logra la existencia de $\alpha = \alpha(x) > 0$ tal que $x_i(t) > \alpha$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$. Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Proposición 3.4. *Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_3$ y $\widehat{H}_4$ se satisfacen. Si $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es la solución del sistema* (3.2) *con condición inicial* (3.3)*. Entonces $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$, para $i = r+1, \ldots, n$. Además existe $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x) > 0$, tal que $x_i(t) > \overline{\alpha}$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ la solución del sistema (3.2) con condiciones iniciales (3.3). La primera conclusión de esta Proposición se prueba por el mismo razonamiento usado en la proposición 3.3. Probemos que existe $\overline{\alpha} > 0$, tal que $x_i(t) > \overline{\alpha}$ para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$. En efecto; fijemos un entero i, $1 \leq i \leq r$, por el Lema 3.3, se tiene que para cualquier j, $1 \leq j \leq r$,

$$\limsup_{t\to+\infty} x_j(t) \leq \widetilde{M}_j = \frac{b_j^u}{a_{jj}^l \int_0^{+\infty} K_{jj}(s) e^{-b_j^u s} ds}. \tag{3.30}$$

Como $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ para $j = r+1, ..., n$, se sigue por el Lema 1.5 que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds = 0, \quad j = r+1, ..., n.$$

Esto implica que

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}^{l}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds = \lim_{t\to+\infty}\sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}^{u}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds = 0.$$

Por tanto, si $g_i(t) = \sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds$ entonces

$$\lim_{t\to+\infty} g_i(t) = 0. \tag{3.31}$$

De la hipótesis $\widehat{H}_4$ se satisface que $b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^{u}\widetilde{M}_j > 0$. De (3.30) y (3.31) , se tiene que para todo ϵ, $0<\epsilon<\left(b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^{u}\widetilde{M}_j\right)$, existe $T>0$ tal que para todo $t\geq T$ y $1\leq j\leq r$,

$$x_j(t) < \widetilde{M}_j + \frac{\epsilon}{2\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^{u}}, \qquad \text{y} \qquad -\frac{\epsilon}{2} < g_i(t) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.32}$$

Definamos para el i fijo y $t\geq T$, la función ,

$$w_i(t) = x_i(t)\exp\left(-\sum_{j=1,}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds\right).$$

Por el Lema 3.3, $w_i(t)$ está bien definida, es positiva, diferenciable y además cumple la siguiente relación

$$w_i(t) < x_i(t) < \exp\left(L_i\right)w_i(t), \tag{3.33}$$

donde $L_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}^{u}\widehat{M}_i\mu_{ij}$ para todo $t\geq 0$. Calculando la derivada de $w_i(t)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
w_i'(t) &= x_i'(t)\exp\left(-\sum_{j=1,}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds\right)\\
&\quad -w_i(t)\frac{d}{dt}\left(-\sum_{j=1,}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)\left[\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\theta+s)x_j(\theta)d\theta\right]ds\right)\\
&= w_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right)\\
&\quad -w_i(t)\left[\sum_{j=1}^{r} x_j(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)a_{ij}(t+s)ds - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right]\\
&= w_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{r} x_j(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)a_{ij}(t+s)ds - g_i(t)\right].
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que los coeficientes del sistema (3.2) son acotados superior e inferiormente y que los núcleos son normalizados se tiene

$$w_i'(t) \;>\; w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^u x_j(t) - g_i(t)\right].$$

De (3.32) y (3.33), se obtiene que para todo $t \geq T$,

$$\begin{aligned} w_i'(t) &> w_i(t)\left[b_i^l - a_{ii}^u x_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u\left(\widetilde{M}_j + \frac{\epsilon}{2\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u}\right) - \frac{\epsilon}{2}\right] \\ &= w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon - a_{ii}^u x_i(t)\right] \\ &> w_i(t)\left[b_i^l - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon - a_{ii}^u \exp\left(L_i\right) w_i(t)\right]. \end{aligned}$$

Trabajando como en la prueba del Lema 3.3, se concluye que

$$\liminf_{t\to+\infty} w_i(t) \geq \frac{B_i}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)}, \quad \text{donde} \quad B_i = b_i^l - \sum_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j - \epsilon.$$

Haciendo ϵ tender a cero por la derecha se obtiene que

$$\liminf_{t\to+\infty} w_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)}. \tag{3.34}$$

Como i es arbitrario se satisface (3.34) para todo i, $1 \leq i \leq r$. De la desigualdad (3.33), se concluye que

$$\liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \geq \frac{b_i^l - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r} a_{ij}^u \widetilde{M}_j}{a_{ii}^u \exp\left(L_i\right)} = \overline{\alpha}_i$$

para todo i, $1 \leq i \leq r$. Como al final de la prueba de la proposición anterior existe $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x) > 0$ tal que $x_i(t) \geq \overline{\alpha}$ para todo $t \geq 0$ con $1 \leq i \leq r$. Esto completa la prueba de la proposición. □

§3.3. Resultados principales.

Teorema 3.6. *Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_2$ y $\widehat{H}_3$ se satisfacen. Entonces la solución $x(t) = col\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$ del sistema* (3.1) *con la condición inicial*

(3.3), *tiene la propiedad que para cada* i, $r+1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to \infty$, *y para todo* i, $1 \leq i \leq r$, $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *donde* $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ *es cualquier solución del sistema* (3.4).

Demostración. Sean $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ la solución del sistema (3.1) y $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ cualquier solución del sistema (3.4). De la Proposición 3.3 se tiene que para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq 0$, se cumple que $x_i(t) \geq \alpha > 0$ y para i, $r+1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. El Lema 2.3, garantiza que las componentes $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, están acotadas superiormente por constantes positivas. En consecuencia $x_i(t)$ para $i = 1, ..., n$, son acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Además como el sistema (3.4) es fuertemente persistente y disipativo se cumplen que las componentes $y_i(t)$ para $i = 1, ..., r$, están acotadas superiormente e inferiormente por constantes positivas.

Por la Observación 3.2, existen números positivos λ_i, $1 \leq i \leq r$, y R tales que para todo j, $1 \leq j \leq r$,

$$-\lambda_j a_{jj}^l + \sum_{i=1, i\neq j}^{r} \lambda_i a_{ij}^u < -R. \tag{3.35}$$

Definamos la función V sobre $[0, +\infty)$ como sigue

$$V(t) = V_1(t) + G(t) + H(t),$$

donde

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left| \ln\left(\frac{x_i(t)}{y_i(t)}\right) \right|,$$

$$G(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \int_0^{+\infty} \left(\int_{t-\delta}^{t} K_{ij}(\delta) a_{ij}(s+\delta) \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds \right) d\delta,$$

y

$$H(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=r+1}^{n} \int_0^{+\infty} \left(\int_{t-\delta}^{t} K_{ij}(\delta) a_{ij}(s+\delta) x_j(s) ds \right) d\delta.$$

Por el Lema 1.15 se tiene que $V_1(t)$ es derivable en $[0, +\infty)\backslash D$, donde $D = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$, $D_j = \left\{ t \in [0, +\infty) : x_j(t) = y_j(t), x_j'(t) \neq y_j'(t) \right\}$ y D es numerable por ser unión finita de numerables. Además para $t \in [0, +\infty)\backslash D$ se tiene que

$$V_1'(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left[\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} - \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} \right] sgn\left(x_i(t) - y_i(t)\right).$$

Argumentando como en la prueba de la Proposición 3.3, se concluye

$$
\begin{aligned}
V_1'(t) &= \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\Bigg[-a_{ii}(t)(x_i(t)-y_i(t))-\sum_{j=1,j\neq i}^{r}a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)(x_j(s)-y_j(s))ds \\
&\quad -\sum_{j=r+1}^{n}a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\Bigg]\,sgn\,(x_i(t)-y_i(t)) \\
&\leq -\sum_{i=1}^{r}\lambda_i a_{ii}^{l}\left|x_i(t)-y_i(t)\right|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\lambda_i a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)\left|x_j(s)-y_j(s)\right|ds \\
&\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\lambda_i a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)x_j(s)ds.
\end{aligned}
$$

Es fácil verificar que tanto $F(t)$ como $G(t)$ están bien definidas y son derivables en $[0,+\infty)$ y sus derivadas están dadas por

$$
\begin{aligned}
G'(t) = &\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\lambda_i\left|x_j(t)-y_j(t)\right|\int_{0}^{+\infty}K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\
&-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\lambda_i a_{ij}(t)\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(\delta)\left|x_j(t-\delta)-y_j(t-\delta)\right|d\delta.
\end{aligned}
$$

y

$$
H'(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\lambda_i x_j(t)\int_{0}^{+\infty}K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\lambda_i a_{ij}(t)\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(\delta)x_j(t-\delta)d\delta.
$$

Además se tiene que $V(t)$ es no negativa, acotada, derivable en $[0,+\infty)\backslash D$ y su derivada satisface la desigualdad

$$
\begin{aligned}
V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r}\lambda_i a_{ii}^{l}\left|x_i(t)-y_i(t)\right|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\lambda_i\left|x_j(t)-y_j(t)\right|\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\
&\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\lambda_i x_j(t)\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\
&\leq -\sum_{i=1}^{r}\lambda_i a_{ii}^{l}\left|x_i(t)-y_i(t)\right|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\lambda_i a_{ij}^{u}\left|x_j(t)-y_j(t)\right|+g(t), \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

donde $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=r+1}^{n}\lambda_i a_{ij}^{u}x_j(t)$. Debido a que $x_j(t)\to 0$ exponencialmente cuando $t\to+\infty$ para todo j, $r+1\leq j\leq n$, se cumple que $0<\displaystyle\int_{0}^{+\infty}g(s)ds<+\infty$. De la desigualdad (3.36) se tiene

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ii}^l \left| x_i(t) - y_i(t) \right| + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}^u \left| x_j(t) - y_j(t) \right| \right) + g(t) \\
&= \left(-\lambda_1 a_{11}^l + \lambda_2 a_{21}^l + \cdots + \lambda_r a_{r1}^l \right) \left| x_1(t) - y_1(t) \right| + \cdots + \\
&\quad \left(-\lambda_r a_{rr}^l + \lambda_2 a_{2r}^l + \cdots + \lambda_{(r-1)} a_{(r-1)(r)}^l \right) \left| x_r(t) - y_r(t) \right| + g(t).
\end{aligned}$$

De (3.35), se tiene que para todo $t \in [0, +\infty) \backslash D$,

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -R \left(\left| x_1(t) - y_1(t) \right| + \cdots + \left| x_r(t) - y_r(t) \right| \right) + g(t) \\
&= -R \sum_{j=1}^{r} \left| x_j(t) - y_j(t) \right| + g(t).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dt} \left(-V(t) - R \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds + \int_0^t g(s) ds \right) \geq 0.$$

Como D es numerable, la desigualdad anterior se satisface en casi todas partes y por tanto se puede integrar en $[0, t]$ para obtener que

$$-V(t) - R \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds + \int_0^t g(s) ds \geq -V(0),$$

esto implica que

$$V(t) + R \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds - \int_0^t g(s) ds \leq V(0).$$

En virtud de que $V(t) \geq 0$ y del hecho de que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s) ds < +\infty$, se sigue que

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_0^t \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds \leq \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds &\leq \frac{1}{R} \left(V(0) - V(t) + \int_0^t g(s) ds \right) \\
&< \frac{1}{R} \left(V(0) + \int_0^{+\infty} g(s) ds \right) \\
&= C < +\infty,
\end{aligned}$$

donde C es una constante independiente de t. Por tanto se cumple que

$$\int_0^{+\infty} \left| x_j(s) - y_j(s) \right| ds < +\infty, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Argumentando como en la parte final de la prueba de la Proposición 3.1, se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} |x_j(t) - y_j(t)| = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Cuando los coeficientes del sistema (3.1) son constantes, la convergencia de las primeras r componentes de cualquier solución del sistema (3.1) con condiciones iniciales (3.3) a una solución $x^* = col(x_1^*, ..., x_r^*)$ del sistema r dimensional

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right],$$

se puede demostrar de una manera más directa usando el Teorema de Fluctuaciones, como lo hacemos a continuación.

Teorema 3.7. *Supongamos que en el sistema* (3.1) *los coeficientes* b_i, a_{ij} *para* $1 \leq i, j \leq n$, *son constantes y satisfacen las hipótesis* $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_2$ *y* $\widehat{H}_3$. *Entonces la solución* $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *del sistema* (3.1) *con condición inicial* (3.3), *satisface que para cada* i, $r+1 \leq i \leq n$, $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to \infty$, *y para cada* i, $1 \leq i \leq r$, $x_i(t) \to x_i^*$ *cuando* $t \to \infty$, *donde* $x^* = col\,(x_1^*, ..., x_r^*)$ *es un punto de equilibrio del sistema con coeficientes constantes*

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t \geq 0, \; i = 1, \ldots, r.$$

Demostración. Sea $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ la solucion del sistema (3.1) con condición inicial (3.3). De la Proposición 3.3 se tiene que $x_i(t) \geq \alpha > 0$ para todo i, $1 \leq i \leq r$, y $t \geq 0$ y $x_i(t) \to 0$ exponencialmente para $i = r+1, \ldots, n$, cuando $t \to +\infty$. Aplicando el Lema 1.5 obtenemos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds = 0, \quad j = r+1, ..., n. \tag{3.37}$$

Por otro lado, por Lema 3.3 se cumple que $x_i(t)$ están acotadas superiormente para todo i, $1 \leq i \leq r$, y $t \geq 0$. De acá que $x_i(t)$, $1 \leq i \leq r$, son acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Por Lema de Fluctuaciones existen sucesiones $\tau_n^i \to \infty$ y $\sigma_n^i \to \infty$, tal que cumplen que para cada i, $1 \leq i \leq r$,

i) $x_i'(\sigma_n^i) \to 0 \quad$ y $\quad x_i(\sigma_n^i) \to \overline{x}_i = \limsup_{t\to+\infty} x_i(t), \quad$ cuando $n \to \infty$.

ii) $x_i'(\tau_n^i) \to 0 \quad$ y $\quad x_i(\tau_n^i) \to \underline{x}_i = \liminf_{t\to+\infty} x_i(t), \quad$ cuando $n \to \infty$.

De (3.37), se obtiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma_n^i} K_{ij}(\sigma_n^i - s)x_j(s)ds = 0, \quad j = r+1, \dots, n, \tag{3.38}$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)ds = 0, \quad j = r+1, \dots, n. \tag{3.39}$$

Por otro lado, como $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds$ para i, j, $1 \leq i, j \leq r$ y $t \geq 0$ son acotadas, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada i, j, $1 \leq i, j \leq r$ las integrales $\int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)$ y $\int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)ds$ convergen.
Sustituyendo las sucesiones τ_n^i y σ_n^i en el sistema (3.1), se tiene para i, $1 \leq i \leq r$,

$$x_i'(\tau_n^i) = x_i(\tau_n^i)\left[b_i - a_{ii}x_i(\tau_n^i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)ds\right],$$

$$x_i'(\sigma_n^i) = x_i(\sigma_n^i)\left[b_i - a_{ii}x_i(\sigma_n^i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{\sigma_n^i} K_{ij}(\sigma_n^i - s)x_j(s)ds\right].$$

Aplicando límite cuando $n \to +\infty$ a cada una de las ecuaciones anteriores se sigue

$$0 = \underline{x}_i\left[b_i - a_{ii}\underline{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)ds\right], \tag{3.40}$$

$$0 = \overline{x}_i\left[b_i - a_{ii}\overline{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma_n^i} K_{ij}(\sigma_n^i - s)x_j(s)ds\right]. \tag{3.41}$$

Por Lema 1.4 y la definición de límite superior e inferior respectivamente se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\tau_n^i} K_{ij}(\tau_n^i - s)x_j(s)ds \leq \limsup_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds \leq \overline{x}_j,$$

$$\underline{x}_j \leq \liminf_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma_n^i} K_{ij}(\sigma_n^i - s)x_j(s)ds.$$

Sustituyendo estas desigualdades en (3.40) y (3.41) se obtiene

$$0 \geq \underline{x}_i\left[b_i - a_{ii}\underline{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}\overline{x}_j\right] \quad \text{para } i = 1, \dots, r.$$

$$0 \leq \overline{x}_i \left[b_i - a_{ii}\overline{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}\underline{x}_j \right] \quad \text{para } i = 1, ..., r.$$

Como $\overline{x}_i \geq \underline{x}_i > \alpha > 0$ entonces,

$$b_i \leq \left[a_{ii}\underline{x}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}\overline{x}_j \right] \quad \text{para } i = 1, \ldots, r, \tag{3.42}$$

$$b_i \geq \left[a_{ii}\overline{x}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}\underline{x}_j \right] \quad \text{para } i = 1, \ldots, r. \tag{3.43}$$

Escribiendo estos sistemas de forma matricial se tiene

$$b \leq \left[(A - D)\,\overline{x} + D\underline{x} \right],$$

$$b \geq \left[(A - D)\,\underline{x} + D\overline{x} \right],$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} \end{pmatrix}$, $b = col\,(b_1, ..., b_r)$,
$\overline{x} = col\,(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_r)$ y $\underline{x} = col\,(\underline{x}_1, ..., \underline{x}_r)$.

Restando la primera desigualdad con la segunda se obtiene

$$0 \leq (2D - A)\,(\underline{x} - \overline{x}).$$

Por Lema 1.14, $2D - A$ es invertible y su inversa es no negativa, así que $(\underline{x} - \overline{x}) \geq 0$, esto implica que $\underline{x} \geq \overline{x}$ y de esta desigualdad se concluye que $\underline{x} = \overline{x}$. En consecuencia $\underline{x}_i = \overline{x}_i = x_i^* = \lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t)$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Así, $x^* = col(x_1^*, \ldots, x_r^*)$ es el punto de equilibrio que atrae a todas las soluciones del sistema (3.1) con condición inicial (3.3). Esto completa la prueba del teorema. □

Teorema 3.8. *Supongamos que las hipótesis $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$, $\widehat{H}_3$, $\widehat{H}_4$ y $\widehat{H}_5$ se satisfacen y la matriz $C = (c_{ij})_{r\times r}$, cuyo coeficientes están dados por*

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{(\widetilde{M}_i)^2 (a_{ii}^u)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \textit{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u \left[1 + \frac{(\widetilde{M}_i)^2 a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right], & \textit{para } i \neq j, \end{cases}$$

es una M-matriz. Entonces la solución $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *del sistema* (3.2) *con condición inicial* (3.3)*, satisface que para cada* i*,* $r+1 \leq i \leq n$*,* $x_i(t) \to 0$ *exponencialmente cuando* $t \to \infty$*, y para* i*,* $1 \leq i \leq r$*,* $x_i(t) - y_i(t) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$ *donde* $y(t) = col\,(y_1(t), ..., y_r(t))$ *es cualquier solución del sistema* (3.5)*.*

Demostración. Sea $x(t) = col\,(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ la solución del sistema (3.2) con condición inicial (3.3). De la Proposición 3.4 se tiene que $x_i(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \geq 0$, $i = 1, ..., r$ y $x_i(t) \to 0$ exponencialmente para $i = r+1, \ldots, n$, cuando $t \to +\infty$. Como el sistema (3.5) es extremadamente estable, es suficiente probar que para $i = 1, ..., r$, $x_i(t) - y_{i*}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde $y^*(t) = col\,(y_{1*}(t), ..., y_{r*}(t))$ es la solución dada en el Lema 3.5. El Lema 2.4 garantiza que las componentes $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, están acotadas superiormente por constantes positivas. En consecuencia, $x_i(t)$ para $i = 1, ..., r$, son acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. En virtud del Lema 3.5 las componentes $y_i^*(t)$ para $i = 1, ..., r$, están acotadas superiormente e inferiormente por constantes positivas.

Trabajando como en la Proposición 3.2, denotemos por $C(\epsilon)$, con $\epsilon \geq 0$, la $r \times r$ matriz cuyos elementos están dados por

$$c_{ij}(\epsilon) = \begin{cases} a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{(\widetilde{M}_i + \epsilon)\widetilde{M}_i (a_{ii}^u)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i}, & \text{para } i = j \\ \\ -a_{ij}^u \left[1 + \frac{(\widetilde{M}_i + \epsilon)\widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right], & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

En de dicha proposición se probó que existen $\overline{\epsilon}$ y ϵ_0 con $0 < \overline{\epsilon} < \epsilon_0$ tal que se satisfacen las desigualdades

$$\alpha_i\,(c_{ii} - \epsilon_0) > \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_j\,(|c_{ij}| + \epsilon_0)\,, \qquad 1 \leq i \leq r, \tag{3.44}$$

y

$$c_{ij}(\overline{\epsilon}) > c_{ij} - \epsilon_0 \qquad y \qquad c_{ii}(\overline{\epsilon}) > c_{ii} - \epsilon_0. \tag{3.45}$$

Consideremos para cada i, $1 \leq i \leq r$, $w_i(t) = \ln\left(\dfrac{x_i(t)}{y_{i*}(t)}\right)$. Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left(e^{w_j(t-s)}-1\right)ds \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds. \end{aligned}$$

Descomponiendo el término i-esimo en el primer sumando, se tiene

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= -a_{ii}(t)\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)e^{w_i(t-s)}ds + a_{ii}(t)\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)ds \\ &\quad - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left(e^{w_j(t-s)}-1\right)ds \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds. \end{aligned}$$

Reescribiendo w_i' como en la prueba de la Proposición 3.2, se obtiene que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= -a_{ii}(t)\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\left(e^{w_i(t)}-1\right)ds - \sum_{j=1, j\neq i}^{r} a_{ij}(t)F(t) \\ &\quad -a_{ii}(t)\sum_{j=1}^{r}\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)F_{ij}(\sigma)d\sigma ds \\ &\quad +a_{ii}(t)\sum_{j=r+1}^{n}\int_0^{+\infty} K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t} e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)G_{ij}(\sigma)d\sigma ds \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}(t)G_{ij}(t), \end{aligned}$$

donde

$$F_{ij}(t) = \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left(e^{w_j(t-s)}-1\right)ds \quad \text{y}$$

$$G_{ij}(t) = \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds,$$

están definidas en $[0, +\infty)$.

Definamos la función V sobre $[0,+\infty)$ como

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) + V_6(t) + V_7(t), \tag{3.46}$$

donde

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left| w_i(t) \right|,$$

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left(\int_{t-s}^{t} a_{ij}(\sigma+s) y_{j*}(\sigma) \left| e^{w_j(\sigma)} - 1 \right| d\sigma \right) ds,$$

$$V_3(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) \int_{t-s}^{t} a_{ii}(\rho+s) y_{i*}(\rho) \left(\int_{\rho}^{t} e^{w_i(\sigma)} a_{ij}(\sigma) \left| F_{ij}(\sigma) \right| d\sigma \right) d\rho ds,$$

$$V_4(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i G_{ij}(t) \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) \int_{t-s}^{t} a_{ii}(\rho+s) y_{i*}(\rho) \left(\int_{\rho}^{t} e^{w_i(\sigma)} a_{ij}(\sigma) d\sigma \right) d\rho ds,$$

$$V_5(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \int_{t-s}^{t} y_{i*}(\sigma) \left| e^{w_i(\sigma)} - 1 \right| d\sigma ds,$$

$$V_6(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \bar{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \int_{t-s}^{t} x_j(\sigma) d\sigma ds$$

y

$$V_7(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i \int_0^{+\infty} \left(\int_{t-\delta}^{t} K_{ij}(\delta) a_{ij}(s+\delta) x_j(s) ds \right) d\delta.$$

De la Proposición 3.2, se tiene que que $V_1(t)$ es no negativa, es acotada; esto es, existe una constante $L > 0$ tal que $V_1(t) \leq L$ para todo $t \in [0,\infty)$ y además por el Lema 1.15 se tiene que $V_1(t)$ es derivable en $[0,+\infty)\backslash D$, donde $D = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$, $D_j = \left\{ t \in [0,+\infty) : y_{j*}(t) = x_j(t), y'_{j*}(t) \neq x'_j(t) \right\}$ y cumple que para $t \in [0,+\infty)\backslash D$

$$V_1'(t) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w'(t) sgn\left(w(t)\right).$$

Además se tiene que $sgn\left(w_i(t)\right) = sgn\left(e^{w_i(t)} - 1\right)$, $y_{i*}(t) \left| e^{w_i(t)} - 1 \right| = \left| x_i(t) - y_{i*}(t) \right|$ y $y_{i*}(t-s) \geq y_{i*}(t) e^{-b_i^u s}$ para todo i, $1 \leq i \leq r$. Por lo que se satisface que

$$\begin{aligned}
V_1'(t) \leq & -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a_{ii}(t)\left|x_i(t)-y_{i*}(t)\right|\int_0^{+\infty}e^{-b_i^u s}K_{ii}(s)ds \\
& +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}(t)\left|F_{ij}(t)\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i a_{ij}(t)G_{ij}(t) \\
& +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i a_{ii}(t)\int_0^{+\infty}K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t}e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)\left|F_{ij}(\sigma)\right|d\sigma ds \\
& +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i a_{ii}(t)G_{ij}(t)\int_0^{+\infty}K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t}e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)d\sigma ds.
\end{aligned}$$

En virtud del acotamiento de los coeficientes del sistema (3.5), que $e^{w_i(t)}$ para $1 \leq i \leq r$ son positivas y acotadas sobre $\mathbb{R}$, los núcleos son normalizados, de las hipótesis $\widehat{H}_3$ y $\int_0^{+\infty} s^2 K_{ij}(s)ds < +\infty$, la cual está incluida en $\widehat{H}_5$, se garantiza que las funciones $V_2(t)$, $V_3(t)$, $V_4(t)$, $V_5(t)$, $V_6(t)$ y $V_7(t)$ están bien definidas, son no negativas y son acotadas. En consecuencia $V(t)$ está bien definida, es no negativa y acotada. Además de la hipótesis $\widehat{H}_3$ y por el Lema 1.7 se tiene que $V_2(t)$, $V_5(t)$, $V_6(t)$ y $V_7(t)$ son diferenciables y sus derivadas están dadas por

$$\begin{aligned}
V_2'(t) = & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i\left|x_j(t)-y_{j*}(t)\right|\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)a_{ij}(s+t)ds \\
& -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}(t)\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)}-1\right|ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5'(t) = & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u\left|x_j(t)-y_{j*}(t)\right| \\
& -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u\int_0^{+\infty}K_{ij}(s)y_{j*}(t-s)\left|e^{w_j(t-s)}-1\right|ds.
\end{aligned}$$

$$V_6'(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u x_j(t) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^u\mu_{ii}a_{ij}^u G(t).$$

$$V_7'(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i x_j(t)\int_0^{+\infty}K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i a_{ij}(t)G(t).$$

Para calcular las derivadas de $V_3(t)$ y $V_4(t)$, se trabaja como en la prueba del Teorema 2.14 y por la fórmula de Leibnitz's, se tiene que

$$\begin{aligned} V_3'(t) &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i a_{ii}(t)\int_0^{\infty}K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t}e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)\left|F_{ij}(\sigma)\right|d\sigma ds \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}(t)\left|F_{ij}(t)\right|d_i(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4'(t) &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i a_{ii}(t)G_{ij}(t)\int_0^{\infty}K_{ii}(s)y_{i*}(t-s)\int_{t-s}^{t}e^{w_i(\sigma)}a_{ij}(\sigma)d\sigma ds \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}(t)G_{ij}(t)d_i(t), \end{aligned}$$

donde $d_i(t)=\int_0^{\infty}K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t}a_{ii}(\rho+s)y_{i*}(\rho)d\rho ds$ para $1\leq i\leq r$.

En resumen se tiene que $V(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}\backslash D$, no negativa, acotada y cumple que para $t\in[0,+\infty)\backslash D$,

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a_{ii}^{l}\left|x_i(t)-y_{i*}(t)\right|\int_0^{+\infty}e^{-b_i^u s}K_{ii}(s)ds+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_i a_{ij}^{u}\left|x_j(t)-y_{j*}(t)\right| \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}^{u}\left|F_{ij}(t)\right|d_i(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^{u}\mu_{ii}a_{ij}^{u}\left|x_j(t)-y_{j*}(t)\right| \\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^{u}\mu_{ii}a_{ij}^{u}\left|F_{ij}(t)\right|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i e^{w_i(t)}a_{ij}(t)G_{ij}(t)d_i(t) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^{u}\mu_{ii}a_{ij}^{u}x_j(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i x_j(t)\int_0^{+\infty}K(\delta)a_{ij}(\delta+t)d\delta \\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}\right)\widetilde{M}_i a_{ii}^{u}\mu_{ii}a_{ij}^{u}G_{ij}(t). \end{aligned} \tag{3.47}$$

El Lema 3.5 garantiza que $\widehat{m}_i<y_{i*}(t)<\widetilde{M}_i$ para todo i, $1\leq i\leq r$ y $t\in\mathbb{R}$, por tanto

$$d_i(t)\leq\int_0^{\infty}K_{ii}(s)\int_{t-s}^{t}a_{ii}^{u}\widetilde{M}_i ds_2 ds=a_{ii}^{u}\widetilde{M}_i\int_0^{\infty}sK_{ii}(s)ds=a_{ii}^{u}\widetilde{M}_i\mu_{ii}.$$

Por el Lema 3.3, se tiene que para $1\leq i\leq r$, $\limsup_{t\to+\infty}x_i(t)\leq\widetilde{M}_i$, por lo que se cumple que existe $T_0>0$ tal que $x_i(t)<\widetilde{M}_i+\overline{\epsilon}$ para todo i, $1\leq i\leq r$ y $t\geq T_0$. En consecuencia para todo i, $1 \leq i \leq r$ y $t \geq T_0$ se cumple que

$$e^{w_i(t)} = \frac{x_i(t)}{y_{i*}(t)} < \frac{\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i}.$$

Sustituyendo lo anterior, en el tercer y sexto término de la desigualdad (3.47) y el hecho de que $a_{ij}(t) \leq a_{ij}^u$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, en el octavo término, se obtiene que para todo $t \geq T_0$,

$$\begin{aligned} V'(t) \leq & -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ii}^l \left| x_i(t) - y_{i*}(t) \right| \int_0^{+\infty} e^{-b_i^u s} K_{ii}(s) ds + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}^u \left| x_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u \left| x_j(t) - y_{j*}(t) \right| + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i a_{ij}^u x_j(t) \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon}}{\widehat{m}_i} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii} a_{ij}^u x_j(t). \end{aligned}$$

Agrupando algunos términos, se tiene

$$\begin{aligned} V'(t) \leq & -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i \left(a_{ii}^u \right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) \left| x_i(t) - y_{i*}(t) \right| \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i a_{ij}^u \left(1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) \left| x_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i a_{ij}^u \left(1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) x_j(t) \\ = & -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i c_{ii}(\overline{\epsilon}) \left| x_i(t) - y_{i*}(t) \right| - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \alpha_i c_{ij}(\overline{\epsilon}) \left| x_j(t) - y_{j*}(t) \right| \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i a_{ij}^u \left(1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) x_j(t) \\ = & -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i c_{ij}(\overline{\epsilon}) \left| x_j(t) - y_{j*}(t) \right| + g_1(t), \end{aligned}$$

donde

$$g_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i a_{ij}^u \left(1 + \frac{\left(\widetilde{M}_i + \overline{\epsilon} \right) \widetilde{M}_i a_{ii}^u \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} \right) x_j(t).$$

Dedido a que $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ para todo j, $r+1 \leq j \leq n$, se cumple que $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} g_1(s)ds < +\infty$. Haciendo un reordenamiento en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j c_{ji}(\bar{\epsilon})\right)|x_i(t)-y_{i*}(t)|+g_1(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\left(\alpha_i c_{ii}(\bar{\epsilon})+\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j c_{ji}(\bar{\epsilon})\right)|x_i(t)-y_{i*}(t)|+g_1(t). \end{aligned}$$

De (3.45), se tiene que para todo $t \geq T_0$,

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\sum_{i=1}^{r}\left((c_{ii}-\bar{\epsilon}_0)\alpha_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j\,|c_{ji}-\bar{\epsilon}_0)|\right)|x_i(t)-y_{i*}(t)|+g_1(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\left((c_{ii}-\bar{\epsilon}_0)\alpha_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j\left(|c_{ji}|+\bar{\epsilon}_0\right)\right)|x_i(t)-y_{i*}(t)|+g_1(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\beta_i\,|x_i(t)-y_{i*}(t)|+g_1(t), \end{aligned}$$

donde $\beta_i = (c_{ii}-\bar{\epsilon}_0)\alpha_i - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{r}\alpha_j(|c_{ji}|+\bar{\epsilon}_0)$ es positiva gracias a la desigualdad (3.44). En consecuencia para cada $t \in [T_0,+\infty)\backslash D$ se cumple

$$\frac{d}{dt}\left[-V(t)-\sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\,|x_i(s)-y_{i*}(s)|\,ds+\int_{T_0}^{t}g_1(s)ds\right]\geq 0.$$

Como D es numerable, la desigualdad anterior se satisface en casi todas partes y por tanto se puede integrar en $[T_0,t]$ para obtener

$$-V(t)-\sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\,|x_i(s)-y_{i*}(s)|\,ds+\int_{T_0}^{t}g_1(s)ds\geq -V(T_0).$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{T_0}^{t}\beta_i\,|x_i(s)-y_{i*}(s)|\,ds\leq V(T_0)-V(t)+\int_{T_0}^{t}g_1(s)ds.$$

En virtud de que $V(t)\geq 0$ y del hecho de que $0<\int_0^{+\infty}g_1(s)ds<+\infty$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0\leq\int_0^{t}|x_j(s)-y_{j*}(s)|\,ds &\leq \frac{1}{\beta_j}\left(V(T_0)+\int_0^{+\infty}g_1(s)ds\right) \\ &= C<+\infty, \end{aligned}$$

donde C es una constante independiente de t. Por tanto se cumple que

$$\int_0^{+\infty} |x_j(s) - y_{j*}(s)|\, ds < +\infty, \quad j = 1, \dots, r.$$

Argumentando como en la parte final de la prueba de la proposición 3.2, se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} |x_j(t) - y_{j*}(t)| = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Esto completa la prueba del teorema. □

§3.4. Ejemplos.

En esta sección se dan dos ejemplos para ilustrar las conclusiones de los Teoremas 3.6 y 3.8. En el primero de ellos se ilustran las conclusiones del Teorema 3.6 y en el segundo las conclusiones del Teorema 3.8.

Ejemplo 3.1. *Consideremos el sistema*

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{4} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right), \; i = 1,2,3,4, \tag{3.48}$$

donde los coeficientes son funciones continuas, no negativas dadas por

$$\begin{array}{lll}
b_1(t) = 16 + \sin t, & b_2(t) = 16 + \cos t, & b_3(t) = 2\left(1 + \sin^2 t\right), \\
b_4(t) = 2\left(1 + \cos^2 t\right), & a_{11}(t) = 5 + \sin t, & a_{12}(t) = \dfrac{1}{2} + \cos^2 t, \\
a_{13}(t) = 1 + \sin^2 t, & a_{14}(t) = 1 + \cos^2 t, & a_{21}(t) = \dfrac{1}{2} + \sin^2 t, \\
a_{22}(t) = 5 + \cos t, & a_{23}(t) = 1 + \sin^2 t, & a_{24}(t) = 1 + \cos^2 t, \\
a_{31}(t) = 5 + \cos t, & a_{32}(t) = 1 + \sin^2 t, & a_{33}(t) = 1 + \sin^2 t, \\
a_{34}(t) = 1 + \sin^2 t & a_{41}(t) = 4(1 + \cos^2 t), & a_{42}(t) = 1 + \cos^2 t, \\
a_{43}(t) = 1 + \sin^2 t, & a_{44}(t) = 1 + \sin^2 t, & \\
K_{12}(t) = 200e^{-200t}, & K_{13}(t) = \beta_{13}e^{-\beta_{13}t}, & K_{14}(t) = \beta_{14}e^{-\beta_{14}t}, \\
K_{21}(t) = 200e^{-200t}, & K_{23}(t) = \beta_{23}e^{-\beta_{23}t}, & K_{24}(t) = \beta_{24}e^{-\beta_{24}t}, \\
K_{31}(t) = \beta_{31}e^{-\beta_{31}t}, & K_{32}(t) = \beta_{32}e^{-\beta_{32}t}, & K_{34}(t) = \beta_{34}e^{-\beta_{34}t}, \\
K_{41}(t) = \beta_{41}e^{-\beta_{41}t}, & K_{42}(t) = \beta_{42}e^{-\beta_{42}t}, & K_{43}(t) = \beta_{43}e^{-\beta_{43}t}.
\end{array}$$

y β_{ij}*,* $1 \leq i, j \leq 4$*,* $i \neq j$ *son números positivos. Claramente se satisface la hipótesis* H_0*. Observemos que*

$$\begin{array}{llllll} b_1^u = 17, & b_1^l = 15, & b_2^u = 17, & b_2^l = 15, & b_3^u = 4, & b_3^l = 2, \\ b_4^u = 4, & b_4^l = 2, & a_{11}^u = 6, & a_{11}^l = 4, & a_{12}^u = \dfrac{3}{2}, & a_{12}^l = \dfrac{1}{2}, \\ a_{13}^u = 2, & a_{13}^l = 1, & a_{14}^u = 2, & a_{14}^l = 1, & a_{21}^u = \dfrac{3}{2}, & a_{21}^l = \dfrac{1}{2}, \\ a_{22}^u = 6, & a_{22}^l = 4, & a_{23}^u = 2, & a_{23}^l = 1, & a_{24}^u = 2, & a_{24}^l = 1, \\ a_{31}^u = 6, & a_{31}^l = 4, & a_{32}^u = 2, & a_{32}^l = 1, & a_{33}^u = 2, & a_{33}^l = 1, \\ a_{34}^u = 2, & a_{34}^l = 1, & a_{41}^u = 8, & a_{41}^l = 4, & a_{42}^u = 2, & a_{42}^l = 1, \\ a_{43}^u = 2, & a_{43}^l = 1, & a_{44}^u = 2, & a_{44}^l = 1. & & \end{array}$$

Para $k = 3$ *existe* $i_3 = 1$ *tal que*

$$b_3^u a_{11}^u - b_1^l a_{31}^l = (4)\,(6) - (15)\,(4) = 24 - 60 < 0,$$

$$b_3^u a_{12}^u - b_1^l a_{32}^l = 4\left(\frac{3}{2}\right) - (15)\,(1) = (6 - 15) < 0,$$

$$b_3^u a_{13}^u - b_1^l a_{33}^l = 4\,(2) - (15)\,(1) = (8 - 15) < 0,$$

Y para $k = 4$ *existe* $i_4 = 1$ *tal que*

$$b_4^u a_{11}^u - b_1^l a_{41}^l = 4\,(6) - (15)\,(4) = 24 - 60 < 0,$$

$$b_4^u a_{12}^u - b_1^l a_{42}^l = 4\left(\frac{3}{2}\right) - (15)\,(1) = 6 - 15 < 0,$$

$$b_4^u a_{13}^u - b_1^l a_{43}^l = b_4^u a_{14}^u - b_1^l a_{44}^l = 4\,(2) - (15)\,(1) = 8 - 15 < 0,$$

Por lo que la hipótesis $\widehat{H}_1$ *se satisface. Por otro lado, para* $i = 1, 2$*; se satisface*

$$b_1^l = 15 \quad > \quad a_{12}^u \left(\frac{b_2^u}{a_{22}^l}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{4};$$

$$b_2^l = 15 \quad > \quad a_{21}^u \left(\frac{b_1^u}{a_{11}^l}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{4}.$$

Por tanto, se cumple la hipótesis $\widehat{H}_2$*. Claramente* $\mu_{ij} = \dfrac{1}{\beta_{ij}}$ *para* $1 \leq i, j \leq 4$ *y* $i \neq j$*. Esto muestra que la hipótesis* $\widehat{H}_3$ *se satisface. En consecuencia, todas las condiciones del*

Teorema 3.6 se cumple y así para cualquier solución $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ *del sistema* (3.48)*, con condiciones iniciales* (3.3)*, tiene la propiedad que las especies* $x_3(t)$ *y* $x_4(t)$ *se extinguen y* $u_1^*(t) - x_1(t) \to 0$, $u_2^*(t) - x_2(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*, donde* $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ *es cualquier solución del sistema integro–diferencial logística*

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\left[(16 + \sin t) - (5 + \sin t)x_1(t) - (\frac{1}{2} + \cos^2 t)\int_0^{+\infty} 200e^{-200s}x_2(t-s)ds\right], \\ x_2'(t) = x_2(t)\left[(16 + \cos t) - (\frac{1}{2} + \sin^2 t)x_2(t) - (5 + \cos t)\int_0^{+\infty} 200e^{-200s}x_1(t-s)ds\right]. \end{cases}$$

Ejemplo 3.2. *Consideremos el sistema*

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{4} a_{ij}(t)\int_0^{+\infty} K_{ij}(s)x_j(t-s)ds\right),\ i = 1, 2, 3, 4; \tag{3.49}$$

donde $K_{11}(t) = 200e^{-200t}$, $K_{22}(t) = 200e^{-200t}$, $K_{33}(t) = \beta_{33}e^{-\beta_{33}t}$, $K_{44}(t) = \beta_{44}e^{-\beta_4 t}$ *con* β_{33}, β_{44} *números positivos, los coeficientes y los otros núcleos son como en el ejemplo anterior. En este caso* $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{12} = \mu_{21} = \dfrac{1}{200}$*, además* $\int_0^\infty s^2K_{ij}(s)ds = \dfrac{2}{(\beta_{ij})^2}$. *Sabemos por el ejemplo anterior que las hipótesis* $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}_1$ *y* $\widehat{H}_3$ *se satisfacen. Por otro lado, para* $i = 1, 2$*; se cumple que*

$$\widetilde{M}_1 = \widetilde{M}_2 = \frac{b_1^u}{a_{11}^l}\left(\frac{200 + b_1^u}{200}\right) = \frac{b_2^u}{a_{22}^l}\left(\frac{200 + b_2^u}{200}\right) = \left(\frac{17}{6}\right)\left(\frac{217}{200}\right) = \frac{3689}{1200}.$$

Por tanto

$$b_1^l = 15 \quad > \quad a_{12}^u\widetilde{M}_2 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3689}{1200}\right) = \frac{3689}{800},$$

$$b_2^l = 15 \quad > \quad a_{21}^u\widetilde{M}_1 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3689}{1200}\right) = \frac{3689}{800}.$$

Así la hipótesis $\widehat{H}_4$ *se satisface. Para verificar que la hipótesis* $\widehat{H}_5$ *se cumplen, calculemos los valores* $\widehat{m}_1$ *y* $\widehat{m}_2$*; para ello calculemos primeramente* L_1 *y* L_2*,*

$$L_1 = a_{11}^u\widetilde{M}_1\mu_{11} + a_{12}^u\widetilde{M}_2\mu_{12} = 6\left(\frac{3689}{1200}\right)\frac{1}{200} + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3689}{1200}\right)\frac{1}{200} = \frac{3689}{32000}.$$

$$L_2 = a_{21}^u\widetilde{M}_1\mu_{21} + a_{22}^u\widetilde{M}_2\mu_{22} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3689}{1200}\right)\frac{1}{200} + 6\left(\frac{3689}{1200}\right)\frac{1}{200} = \frac{3689}{32000}.$$

Por lo que $e^{L_1} = e^{L_2} = \exp\left(\dfrac{3689}{32000}\right)$ *. De lo anterior se tiene que*

$$\widehat{m}_1 = \frac{b_1^l - a_{12}^u \widetilde{M}_2}{a_{11}^u e^{L_1}} = \widehat{m}_2 = \frac{b_2^l - a_{21}^u \widetilde{M}_1}{a_{22}^u e^{L_2}} = \frac{15 - \left(\dfrac{3689}{800}\right)}{6\exp\left(\dfrac{3689}{32000}\right)} = \frac{8311}{4800\exp\left(\dfrac{3689}{32000}\right)}.$$

Por tanto,

$$\frac{\left(\widetilde{M}_1\right)^2 a_{11}^u \mu_{11}}{\widehat{m}_1} = \frac{\left(\widetilde{M}_2\right)^2 a_{22}^u \mu_{22}}{\widehat{m}_2} = \frac{13608721\exp\left(\frac{3689}{32000}\right)}{83110000} \approx 0,183.$$

$$\frac{\left(\widetilde{M}_1\right)^2 \left(a_{11}^u\right)^2 \mu_{11}}{\widehat{m}_1} = \frac{\left(\widetilde{M}_2\right)^2 \left(a_{22}^u\right)^2 \mu_{22}}{\widehat{m}_2} = \frac{40826163\exp\left(\dfrac{3689}{32000}\right)}{41555000} \approx 1,103.$$

$$a_{11}^l \int_0^\infty K_{11}(s) e^{-b_1^u s} ds = a_{22}^l \int_0^\infty K_{22}(s) e^{-b_2^u s} ds = 4\left(\frac{200}{200+17}\right) = \frac{800}{217} \approx 3{,}69.$$

En consecuencia para todo i, $1 \leq i \leq 2$, *se cumple*

$$\frac{\left(\widetilde{M}_i\right)^2 \left(a_{ii}^u\right)^2 \mu_{ii}}{\widehat{m}_i} < a_{ii}^l \int_0^{+\infty} K_{ii}(s) e^{-b_i^u s} ds.$$

Además la matriz

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} a_{11}^l \int_0^{+\infty} K_{11}(s)e^{-b_1^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_1\right)^2 \left(a_{11}^u\right)^2 \mu_{11}}{\widehat{m}_1} & -a_{12}^u\left[1 + \frac{\left(\widetilde{M}_1\right)^2 a_{11}^u \mu_{11}}{\widehat{m}_1}\right] \\ -a_{21}^u\left[1 + \frac{\left(\widetilde{M}_2\right)^2 a_{22}^u \mu_{22}}{\widehat{m}_2}\right] & a_{22}^l \int_0^{+\infty} K_{22}(s)e^{-b_2^u s} ds - \frac{\left(\widetilde{M}_2\right)^2 \left(a_{22}^u\right)^2 \mu_{22}}{\widehat{m}_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{800}{217} - \frac{40826163\exp\left(\frac{3689}{32000}\right)}{41555000} & -\frac{3}{2}\left[1 + \frac{13608721\exp\left(\frac{3689}{32000}\right)}{83110000}\right] \\ -\frac{3}{2}\left[1 + \frac{13608721\exp\left(\frac{3689}{32000}\right)}{83110000}\right] & \frac{800}{217} - \frac{40826163\exp\left(\frac{3689}{32000}\right)}{41555000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2,587 & -1,774 \\ -1,774 & 2,587 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es una M-matriz, ya que sus autovalores son positivos, $c_{ij} < 0$, $1 \leq i, j \leq 2$, $i \neq j$ *y* $c_{ii} > 0$, $i = 1, 2$.

Por tanto todas las condiciones del Teorema 3.8 se cumplen. Así se obtiene que cualquier solución $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ *del sistema*(3.49), *con condiciones iniciales*

(3.3) *tiene la propiedad que las especies* $x_3(t)$ *y* $x_4(t)$ *se extinguen y* $u_1^*(t) - x_1(t) \to 0$, $u_2^*(t) - x_2(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$, *donde* $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ *es cualquier solución del sistema integro–diferencial logística*

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\Bigg[(16+\sin t) - (5+\sin t)\int_0^{+\infty} 200e^{-200t}x_1(t-s)ds \\ &\qquad - \left(\frac{1}{2}+\cos^2 t\right)\int_0^{+\infty} 200e^{-200s}x_2(t-s)ds\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= x_2(t)\Bigg[(16+\sin t) - \left(\frac{1}{2}+\sin^2 t\right)\int_0^{+\infty} 200e^{-200s}x_1(t-s)ds \\ &\qquad -(5+\cos t)\int_0^{+\infty} 200e^{-200s}x_2(t-s)ds\Bigg]. \end{aligned}$$

Referencias

[1] Ahmad,S. Convergence and ultimate bounds of solutions of the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations, *Journal of mathematical analysis and aplications.***127** (1986),377-387.

[2] Ahmad,S. On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations, *Proc. Amer. Math. Soc.***117** (1993),199-205.

[3] Ahmad,S.and Lazer,A. One species extinction in an autonomous competition model, (1995) *Proceedings of the first World Congress of Nonlinear Analysis, Walter DeGruyter, Berlin.*

[4] Ahmad,S.and Lazer,A. On the Nonautonomous N-competing species problems, *Appl.Anal.***57**(1995),309-323.

[5] Ahmad,S.and Lazer,A. Necesary and sufficiente average growth in a Lotka-Volterra system , *Nonlinear Analysis.***34** (1998),191-228.

[6] Ahmad,S.and Lazer,A. Average growth and total permanence in a competitive Lotka-Volterra system , *Annali di matemática pura ed applicata.***136** (2005),1-21.

[7] Bartle, R. The Elements of Real analysis. John Wiley and Sons.,New York (1964).

[8] Bermand, A. and Plemmons, R. Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences. Computher science and Applied mathematics,(1979).

[9] Brelot,M. Sur le probleme biologique hereditaire de deux especes devorante et devoree , *Ann. Mat. Pura Appl.Ser*(1931).

[10] Borden,R. A course in Advanced Calculus. Dover Publications,Inc. Mineola, New York, (1983).

[11] Coleman, B.D. Nonautonomous logistic equations as models of the adjustment of populations to environmental change, *Math. Biosci.*.**45**(1979):159-173.

[12] C. Corduneanu and V.Lakshmikantham. Equations with unbounded delay-a survey, *Nonlinear Anal.*.**4**(1980):831-877.

[13] Chunhua, F. On the existence and uniqueness of almost periodic solutions for delay Logistic equations,*Applied Mathematics and computation.*.**136**(2003):487-494.

[14] Gopalsamy, K. Global asymptotic in Volterra's population system, *J.Math.Bology* . **19**(1984):157-168.

[15] Gopalsamy, K. Global asymplotic stability in a periodic integrodifferential system, *Tohoku Math.* **J.37**(1985):323-332.

[16] Gopalsamy, K. Global asymptotic stability in a class of Volterra-Stieltjes integrodifferential system, *Int.J.Systems SCI* . **Vol 18, No. 9**(1987):1733-1737.

[17] Gopalsamy, K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics , *Klumer Academic Publishers Boston,* (1992).

[18] Gopalsamy, K. and He, X. Dynamics of an almost periodic logistic integrodifferential equation, *Methods and applications of Analysis 2.*(1995), 38-66.

[19] Hale, Jack. and Verduyn Lunel, Sjoerdm. Introduction to Functional Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences, Vol 90. Springer-Verlag New York*, (1993).

[20] He, X. Global stability in nonautonomous Lotka-Volterra systems of "pure-delay type" , *J. Differential and Integral Equations.* . **Vol 11, No. 2**(1998):293-310.

[21] He, X. Almost Periodic Solutions of a Competition System with Dominated Infinite Delays, *Tohoku Math. J.* . **Vol 50, No. 2**(1998):71-89.

[22] Hirsch, W. and Hanisch, J. Differential equation models of some parasitic infection-methods for the study of asymtotic behavior,*Comm. Pure Appl. Math.***38**(1995):733-753.

[23] Montes de Oca, F. and Pérez, L. Extinction in Nonautonomous Competitive Lotka-Volterra Systems with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Aplications* **75**(2012):758-768.

[24] Montes de Oca, F. and Pérez, L. Balancing Survival and Extinction in nonautonomous competitive Lotka-Volterra systems with infinite delay.(2012) En preparación.

[25] Montes de Oca, F. and Vivas, M. Extinction in a two dimensional Lotka-Volterra systems with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Real world Applications* **Vol.7**(2006):1042-1047.

[26] Montes de Oca, F. and Zeeman, M.L. Balancing Survival and Extinction in Nonautonomous Competitive Lotka-Volterra Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **192**(1995):360-370.

[27] Montes de Oca, F. and Zeeman, M.L. Extinction in Nonautonomous Competitive Lotka-Volterra Systems, *American Mathematical Society* **Vol. 124**, Number 12 (1996): 3677-3687.

[28] Murakami, S. Almost periodic solutions of a system of integrodifferential equations, *Tohoku- Math. Journ* .**39** (1989):71-79.

[29] Novo, S., Obaya,R. y Rojo, J. Ecuaciones y sistemas diferenciales. Mcgraw-Hill, Madrid.

[30] R.D.Driver.(1962) Existence and stability of solutions of delay differential equation.*Arch.Rational Mech.Anal.* **10** (1995):401-426.

[31] Tineo, A. On the asymptotic behaviour of some population models, *J.Math.Anal.Appl.* **167** (1992):516-529.

[32] Tineo, A. Asymptotic dehavior of positive solutions of the nonautonomous Lotka-Volterra competetions equations, *Differential and Integral Equations.* **6** (1993):449-457.

[33] Tineo, A. An iterative scheme for the N-competing species problem , *J. of Differential Equations.* **Vol 116,1** (1995):1-15.

[34] Tineo, A. Iterative scheme for some population model , *Nonlinear World.* **No 3** (1996):695-708.

[35] Tineo, A. Necessary and sufficient conditions for extinction of one species, *Advanced Nonlinear Studies.* **5** (2005):57-71.

[36] Volterra, V. Lecon sur la theorie mathematique de la lutte por la vie, *Gauthier Villars, Paris,*(1931).

[37] Yang, K. Delay differential equations with aplications in populations dynamics , *Academic Press, New York,*(1993).