

Análisis en una Variable Compleja

Miguel J. Vivas C.

15 de junio de 2012

PRÓLOGO

Una rápida inspección del presente libro nos muestra que el mismo está concebido como un texto para ser usado en un curso de introducción a la teoría de funciones de una variable compleja. Las materias fundamentales se exponen de manera precisa, detallada, eficaz y en un lenguaje honesto y sin pretensiones que, sin embargo, no carece del rigor y la elegancia que el tema obliga a merecerse.

El Profesor Miguel Vivas (M.Sc.) ha acometido la ardua tarea de escribir un texto sobre el análisis en una variable compleja, sin duda con el objetivo de presentar al potencial lector un trabajo unificado desde el punto de vista práctico y teórico, y a la vez actualizado sobre la materia. Al logro de este objetivo ha contribuido la excelente trayectoria académica y cualidades pedagógicas del Profesor Vivas, quien pese a su juventud, cuenta con calificada experiencia al haber dictado cursos de variable compleja de pre y postgrado en la UCLA en varias oportunidades.

El texto cubre exhaustivamente las materias de un primer curso de análisis complejo. Contiene suficientes figuras y ejercicios resueltos que complementan la exposición y facilitan la comprensión de los tópicos presentados. Cada capítulo cuenta con listas de ejercicios propuestos que están adecuadamente balanceados en posición y grado de dificultad, y que ofrecen, tanto al instructor como al estudiante, excelentes oportunidades para el necesario desarrollo y enriquecimiento de la dinámica enseñanza-aprendizaje en el tema tratado.

El capítulo 1 introduce los fundamentos de la teoría: La noción de número complejo y sus propiedades algebraicas y geométricas. En el segundo capítulo se exponen en detalle las nociones topológicas que se necesitarán para abordar los temas clásicos del análisis complejo. El autor cita y discute algunos resultados fundamentales de

la topología de la recta y de espacios métricos abstractos, lo que hace la exposición prácticamente autocontenida.

Los capítulos 3 y 4 versan sobre diversos aspectos relacionados con la noción de función analítica, destacando el rol *sui generis* que confiere a la teoría (junto a la integración compleja) las nociones de funciones univaluadas y funciones multivaluadas.

El capítulo 5 presenta la teoría básica de integración compleja. Como bien acota el autor "*El teorema de Cauchy es uno de los resultados más importantes de la teoría de funciones analíticas ... Las consecuencias que se derivan de este son de gran impacto y marcan diferencias notables con el análisis real*".

En el capítulo 6 se estudia la dualidad función analítica-serie de potencias y la noción de serie de Laurent. El libro concluye con la exposición de los resultados y de las herramientas fundamentales asociadas al cálculo de residuos y algunas de sus aplicaciones.

Por último, estimamos que un *ajuste adecuado de rigurosidad* por parte del instructor en la presentación de los capítulos 2 y 5 permite que el libro pueda ser usado exitosamente como texto para cursos de variable compleja que se dictan en otras carreras científicas o en ingeniería.

José Giménez Quero Ph. D.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
ULA

Índice general

1. NOCIONES ELEMENTALES	9
1.1. Números complejos y su álgebra	9
1.2. Representación geométrica de los números complejos	15
1.3. Representación polar de un número complejo	16
1.4. Producto y cociente de números complejos	18
1.5. Potencias y raíces de un número complejo	21
1.6. Las raíces de la unidad	22
1.7. Problemas resueltos	25
1.8. Ejercicios del Capítulo 1	27
2. ASPECTOS DE LA TOPOLOGÍA DE \mathbb{C}	33
2.1. Conjuntos abiertos, cerrados y conexos	33
2.2. Sucesiones	37
2.3. Algunas propiedades básicas de \mathbb{C}	39
2.4. Conjuntos compactos	41
2.5. Series de números complejos	43
2.6. Límites inferior y superior	48
2.7. Funciones continuas	50
2.8. Series de funciones	52
2.8.1. Convergencia puntual y convergencia uniforme	52
2.8.2. Propiedades que preserva la convergencia uniforme	54
2.9. Contornos, dominios y conjuntos poligonalmente conexos	56
2.10. La esfera de Riemann	59
2.11. Ejercicios del capítulo 2	63

3. FUNCIONES ANALÍTICAS	67
3.1. Funciones Univaluadas	67
3.2. Límite de una función compleja	68
3.3. Continuidad de las funciones complejas	70
3.4. La derivada de una función compleja	72
3.5. Las condiciones de Cauchy-Riemann	75
3.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares	82
3.7. Funciones armónicas	84
3.8. Ejercicios resueltos	85
3.9. Ejercicios del capítulo 3	88
4. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES COMPLEJAS	93
4.1. La función exponencial	93
4.2. Las funciones trigonométricas complejas	95
4.3. Las funciones hiperbólicas complejas	99
4.4. La función logaritmo compleja	100
4.5. Analiticidad de la función <i>Logz</i>	102
4.6. Funciones multivaluadas	105
4.7. Ejercicios del capítulo 4	107
5. EL TEOREMA DE CAUCHY Y SUS CONSECUENCIAS	109
5.1. Contornos y Curvas de Jordan	110
5.2. Integral sobre Curvas	113
5.3. Propiedades de la integral	115
5.4. La Variación del Logaritmo a lo largo de un Contorno	120
5.5. Teoría del Índice	122
5.6. Invariancia del índice por Homotopía	128
5.7. El Teorema de Cauchy-Goursat	131
5.8. Consecuencias del Teorema de Cauchy	150
5.9. Los Teoremas de Morera, Liouville y La Desigualdad de Cauchy	155
5.10. Preservación de Límites de Funciones Analíticas	157
5.11. Principio del Módulo Máximo	159
5.12. Versión de Cauchy-Goursat en Dominios Múltiplemente Conexos	162
5.13. Ejercicios del Capítulo 5	164
6. SERIES DE POTENCIAS	171
6.1. Serie de Potencias de Centro z_0	171
6.2. Radio y Círculo de Convergencia de una Serie de Potencias	172

6.3.	Convergencia Uniforme de series de potencias	174
6.4.	Problemas Resueltos	178
6.5.	Serie de Taylor	180
6.6.	Integración de Series de Potencias	186
6.7.	Series de Laurent	194
6.8.	Ejercicios Del Capítulo 6	209
7.	CÁLCULO DE RESIDUOS	213
7.1.	Singularidades y Ceros	213
7.2.	Cálculo de Residuos	221
7.3.	Teorema de los residuos	222
7.4.	Método para Calcular Residuos en Polos	223
7.5.	Polos y Ceros de Funciones Meromorfas	226
7.6.	El Teorema de la Aplicación Abierta	232
7.7.	El Teorema de La Función Inversa	233
7.8.	Cálculo de Integrales Reales usando métodos Complejos	236
7.8.1.	Integrales del tipo: $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	236
7.8.2.	Integrales del tipo: $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$	237
7.8.3.	Integrales del tipo: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x) dx$	240
7.9.	Problemas Resueltos	245
7.10.	Ejercicios	248
	Bibliografía	254

Capítulo 1

NOCIONES ELEMENTALES

1.1. Números complejos y su álgebra

El campo de los números complejos es considerado como el conjunto de los números de la forma $a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria, que no es más que la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Sin embargo en las condiciones anteriores no se ha justificado que exista una solución de $x^2 + 1 = 0$, de manera que el estudio formal de los números complejos debe comenzar por encontrar otra definición de ellos que permita justificar el vacío de la anterior definición.

Definición 1.1.1. Definimos el conjunto de los números complejos \mathbb{C} como el conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$$

junto con dos operaciones de adición y multiplicación definidas como sigue:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Definición 1.1.2. Dos números complejos (a, b) y (c, d) son iguales, si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

El siguiente teorema nos permitirá establecer las propiedades bajo las cuales el conjunto de los números complejos, \mathbb{C} es un cuerpo.

Teorema 1.1.1. *Los números complejos satisfacen:*

- (a) *Las operaciones $+$ y \cdot son asociativas y conmutativas.*
- (b) *El producto distribuye con respecto a la adición.*
- (c) *$(0, 0)$ elemento neutro de la adición.*
- (d) *$(1, 0)$ elemento neutro de la multiplicación.*
- (e) *El simétrico aditivo de (a, b) es $(-a, -b)$*
- (f) *El inverso multiplicativo de (a, b) es*

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

si $(a, b) \neq (0, 0)$.

Demostración. (Ejercicio) □

Observación 1.1.1. *Debido a que los números reales son isomorfos al subcampo de \mathbb{C} dado por los pares $(a, 0)$ mediante el isomorfismo:*

$$\varphi(a, 0) = a$$

Nótese que φ preserva las operaciones de adición y producto, en efecto:

$$\varphi((a, 0) + (b, 0)) = \varphi(a + b, 0) = a + b$$

$$\varphi((a, 0) \cdot (b, 0)) = \varphi(a \cdot b, 0) = a \cdot b$$

Entonces podemos identificar un par $(a, 0)$ con el número real a , es así que notamos que \mathbb{R} está inmerso en \mathbb{C} y por eso algunos autores hablan de \mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C} . Por otra parte, si denotamos por $i = (0, 1)$ entonces i es solución de la ecuación: $x^2 + 1 = 0$, en efecto:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Esta última igualdad salvo isomorfismo. Luego $i^2 + 1 = 0$. Ahora sí estamos en capacidad de justificar la definición de números complejos dada en la introducción,

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) \\ &= a + ib \end{aligned}$$

En consecuencia, todo número complejo se puede escribir de la forma $a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i es la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Al número “ a ” se le llamará **parte real** y “ b ” se le llamará **parte imaginaria** del número complejo $z = a + ib$ y se denotarán $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente.

Teorema 1.1.2. *Dados dos números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, $z_2 \neq 0$, existe un único número complejo $z_3 = (g, h)$ que resuelve la ecuación $z_2 \cdot z_3 = z_1$*

Demostración. Si $z_2 \cdot z_3 = z_1$, entonces $(c, d) \cdot (g, h) = (a, b)$ o equivalentemente:

$$(cg - dh, ch + dg) = (a, b)$$

Luego de la definición de igualdad de números complejos resulta el sistema:

$$\begin{cases} cg - dh = a \\ ch + dg = b \end{cases}$$

En este sistema de dos ecuaciones las incógnitas son h y g .

Ahora bien:

Como $z_2 \neq 0$ entonces $c^2 + d^2 \neq 0$

El sistema equivale a:

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Dándonos

$$h = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2 + d^2} = \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}$$

$$g = \frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

Además esta solución es única. □

Definición 1.1.1. *Dados dos números complejos z_1 y z_2 con $z_2 \neq 0$, definimos el **co-ciente** z_3 , denotado por z_1/z_2 , como la única solución de la ecuación $z_1 = z_2 \cdot z_3$.*

Observación 1.1.2. *Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, con $z_2 \neq 0$,*

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Nótese que si reemplazamos $i^2 = -1$ podemos multiplicar y dividir números complejos siguiendo el álgebra usual, a saber:

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + adi + bci + i^2bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

y

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

donde $c + id \neq 0$.

Definición 1.1.2. El **conjugado** \bar{z} de un número complejo $z = (a, b) = a + ib$ está dado por:

$$\bar{z} = (a, -b) = a - ib.$$

Observación 1.1.3. Una consecuencia natural de la definición anterior es que las siguientes propiedades se satisfacen:

$$(i) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(ii) \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$(iii) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$(iv) \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad w \neq 0$$

$$(v) \overline{\bar{w}} = w$$

$$(vi) z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

La demostración de estas propiedades es fácil y se propone al lector su verificación.

Definición 1.1.3. El **módulo** o **valor absoluto** de un número complejo $z = (a, b) = a + ib$ denotado por $|z|$, está dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nótese que $|z|$ es un número real no negativo y es la longitud del vector anclado en el origen y con extremo el punto (a, b) .

Observación 1.1.4. A la luz de las definiciones anteriores podemos notar que para $z \neq 0$ se cumple que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Por lo cual resulta fácil calcular $\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$.

Teorema 1.1.3. Si $z \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $|z| = |\bar{z}|$ y $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
2. $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ y $2i\operatorname{Im}(z) = z - \bar{z}$
3. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Demostración. (Ejercicio) □

Teorema 1.1.4. Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} \\ &= z_1 z_2 (\bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

□

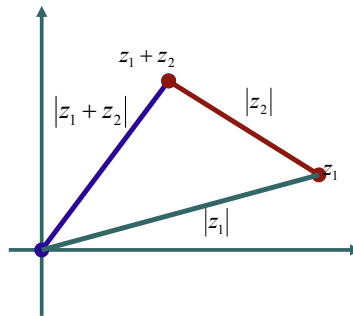
Teorema 1.1.5. (Desigualdad Triangular)

Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ □



El Teorema anterior se puede fácilmente generalizar para n -sumandos usando inducción matemática, obteniéndose:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Teorema 1.1.6. Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2 - 2|z_1z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| - |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Así que $|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$. □

Ejemplo 1.1.1. Demostrar que si $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$ son ambos números reales, entonces o $z_1 = \bar{z}_2$ o z_1 y z_2 son números reales.

Solución:

Sean $z_1 + z_2 = w_1$ y $z_1 \cdot z_2 = w_2$ donde $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Es suficiente probar el resultado en el caso donde z_1 y z_2 no son ambos cero. Si $z_2 \neq 0$ entonces:

$$z_1 = \frac{w_1}{z_2} = \frac{w_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = w_3\bar{z}_2$$

donde $w_3 = \frac{w_1}{|z_2|^2}$

Además $z_1 + z_2 = w_1$ garantiza $w_3\bar{z}_2 + z_2 = w_1$ de donde:

$$w_3(\operatorname{Re}(z_2) - i\operatorname{Im}(z_2)) + \operatorname{Re}(z_2) + i\operatorname{Im}(z_2) = w_1$$

agrupando términos reales y términos imaginarios e igualando se tiene:

$$w_3 \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Re}(z_2) = w_1 \quad \text{y} \quad -w_3 \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2) = 0$$

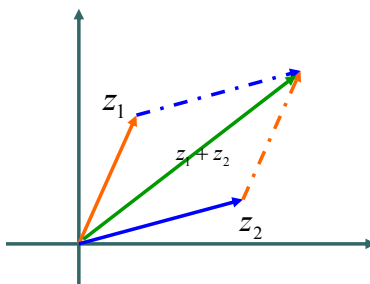
De aquí que

$$(1 - w_3) \operatorname{Im}(z_2) = 0 \Rightarrow w_3 = 1 \text{ o } \operatorname{Im}(z_2) = 0. \text{ Es decir: } z_1 = z_2 \text{ o } z_2 \in \mathbb{R} \text{ y } z_1 \in \mathbb{R}.$$

1.2. Representación geométrica de los números complejos

De acuerdo con la definición de número complejo como pares de la forma (x, y) se pueden interpretar a éstos como puntos del plano. Podemos entonces asociar a $z = x + iy$ un punto (x, y) en el plano donde la componente real es la abscisa, y la componente imaginaria es la ordenada. Este plano es llamado el **Plano Complejo** o el **Plano de Gauss**. Por ejemplo el número $2 + 3i$ se representa por el punto $(2, 3)$.

Luego podemos interpretar los puntos del plano z tal como se hace con el plano xy y su geometría también, en el sentido que si asociamos a un número complejo P_1 el vector $\overrightarrow{OP_1}$ podemos sumar “puntos” con el método del paralelogramo, además si $z = x + iy$ el módulo de z representa la norma o longitud del vector $\overrightarrow{(x, y)}$.



Observación 1.2.1. (i) Nótese que \mathbb{C} no es un cuerpo ordenado (suponga que $i > 0$ y llegará a $-i > 0$) sin embargo, sí se puede ordenar a \mathbb{C} como conjunto (orden lexicográfico por ejemplo). Así no tienen sentido las expresiones $z_1 > z_2$ o $z_1 < z_2$ a menos que z_1 y z_2 sean reales.

(ii) En el plano z tenemos también algunos conjuntos especiales, por ejemplo un círculo de radio ε y centro z_0 es:

$$C(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = \varepsilon\}.$$

Un disco de radio ε y centro z_0 es:

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < \varepsilon\}$$

también tenemos la ecuación de la recta que pasa por z_0 y z_1 como:

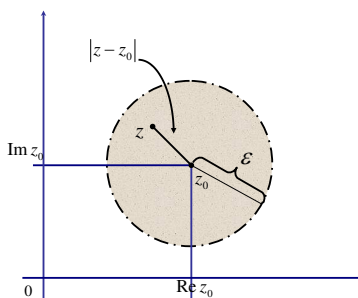


Figura 1.1: $D(z_0, \varepsilon)$, Disco de centro z_0 radio ε

$$z = z_0 + t(z_0 - z_1),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ o equivalentemente

$$\frac{(z - z_1)}{z_0 - z_1} = t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, decimos que los vectores $\vec{z}_1 = \overrightarrow{x_1 + iy_1}$ y $\vec{z}_2 = \overrightarrow{x_2 + iy_2}$ son perpendiculares si y sólo si

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 0$$

o equivalentemente $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en \mathbb{R}^2 .

Se propone al lector probar esta última afirmación.

1.3. Representación polar de un número complejo

Como se vio antes, a todo número complejo $x + iy$ se le asocia un punto de coordenadas cartesianas (x, y) . Ahora bien, si $P = (x, y)$ y consideramos el vector \overrightarrow{OP} y

denotamos por θ al ángulo que forma con el eje real, entonces las coordenadas polares (r, θ) del punto $z = x + iy$ y están determinadas por (r, θ) cuyas ecuaciones son

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen}(\theta)$$

y además $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, cuando $x \neq 0$. El ángulo θ es llamado

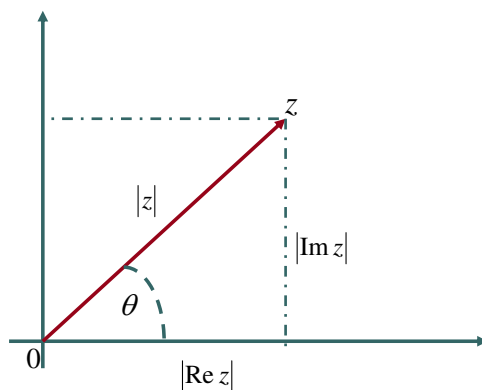


Figura 1.2: Representación Polar de z

un argumento o amplitud de z y se denota por $\theta = \operatorname{arg}z$. Así $\operatorname{arg}z = \tan^{-1}(y/x)$ y en consecuencia:

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

esta última expresión es llamada la **forma polar** del número complejo $z = x + iy$.

Debido a la periodicidad del $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ al argumento θ en radianes se le puede agregar cualquier múltiplo de $2\pi + \theta$, sin cambiar el valor de z . Así el **valor principal** del argumento de z , denotado por $\operatorname{Arg} z$, es el valor que satisface la desigualdad $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Evidentemente $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ es uno de los posibles ángulos que forma el vector (x, y) con el eje de las abscisas en el plano de Gauss. Al conjunto de todos estos ángulos se lo denomina **argumento de z** y se le denota por $\operatorname{arg}(z)$. Por la propia definición $\operatorname{arg}z := \{\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Obsérvese que el argumento no es una función propiamente dicha sino una correspondencia multívoca (multivaluada); correspondencia que posee una infinidad de determinaciones que entre las que nosotros hemos llamado **principal** a aquella que toma valores en $(-\pi, \pi]$ nótese además que cuando $z \neq 0$ para cada $\theta \in \operatorname{arg}(z)$ se verifica que

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Lema 1.3.1. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (1.1)$$

Demostración. Sea $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sen\theta_k)$, para $k = 1, 2$., entonces se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sen\theta_1 \sen\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sen\theta_2 + \cos\theta_2 \sen\theta_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sen(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Así,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

□

Observación 1.3.1. La suma en el segundo miembro de 1.1 es una suma de conjuntos. En lo sucesivo, para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $A, B \subset \mathbb{C}$ se define:

$$A + B := \{a + b/a \in A, b \in B\}$$

y

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$$

Observése que, en general, $A + A \neq 2A$. En efecto, si tomamos por ejemplo, $A := \arg(i) = \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $A + A = \{\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ mientras que, $2A = \{\pi + 4n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subconjunto propio de $A + A$. En particular $\arg(i^2) = \arg(i) + \arg(i) \neq 2\arg(i)$ lo cual no significa que $\arg(z^2) = 2\arg(z)$, relación que en general es falsa. Más aún, en general $\text{Arg}(z \cdot z_0) \neq \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z_0)$.

Observación 1.3.2. Si $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ entonces: $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$ y $|z| = |\bar{z}|$. Luego:

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sen\theta).$$

1.4. Producto y cociente de números complejos

Denotemos por $e^{i\theta} = \text{cis}(\theta)$ a la expresión $\cos\theta + i\sen\theta$ esta notación será plenamente justificada más adelante cuando definamos $e^z = e^x(\cos y + i\sen y)$ para $z = x + iy$. Ahora bien, para $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ representa un número complejo con módulo 1.

Usando identidades trigonométricas, se puede demostrar (se propone como ejercicio) que $e^{i\theta}$ cumple las siguientes propiedades:

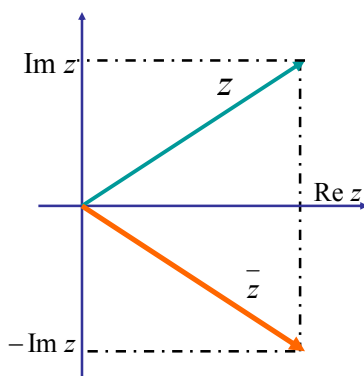


Figura 1.3: Conjugado Complejo

$$(i) e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$(ii) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

$$(iii) (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$$

$$(iv) \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$(v) e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Teorema 1.4.1. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(i) \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2k\pi$$

$$(ii) \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) + 2k\pi, z_2 \neq 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Demostración. Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)}$$

En consecuencia:

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + 2k\pi.$$

De la misma forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi)}.$$

Luego:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2 + 2k\pi.$$

□

Observación 1.4.1. En la demostración del teorema anterior se observa una forma “práctica” de multiplicar y dividir números complejos, usando la forma polar de éstos.

Ejemplo 1.4.1. Escribir $\frac{(2+2i)^4}{(\sqrt{3}+i)^2}$ en forma polar.

Solución:

Sean $z_1 = 2 + 2i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$

Entonces $z_1 = (2, 2)$, $z_2 = (\sqrt{3}, 1)$

luego

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ y } |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$$

Además

$$\operatorname{Arg}z_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ y } \operatorname{Arg}z_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Luego

$$z_1 = |z_1|e^{i\operatorname{Arg}z_1} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} \text{ y } z_2 = |z_2|e^{i\operatorname{Arg}z_2} = 2e^{i(\frac{\pi}{6})}$$

Así usando la forma polar para facilitar el cálculo tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^4}{z_2^2} &= \frac{(2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})})^4}{(2e^{i(\frac{\pi}{6})})^2} \\ &= \frac{64e^{i\pi}}{4e^{i(\frac{2}{6}\pi)}} \\ &= 16e^{i(\pi-\frac{\pi}{3})} \\ &= 16e^{i(\frac{2}{3}\pi)} \\ &= 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

1.5. Potencias y raíces de un número complejo

Si $z \in \mathbb{C}$ y escribimos a z en forma polar tenemos, $z = re^{i\theta}$ de donde:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

para $r = 1$ obtenemos:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Así

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

conocida como **fórmula de De MOIVRE**, en honor al matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

Veamos ahora cómo calcular la raíz n -ésima de $z = re^{i\theta}$, para esto planteamos las ecuaciones $z_0^n = z$ y $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$.

Luego:

$$(r_0 e^{i\theta_0})^n = re^{i\theta} \Leftrightarrow r_0^n = r \text{ y } e^{in\theta_0} = e^{i\theta}.$$

Así que:

$$r_0 = \sqrt[n]{r} \text{ (raíz } n\text{-ésima positiva) y } n\theta_0 = \theta + 2k\pi \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Luego una fórmula para las raíces n -ésimas de z está dada por:

$$z^{\frac{1}{n}} = z_0 = r_0 e^{i\theta_0} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ahora usando el hecho que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ lo denotamos por $\text{cis}(\theta)$, tenemos:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Observación 1.5.1. *Nótese que hemos sustituido el conjunto infinito de valores de k , que inicialmente es $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ por el conjunto finito $0, 1, 2, \dots, n-1$. Se propone al lector verificar que cuando $k = n + m$ obtenemos el mismo número complejo que para $k = m$.*

Luego un número complejo z tiene exactamente n raíces diferentes.

Teorema 1.5.1. *Si $z \in \mathbb{C}$, entonces*

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \sqrt[n]{|z|^m} \text{Cis}\left(\frac{m\text{Arg } z + 2km\pi}{n}\right) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Demostración. (Ejercicio)

□

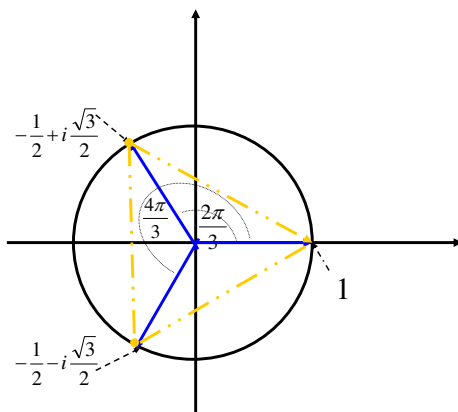


Figura 1.4: Raíces cúbicas de la unidad

1.6. Las raíces de la unidad

Para $z = 1 + 0i$ tenemos que

$$|z| = 1 = e^0 \text{ y } \text{Arg}z = 0.$$

Luego las n raíces de la unidad vienen dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{1} = 1 \cdot \text{Cis} \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ejemplo 1.6.1. Encontrar $\sqrt[3]{1}$.

Solución: $\sqrt[3]{1} = e^{i(\frac{2k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$.

$$\sqrt[3]{1} = e^{i(\frac{2k\pi}{3})} = \begin{cases} e^{i0} = 1 & k = 0 \\ e^{i(\frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & k = 1 \\ e^{i(\frac{4\pi}{3})} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) & k = 2 \end{cases}$$

Observación 1.6.1. Geométricamente, las raíces cúbicas de la unidad corresponden a los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo unitario. De forma similar, la raíz n -ésima de 1 corresponde a los vértices de un polígono regular de n -lados inscritos en el círculo unitario.

Observación 1.6.2. Si escribimos $w_n = e^{i(\frac{2\pi}{n})}$ para denotar la raíz correspondiente a $k = 1$ entonces las n raíces de la unidad son:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow e^{i(0\frac{2\pi}{n})} = 1 \\ k = 1 &\Rightarrow e^{i(\frac{2\pi}{n})} = w_n \\ k = 2 &\Rightarrow e^{i2(\frac{2\pi}{n})} = (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^2 = w_n^2 \\ k = 3 &\Rightarrow e^{i3(\frac{2\pi}{n})} = (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^3 = w_n^3 \\ &\vdots \\ k = n - 1 &\Rightarrow e^{i(n-1)(\frac{2\pi}{n})} = (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^{n-1} = w_n^{n-1} \end{aligned}$$

Es decir que el conjunto de las n raíces de la unidad forman un grupo cíclico de orden n , donde este grupo es generado por w_n .

Ejemplo 1.6.2. Denotemos por z_k , $k = 0, 1, \dots, 4$ las raíces de la ecuación

$$(z + 1)^5 + z^5 = 0$$

Demuestre que $\operatorname{Re}(z_k) = -\frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Solución:

$$\begin{aligned} (z + 1)^5 + z^5 = 0 &\Leftrightarrow (z + 1)^5 = -z^5 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z + 1}{-z}\right)^5 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z + 1}{-z} = \sqrt[5]{1} = e^{i(\frac{2k\pi}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ y z_k una solución de $\frac{z_k + 1}{-z_k} = e^{ik\alpha}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{z_k + 1}{-z_k} = e^{ik\alpha} &\Leftrightarrow z_k + 1 = -z_k e^{ik\alpha} \\ &\Leftrightarrow z_k + z_k e^{ik\alpha} = -1 \\ &\Leftrightarrow z_k(1 + e^{ik\alpha}) = -1 \\ &\Leftrightarrow z_k = \frac{-1}{1 + e^{ik\alpha}} \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{-1}{(1 + \cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha)(1 + \cos k\alpha - i \operatorname{sen} k\alpha)} \frac{(1 + \cos k\alpha - i \operatorname{sen} k\alpha)}{(1 + \cos k\alpha - i \operatorname{sen} k\alpha)} \\
 &= -\frac{(1 + \cos k\alpha - i \operatorname{sen} k\alpha)}{(1 + \cos k\alpha)^2 + (\operatorname{sen} k\alpha)^2} \\
 &= -\frac{(1 + \cos k\alpha) - i \operatorname{sen} k\alpha}{2(1 + \cos k\alpha)}
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\operatorname{Re}(z_k) = -\frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ejemplo 1.6.3. Resuelva la ecuación $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$

Solución: Comencemos por notar que la forma polar de $1 + \sqrt{3}i$ es $2e^{\frac{\pi}{6}i}$, así que las cuatro raíces de z vienen dadas por:

$$z_k = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Ejemplo 1.6.4. Considere las $n-1$ diagonales de un polígono regular de n -lados inscritos en el círculo unitario, que se obtiene conectando con todos los vértices restantes. Pruebe que el producto de sus longitudes es n .

Solución:

Sean $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ las n -raíces de la unidad, no se pierde generalidad en escoger a 1 como vértice fijo para buscar las $n-1$ diagonales.

Estamos interesados en el cálculo de:

$$\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \alpha_k|$$

Ahora bien:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \alpha_1)\dots(z - \alpha_{n-1})$$

Además (ver problemas propuestos)

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

En consecuencia:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = (z - \alpha_1)\dots(z - \alpha_{n-1}) \quad \forall z \neq 1$$

de la continuidad de $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ y el hecho que este resultado es válido para $z = 1 + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ tenemos que:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha_k) \quad \text{para } z = 1$$

O sea:

$$|1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}| = \prod_{k=1}^{n-1} |z - \alpha_k|$$

Evaluando en $z = 1$ tenemos:

$$\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \alpha_k| = n$$

1.7. Problemas resueltos

Ejemplo 1.7.1. Si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, calcule las partes real e imaginarias de los números complejos

(a) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}$

(b) $\frac{1}{(3+2i)^2}$

(c) $\frac{z+1}{z^2+5}$

Solución:

(a) Dado que

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} = -i + \frac{1-i}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Se tiene que la parte real es $\frac{1}{2}$ y la imaginaria $-\frac{3}{2}$

(b) Nuevamente como

$$\frac{1}{(3+2i)^2} = \frac{(3-2i)^2}{(9+4)^2} = \frac{5-12i}{169} = \frac{5}{169} - \frac{12}{169}i$$

así la parte real es $\frac{5}{169}$ y la imaginaria $-\frac{12}{169}$

(c)
$$\frac{z+1}{z^2+5} = \frac{x+1+iy}{x^2-y^2+5+2ixy}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2-y^2+5)+2x^2y^2}{(x^2-y^2+5)^2+4x^2y^2} + i \frac{(x^2y-y^3+5y-2x^2y^2-2xy)}{(x^2-y^2+5)^2+4x^2y^2}$$

Ejemplo 1.7.2. Si $|z| = 1$, pruebe que, cualesquiera sean los complejos a, b se tiene que:

$$\left| \frac{az + b}{\overline{bz + a}} \right| = 1$$

Solución:

La condición $\left| \frac{az + b}{\overline{bz + a}} \right| = 1$ es equivalente a:

$$|az + b|^2 = |\overline{bz + a}|^2$$

de donde se deduce que:

$$|a|^2|z|^2 + a\overline{bz} + b\overline{az} + |b|^2 = |b|^2|z|^2 + a\overline{bz} + b\overline{az} + |a|^2$$

simplificando se tiene:

$$|a|^2|z|^2 + |b|^2 = |b|^2|z|^2 + |a|^2$$

y esta última igualdad es cierta puesto que $|z|^2 = 1$.

Ejemplo 1.7.3. Dados tres vértices z_1, z_2, z_3 de un paralelogramo en el plano complejo, hallar su cuarto vértice z_4 opuesto al vértice z_2 .

Solución:

Si z_1, z_2, z_3, z_4 forman un paralelogramo, entonces los vectores que unen z_1 con z_2 y z_4 con z_3 son el mismo. Por tanto $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$, o sea $z_4 = z_3 - z_2 + z_1$.

Ejemplo 1.7.4. Dados los vértices z_1, z_2 de un triángulo equilátero en el plano complejo, halla su tercer vértice z_3 .

Solución:

Si z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero, entonces los vectores que unen z_1 con z_2 y z_1 con z_3 tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en $\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto, $(z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = z_3 - z_1$ y en consecuencia

$$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$$

Obsérvese que se obtienen dos soluciones ya que existen dos triángulos equiláteros que tienen como lado el segmento que une a z_1 y z_2 .

1.8. Ejercicios del Capítulo 1

1. Pruebe que $Re(iz) = -Im(z)$
2. Pruebe que si $z_1 \cdot z_2 = 0$, entonces $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$
3. Pruebe que los números complejos satisfacen los axiomas de campo.
4. Demuestre que la identidad aditiva de \mathbb{C} es única.
5. Demuestre que la identidad multiplicativa de \mathbb{C} es única.
6. Muestre que la desigualdad triangular es una igualdad para los números z_1 y z_2 con valor diferente de cero si y solo si $Arg(z_1) = Arg(z_2)$.

7. Probar que:

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$$

sabiendo que $|z_3| \neq |z_4|$.

8. Probar que: $|Im(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$ si $|z| < 1$.
9. Probar que la ecuación $|z - z_0| = R$ del círculo centrado en z_0 con radio R se puede escribir en la forma:

$$|z|^2 - 2Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

10. Deducir la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1$$

y usarla para probar la identidad trigonométrica de Lagrange.

$$1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})\theta]}{2\text{sen}(\frac{\theta}{2})}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

11. Sea c una raíz n -ésima de la unidad, diferente de la unidad misma. Demostrar que

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

12. Pruebe que si $|\alpha| = 1$ y $\alpha \neq \beta$ entonces $\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\beta}\alpha} \right| = 1$

13. Muestre que si $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$ entonces $1 + \alpha$ esta a la derecha del eje y .
14. Muestre que la recta ortogonal al vector complejo α tiene por ecuación $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + k = 0$ ($k \in \mathbb{R}$).
15. Pruebe que los vectores $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son ortogonales si y solo si $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$
16. Pruebe que los puntos z_1, z_2, z_3 en el plano complejo son colineales, entonces existen números reales p, q, r no todos cero, tales que $p + q + r = 0$ y $pz_1 + qz_2 + rz_3 = 0$
17. Pruebe que los tres puntos z_1, z_2, z_3 no están todos sobre el mismo lado del eje real si $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3$
(Sug: Si $z_2z_3 - 1 = 0$ no hay nada que probar, suponga que $z_2z_3 - 1 \neq 0$ entonces $z_1 = \frac{z_2 + z_3}{z_2z_3 - 1}$, concluya que $y_1 = \text{Im}(z_1) = -k_1y_3 - k_2y_2$ donde k_1 y k_2 son positivos.)
18. Supongamos que $z_2 \neq 0$. Muestre que si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ o si $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$ entonces $z_1 = rz_2, r \geq 0$.
19. Probar que $\sqrt{2}|z| \geq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$, determine además las condiciones bajo las cuales se tiene la igualdad.
20. Demuestre que
- z es real si y solo si $\bar{z} = z$
 - z es real o imaginario puro si y solo si $\bar{z}^2 = z^2$
21. Hallar el argumento principal $\text{Arg}(z)$ de
- $z = \frac{i}{-2 - 2i}$
 - $z = (\sqrt{3} - i)^6$
22. Demuestre que si $P(z)$ es un polinomio complejo con coeficientes reales entonces z_0 es raíz de $P(z)$ si y solo si \bar{z}_0 lo es.
23. Demostrar que dos números complejos no nulos z_1 y z_2 , tiene el mismo módulo si y solo si existen números complejos c_1, c_2 tales que $z_1 = c_1c_2$ y $z_2 = c_1\bar{c}_2$
(sug: Recuerde que $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \cdot e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} = e^{i\theta_1}$, y que $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \cdot (e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}})^{-1} = e^{i\theta_2}$).
-

24. Encuentre las tres raíces de la ecuación $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
25. Muestre que al ecuación $32z^5 = (z + 1)^5$ tiene cuatro raíces imaginarias, dos de las cuales están en el segundo cuadrante y dos en el tercero. Muestre además que todas estas raíces están sobre el círculo $(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2$
26. Use la ecuación binomial

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

y la fórmula de DE MOIVRE para obtener las fórmulas:

$$\cos n\theta = \binom{n}{0} \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

27. Probar que si $|a| < 1$, entonces:

$$|z| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-a}{1-az} \right| \leq 1.$$

28. Probar que si $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, entonces $z \in \mathbb{R}$ o $|z| = 1$.
29. Probar que la suma de las n raíces de la unidad es cero.
30. Probar que la n raíces (n -ésimas) de un número complejo z son vértices de un n -góno regular.
31. Demuestre la fórmula $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$ para cuando n es un entero negativo.
32. Los puntos z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero en el plano complejo con $z_1 = 4 + i6$ y $z_2 = (1 - i)z_1$ determine los dos posibles valores de z_3 .
33. Pruebe que si los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero, entonces $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

34. Los tres puntos en el plano complejo los cuales corresponden a las raíces de la ecuación $z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$ son los vértices del triángulo ABC . Pruebe que el centroide del triángulo es el punto correspondiente a p . Si el triángulo es equilátero pruebe que $p^2 = q$.
(Sug: Sean z_1, z_2, z_3 las raíces de la ecuación $z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$, factorice y compare coeficientes. Para probar que $p^2 = q$ use el ejercicio anterior.)

35. Establezca una identificación entre el plano complejo y la esfera unitaria centrada en $(0, 0, 1/2)$ sin el polo norte $N = (0, 0, 1)$, use proyección estereográfica.
36. Pruebe que $\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 2n\pi$, donde n es un entero.
37. Muestre que los triángulos cuyos vértices son z_1, z_2, z_3 y z_4, z_5, z_6 son semejantes, si y solo si

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_4 & 1 \\ z_2 & z_5 & 1 \\ z_3 & z_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

38. Muestre que las rectas que pasan por z_1, z_2 y z_3, z_4 son ortogonales si $\text{Arg} \left[\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \right] = \pm \frac{\pi}{2}$, esto es, si $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ es imaginario puro.

39. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 estén sobre un círculo, en este orden, es

$$|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)| - |(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)| = 0$$

40. Si $z_0 \neq z_1$, describir el conjunto $S = \{z/z = \alpha z_0 + (1 - \alpha)z_1, 0 \leq \alpha \leq 1\}$

41. Probar que $\text{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left(\frac{1}{z} \right) > 0$

42. El conjunto de números complejos $C = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ se llama **linealmente dependiente** (l.d) sobre \mathbb{R} si existen números reales a_1, a_2, \dots, a_k no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k a_i z_i = 0$, en caso contrario C se llama **linealmente independiente** (l.i) sobre \mathbb{R} . Probar que:

a $C = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ es l.i sobre \mathbb{R} si y solo si $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ y

$$\sum_{i=1}^k a_i z_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

b Tres complejos z_1, z_2 y z_3 son siempre l.d sobre \mathbb{R}

c Si z_1 y z_2 son l.i sobre \mathbb{R} , todo complejo z se expresa únicamente en la forma $z = r_1 z_1 + r_2 z_2$ con r_1 y r_2 reales

43. Probar que $\left| \frac{a^n - b^n}{a - b} \right| \leq \frac{|a|^n - |b|^n}{|a| - |b|}$, $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| \neq |b|$
44. Probar que las n -raíces (n -ésimas) de la unidad son 1 y las raíces de la ecuación ciclotómica $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$
45. Haga una crítica al razonamiento siguiente:

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{+1} = 1.$$

46. Demuestre el teorema 1.1.1
47. Pruebe la observación 1.1.3
48. Pruebe el teorema 1.1.4
49. Determine las condiciones bajo las cuales se cumple la igualdad en la desigualdad triangular.
50. Minimizando la expresión $\sum_{k=1}^n (|a_k| - \lambda |z_k|)^2$ donde $a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n$, son números complejos, para λ real arbitraria, demuestre que:

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot z_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right).$$

51. Demuestre el teorema de Enestrom-Keakeya:
Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, un polinomio con coeficientes reales que cumple $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$, entonces todas las raíces de $P(z)$ tienen módulo estrictamente mayor que uno. (Sug: Aplique la desigualdad triangular a $(1 - z)P(z) = a_0 - [(a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^{n+1}]$ y pruebe que $|(1 - z)P(z)| > 0$ cuando $|z| < 1$).

52. Pruebe la identidad de Lagrange:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) - \sum_{i \leq j \leq k \leq n} |a_j \bar{z}_k - a_k \bar{z}_j|^2.$$

53. Pruebe la desigualdad triangular o de Minkowski en forma polar:

$$\left[\sum_{j=1}^n |z_j + a_j|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right]^{1/2}.$$

Capítulo 2

ASPECTOS DE LA TOPOLOGÍA DE \mathbb{C}

En este capítulo se estudiará la estructura topológica de \mathbb{C} . Como vimos antes a todo número complejo $z = x + iy$ se la asocia un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, así que la topología de \mathbb{C} es similar a la topología de \mathbb{R}^2 . Más aún, \mathbb{C} es un espacio métrico donde la métrica viene dada por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

2.1. Conjuntos abiertos, cerrados y conexos

Definición 2.1.1. Un *intervalo abierto* en el plano complejo: $I = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ donde a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales, es un conjunto de puntos $z = x + iy$ tal que $a_1 < x < a_2$ y $b_1 < y < b_2$.

Definición 2.1.2. Un conjunto de números complejos S se dice que es *acotado* si existe una constante k tal que $|z| \leq k$ para todo $z \in S$.

Observación 2.1.1. Todo conjunto acotado está contenido en un disco centrado en cero y con radio k , para algún $k > 0$.

Definición 2.1.3. Una *vecindad* de un punto z_0 en el plano complejo es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \epsilon$ donde ϵ es cualquier número real positivo.

Definición 2.1.4. Un conjunto S se dice que es *abierto* (relativo al plano complejo) si cada punto c de S tiene una vecindad enteramente contenida en S .

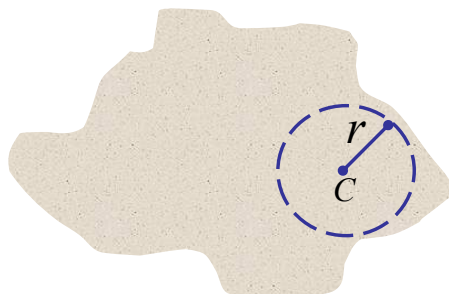


Figura 2.1: Conjunto Abierto

Observación 2.1.2. Un conjunto de números reales puede ser abierto en \mathbb{R} sin serlo en \mathbb{C} por ejemplo, el intervalo $(0, 1)$ es abierto en \mathbb{R} pero no lo es en \mathbb{C} .

Ejemplo 2.1.1. Sea $D(0, r)$ el conjunto de todos los puntos z tales que $|z| < r$. El conjunto $D(0, r)$ es abierto.

Solución:

Sea z_0 un punto cualquiera en $D(0, r)$. Note que el disco $|z - z_0| < \epsilon$ está completamente contenido en $D(0, r)$ siempre que $\epsilon < r - |z_0|$. Así todo punto de $D(0, r)$ es un punto interior, en consecuencia $D(0, r)$ es abierto.

Definición 2.1.5. Un punto z_0 es un **punto de acumulación** de un conjunto S , si toda vecindad de z_0 contiene infinitos puntos de S .

Observación 2.1.3. Un punto de acumulación z_0 de S puede no pertenecer a S . Por ejemplo $S = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ tiene como punto de acumulación a 0 , sin embargo, $0 \notin S$.

Definición 2.1.6. Un conjunto S se dice que es **cerrado** (relativo al plano complejo) si todo punto de acumulación de S pertenece a S .

Ejemplo 2.1.2. $D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$ es cerrado en \mathbb{C} .

También $C(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}$ es cerrado en \mathbb{C} .

Definición 2.1.7. Se llama **clausura** del conjunto S a la unión de S con sus puntos de acumulación.

También si consideramos el orden dado por la inclusión, podemos definir la clausura de S como el conjunto cerrado más pequeño que contiene a S .

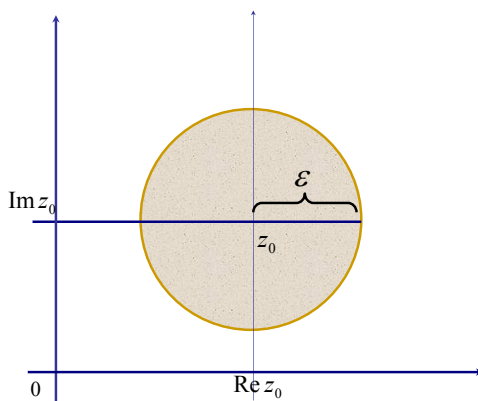
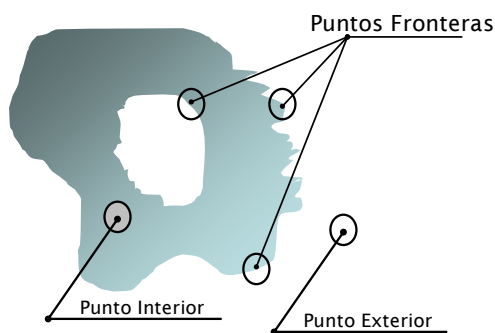


Figura 2.2: Disco Cerrado

Observación 2.1.4. De la misma definición de clausura se desprende que la clausura de A es un conjunto cerrado, no importando si A lo es o no, además la clausura de un conjunto cerrado K es el mismo conjunto K .

Definición 2.1.8. Se llama **punto frontera** de un conjunto S a todo punto que satisfaga que cualquier vecindad de él contenga puntos de S y puntos que no están en S .

Definición 2.1.9. Un punto z_0 se dice que es un **punto interior** de un conjunto S si existe una vecindad de z_0 contenida en S . al conjunto de todos los puntos interiores de S se les llama **el interior de S** .



Definición 2.1.10. Una **disconexión** de un conjunto S son dos conjuntos S_1 y S_2 tales que:

- (i) $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset$

(ii) $S_1 \cup S_2 = S$

(iii) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

(iv) $S'_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S_1 \cap S'_2 = \emptyset$

Donde A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A .

Definición 2.1.11. Un conjunto S se dice que es **conexo** si este no tiene desconexión, es decir, no existen dos conjuntos S_1 y S_2 satisfaciendo la definición anterior.

Definición 2.1.12. Un conjunto abierto y conexo unido con algunos, ninguno ó todos sus puntos frontera es llamado una **región**.

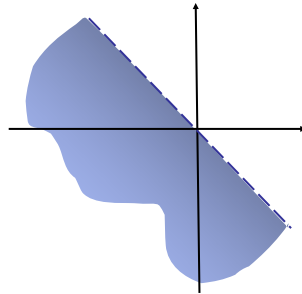


Figura 2.3: Región no acotada

Teorema 2.1.1. Suponga que $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de conjuntos conexos con un punto en común. Mostrar que $\bigcup S_\alpha = S$ es conexo.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que S no es conexo, entonces existen S_1 y S_2 satisfaciendo:

(i) $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset$

(ii) $S_1 \cup S_2 = S$

(iii) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

(iv) $S'_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S_1 \cap S'_2 = \emptyset$

Sea α arbitrario pero fijo, entonces

$$S_\alpha = S_\alpha \cap S = S_\alpha \cap (S_1 \cup S_2) = (S_\alpha \cap S_1) \cup (S_\alpha \cap S_2)$$

Por hipótesis $\bigcap S_\alpha \neq \emptyset$, de donde, existe $p \in \bigcap S_\alpha$, ahora bien como $S = S_1 \cup S_2$ entonces $p \in S_1$ o $p \in S_2$. y ya que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, p está solo en uno de los dos conjuntos. Supongamos sin perder generalidad que $p \in S_1$. Ahora bien:

$$(i) \quad S_\alpha = (S_\alpha \cap S_1) \cup (S_\alpha \cap S_2)$$

$$(ii) \quad (S_\alpha \cap S_1) \cap (S_\alpha \cap S_2) = S_\alpha \cap (S_1 \cap S_2) = S_\alpha \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(iii) \quad (S_\alpha \cap S_1) \cap (S_\alpha \cap S_2)' \subset S_\alpha \cap S_1 \cap S_\alpha' \cap S_2' \subset S_\alpha \cap S_1 \cap S_2' = \emptyset$$

Con lo que

$$(S_\alpha \cap S_1) \cap (S_\alpha \cap S_2)' = \emptyset$$

De manera similar se prueba que

$$(S_\alpha \cap S_2) \cap (S_\alpha \cap S_2)' = \emptyset$$

Por otra parte como S_α es conexo, $S_\alpha \cap S_1$ y $S_\alpha \cap S_2$ no pueden ser ambos no vacíos, ya sabemos que $p \in S_1$ y $p \in S_\alpha$, por lo que $S_\alpha \cap S_1 \neq \emptyset$. Luego tiene que ocurrir que $S_\alpha \cap S_2 = \emptyset$, pero como $S_\alpha \subset S = S_1 \cup S_2$ y $S_\alpha \cap S_2 = \emptyset$ se tiene que $S_\alpha \subset S_1$. Como α es arbitrario se sigue que $S_\alpha \subset S_1, \forall \alpha$, así que $\bigcup S_\alpha = S \subset S_1$, con lo que $S_2 = \emptyset$ lo cual contradice (i). \square

2.2. Sucesiones

Definición 2.2.1. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es una función que asigna a cada número entero n un número complejo z_n . El punto z_n es llamado el término n -ésimo de la sucesión.

Observación 2.2.1. Dos sucesiones son iguales, si son iguales término a término, esto es $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ son iguales si $z_n = w_n, \forall n = 1, 2, \dots$, nótese que no se debe confundir a la sucesión con el conjunto de las imágenes de la sucesión (el rango de $\{z_n\}$) que no es más que el conjunto de todos los valores que toma la sucesión.

Por ejemplo las sucesiones $\{(i)^n\}$ y $\{(-i)^{n+1}\}$ son diferentes aun cuando su rango es el mismo.

Definición 2.2.2. Una **subsucesión** de una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión $\{z'_m\}$ cuyos términos son seleccionados de los términos de la sucesión original y arreglados en el mismo orden; esto es:

1. A cada término z'_m le corresponde un término z_n de la sucesión original tal que $z'_m = z_n$.
2. Si z_j y z_k , $j < k$ le corresponden respectivamente a z'_p y z'_q , entonces $p < q$.

Definición 2.2.3. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que es una **sucesión de Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$, existe un entero N (dependiendo de ϵ) tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ cuando $m, n > N$.

Definición 2.2.4. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que **converge** a z_0 o que **tiene límite** z_0 , y escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ o $z_n \rightarrow z_0$ si para cada $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$ cuando $n > N$.
Si la sucesión no converge, se dice que **diverge**.

Teorema 2.2.1. Si una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z_0 , entonces cualquier subsucesión de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, digamos $\{z_k\}$, converge a z_0 .

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, como $z_n \rightarrow z_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$ para todo $n > N$, y en consecuencia $|z_k - z_0| < \epsilon$ para todo $k > N$. \square

Definición 2.2.5. una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que es **acotada** en el plano de los números complejos si existe una constante M , tal que $|z_n| < M$ para todo n .

Observación 2.2.2. Una sucesión acotada no necesariamente converge por ejemplo $\{(-i)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada pero no converge. Sin embargo, toda sucesión convergente es acotada.

Definición 2.2.6. Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que tiene un **punto de acumulación** z_0 , si dada cualquier vecindad $V(z_0)$, un número infinito de términos de la sucesión esta contenido en $V(z_0)$.

Observación 2.2.3. Una sucesión puede tener puntos de acumulación y no tener límite. Por ejemplo $\{1 + 1/2, 2 + 1/2, 1 + 1/3, 2 + 1/3, 1 + 1/4, 2 + 1/4, \dots\}$ tiene al 1 como punto de acumulación y sin embargo no tiene límite, ya que tiene dos subsucesiones que convergen a puntos diferentes.

También una sucesión puede tener punto de acumulación, y sin embargo el rango de la sucesión no tenerla, por ejemplo la sucesión $\{3, 4, 3, 4, \dots\}$ tiene al 3 y a 4 como punto de acumulación. Sin embargo el rango $\{3, 4\}$ no tiene punto de acumulación (De hecho todo conjunto con un número finito de elementos no tiene punto de acumulación).

Una forma de caracterizar los puntos de acumulación a través de sucesiones es la siguiente:

Teorema 2.2.2. *Un punto z_0 de un conjunto S es un punto de acumulación de S si y solo si existe una sucesión en S de términos diferentes que converge a z_0 .*

Demostración. (Ejercicio) □

Teorema 2.2.3. *Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, donde $z_n = x_n + iy_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$). La sucesión converge a $z_0 = x_0 + iy_0$ si y solo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_0 .*

Demostración. (solo si):

$z_n \rightarrow z_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$, cuando $n > N(\epsilon)$

Pero $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Así que

$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \epsilon$ para $n > N(\epsilon)$ y

$|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| < \epsilon$ para $n > N(\epsilon)$

Luego $x_n \rightarrow x_0$ y $y_n \rightarrow y_0$.

(si):

Supongamos que $x_n \rightarrow x_0$ y $y_n \rightarrow y_0$, entonces dado $\epsilon/2$ existen $N_1(\epsilon)$ y $N_2(\epsilon)$ tales que

$|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n > N_1$ y

$|y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n > N_2$

Así para $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ tal que

$$|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto $z_n \rightarrow z_0$. □

2.3. Algunas propiedades básicas de \mathbb{C}

Observación 2.3.1. *En adelante se supondrá conocidas algunas propiedades básicas de los números reales, a saber:*

1. Propiedad de las cortaduras de Dedekind.

Si la recta real se descompone en dos conjuntos S_1 y S_2 no vacíos tales que $t_1 < t_2$ para todo $t_1 \in S_1$ y $t_2 \in S_2$ entonces o S_1 tiene supremo en S_1 o S_2 tiene ínfimo en S_2 .

2. Propiedad de Dedekind:

Todo conjunto acotado de números reales tiene supremo e ínfimo.

3. Propiedad de Completitud:

Toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R} tiene límite.

4. Propiedad de Bolzano-Weierstrass:

Todo conjunto acotado de números reales con un número infinito de puntos tiene un punto de acumulación.

5. Propiedad de Intervalos Encajados:

Dada una sucesión encajada de intervalos cerrados, esto es $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ tales que $I_{n+1} \subseteq I_n$ ($n = 1, 2, \dots$) entonces existe al menos un punto en común en todos los intervalos.

Estas cinco propiedades son equivalentes.

Algunas de estas propiedades no pueden extenderse a \mathbb{C} , a saber las propiedades (1) y (2) no existen en \mathbb{C} , ya que el mismo carece de orden. Sin embargo las propiedades (3), (4) y (5) pueden ser extendidas sin ninguna dificultad.

Teorema 2.3.1. \mathbb{C} es un espacio métrico completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

Demostración. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de números complejos, donde $z_n = x_n + iy_n$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N(\epsilon)$ entonces $|z_m - z_n| < \epsilon$.

Así $|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n|$ para $m, n > N(\epsilon)$

y $|y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$ para $m, n > N(\epsilon)$

Luego $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son de Cauchy en \mathbb{R} . Debido a que \mathbb{R} es completo existen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \rightarrow x_0$ y $y_n \rightarrow y_0$. Esto determina un número complejo $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces se tiene:

$$|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

En consecuencia $z_n \rightarrow z_0$ donde $z_0 = x_0 + iy_0$. □

Teorema 2.3.2. Todo conjunto acotado S de números complejos, con una cantidad infinita de puntos tiene un punto de acumulación.

Demostración. (Ejercicio) □

Teorema 2.3.3. Sea $\{I^n\}$ una sucesión de intervalos cerrados en el plano tal que $I^{n+1} \subseteq I^n$ ($n = 1, 2, \dots$) entonces existe al menos un punto en común en todos los intervalos de la sucesión.

Demostración. Supongamos que

$$I^n = \{z = x + iy/a_1^n \leq x \leq a_2^n \text{ y } b_1^n \leq y \leq b_2^n\}$$

debido a que $I^{n+1} \subseteq I^n$ ($n = 1, 2, \dots$) obtenemos que $a_1^n \leq x \leq a_2^n$ y $b_1^n \leq y \leq b_2^n$, $n = 1, 2, \dots$

Sean $J^n = \{x \in \mathbb{R}/a_1^n \leq x \leq a_2^n\}$, entonces J^n es una sucesión de intervalos encajados (en \mathbb{R}), así que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1^n \leq x_0 \leq a_2^n$ para todo n .

De manera similar existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $b_1^n \leq y_0 \leq b_2^n$ para todo n . Luego $z_0 = x_0 + iy_0$ pertenece a I^n para todo n . \square

2.4. Conjuntos compactos

Pasemos ahora a estudiar el importante rol que desempeñan los conjuntos cerrados y acotados en \mathbb{C} , a estos conjuntos se les llama Conjuntos Compactos.

Teorema 2.4.1 (Heine-Borel). Sea S un conjunto compacto. Supongamos que existe una familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos abiertos tales que cada punto de S esta contenido en al menos uno de los G_α . Entonces existe una subfamilia $\{G_{\alpha_j}\}_{\alpha_j \in I}$ $j = 1, 2, \dots, n$ de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que todos los puntos de S están en al menos en uno de los G_{α_j}

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que no existe subfamilia de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubra a S , ya que S es acotado este está contenido en algún cuadrado cerrado Q , cuyos lados tienen longitud k . Dividiendo a Q en cuatro cuadrados cerrados congruentes, con lados de longitud $k/2$, tenemos entonces que al menos uno de estos cuadrados, digamos Q_1 , es tal que no existe subfamilia de $\{G_\alpha\}$ que cubre a $S \cap Q_1$. Subdividiendo Q_1 en cuatro cuadrados cerrados congruentes de lados de longitud $k/2^2$, entonces al menos uno de estos cuadrados denotado por Q_2 , no admite subfamilia finita de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubre a $S \cap Q_2$.

continuando este proceso, obtenemos una sucesión infinita de cuadrados cerrados y encajados $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, tal que $\text{diam}(Q_n) \rightarrow 0$ y no existe subfamilia de $\{G_\alpha\}$ finita que cubra a $S \cap Q_n$. Así por el teorema (2.3.3) existe $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Este punto z_0 está en S , luego pertenece a algún G_α , digamos G_{α_p} el cual es abierto, así podemos asegurar la existencia de una vecindad $V(z_0, \epsilon)$ contenida en G_{α_p} , por otra parte como $\text{diam}(Q_n) \rightarrow 0$ y z_0 está contenido en todos los Q_n , existe un N suficientemente grande, para el cual Q_n está contenido en G_{α_p} , por lo que este G_{α_p} cubre a

$Q_n \cap S$, lo cual contradice que no existe subfamilia finita de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubra la parte de S contenida en algún Q_n . \square

Definición 2.4.1. Un espacio métrico (X, d) es **secuencialmente compacto**, si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Definición 2.4.2. Un espacio métrico (X, d) es **totalmente acotado**, si para todo $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos x_1, x_2, \dots, x_n en X tales que $X = \bigcup_{k=1}^n D(x_k, \epsilon)$

Teorema 2.4.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) X es compacto
- (b) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.
- (c) X es secuencialmente compacto
- (d) X es completo y totalmente acotado.

Demostración. (a) \Rightarrow (b)

Sea $A \subset X$ un conjunto con infinitos puntos, entonces como X es compacto (cerrado y acotado) se sigue que A es acotado, y por la propiedad de Bolzano-Weierstrass A tiene un punto de acumulación, el cual pertenece a A por ser cerrado.

(b) \Rightarrow (c)

Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X y supongamos, sin pérdida de generalidad, que los puntos x_1, x_2, \dots son todos distintos. Por (b) el conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ tiene un punto de acumulación x_0 . Así existe un punto $x_{n_1} \in D(x_0, 1)$, de manera similar, existe un entero $n_2 > n_1$ con $x_{n_2} \in D(x_0, 1/2)$. continuando este proceso obtenemos $n_1 < n_2 < \dots$, con $x_{n_k} \in D(x_0, 1/k)$. Así $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ y X es secuencialmente compacto.

(c) \Rightarrow (d)

Para ver que X es completo es suficiente recordar que una sucesión de Cauchy que posee una subsucesión convergente es convergente (Ejercicio), así cualquier sucesión de Cauchy en X , por (c), posee una subsucesión convergente y en consecuencia tal sucesión es convergente. Veamos ahora que X es totalmente acotado.

Sea $\epsilon > 0$ y fijemos $x_1 \in X$.

Si $X = D(x_1, \epsilon)$ no hay nada que probar. De otra forma escogamos $x_2 \in X - D(x_1, \epsilon)$.

De nuevo si $X = D(x_1, \epsilon) \cup D(x_2, \epsilon)$ el proceso se termina y X es totalmente acotado, si no, sea $x_3 \in X - D(x_1, \epsilon) \cup D(x_2, \epsilon)$, si el proceso nunca se detiene encontramos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $x_{n+1} \in X - \bigcup_{k=1}^n D(x_k, \epsilon)$ pero esto implica que $|x_n - x_m| \geq \epsilon > 0$

para $m \neq n$, así $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede tener subsucesión convergente contradiciendo (c).

(d) \Rightarrow (a)

Dada un sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \rightarrow x_0$, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge se sigue que es de Cauchy, de la completitud x_n converge a $y_0 \in X$ y por la unicidad de límite se sigue que $x_0 = y_0 \in X$.

De aquí que X sea cerrado.

Por otra parte todo conjunto totalmente acotado, es acotado y en consecuencia X es compacto. \square

2.5. Series de números complejos

Definición 2.5.1. Dadas dos sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ entonces

$$\begin{aligned} \{z_n\}_{n=1}^{\infty} + \{w_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots\} \\ \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \{w_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{z_1 w_1, z_2 w_2, \dots\} \\ \frac{\{z_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{w_n\}_{n=1}^{\infty}} &= \left\{ \frac{z_1}{w_1}, \frac{z_2}{w_2}, \dots \right\} \quad (w_n \neq 0 \text{ para } n = 1, 2, \dots) \\ c\{w_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{cw_1, cw_2, \dots\} \text{ para } c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Observación 2.5.1. De acuerdo con la definición anterior la suma, el producto y el cociente de sucesiones convergentes son convergentes. (Ejercicio).

Definición 2.5.2. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que *diverge al infinito* ∞ , y escribimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ o } z_n \rightarrow \infty$$

Si dado cualquier número real k , existe un número N tal que $|z_n| > k$ para $n > N$.

Geoméricamente, esto significa que dado cualquier círculo con centro $z = 0$ todos los puntos z_n para n suficientemente grande, están fuera del círculo.

Definición 2.5.3. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ denota la serie infinita de números complejos, la cual no es más que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=1}^n z_k \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Una serie de números complejos se dice que **Converge** o que es **Convergente** si existe un número $S \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, a tal número S se le llama la suma de

la serie y escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$. La serie se dice que **Diverge** o que es **Divergente** si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ no existe.

Teorema 2.5.1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a la suma S si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ converge a $\operatorname{Re}(S)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ converge a $\operatorname{Im}(S)$.

Demostración. Es suficiente recordar que $S_n = \{z_1 + z_2 + \dots + z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si converge tanto $\{\operatorname{Re}(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ como $\{\operatorname{Im}(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$, el resto es claro. \square

Observación 2.5.2. Los teoremas de cursos previos (Análisis Vectorial) son válidos en \mathbb{C} , a saber la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo si $\sum_{n=m}^{\infty} z_n$ converge, la suma de series convergentes es convergente, además si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Se propone al lector probar estas afirmaciones.

Definición 2.5.4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se dice que **converge absolutamente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

Teorema 2.5.2. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$, debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente existe un entero N tal que $\sum_{n=m}^{\infty} |z_n| < \epsilon$ si $m > N$. Así, si $m > k \geq N$, entonces

$$|S_m - S_k| = \left| \sum_{n=k+1}^m z_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |z_n| < \epsilon$$

Así que la sucesión de sumas parciales S_n es de Cauchy, de donde S_n converge y en consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. \square

Teorema 2.5.3. (Criterio de comparación Término a Término)

Si $|z_n| \leq |w_n|$ para $n > N_0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Es suficiente notar que como $|z_n| \leq |w_n|$ para $n > N_0$ entonces $|z_{N_0+1}| + \dots + |z_n| \leq |w_{N_0+1}| + \dots + |w_n| < \epsilon$ para $n > N_0$ y así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. \square

Teorema 2.5.4. (Criterio de la razón)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie y $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_{n+1}/z_n|$ entonces:

(i) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

(ii) Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge.

(iii) Si $L = 1$ el criterio no aporta información.

Demostración. (Similar a la demostración dada en cursos de cálculo avanzado). \square

Ejemplo 2.5.1. Apliquemos el criterio de la razón a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!i^n}{n^n}$$

Aquí

$$z_n = \frac{n!i^n}{n^n} \text{ y } z_{n+1} = \frac{(n+1)!i^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1}}{z_n} &= \left(\frac{(n+1)!i^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right) / \left(\frac{n!i^n}{n^n} \right) \\ &= \frac{n^n(n+1)!i^{n+1}}{(n+1)^{n+1}n!i^n} \\ &= \frac{n^n(n+1)n!i^n i}{(n+1)^n(n+1)n!i^n} \\ &= \frac{n^n i}{(n+1)^n} = \frac{i}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Como $\frac{1}{e} < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{n^n}$ converge absolutamente.

Teorema 2.5.5. (Producto de Cauchy) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, además suponga que una de estas series es absolutamente convergente. Pruebe que si

$$c_k = \sum_{n=0}^k a_n \cdot b_{k-n}$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$

Solución:

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente definamos

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, B_n = \sum_{k=0}^n b_k, C_n = \sum_{k=0}^n c_k \text{ en donde } c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}.$$

Sea $d_n = B - B_n$ y $e_n = \sum_{k=0}^n a_k d_{n-k}$. Entonces

$$C_p = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^n f_n(k) \quad (2.1)$$

en donde

$$f_n(k) = \begin{cases} a_n b_{n-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$$

Entonces (2,1) se convierte en:

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^p f_n(k) \\ &= \sum_{n=0}^p \sum_{n=k}^p a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m \\ &= \sum_{k=0}^p a_k B_{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (B - d_{p-k}) \\ &= A_p B - e_p \end{aligned}$$

para completar la demostración, es suficiente probar que $e_p \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$. La sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia cero, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$.

Elegimos $M > 0$ tal que $|d_n| \leq M$ para todo n , y $n > N$ implique $|d_n| < \frac{\epsilon}{2A}$ y además que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2M} \quad (\text{Pues } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolutamente})$$

Entonces, para $p > 2N$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |e_p| &\leq \sum_{k=0}^N |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^p |a_k d_{p-k}| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2A} \sum_{k=0}^N |a_k| + M \sum_{k=N+1}^p |a_k| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2A} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que $e_p \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$ y por lo tanto $C_p \rightarrow AB$ cuando $p \rightarrow \infty$.

Ejemplo 2.5.2. Tome el producto de Cauchy de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ con si misma para hallar una fórmula para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.

Solución:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n \sum_{k=0}^n 1 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

Luego;

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)$$

2.6. Límites inferior y superior

Definición 2.6.1. Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales es acotada, con uno o mas puntos de acumulación el ínfimo de todos los puntos de acumulación es llamado el **Límite inferior** de x_n y se denota $\underline{\lim}x_n$ o $\liminf x_n$. Esto es

$$\underline{\lim}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} \{x_n\}$$

Definición 2.6.2. Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números es acotada, con una o mas puntos de acumulación el supremo de todos los puntos de acumulación es llamado **Límite superior** de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se denota $\overline{\lim}x_n$ o $\limsup x_n$. Esto es

$$\overline{\lim}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} \{x_n\}$$

Observación 2.6.1. Si una sucesión de números de reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada las definiciones anteriores se extienden usando los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como posibles valores de los límites, a saber:

$$\overline{\lim} x_n = +\infty$$

si $\forall N \in \mathbb{R}, x_n > N$ para infinitos n .

Mientras que:

$$\underline{\lim} x_n = -\infty$$

si $\forall N \in \mathbb{R}, x_n < N$ para infinitos n .

Ejemplo 2.6.1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \cos n\pi$, entonces

$$x_{2k} = 2 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{2k+1} = 0 \text{ para } k = 1, 1, 2, \dots$$

Luego $\overline{\lim} x_n = 2$ y $\underline{\lim}x_n = 0$.

El siguiente teorema es una útil caracterización del límite superior.

Teorema 2.6.1. $\limsup x_n = L$, si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $x_n < L + \epsilon$.
- (ii) Dado $\epsilon > 0$, y dado $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que $x_n > L - \epsilon$.

Demostración. (Ejercicio) □

Teorema 2.6.2. (Criterio de la Raíz) Supongamos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos y

$\limsup \sqrt[n]{|z_n|} = L$ Entonces:

- (i) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
- (ii) Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge.
- (iii) Si $L = 1$ el criterio no aporta información.

Demostración. (i) Supongamos que $L < r < 1$, entonces por la parte (i) del teorema anterior se tiene que $\sqrt[n]{|z_n|} < r$ excepto para a lo más un número finito de n , y así $|z_n| < r^n$ para $n > N$ y algún $N \in \mathbb{N}$. Ya que la serie geométrica $r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \dots$ converge, también converge $|z_N| + |z_{N+1}| + |z_{N+2}| + \dots$ y así $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge, en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

(ii) Si $L > 1$ por el teorema anterior parte (ii) existe un número infinito de n para los cuales $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$ y en consecuencia $|z_n| > L$ para una cantidad infinita de z_n , de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ y así $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge.

(iii) Nótese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p}} = 1$$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

□

Teorema 2.6.3.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ existe, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ también existe y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

Demostración. Supongamos que

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \in \mathbb{R}$$

y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces, existe un número natural N_0 tal que para $k \geq 1$

$$(L - \epsilon)|z_{N_0+k-1}| \leq |z_{N_0+k}| \leq (L + \epsilon)|z_{N_0+k-1}|$$

Aplicando k -veces ambas desigualdades, obtenemos

$$(L - \epsilon)^k |z_{N_0}| \leq |z_{N_0+k}| \leq (L + \epsilon)^k |z_{N_0}|$$

y extrayendo raíces en esas desigualdades se obtiene para $k \geq 1$

$$(L - \epsilon)^{\frac{k}{k+N_0}} |z_{N_0}|^{\frac{1}{k+N_0}} \leq |z_{N_0+k}|^{\frac{1}{k+N_0}} \leq (L + \epsilon)^{\frac{k}{k+N_0}} |z_{N_0}|^{\frac{1}{k+N_0}}$$

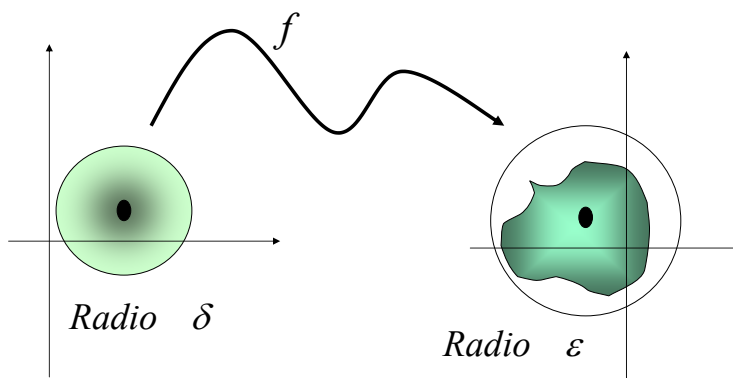
por consiguiente, tomando límites cuando $k \rightarrow \infty$,

$$(L - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sqrt[n]{|z_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|z_n|} \leq L + \epsilon$$

como estas desigualdades son válidas para cada $\epsilon > 0$, el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ existe y coincide con L . Este argumento se puede adaptar para demostrar el resultado cuando $L = \infty$. Como ejercicio se propone completar los detalles de la demostración en ese caso. \square

2.7. Funciones continuas

Definición 2.7.1. Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es **continua** si para cada $z_0 \in A$ y cualquier vecindad de $w_0 = f(z_0)$, $V(w_0)$, existe una vecindad $V(z_0)$ tal que $f(V(z_0)) \subset V(w_0)$.



Observación 2.7.1. Una función f continua con inversa continua es llamada homeomorfismo, y si entre dos conjuntos A y B existe un homeomorfismo los conjuntos A y B se dice que son homeomorfos.

Teorema 2.7.1. Una función $f : A \rightarrow B$ es continua en z_0 si y sólo si $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cada vez que $z_n \rightarrow z_0$

Demostración. (solo si)

Sea $W(f(z_0))$ una vecindad de $f(z_0)$. Por la definición de continuidad existe una vecindad de z_0 , $V(z_0)$, tal que $f(V(z_0)) \subset W(f(z_0))$, luego para cada $z_n \in V(z_0)$ se cumple que $f(z_n) \in W(f(z_0))$ para n suficientemente grande y así $f(z_n)$ converge a $f(z_0)$.

(si)(Ejercicio)

□

Teorema 2.7.2. Si f es una función continua, entonces la imagen de conjuntos conexos mediante f es también un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos que $f : A \rightarrow B$ es continua y que A es conexo. Si $f(A)$ no es conexo entonces existirá una disconexión de $f(A)$ a saber, dos conjuntos B_1 y B_2 , no vacíos, con $f(A) = B_1 \cup B_2$, disjuntos y sin puntos de acumulación de B_1 en B_2 ni puntos de acumulación de B_2 en B_1 .

Ahora bien, sean $A_1 = f^{-1}(B_1)$ y $A_2 = f^{-1}(B_2)$ entonces:

- (i) $A_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \neq \emptyset$ pues $B_1 \neq \emptyset$ y $B_2 \neq \emptyset$
- (ii) $A_1 \cup A_2 = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(f(A)) = A$
- (iii) $A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- (iv) $A_1' \cap A_2 = \emptyset$ y $A_1 \cap A_2' = \emptyset$

En efecto, si $z_0 \in A'_1 \cap A_2$, existe una única sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de puntos en A_1 tales $z_n \rightarrow z_0$

Debido a la continuidad de f , se tiene que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$, lo cual es imposible pues $f(z_n) \in B_1$ y $f(z_0) \in B_2$ con lo que $f(z_0) \in B_1 \cap B_2$ lo cual es una contradicción.

De manera similar se procede si $z_0 \in A_1 \cap A'_2$, (i), (ii) y (iii) se concluye que A no es conexo, lo cual contradice la hipótesis. \square

Teorema 2.7.3. *Si F es continua entonces la imagen de conjuntos compactos mediante F es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $F : A \rightarrow B$ y supongamos que A es compacto, entonces A es secuencialmente compacto, luego dada una sucesión en A esta posee una subsucesión convergente. Veamos que $F(A)$ es secuencialmente compacto (y así compacto).

Sea $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $F(A)$. Entonces existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en A tal que $F(z_n) = w_n$. Dado que A es secuencialmente compacto, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ en A tal que $z_{n_k} \rightarrow z_0$. Ya que F es continua se tiene que $w_{n_k} = F(z_{n_k}) \rightarrow F(z_0) = w_0$ y así $\{w_n\}$ posee una subsucesión convergente. \square

2.8. Series de funciones

Definición 2.8.1. *Sea $f_k(z) : A \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$ una sucesión de funciones definidas sobre un subconjunto A de \mathbb{C} y con valores en \mathbb{C} . Se llama **serie de funciones** de término n -ésimo $f_n(z)$ a la sucesión de números complejos*

$$\{S_k(z)\}_{k=0}^\infty = \left\{ \sum_{n=0}^k f_n(z) / z \in A \right\}$$

2.8.1. Convergencia puntual y convergencia uniforme

Sea $f_n(z) : A \rightarrow \mathbb{C}$ $n = 1, 2, \dots$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

converge (respectivamente, converge absolutamente), en el punto $a \in \mathbb{C}$ si

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$$

converge (respectivamente, converge absolutamente).

Esta convergencia es llamada convergencia puntual, y en ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$, es un número complejo y si se define:

$$D = \left\{ a \in \mathbb{C} / \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \text{ converge} \right\}$$

como región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$, entonces tenemos la función suma de la serie:

$S : D \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a).$$

Definición 2.8.2. se dice que la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

converge (respectivamente, converge absolutamente) en A , si

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$$

es convergente para todo $a \in A$ (respectivamente, converge absolutamente).

Observación 2.8.1. En el caso de la convergencia en el conjunto A , la función S está definida en todo A .

Definición 2.8.3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en un conjunto A , si existe una función $S : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe un N_0 tal que si $n \geq N_0$ entonces:

$$\left| S(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| < \epsilon \text{ para todo } z \in A.$$

En este caso, escribimos $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente sobre A , o equivalentemente,

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A , si $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$, uniformemente sobre A ,

siendo $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

Observación 2.8.2. Es importante destacar que aun cuando hemos denotado por $f(z)$ a las funciones complejas, no se debe confundir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ con una serie de números complejos, pues en nuestra notación $f(z)$ denota a la función y no a la imagen, para evitar confusión en la convergencia puntual usaremos $f(a)$ con $a \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.8.1. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ dos series de funciones en \mathbb{C} entonces se cumple lo siguiente:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge (converge absolutamente) en A si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(f_n(z))$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(f_n(z))$ convergen (convergen absolutamente).

(ii) Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ convergen (convergen absolutamente) en A entonces $\sum_{n=0}^{\infty} [f_n(z) \pm g_n(z)]$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot f_n(z)$ con $c \in \mathbb{C}$ convergen en A (convergen absolutamente).

(iii) Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es convergente y

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$$

(iv) (**Criterio de convergencia uniforme de Cauchy**)

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre A si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe un N_0

tal que $\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| < \epsilon$ para todo $m, n > N_0$. Nótese que esta última condición es equivalente a:

Dado $\epsilon > 0$, existe un N_0 tal que, $|S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon$ para todo $m, n > N_0$, es decir, la sucesión de sumas parciales es uniforme de Cauchy.

Demostración. Ejercicio □

2.8.2. Propiedades que preserva la convergencia uniforme

A continuación daremos algunos resultados en los cuales la convergencia uniforme resulta un factor imprescindible.

Lema 2.8.1. Si $f_n(z)$ converge uniformemente en Ω a una función $f(z)$ y cada $f_n(z)$ es continua en Ω entonces $f(z)$ es continua en Ω .

Demostración. Ejercicio □

Teorema 2.8.1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre A y cada $f_n(z)$ es continua, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es una función continua en A .

Demostración. Sea $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, entonces $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ uniformemente en Ω , dado que $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ es una función continua entonces $S(z)$ es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. □

Teorema 2.8.2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$ y cada $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Demostración. Sea $S_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x)$, entonces $S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n(x)$, así

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b S_k(x) dx$$

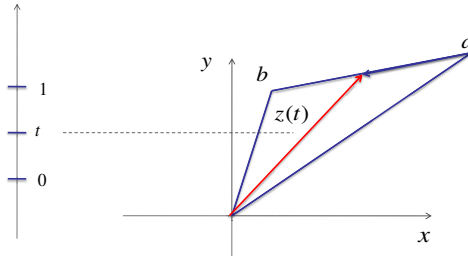
y por la linealidad de la integral, el resultado se tiene. □

Teorema 2.8.1. (Weierstrass M-test) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un dominio D con la propiedad

$$|f_k(z)| \leq M_k, \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$$

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente a una función continua.

Demostración. La convergencia puntual es inmediata. Más aún dado ϵ positivo podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

Figura 2.4: Intervalo Orientado $[a, b]$

$$|f(z) - \sum_{k=1}^N f_k(z)| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \epsilon$$

por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente y el límite es continuo por ser límite de funciones continuas. \square

2.9. Contornos, dominios y conjuntos poligonalmente conexos

Definición 2.9.1. Un camino es una función continua de un intervalo finito en los complejos, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

La imagen z de cualquier punto en $[a, b]$ esta dada por $z = f(t)$. Sin embargo, usaremos la notación $z = z(t)$ para indicar lo anterior.

Ejemplo 2.9.1. $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ representa un círculo de radio unitario recorrido en sentido antihorario.

Ejemplo 2.9.2. . Un intervalo orientado $[a, b]$ donde $a, b \in \mathbb{C}$ es el camino dado por $z(t) = a + t(b - a)$, $0 \leq t \leq 1$. La imagen de este camino es el segmento de recta orientado de extremos a y b .

Ejemplo 2.9.3. (Frontera del triángulo orientado $\partial\Delta(a, b, c) \in \mathbb{C}$)

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tres puntos en el plano complejo, llamaremos **frontera del triángulo orientado con vértices a, b y c** (en este orden) al camino $z(t) : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ que se define por:

$$z(t) = \begin{cases} a + t(b - a) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ b + (t - 1)(c - b) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ c + (t - 2)(a - c) & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Definición 2.9.2. Una **Línea poligonal** es la curva representada por la función continua $C : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ donde $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ es una partición de $[\alpha, \beta]$ y denotamos por I_k los intervalos cerrados $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$ y tal que C aplica cada intervalo en un segmento de recta.

Definición 2.9.3. Un conjunto abierto y conexo en el plano complejo es llamado **dominio**.

Ejemplo 2.9.4. Describa los conjuntos cuyos puntos satisfacen las siguientes relaciones:

$$(i) |z - 2| > |z - 3|$$

$$(ii) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$$

$$(iii) |z|^2 = \operatorname{Im}(z)$$

Determine además cuales son dominios.

Solución:

(i) Sea $z = x + iy$, entonces

$$|z - 2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \text{ y } |z - 3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |z - 2| > |z - 3| &= (x-2)^2 + y^2 > (x-3)^2 + y^2 \\ &= (x-2)^2 - (x-3)^2 > 0 \\ &= ((x-2) - (x-3))((x-2) + (x-3)) \\ &= 2x - 5 > 0 \\ &= 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > \frac{5}{2} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > \frac{5}{2} \right\}$$

\mathfrak{R} es un conjunto abierto y conexo ya que si $(x, y), (x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$

$$\alpha(x, y) + (1 - \alpha)(x_0, y_0) = (\alpha x + (1 - \alpha)x_0, \alpha y + (1 - \alpha)y_0)$$

$$\alpha x + (1 - \alpha)x_0 > \frac{5\alpha}{2} + (1 - \alpha)\left(\frac{5}{2}\right) = 5/2$$

Luego, \mathfrak{R} es una región, abierta y conexa, y por tanto un dominio.

(ii)

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) = 0\}$$

\mathfrak{R} es conexo, pues es una recta, pero no es abierto ya que $\mathfrak{R} = f^{-1}(\{0\})$ para $f(x) = x$ la cual es continua.

(iii)

$$\begin{aligned} |z|^2 = \operatorname{Im}(z) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} / \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$$

\mathfrak{R} no es abierto, pues es una circunferencia. Luego \mathfrak{R} no es un dominio.

Teorema 2.9.1. . Un conjunto abierto D es un dominio si y sólo si cualquier par de puntos de D pueden ser unidos mediante una línea poligonal enteramente contenida en D .

Demostración. Supongamos que existen dos puntos $z_1, z_2 \in D$ que no puedan unirse mediante una poligonal contenida en D y consideremos los conjuntos:

$$D_1 = \{z \in D \text{ existe una poligonal que conecta a } z_1 \text{ con } z \text{ contenida en } D\}$$

$$D_2 = D - D_1$$

Entonces de la misma definición de D_1 se tiene que:

(i) $D_1 \neq \emptyset$ pues $z_1 \in D_1$ y $D_2 \neq \emptyset$ pues $z_2 \in D_2$

(ii) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y $D_1 \cup D_2 = D$

Además, $D_1 \cap D_2' = \emptyset$ y $D_2 \cap D_1' = \emptyset$. En efecto, $\forall z \in D_1$, existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset D$ y todo elemento de $D(z, r)$ puede unirse a z por un segmento (la convexidad de $D(z, r)$ lo garantiza) así todo elemento del $D(z, r)$ puede unirse a z_1 mediante unión de la poligonal que une a z_1 con z y el segmento de recta que une al punto con z , de donde $D(z, r) \in D_1$ y en consecuencia D_1 no posee puntos de acumulación de D_2 ; de manera similar se prueba que $D_2 \cap D_1' = \emptyset$.

Así que D_1 y D_2 son una desconexión para D , lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, si escogemos $p \in D$ y lo dejamos fijo entonces

$$D = \bigcup_{x \in D} P(x, p)$$

donde $P(x, p)$ es la poligonal que une a x con p . Así que D es unión de conexos con un punto en común (a saber p). Luego D es conexo. \square

2.10. La esfera de Riemann

Sea $\Sigma = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ Consideremos al plano $\gamma = 0$ como el plano complejo. A cada $(\alpha, \beta, \gamma) \in S$ asociamos un número complejo z de la siguiente manera, z es la intersección de la recta que pasa por $(0, 0, 1)$ y (α, β, γ) con el plano \mathbb{C} , así, $\Sigma - \{(0, 0, 1)\} \cong \mathbb{C}$. A z se le dice **proyección estereográfica** de (α, β, γ)

En rigor, como $(0, 0, 1), (\alpha, \beta, \gamma), z = (x, y, 0)$ son colineales tenemos

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{1}{1 - \gamma}$$

$$\frac{y}{\beta} = \frac{1}{1 - \gamma}$$

De donde se deducen las relaciones:

$$x = \frac{\alpha}{1 - \gamma}$$

$$y = \frac{\beta}{1 - \gamma}$$

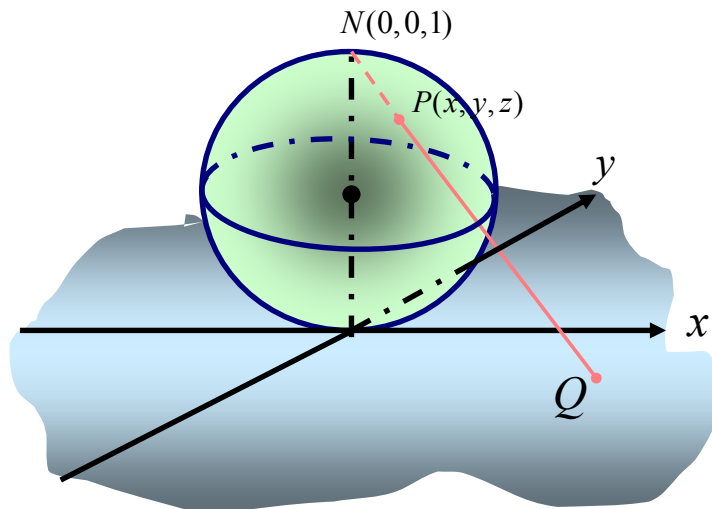


Figura 2.5: La esfera de Riemann

$$\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\beta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

También se tiene $x^2 + y^2 = \frac{\gamma}{1 - \gamma}$ de la cual concluimos que si $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ es tal que $\sigma_k \rightarrow (0, 0, 1)$ la correspondiente sucesión $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$ converge a ∞ . A Σ se le llama **Esfera de Riemann**.

Adjuntamos el ∞ a \mathbb{C} . Los entornos de ∞ serán entonces las proyecciones de entornos del $(0, 0, 1)$. Así, V es un entorno de ∞ en \mathbb{C} si existe M tal que $\{z : |z| > M\} \subset V$. Como notación diremos

- a) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$
 b) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{|z| \rightarrow a} f(z) = L$ ($A \rightarrow \infty$ si y sólo si $|A| \rightarrow \infty$)

Definición 2.10.1. Entenderemos por un **círculo** en Σ a la intersección de un plano con Σ

Sea Γ un círculo en Σ . De modo que $\Gamma = \Sigma \cap \Pi$, donde Π tiene ecuación $A\alpha + B\beta + C\gamma = D$. De las ecuaciones para α, β, γ que definen la proyección estereográfica se tiene que si T es la correspondiente proyección de Γ entonces

$$(C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By = D \quad \forall (x, y) \in T$$

En consecuencia, si $C \neq D$, T es un círculo y si $C = D$, T es una recta. Ahora bien, $C = D$ si y sólo si $(0, 0, 1) \in \Gamma$. Así tenemos

Proposición 2.10.1. Sean Γ, T como antes. Entonces

- 1) Si $(0, 0, 1) \in \Gamma$, entonces T es una recta.
- 2) Si $(0, 0, 1) \notin \Gamma$, entonces T es un círculo.

El siguiente ejemplo es un recíproco de la proposición anterior.

Ejemplo 2.10.1. . Suponga que $T \subset \mathbb{C}$. Pruebe que el conjunto correspondiente S en la esfera de Riemann Σ es:

- (i) Un círculo si T es un círculo.
- (ii) Un círculo menos $(0, 0, 1)$ si T es una recta.

Demostración: Suponga que T es un círculo en el plano, entonces T satisface:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ahora bien para el correspondiente $(\alpha, \beta, \lambda) \in \Sigma$ satisface que

$$x = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$$

y

$$y = \frac{\beta}{1 - \lambda}$$

Luego;

$$\left(\frac{\alpha}{1 - \lambda} - h\right)^2 + \left(\frac{\beta}{1 - \lambda} - k\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{(1 - \lambda)^2} - \frac{2\alpha}{1 - \lambda}h + h^2 + \frac{\beta^2}{(1 - \lambda)^2} - \frac{2\beta k}{1 - \lambda} + k^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha(1 - \lambda)h + h^2(1 - \lambda)^2 + \beta^2 - 2\beta k(1 - \lambda) + k(1 - \lambda)^2 = r(1 - \lambda)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + (1 - \lambda)[-2h\alpha - 2k\beta] + (1 - \lambda)^2[h^2 + k^2 - r^2] = 0 \quad (1)$$

Ahora bien, como $(\alpha, \beta, \lambda) \in \Sigma$ tenemos que

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\lambda - 1/2)^2 = 1/4 \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$\begin{aligned} -(\lambda - 1/2)^2 + 1/4 + (1 - \lambda)[-2h\alpha - 2k\beta] + (1 - \lambda)^2(h^2 + k^2 - r^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda + (1 - \lambda)(-2h\alpha - 2k\beta) + (1 - \lambda)^2(h^2 + k^2 - r^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)(-2h\alpha - 2k\beta) + (1 - \lambda)^2(h^2 + k^2 - r^2) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, como $(0, 0, 1) \notin \Sigma$ se tiene que $1 - \lambda \neq 0$, luego:

$$\begin{aligned} \lambda + (-2h\alpha - 2k\beta) + (1 - \lambda)(h^2 + k^2 - r^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda - 2h\alpha - 2k\beta + h^2 + k^2 - r^2\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow -2h\alpha - 2k\beta + (-h^2 - k^2 + r^2 + 1)\lambda + h^2 + k^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si llamamos $A = -2h$; $B = -2k$; $C = -h^2 - k^2 + r^2 + 1$
y $D = h^2 + k^2 - r^2$ tenemos que (α, β, λ) satisface

$$A\alpha + B\beta + C\lambda + D = 0$$

Es decir, los puntos (x, y) del círculo $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ corresponden a un plano interceptado con la esfera de Riemann, o sea un círculo en la esfera de Riemann.

Sea T una recta en el plano, entonces la ecuación de T es :

$$ax + by + c = 0$$

Ahora bien, el correspondiente $(\alpha, \beta, \lambda) \in \Sigma$ satisface que:

$$x = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$$

y

$$y = \frac{\beta}{1 - \lambda}$$

Luego;

$$a\left(\frac{\alpha}{1 - \lambda}\right) + b\left(\frac{\beta}{1 - \lambda}\right) + c = 0$$

ahora como $(\alpha, \beta, \lambda) \neq (0, 0, 1)$ tenemos que

$$a\alpha + b\beta + c(1 - \lambda) = 0$$

es decir, (α, β, λ) están en el plano de ecuación $a\alpha + b\beta + c(1 - \lambda) = 0$ interceptado con la esfera de Riemann.

O sea S es un círculo menos $(0, 0, 1)$.

2.11. Ejercicios del capítulo 2

1. Demuestre que $\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es un abierto en \mathbb{R} , pero no en \mathbb{C} .
2. Pruebe que los abiertos de \mathbb{R} son abiertos de \mathbb{C} interceptados con \mathbb{R} .
3. Pruebe que el complemento de un abierto es cerrado y el complemento de un cerrado es abierto.
4. Demuestre que $\text{int}(A)$ es abierto y la clausura de A , \bar{A} es cerrado.
5. Pruebe que la unión arbitraria de abiertos es abierto y la intersección de abiertos es abierto (De un ejemplo que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto). Formule propiedades análogas respectivas a los cerrados.
6. Suponga que E es conexo, sea F la unión de E con algunos puntos de acumulación de E . Muestre que F es conexo.
7. Demuestre que la clausura de A es el más pequeño de los conjuntos cerrados que contiene a A , y que el $\text{int}(A)$ es el más grande de los abiertos contenidos en A .
8. Demuestre que los puntos de acumulación de un conjunto cualquiera forman un conjunto cerrado.
9. Demuestre que los puntos límites de una sucesión forman un conjunto cerrado.
10. Pruebe que la clausura de un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ conexo es conexo.
11. Pruebe que si una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ tiene un punto de acumulación z_0 , entonces existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{z_{n_k}\} = \{z_0\}$$

12. Sean S_1, S_2, S_3, \dots una sucesión de conjuntos en \mathbb{C} con diámetro, $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Muestre que no puede haber más de un punto en común a todos los conjuntos de la sucesión.
13. Pruebe que toda sucesión en \mathbb{C} , convergente es de Cauchy.
14. Muestre que si S no es acotado, entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de S tales que $|z_n - z_m| \geq 1$ para todo $m, n, m \neq n$. Muestre además que esta última condición garantiza que $\{z_n\}$ no tiene puntos de acumulación.

15. Pruebe que si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales es acotada entonces esta tiene un punto de acumulación.
Use este hecho para demostrar que cualquier sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $S \subset \mathbb{C}$ tiene punto de acumulación cuando S es acotado
16. Muestre que una sucesión acotada de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un único punto de acumulación z_0 si y solo si $z_n \rightarrow z_0$ conforme $n \rightarrow \infty$
17. Demuestre que $I \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solo si I es un intervalo
18. Demuestre que un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ finito es cerrado y acotado (y así compacto)
19. Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos compactos con $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ es compacta.
20. Si $S \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces S contiene a $Sup(S)$ y a $inf(S)$
21. Pruebe que la unión de número finito de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
22. Estudie la convergencia de:

a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 i^n$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\log(n+1)}$

c $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$

d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+2}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3^n}{3^n n^3} i^n$

23. Sea $T : A \rightarrow B$, pruebe que T es continua si y solo si la imagen inversa de abiertos de B son abiertos en A . (aquí $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$ y la métrica es $|\cdot|$).
24. Supongamos que T es una función continua de un conjunto conexo S en la recta real \mathbb{R} , sean α y β las imágenes de dos puntos bajo esta aplicación, muestre que todo punto en \mathbb{R} , entre α y β también es imagen de algún punto de S .
-

25. Sea C una curva continua dada por $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Demuestre que el conjunto de todos los puntos de C es compacto.
26. Sea S la esfera de Riemann con centro en $(0, 0, 1/2)$ y radio $1/2$. Muestre que si $(a, b, c) \in S$, entonces $a^2 + b^2 = c(1 - c)$.
27. Sea $N = (0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c)$ puntos en la esfera de Riemann. Sea $z = x + iy$ el punto Q en el cual la recta que pasa por N y P intercepta al plano $c = 0$, muestre que $z = \frac{a + ib}{1 - c}$ y $a = \frac{z + \bar{z}}{2(z\bar{z} + 1)}$, $b = \frac{z - \bar{z}}{2i(z\bar{z} + 1)}$, $c = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z} + 1}$
28. (Hahn-Banach). Suponga que \mathfrak{X} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Sea S un subespacio de \mathfrak{X} y p una función a valores reales sobre \mathfrak{X} con las siguientes propiedades:
- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
 - (ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ si $\alpha \geq 0$

si f es un funcional lineal sobre S (esto es una función lineal de S sobre \mathbb{R}) tal que $f(s) \leq p(s)$ para todo $s \in S$, entonces existe un funcional lineal F sobre \mathfrak{X} tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathfrak{X}$ y $F(x) = f(x)$ para todo $s \in S$.

Dando como válido este teorema (sugiero revisar su demostración), dar una extensión de este teorema a \mathbb{C} .

(Sugerencia: suponga que \mathfrak{X} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y que p es igual que antes, entonces $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, con $|f(s)| \leq p(s) \forall s \in S$ y concluya $|f(s)| \leq p(s)$, $\forall x \in \mathfrak{X}$. Considere la parte real e imaginaria del operador y aplique Hahn-Banach real, ahora $f = g + ih$; ya que $s \in S$, $g(is) + h(is) = if(s) = ig(s) - h(s)$, aplicando Hahn-Banach real existe una extensión de g , que denotamos G sobre \mathfrak{X} con $G(x) \leq p(x) \forall x \in \mathfrak{X}$. Sea $F(x) = G(x) - iG(ix)$, concluya).

29. De una versión del teorema de Hahn-Banach para espacios normados.
(Sugerencia: $p(x) = \|x\|$, entonces $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$)
30. Pruebe que la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos es abierto.
31. Sea $S_n = \{[1/n, 1 + 1/n] / n \in \mathbb{N}\}$. Muestre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = (0, 1)$ note así que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada.
32. Muestre que z_0 es un punto de acumulación de un conjunto S de números complejos si y sólo si existe una sucesión z_n de puntos distintos en S tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

33. Pruebe que $\overline{\lim}(z_n + w_n) \leq \overline{\lim}z_n + \overline{\lim}w_n$.
34. Evalúe los siguientes límites cuando existan:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} i^n$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)^2}{3^{2n}}$
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!i^n}{n^n}$
35. Pruebe que una poligonal es conexa
36. Sea C una curva continua dada por $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Muestre que el conjunto de todos los puntos de C es un conjunto compacto
37. Pruebe el teorema 2.2.2
38. Pruebe que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathbb{C} , de Cauchy, que posee una subsucesión convergente es convergente.
39. Pruebe el teorema 2.3.2
40. Pruebe que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.
41. Pruebe que la definición 2.1.10 es equivalente a la siguiente:
Una desconexión de S son dos conjuntos S_1, S_2 tal que
- (i) $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset$
 - (ii) $S_1 \cup S_2 = S$
 - (iii) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
 - (iv) S_1 y S_2 son abiertos y cerrados.
-

Capítulo 3

FUNCIONES ANALÍTICAS

3.1. Funciones Univaluadas

En este capítulo se presentará el concepto de función analítica así como también se estudiarán sus principales propiedades.

Definición 3.1.1. Diremos que $\omega = f(z)$ es una **función compleja** de variable compleja z con dominio de definición D y rango de valores R si a cada z de D le corresponde al menos un punto ω en R .

Observación 3.1.1. A z se le llama variable independiente y a ω variable dependiente; además es importante resaltar que la definición anterior difiere de la clásica definición de función de los cursos previos de cálculo avanzado, ya que a un elemento del dominio le puede corresponder una o más imágenes. En caso de que le corresponda una única imagen diremos que $\omega = f(z)$ es una función **univaluada**.

Ejemplo 3.1.1. Las siguientes son funciones univaluadas:

$$(a) \omega_1(z) = z^8$$

$$(b) \omega_2(z) = \frac{z+5}{z-9};$$

$$(c) \omega_3(z) = \frac{z-2}{z};$$

$$(d) \omega_4(z) = |z|$$

Nótese que ω_1 y ω_4 están definidas para todo $z \in \mathbb{C}$, mientras que ω_2 y ω_3 están definidas para $\mathbb{C} - \{9\}$ y $\mathbb{C} - \{0\}$ respectivamente.

Supongamos que $\omega = u + iv$ es el valor de la función f en $z = x + iy$, entonces la función ω de variable compleja z se puede expresar en términos de un par de funciones con valores reales de las variables reales x e y , a saber $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. A la función $u(x, y)$ se le llama parte real de $f(z)$ y $v(x, y)$ se le llama la parte imaginaria de $f(z)$.

Ejemplo 3.1.2. Si

$$f(z) = \bar{z} + z^2$$

encuentre la parte real e imaginaria de $f(z)$.

Solución: Para $z = x + iy$, $y \bar{z} = x - iy$ tenemos que:

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

y así:

$$f(z) = (x - iy) + x^2 - y^2 + i2xy = (x + x^2 - y^2) + i(2xy - y).$$

Luego $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x^2 + x - y^2$ y $v(x, y) = 2xy - y$.

3.2. Límite de una función compleja

Definición 3.2.1. Sea $\omega = f(z)$ una función univaluada definida en un dominio D excepto tal vez en un punto $z_0 \in D$, diremos que el **límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0** , es ω_0 y escribimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0$$

Si para cada número positivo ϵ , existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z) - \omega_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

En otro caso diremos que el límite no existe.

Observación 3.2.1. Geométricamente, esta definición dice que para cada entorno de radio ϵ , $|\omega - \omega_0| < \epsilon$ de ω_0 , existe un entorno de radio δ , $|z - z_0| < \delta$, de z_0 , tal que las imágenes ω de todos los puntos del entorno δ , con la posible excepción de z_0 quedan en el entorno ϵ .

Ejemplo 3.2.1. Probemos que si $f(z) = iz^2$ esta definida en el disco abierto $|z| < 1$ entonces

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = -i.$$

Observemos que el punto i pertenece a la frontera del dominio $|z| < 1$.

Si z pertenece al dominio $|z| < 1$, entonces

$$|f(z) - (-i)| = |f(z) + i| = |iz^2 + i| = |z^2 + 1| = |z - i||z + i|$$

Ahora para $\delta_1 = 1$

$$\begin{aligned} |z - i| < 1 &\Rightarrow |z - i + i - i| = |z + i - 2i| < 1 \\ &\Rightarrow |z + i| - |2i| < 1 \\ &\Rightarrow |z + i| < 3 \end{aligned}$$

luego dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$ tal que $|z - i| < \delta$, entonces $|f(z) + i| < \epsilon$

Teorema 3.2.1. Si el límite existe es único.

Demostración. Supongamos que ω_1 y ω_2 son tales que: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_1$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_2$

Entonces se tiene:

- (i) $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - \omega_1| < \frac{\epsilon}{2}$
- (ii) $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - \omega_2| < \frac{\epsilon}{2}$

Así, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |\omega_1 - \omega_2| &= |f(z) - \omega_1 + \omega_2 - f(z)| \\ &\leq |f(z) - \omega_1| + |\omega_2 - f(z)| \\ &= |f(z) - \omega_1| + |f(z) - \omega_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

cuando $|z - z_0| < \delta$

como ϵ es arbitrario (tan pequeño como se quiera), tenemos que $|\omega_1 - \omega_2| = 0$ y así $\omega_1 = \omega_2$. \square

Teorema 3.2.2. Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$, definida en un dominio D excepto posiblemente en $z_0 \in D$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0 = u_0 + iv_0$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0$.

Demostración. (\Rightarrow) Sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0 = u_0 + iv_0,$$

es decir que: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que :

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (u_0 + iv_0)| < \epsilon$$

Ahora bien:

$$|f(z) - (u_0 + iv_0)| = |u(z) + iv(z) - (u_0 + iv_0)| = |u(z) - u_0 + iv(z) - v_0| < \epsilon$$

Pero $Re(z) \leq |z|$ y $Im(z) \leq |z|$, luego $|u(z) - u_0| < \epsilon$ y $|v(z) - v_0| < \epsilon$, cuando $0 < |z - z_0| < \delta$.

Con lo que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0$$

(\Leftarrow) Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|u(z) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |v(z) - v_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

Para $0 < |z - z_0| < \delta_1$ y $0 < |z - z_0| < \delta_2$ respectivamente.

Entonces para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 < |z - z_0| < \delta &\Rightarrow |u(z) + iv(z) - (u_0 + iv_0)| \\ &\leq |u(z) - u_0| + |v(z) - v_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

□

3.3. Continuidad de las funciones complejas

Definición 3.3.1. La función $\omega = f(z)$ definida en Dominio D se dice que es **continua en un punto** z_0 en D si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Es decir

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Definición 3.3.2. Una función se dice que es **continua en un dominio** D si es continua en cada punto de D .

Teorema 3.3.1. Si $f(z)$ es continua en z_0 y $f(z_0) = w_0$ y si $F(w)$ es continua en w_0 , entonces $F(f(z))$ es continua en z_0 .

Demostración. Similar a la demostración en cursos de cálculo. \square

Definición 3.3.3. Una función $f(z)$ definida en un dominio D se dice que es **uniformemente continua** en D si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $\forall z_1, z_2 \in D$, $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ cuando $|z_1 - z_2| < \delta$

Teorema 3.3.2. Sea $f(z)$ una función continua en un conjunto compacto R , entonces $f(z)$ es uniformemente continua en R .

Demostración. procedamos por reducción al absurdo, supongamos que $f(z)$ no es uniformemente continua en R , entonces existe $\epsilon > 0$, tal que $\forall \delta > 0$, existen dos puntos z y p en R con $|z - p| < \delta$ y $|f(z) - f(p)| \geq \epsilon$. Escogiendo $\delta = \frac{1}{n}$, encontramos dos sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$|z_n - p_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(z_n) - f(p_n)| \geq \epsilon$$

Como $z_n \in R$ y R es compacto y así secuencialmente compacto, existe $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un punto $z_0 \in R$, $z_m \rightarrow z_0 \in R$.

Sea $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ la subsucesión de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ indizada con los subíndices de $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Afirmación: $p_m \rightarrow z_0$, $m \rightarrow +\infty$

En efecto:

$$\begin{aligned} |p_m - z_0| &= |p_m - z_m + z_m - z_0| \\ &< |p_m - z_m| + |z_m - z_0| \end{aligned}$$

como $z_m \rightarrow z_0$ y $|p_m - z_m| < \frac{1}{n}$ se tiene que $|p_m - z_m| \rightarrow 0$ y $|z_m - z_0| \rightarrow 0$, por lo tanto $p_m \rightarrow z_0$

Ahora bien, como $f(z)$ es continua $f(z_m) \rightarrow f(z_0)$ y $f(p_m) \rightarrow f(z_0)$.

Así que

$$|f(z_m) - f(p_m)| \leq |f(z_m) - f(z_0)| + |f(p_m) - f(z_0)| \rightarrow 0$$

lo cual contradice que $|f(z_m) - f(p_m)| \geq \epsilon$, $\forall m$. \square

3.4. La derivada de una función compleja

Definición 3.4.1. Sea $w = f(z)$ una función univaluada, definida en un dominio D y sea z_0 un punto fijo en D . Entonces $w = f(z)$ se dice que tiene una **derivada en** z_0 si el siguiente límite existe:

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon$$

Definición 3.4.2. Una función $f(z)$ univaluada se dice que es **analítica en un dominio** D si esta tiene derivada en cada punto de D .

Definición 3.4.3. Una función se dice que es **analítica en** z_0 , si existe un Dominio D donde $f(z)$ es analítica (el término Analítica se puede sustituir por **holomorfa o regular**).

Definición 3.4.4. Una función se dice que es **entera**, si es Analítica en todo el plano complejo.

Teorema 3.4.1. Si $f(z)$ tiene derivada en un punto z_0 entonces $f(z)$ es continua en z_0 .

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) + f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) = f(z_0)$$

□

Observación 3.4.1. La continuidad de una función en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ no implica que ésta tenga derivada en z_0 . Si consideramos la función $f(z) = |z|^2$ la cual es continua en todo \mathbb{C} tiene derivada solo en el origen.

En efecto

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}, z \neq z_0$$

entonces

$$g(z) = \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} = \bar{z} + z_0 \cdot \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)$$

Así, si $z - z_0 = re^{i\theta}$, $r > 0$ entonces

$$g(z) = \bar{z} + z_0 \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = \bar{z} + z_0 e^{-2i\theta} = \bar{z} + z_0(\cos(2\theta) - i\sin(2\theta))$$

para que este límite exista, debe existir por cualquier camino y tomar el mismo valor (unicidad del límite), usemos el rayo $\theta = 0$ y $r > 0$ (arbitrario) para aproximarnos al origen, entonces $g(z)$ se aproxima al límite $\bar{z}_0 + z_0$ y si tomamos en cambio el rayo $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r \rightarrow 0$ para aproximarnos al origen, $g(z)$, se aproxima al límite $\bar{z}_0 - iz_0$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Como $\bar{z}_0 + z_0 \neq \bar{z}_0 - iz_0$, por la unicidad del límite concluimos que $f'(z_0)$ no existe si $z_0 \neq 0$.

Teorema 3.4.2.

(a) $\frac{dc}{dz} = 0$ (c es constante)

(b) $\frac{dz}{dz} = 1$

(c) Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en un dominio D , entonces $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ y $f(z)/g(z)$, con $g(z) \neq 0$ son analíticas en D . Además se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(f(z) \pm g(z)) &= \frac{df(z)}{dz} \pm \frac{dg(z)}{dz} \\ \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) &= f(z)\frac{dg(z)}{dz} + g(z)\frac{df(z)}{dz} \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) &= \frac{g(z)\frac{df(z)}{dz} - f(z)\frac{dg(z)}{dz}}{(g(z))^2} \end{aligned}$$

Demostración. Se procede como en cursos de cálculo avanzado y en consecuencia de deja como ejercicio al lector. □

Teorema 3.4.3. (Regla de la cadena) La composición de funciones diferenciables es diferenciable. Esto es, si f es diferenciable en z y g es diferenciable en $f(z)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en z . Más aún,

$$[g \circ f(z)]' = g'(f(z))f'(z)$$

Demostración. Supongamos que f es diferenciable en z , y sea

$$\varphi(h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)$$

Entonces,

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + h\varphi(h) \quad (1)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad (2)$$

Aún cuando, φ fue inicialmente definida para $h \neq 0$ y h suficientemente pequeño, podemos también definir $\varphi(0) = 0$ y así la fórmula (1) también se mantiene válida para $h = 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe una función φ definida para h suficientemente pequeño y un número a tal que

$$f(z+h) - f(z) = ah + h\varphi(h) \quad (1')$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad (2)$$

Dividiendo por h en la fórmula (1') y tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, vemos que este límite existe y es igual a a .

Así $f'(z)$ existe y es igual a a .

De donde la existencia de la función φ satisfaciendo (1') y (2) es equivalente a la diferenciableidad.

Aplicaremos esto para probar la regla de la cadena.

Sea $w = f(z)$ y $k = f(z+h) - f(z)$

Así;

$$g(f(z+h)) - g(f(z)) = g(w+k) - g(w)$$

de la diferenciableidad de g en w tenemos que existe una función $\psi(k)$ tal que $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = 0$ y

$$\begin{aligned} g(w+k) - g(w) &= g'(w)k + k\psi(k) \\ &= g'(w)(f(z+h) - f(z)) + (f(z+h) - f(z))\psi(k) \end{aligned}$$

dividiendo por h tenemos;

$$\frac{g \circ f(z+h) - g \circ f(z)}{h} = g'(w) \frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \psi(k)$$

Como $h \rightarrow 0$, por la continuidad de f se tiene que $k = f(z+h) - f(z) \rightarrow 0$, por lo que $\psi(k) \rightarrow 0$ por hipótesis.

Así;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \circ f(z+h) - g \circ f(z)}{h} = g'(f(z))f'(z)$$

O sea

$$[g \circ f(z)]' = g'(f(z))f'(z)$$

□

Ejemplo 3.4.1. Suponga que $g^2(z) = z$ en alguna vecindad de z . Verifique que

$$g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Solución:

De la definición de $g^2(z)$ y usando la regla de la cadena tenemos:

$$1 = g'(z)2g(z)$$

con lo que, $g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$

Por lo tanto $g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

3.5. Las condiciones de Cauchy-Riemann

Sea $f(z)$ una función compleja, si $z = x + iy$, entonces $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones reales evaluadas en (x, y) . Denotaremos por u_x , v_x , u_y y v_y las derivadas parciales usuales de u y v respecto de x e y .

Teorema 3.5.1. Una condición necesaria para que una función sea analítica en un dominio D es que las cuatro derivadas parciales u_x , v_x , u_y y v_y existan y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Es decir: si $f(z)$ es analítica en D entonces las derivadas parciales u_x , v_x , u_y y v_y existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

en cada punto de D .

Demostración. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto fijo en D . Ya que $f'(z_0)$ existe, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, es decir que este límite existe por cualquier "camino". Así, z se puede aproximar a z_0 en cualquier dirección y el valor del límite no se altera. Así:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

para $z_0 = x_0 + iy_0$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

si nos aproximamos a z_0 a través de una recta paralela al eje y :

$$y \rightarrow y_0, \quad x = x_0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0, \quad \Delta x = 0$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} = \\ &= -iu_y + v_y \quad (3.1) \end{aligned}$$

Si ahora nos aproximamos a z_0 a través de una recta paralela al eje x , se tiene:

$$y = y_0, \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \Delta y = 0, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\
&= u_x + iv_x \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Como (3.1) y (3.2) son iguales pues el límite existe en cualquier dirección, se concluye que:

$$-iu_y + v_y = u_x + iv_x$$

igualando partes reales e imaginarias:

$$u_x = v_y \text{ y } u_y = -v_x$$

□

Nótese que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ es equivalente a la ecuación $f_y(z) = if_x(z)$ ya que

$$\begin{aligned}
f_y(z) &= u_y(x, y) + iv_y(x, y) \\
&= -v_x(x, y) + iu_x(x, y) \\
&= i^2 v_x(x, y) + iu_x(x, y) \\
&= i(u_x(x, y) + iv_x(x, y)) \\
&= if_x(z)
\end{aligned}$$

Observación 3.5.1. Las condiciones dadas en el teorema anterior no son suficientes para garantizar la analiticidad de una función $f(z)$, tal como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.1. Consideremos la función definida por las ecuaciones $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$ donde

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ y } v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

mostraremos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen, pero $f'(0)$ no existe.

En efecto, de la definición de la derivada parcial tenemos:

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = 1$$

y

$$u_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y^3}{y^2} - 0}{y} = -1$$

De manera similar, $v_x(0, 0) = 1$ y $v_y(0, 0) = 1$. Así las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen, esto es:

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0); \quad u_y(0, 0) = -1 = -v_x(0, 0)$$

Veamos ahora que $f'(z)$ no existe en $z = 0$.

Si hacemos variar a z a lo largo de la recta $y = x$, $f(z) = u + iv = 0 + ix$

Así a lo largo de la recta $y = x$

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ix}{x + ix} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

Sin embargo, si (x, y) se aproxima al origen a lo largo del eje x tenemos

$$u_x(0, 0) = 1 \quad \text{y} \quad v_x(0, 0) = 1$$

luego:

$$f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 1 + i$$

con lo que $f'(0)$ no existe.

Ejemplo 3.5.2. La función $f(z) = z^2$ es entera, por lo cual se deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en \mathbb{C} .

Obsérvese que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, así $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, además claramente $u_x = 2x = v_y$ y $-u_y = 2y = v_x$.

En el siguiente teorema daremos condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica.

Teorema 3.5.2. Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D si las cuatro derivadas parciales u_x , v_x , u_y y v_y existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto de D .

Demostración. Sean $f(z) = u(z) + iv(z)$, $h = \xi + i\eta$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, probaremos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f_x(z_0)$$

Para esto comencemos notando que:

$$\begin{aligned} \frac{u(z_0 + h) - u(z_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - u(x_0, y_0)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - u(x_0 + \xi, y_0)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x_0 + \xi, y_0) - u(x_0, y_0)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(x_0 + \xi, y_0 + \theta_1 \eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(x_0 + \theta_2 \xi, y_0) \end{aligned}$$

Esta última igualdad por el teorema del valor medio, para algún $\theta_i \in (0, 1)$. De manera similar, existen $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$ tales que:

$$\frac{v(z_0 + h) - v(z_0)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(x_0 + \xi, y_0 + \theta_3 \eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(x_0 + \theta_4 \xi, y_0)$$

Luego:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} [u_y(z_1) + i v_y(z_3)] + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [u_x(z_2) + i v_x(z_4)]$$

donde $z_1 = (x_0 + \xi, y_0 + \theta_1 \eta)$, $z_2 = (x_0 + \theta_2 \xi, y_0)$, $z_3 = (x_0 + \xi, y_0 + \theta_3 \eta)$, y $z_4 = (x_0 + \theta_4 \xi, y_0)$. Es claro que $|z_i - z_0| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Como las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, es decir, $f_y = i f_x$, podemos restar $f_x(z_0)$ en la forma:

$$\frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z_0) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z_0)$$

y obtener:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f_x(z_0) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} [u_y(z_1) - u_y(z_0) + i(v_y(z_2) - v_y(z_0))] \\ &\quad + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [u_x(z_3) - u_x(z_0) + i(v_x(z_4) - v_x(z_0))] \end{aligned}$$

Como $\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq 1$ y $\left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq 1$ de la continuidad de las derivadas parciales obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f_x(z_0)$$

□

El siguiente ejemplo ilustra este resultado.

Ejemplo 3.5.3. Sea $f(z) = x^3 - 3xy^2 - x + i(3x^2y - y^3 - y)$ estudie su analiticidad.

Solución: Para $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con, $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$ y $v(x, y) = (3x^2y - y^3 - y)$, se tiene que: $u_x = 3x^2 - 3y^2 - 1 = v_y$ y $u_y = -6xy = -v_x$. O sea, las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y son continuas en \mathbb{C} , luego $f(z)$ es una función entera.

Además,

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - 1 + i(6xy)$$

Para $z = x + iy$ arbitrario en \mathbb{C} .

Ejemplo 3.5.4. Determine en que dominio es analítica la función:

$$f(z) = x + ay + i(bx + cy)$$

donde a, b y c son constantes reales.

Solución: Para $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con, $u(x, y) = x + ay$ y $v(x, y) = bx + cy$, se tiene que: $u_x = 1 = v_y = c$ y $a = u_y = -v_x = -b$. O sea, las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, si y solo si $c = 1$ y $b = -a$, así dado que las derivadas parciales son continuas en \mathbb{C} , tenemos que $f(z)$ es una función entera, si y solo si $c = 1$ y $b = -a$.

Es decir, bajo estas condiciones $f(z) = (1 - ia)z$ es entera para cualquier elección de $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5.5. Supongamos que $f(z)$ es analítica en dominio D y que $f'(z) = 0$ en D . Mostrar que $f(z)$ es constante en D .

Solución: Sean $a, b \in D$. Como D es un dominio, a y b pueden ser unidos mediante una poligonal enteramente contenida en D .

Digamos $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_n = b$

Cada segmento de la poligonal está dada por:

$$[z_k, z_{k+1}] = \{z/z = z_k + t(z_{k+1} - z_k), 0 \leq t \leq 1\}$$

Consideremos la función $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $J(t) = f(z_k + t(z_{k+1} - z_k))$ $J'(t) = 0$ (pues cada $z_k \in D$ y $f'(z) = 0$ en D)

Así por el Teorema del Valor medio se sigue que existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$J'(c) = \frac{J(1) - J(0)}{1 - 0}.$$

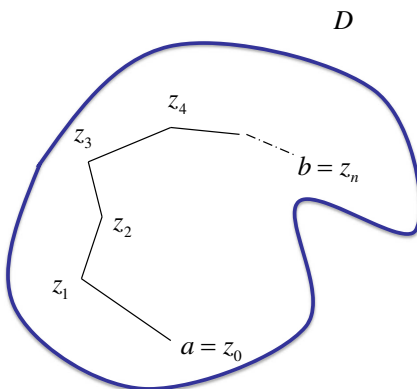


Figura 3.1: Línea poligonal contenida en D

Así $0 = J'(c) = J(1) - J(0)$.

Luego $J(1) = J(0) \Rightarrow f(z_k) = f(z_{k+1})$.

de donde $f(a) = f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_n) = f(b)$ con lo que $f(z)$ es constante en D .

Ejemplo 3.5.6. Suponga que dos funciones analíticas tienen la misma derivada en un dominio D , mostrar que ellas difieren solo en una constante aditiva.

Solución: Sean f, g analíticas en D y con $f'(z) = g'(z)$ en D . Consideremos la función $H(z) = f(z) - g(z)$, entonces $H(z)$ es analítica en D y

$$H'(z) = f'(z) - g'(z) = 0.$$

$$H(z) = k \Rightarrow f(z) = g(z) + k$$

Ejemplo 3.5.7. Supongamos que $f(z)$ y $\overline{f(z)}$ son analíticas en un dominio D . Mostrar que $f(z)$ es constante en D .

Solución: Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, luego $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$, dado que tanto $f(z)$ como $\overline{f(z)}$ son analíticas en D , las ecuaciones de Cauchy-Riemann garantizan que: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ y también: $u_x = -v_y$ y $u_y = v_x$. En consecuencia $u_x = 0 = u_y$.

Así $f'(z) = u_x + iv_x = 0$ en D . Luego como D es conexo, $f(z)$ es constante en D .

Ejemplo 3.5.8. Sea $f(z)$ analítica en un dominio D .

- (a) *Mostrar que si $f(z) = u(x, y) + ic$, donde c es una constante real, entonces $f(z)$ es constante en D .*
- (b) *Mostrar que si $f(z) = c + iv(x, y)$, donde c es una constante real, $f(z)$ es constante en D .*

Solución:

- (a) $f(z) = u(x, y) + ic \Rightarrow v(x, y) = c$ de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene:
 $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$.
 Pero $v(x, y) = c$ garantiza que $u_x = v_y = 0$. Así $u_x = 0$, $v_x = 0$
 $\therefore f'(z) = u_x + iv_x = 0$ de donde $f(z)$ es constante en D .

- (b) De manera similar $u(x, y) = c \Rightarrow u_x = 0$, $v_x = 0$, en consecuencia

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

y así $f(z)$ es constante en D .

3.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Deduzcamos ahora las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, para $z = re^{i\theta}$ y $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ tenemos que

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$f'(r_0, \theta_0) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow (r_0, \theta_0)} \frac{(u(r, \theta) + iv(r, \theta)) - (u(r_0, \theta_0) + iv(r_0, \theta_0))}{re^{i\theta} - r_0e^{i\theta_0}}$$

Este límite existe por cualquier camino, en particular haciendo $r = r_0$, $\theta \rightarrow \theta_0$.

$$\begin{aligned}
 f'(r_0, \theta_0) &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{(u(r_0, \theta) + iv(r_0, \theta)) - (u(r_0, \theta_0) + iv(r_0, \theta_0))}{r_0 e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}} \\
 &= \frac{1}{r_0} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \left[\frac{u(r_0, \theta) - u(r_0, \theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} + i \left(\frac{v(r_0, \theta) - v(r_0, \theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{r_0} \left[\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\frac{u(r_0, \theta) - u(r_0, \theta_0)}{\theta - \theta_0}}{\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}} + i \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\frac{v(r_0, \theta) - v(r_0, \theta_0)}{\theta - \theta_0}}{\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}} \right] \\
 &= \frac{1}{r_0} \left[\frac{u_\theta(r_0, \theta_0)}{\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}} + i \frac{v_\theta(r_0, \theta_0)}{\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}} \right]
 \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{ie^{i\theta}}{1} = ie^{i\theta_0}$$

De donde:

$$f'(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{u_\theta(r_0, \theta_0)}{ie^{i\theta_0}} + i \frac{v_\theta(r_0, \theta_0)}{ie^{i\theta_0}} \right) = \frac{1}{r_0 \cdot e^{i\theta_0}} (-iu_\theta(r_0, \theta_0) + v_\theta(r_0, \theta_0))$$

hagamos ahora $\theta = \theta_0$ y $r \rightarrow r_0$

$$\begin{aligned}
 f'(r_0, \theta_0) &= \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{u(r, \theta_0) + iv(r, \theta_0) - u(r_0, \theta_0) - iv(r_0, \theta_0)}{r e^{i\theta_0} - r_0 e^{i\theta_0}} \\
 &= \frac{1}{e^{i\theta_0}} \lim_{r \rightarrow r_0} \left[\frac{u(r, \theta_0) - u(r_0, \theta_0)}{r - r_0} + i \frac{v(r, \theta_0) - v(r_0, \theta_0)}{r - r_0} \right] \\
 &= \frac{1}{e^{i\theta_0}} (u_r(r_0, \theta_0) + iv_r(r_0, \theta_0))
 \end{aligned}$$

Dado que el límite existe, estas expresiones para $f'(r_0, \theta_0)$ coinciden, así que igualando partes reales y partes imaginarias tenemos:

$$\frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) = u_r(r_0, \theta_0) \text{ y } v_r(r_0, \theta_0) = -\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0)$$

como (r_0, θ_0) son arbitrarios, entonces las ecuaciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares vienen dadas por:

$$\frac{1}{r} v_\theta = u_r \text{ y } v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

Observación 3.6.1. Tal y como se hizo para la derivada en coordenadas cartesianas, en el cálculo de la derivada por definición se encuentra una fórmula explícita para la derivada, como lo enunciamos en los siguientes teoremas, cuya demostración se deduce de los cálculos hechos previamente.

Teorema 3.6.1. Si $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ es analítica en un dominio D , entonces

$$\frac{1}{r}v_\theta = u_r \quad \text{y} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

Teorema 3.6.2. Si $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ y $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ existen, son continuas y satisfacen Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares en un dominio D , entonces $f(z)$ es analítica en D .

Además, si $w = f(z)$ es analítica:

$$\frac{dw}{dz} = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial w}{\partial r}.$$

Ejemplo 3.6.1. Estudie la analiticidad de la función $f(z) = r^5 \cdot (\cos(5\theta) + i\sin(5\theta))$.

Solución:

Comencemos notando que $u(r, \theta) = r^5 \cos(5\theta)$ y $v(r, \theta) = r^5 \sin(5\theta)$, además:

$$u_r = 5r^4 \cos(5\theta) = \frac{1}{r}v_\theta, \quad \text{y también} \quad v_r = 5r^4 \sin(5\theta) = -\frac{1}{r}u_\theta.$$

Así las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas para todo (r, θ) con $r \neq 0$, esto es $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$.

3.7. Funciones armónicas

Definición 3.7.1. Si Ω es un abierto de \mathbb{R}^2 , una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es armónica en Ω si $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ en Ω

Teorema 3.7.1. Si $f(z)$ es analítica en un abierto y conexo Ω entonces $Re(f(z))$ e $Im(f(z))$ son armónicas en Ω

Demostración. Como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en Ω se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto es: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Derivando estas ecuaciones obtenemos $u_{xx} = v_{yx}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$, ya que $v_{xy} = v_{yx}$, tenemos que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. De manera similar se prueba que $\Delta v = 0$.

O sea $u(x, y) = Re(f(z))$ y $v(x, y) = Im(f(z))$ son armónicas en Ω . □

Definición 3.7.2. $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son Armónicas Conjugadas en Ω (en ese orden) si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en Ω donde Ω es un dominio. (Abierto y Conexo).

Observación 3.7.1. Ya sabemos que las partes real e imaginaria de las funciones analíticas son funciones armónicas. La pregunta natural es si son o no las únicas y la respuesta es afirmativa cuando Ω es un **dominio simplemente conexo** (abierto y conexo, "sin huecos"), más adelante daremos una definición formal de dominio simplemente conexo.

Teorema 3.7.2. Si Ω es un dominio simplemente conexo, entonces toda función armónica en Ω posee una armónica conjugada en Ω

Demostración. Ejercicio

□

3.8. Ejercicios resueltos

1. Estudie en que puntos del plano complejo son derivables en sentido complejo las siguientes funciones:

(a) $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$

(b) $f(z) = |z|^\alpha$, $\alpha > 0$

(c) $f(z) = h(y)$, $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

(d) $f(z) = h(x, y)$, $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2} + |z|^2$

Solución

(a) Si $f(z)$ es derivable en $z = x + iy$, entonces debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann $f_y(z) = if_x(z)$, lo cual implica si $x, y \neq 0$, que:

$$\frac{|x| \operatorname{sgn} y}{2\sqrt{|x \cdot y|}} = \frac{i|y| \operatorname{sgn} x}{2\sqrt{|x \cdot y|}}$$

donde se define la función signo como $\operatorname{sgn} x = 1$ si $x > 0$ y $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$. Si $x = 0$ ó $y = 0$, f no es derivable porque no es diferenciable en sentido real. Como un número real distinto de cero no puede ser imaginario puro, f no es derivable en ningún punto.

(b) Si f es derivable en $z = x + iy$, entonces debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann $f_y(z) = if_x(z)$, lo cual implica $\alpha y |z|^{\alpha-2} = \alpha x i |z|^{\alpha-2}$. Si $\alpha > 1$, f es diferenciable en el sentido real en todos los puntos y polo es derivable en $z = 0$. Si $\alpha \leq 1$ f no es diferenciable en el sentido real en $z = 0$ y por tanto, f no

es derivable en ningún punto.

(c) Si f es derivable en $z = x + iy$, entonces $f_y(z) = if_x(z)$, es decir $0 = h'(y)$. Por lo tanto f es derivable únicamente en los puntos que $h'(y) = 0$.

(d) Si f es derivable en z , entonces debe satisfacer $f_y(z) = if_x(z)$, lo cual implica $f_y(z) = f_x(z) = 0$ ya que $f(z)$ solo forma valores reales. Por tanto, f es derivable únicamente en los puntos donde $f_y(z) = f_x(z) = 0$

(e) Como f no es continua en cero, no es derivable en cero. Como $|z|^2 = f(z) - z^{-2}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$, si f fuese derivable en algún punto $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $|z|^2$ también sería derivable en z_0 , pero $|z|^2$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C} - \{0\}$, luego f no es derivable en ningún punto de \mathbb{C} .

2. Hallar una función analítica (y especificar en que dominio lo es), cuya parte real sea $u(x, y) = e^{-y} \cos x$

Solución

El problema consiste en determinar la conjugada armónica $v(x, y)$ de $u(x, y) = e^{-y} \cos x$. Comencemos notando que $\Delta u = 0$. Por otra parte, si $v(x, y)$ es la conjugada armónica de $u(x, y)$ se satisface que:

$u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. O sea:

$$-e^{-y} \operatorname{sen} x = v_y \quad y \quad -e^{-y} \cos x = -v_x$$

Integrando la primera ecuación respecto a y tenemos:

$$-\int e^{-y} \operatorname{sen} x dy = \operatorname{sen} x e^{-y} + k(x) = v(x, y)$$

Ahora derivando respecto a x tenemos:

$$e^{-y} \cos x = v_x = e^{-y} \cos x + k'(x)$$

con lo que $k'(x) = 0$

Luego

$$v(x, y) = \operatorname{sen} x e^{-y} + C$$

donde C es un constante real.

3. Supongamos que f' es una función de clase C^2 (en sentido real) en un abierto Ω . Pruebe que si f es analítica en Ω , entonces f' también es analítica en Ω .

Solución:

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en Ω se satisface que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Como u, v son de clase C^2 en sentido real, es decir, todas sus derivadas de orden

dos son continuas, se tiene la igualdad de las derivadas cruzadas. Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f dan $u_{xx} = v_{xy}$ y $u_{xy} = -v_{xx}$. Veamos que $f' = u_x + iv_x = U + iV$ Satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $U_x = u_{xx} = v_{xy} = V_y$, $U_y = u_{xy} = -v_{xx} = -V_x$ y por ser U_x y U_y continuas en Ω , f' es analítica en Ω .

Observación 3.8.1. Más adelante veremos que la condición que $f \in C^2$ se puede suprimir gracias a la fórmula Integral de Cauchy.

3.9. Ejercicios del capítulo 3

1. Determine el conjunto de valores de z donde la función dada es continua:

(a) $w = z^3 - 2z + 1$

(b) $w = \frac{z^2 + 2z + 3}{(z - 1)(z^2 + 9)}$

(c) $w = |z + i|$

(d) $w = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z + 1}\right)$

2. Descomponga la función compleja en su parte real e imaginaria expresadas como funciones de x e y

(a) $w = z^3 - 2z$

(b) $w = \frac{(z - 1)}{z + 1}$

(c) $w = \frac{z}{z^2 - 1}$

3. Pruebe que las siguientes funciones son uniformemente continuas en el conjunto respectivo y encuentre explícitamente $\delta = \delta(\epsilon)$

(a) $f(z) = z^3 + 1, |z| \leq 3$

(b) $f(z) = \frac{1}{z}, |z| \geq 1$

4. Pruebe que

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

no es uniforme continua en $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

5. Pruebe que si $f(z)$ es uniformemente continua en D entonces $f(z)$ es continua en D . De un ejemplo donde falla el recíproco.

6. Pruebe que si $f(z)$ es continua sobre un conjunto compacto K , entonces $f(z)$ es acotada sobre K .

7. Pruebe que si $g(z)$ es una función continua a valores reales sobre un compacto K , entonces existen puntos α, β en K tales que:
 $g(\alpha) \leq g(z) \leq g(\beta), \forall z \in K$

8. Pruebe que si C es un compacto en el plano complejo y z_0 es un punto que no esta en C , existe un punto z_1 en C tal que:

$$|z - z_0| \geq |z_1 - z_0| \quad \forall z \in C$$

- (a) Pruebe el resultado anterior para el caso en que C es la curva continua $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.
- (b) Sea C una curva continua y z_0 un punto que no esta en C . Muestre que existe un número $\rho \geq 0$ tal que $|z - z_0| \geq \rho$, $\forall z \in C$.
9. Sea S un conjunto conexo y sea $w = g(z)$ una función continua sobre S tomando solo valores enteros. Pruebe que $g(z)$ es constante sobre S .
10. Sea A un conjunto compacto y sea $z \in \mathbb{C}$, sea $d(z)$ la distancia (mínima) de z a A ($d(z, A) = \inf\{|z - y|, y \in A\}$) pruebe que d es continua.
11. En cada uno de los siguientes casos encuentre $\frac{dw}{dz}$ y encuentre un conjunto D donde w sea analítica

a $w = z(z^2 - 1)^2$

b $w = |z - 1|^2$

c $w = \frac{z - 1}{z^2 + 4}$

d $w = \frac{z + i}{\bar{z} - i}$

e $w = \frac{z^2}{z + \bar{z}}$

f $w = \frac{|z|}{|z| + 1}$

12. Muestre que las funciones $w_1 = Re(z)$, $w_2 = Im(z)$, $w_3 = |z|$ y $w_4 = Arg(z)$ no tienen derivada en ningún punto.
13. Sea $f(z)$ una función definida en un dominio D y sea z_0 un punto en D en el cual $f(z)$ es continua. Muestre que existe una vecindad de z_0 donde $f(z)$ es acotada.
14. Sea $f(z) = \ln|z| + iArg(z)$, con $-\pi < Arg(z) < \pi$. Encuentre el conjunto D donde $f(z)$ es analítica. (sugerencia: usar coordenadas polares).

15. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y) = x^2 - y^2$. Encuentre $v(x, y)$ sabiendo que f es analítica en \mathbb{C} .
16. Sea $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica en un dominio D que no contiene al origen. Usando las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* en coordenadas polares y suponiendo la continuidad de las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r, \theta)$ satisface en D la forma de la ecuación de Laplace, a saber:

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + ru_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

Probar que lo mismo es válido para $v(r, \theta)$.

17. Hallar una función analítica $f(z)$ (y especificar en que dominio lo es), cuya parte real sea $u(x, y) = xy + (e^y + e^{-y})\cos x$ y $f(0) = 2 + i$; Expresarla en términos de z .
18. Hallar una función analítica $f(z)$ tal que su parte real es $u(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y - xy$ y $f(\pi i) = (-\pi/2 + 1)i$; Expresarla en términos de z .
19. Considere la función $f(z) = \frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{|z|^2}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuestre que $f(z)$ es continua en $z = 0$.
20. Pruebe que si $f(z)$ es continua sobre un conjunto compacto K , entonces existe una constante real M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in K$.
21. Estudie la analiticidad de las siguientes funciones:

(a) $w = (\bar{z} + 3i)^2 + 6$

(b) $w = \frac{z - 1}{z^2 + 4}$

(c) $w = \frac{z + i}{\bar{z} - i}$

22. Demuestre que la función definida por la ecuación

$$f(z) = \frac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4}$$

si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$. No tiene derivada en $z = 0$.

23. Supongamos que $f(z) = u + iv$ es analítica en un dominio D y que u y v tienen segunda derivada parcial continua en D . Demuestre

$$(a) \left[\frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right]^2 = |f'(z)|^2$$

$$(b) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

24. Encuentre el conjunto en el cual las siguientes funciones son analíticas:

$$(a) W(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} \right) \right) \text{ con } r > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

$$(b) W(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r} - \frac{i \operatorname{sen} \theta}{r} \text{ con } r > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

25. Sea $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en un dominio conteniendo el punto z_0 . Supongamos que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Demostrar que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

la cual es conocida como la regla de L' Hospital.

26. Sea $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$. Pruebe que no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une a z_1 y z_2 tal que: $f(z_1) - f(z_2) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$.

Esto demuestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a funciones complejas.

(Sug: Pruebe que para todo λ en \mathbb{R} se cumple que $|\lambda + i(1 - \lambda)|^2 \geq \frac{1}{2}$)

27. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, un abierto simétrico con respecto al eje real. Demuéstrese que $f(z)$ es analítica si y solo si $g(z)$ lo es, siendo

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

con $z \in \Omega$.

28. Si en la relación:

$$W = W(z) = f(x, y) = f \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \varphi(z, \bar{z})$$

z y \bar{z} se consideran como variables independientes, las derivadas respecto a estas variables serán iguales a

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Usando la notación:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = W_z, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = W_{\bar{z}}$$

Demuestre lo siguiente:

(a) $dW = W_z dx + W_{\bar{z}} d\bar{z}$

(b) $W_z = \frac{1}{2}[(u_x + v_y) + i(-u_y + v_x)]$

(c) $W_{\bar{z}} = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)]$

(d) Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a la ecuación $W_{\bar{z}} = 0$.

Capítulo 4

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES COMPLEJAS

En este capítulo presentaremos las extensiones al plano complejo de funciones elementales de cálculo de una variable real. Es decir, definiremos funciones analíticas de una variable compleja z que coinciden con sus partes reales cuando $z = x + i \cdot 0$. Comenzamos definiendo la función exponencial compleja y después la usaremos para definir otras funciones.

4.1. La función exponencial

Definición 4.1.1. Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definimos e^z por la identidad

$$e^z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde e^x es la exponencial real, es bueno destacar que en efecto esta definición coincide con la exponencial real cuando $z = x + i0 = x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1.1. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos números complejos, entonces

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \operatorname{sen} y_2 \cos y_1)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.1.

- (a) Para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.
- (b) $|e^{iy}| = 1$ y $|e^z| = e^x$ ($z = x + iy$).
- (c) Una condición necesaria y suficiente para que $e^z = 1$, es que $z = 2k\pi i$ donde k es un entero.
- (d) $e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

- (a) Por el Teorema 4.4.1 para $z_1 = z$, $z_2 = -z$ se tiene $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$, ya que el producto nunca es nulo, ningún factor puede ser cero; Así $e^z \neq 0$.
- (b) $|e^{iy}| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$
además $|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x$, ya que $e^x > 0$.
- (c) **Necesidad:** Ya que $e^z = 1$ implica que $e^x \cos y = 1$ y $e^x \operatorname{sen} y = 0$, se tiene que $\operatorname{sen} y = 0$, pues $e^x > 0$, así $y = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Pero $\cos n\pi = (-1)^n$. Debido a que $e^x > 0$ tenemos que $e^x \cdot (-1)^n = 1$ sólo si $x = 0$ y $n = 2k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Así $z = 2k\pi i$.
- Suficiencia:** Supongamos que $z = 2k\pi i$, donde $k \in \mathbb{Z}$, entonces $e^z = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi) = 1$.
- (d) $e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, por (c) $z_1 - z_2 = 2k\pi i$.

□

Observación 4.1.1. Del hecho que $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$, se concluye que e^z es una función periódica de período $2\pi i$.

Teorema 4.1.2. La función exponencial compleja e^z es analítica para todos los valores de z , es decir es una función entera, Más aún $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.

Demostración. Si $f(z) = e^z$, entonces $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, así $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$, luego para $f(z) = u + iv$ se tiene que $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Veamos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en efecto:

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Por otra parte usando la expresión $f'(z) = u_x + iv_x$ se tiene que:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

□

Observación 4.1.2. Si w es una función analítica de z , entonces usando la regla de la cadena se deduce que e^w es una función analítica de z y además

$$\frac{d}{dz}(e^w) = e^w \frac{dw}{dz}$$

Ejemplo 4.1.1. Muestre que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, y que $e^{\bar{z}}$ no es analítica en ningún dominio D .

Solución. Si $z = x + iy$, entonces

$$e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i \sin y)$$

además

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y),$$

así $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Por otra parte del ejemplo 3.5.7 se tiene que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ no puede ser analítica en ningún dominio D , ya que e^z es analítica y no constante.

4.2. Las funciones trigonométricas complejas

Del hecho que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ se obtiene que $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ y $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Así que esto nos da una idea de cómo extender las definiciones de $\cos x$ y $\sin x$ al plano complejo.

Definición 4.2.1. Dado cualquier número complejo z , definimos

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Nótese que las funciones anteriores extienden la definición de $\sin x$ y $\cos x$ (real) ya que si $z = x + i \cdot 0$, entonces $\sin z = \sin x$ y $\cos z = \cos x$. Por otro lado, las funciones $\sin z$ y $\cos z$ son ambas de período 2π .

Teorema 4.2.1. *Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son funciones enteras, Más aún*

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \operatorname{cos} z, \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = -\operatorname{sen} z.$$

Demostración. Del hecho que e^{iz} y e^{-iz} con $z \in \mathbb{C}$ son analíticas y tanto $\operatorname{sen} z$, como $\operatorname{cos} z$ son combinaciones lineales de e^{iz} y e^{-iz} se deduce que ambas son analíticas en \mathbb{C} . Por otra parte, usando las derivadas de las funciones exponenciales se deduce que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \operatorname{cos} z, \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = -\operatorname{sen} z.$$

□

Teorema 4.2.2. *Las identidades trigonométricas usuales también son válidas en una variable compleja:*

- (i) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos}(-z) = \operatorname{cos} z$.
- (ii) $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$.
- (iii) $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{cos} z_2 \pm \operatorname{cos} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2$.
- (iv) $\operatorname{cos}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{cos} z_1 \cdot \operatorname{cos} z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2$.
- (v) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{cos} z$ y $\operatorname{cos} 2z = \operatorname{cos}^2 z - \operatorname{sen}^2 z$.
- (vi) $\operatorname{sen}(z + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{cos} z$

Demostración. (iii)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{4i} \\ &+ \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)}}{4i} \\ &= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\ &= \operatorname{sen}(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(2z) &= \operatorname{sen}(z+z) \\
 &= \operatorname{senz} \cdot \cos z + \cos z \cdot \operatorname{senz} \\
 &= 2\operatorname{senz} \cdot \cos z
 \end{aligned}$$

Las otras identidades del teorema se deducen de manera similar y se proponen como ejercicio al lector. \square

Teorema 4.2.3. *Los ceros de las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ están dados por $z = n\pi$ y $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ respectivamente donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

Demostración. Si $\operatorname{sen} z = 0$, entonces

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

y en consecuencia $e^{iz} = e^{-iz}$, de donde $e^{2iz} = 1$. Ahora bien, debido al Teorema 4.1.1(c) se tiene que $2iz = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. De manera similar se prueba que $\cos z = 0$ si, y sólo si, $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y se deja como ejercicio para el lector. \square

Definición 4.2.2. *Dado un número complejo z se define:*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \tan z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} && \text{para } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 (b) \quad \cot z &= \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} && \text{para } z \neq k\pi \\
 (c) \quad \sec z &= \frac{1}{\cos z} && \text{para } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 (d) \quad \csc z &= \frac{1}{\operatorname{sen} z} && \text{para } z \neq k\pi
 \end{aligned}$$

donde en todos los casos $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Observación 4.2.1. *Las funciones $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$ y $\csc z$ son analíticas de z excepto para los valores de z excluidos en la Definición 4.2.2 Además se cumple que:*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{d}{dz}(\tan z) &= \sec^2 z && \text{para } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 (b) \quad \frac{d}{dz}(\cot z) &= -\csc^2 z && \text{para } z \neq k\pi \\
 (c) \quad \frac{d}{dz}(\sec z) &= \sec z \tan z && \text{para } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 (d) \quad \frac{d}{dz}(\csc z) &= -\csc z \cot z && \text{para } z \neq k\pi
 \end{aligned}$$

donde en todos los casos $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. (Ejercicio)

Teorema 4.2.1. Si $z = x + iy$, entonces:

$$(a) \quad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

$$(b) \quad \operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = (\cos x + i \operatorname{sen} x) \frac{e^{-y}}{2i} - (\cos x - i \operatorname{sen} x) \frac{e^y}{2i} \\ &= \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. □

Observación 4.2.2. De las igualdades dadas en el Teorema 4.2.1 se deducen algunas propiedades por ejemplo:

$$(a) \quad \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y$$

$$(b) \quad \operatorname{cos}(iy) = \cosh y$$

las cuales se obtienen haciendo $z = 0 + iy$ en el Teorema 4.2.1. Por otra parte si reemplazamos z por \bar{z} en las igualdades (a) y (b) del Teorema 4.2.1 y recordando que $\cosh(-y) = \cosh(y)$ y $\operatorname{senh}(-y) = -\operatorname{senh}(y)$ obtenemos que $\operatorname{sen} \bar{z} = \overline{\operatorname{sen} z}$ y $\operatorname{cos} \bar{z} = \overline{\operatorname{cos} z}$. Además las expresiones obtenidas en el Teorema 4.2.1 para $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$ permiten deducir que:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{y} \quad |\operatorname{cos} z|^2 = \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

En efecto:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \operatorname{cos}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{cos}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

De manera similar se deduce que $|\operatorname{cos} z|^2 = \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

Por otra parte, como $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ se tiene: $|\operatorname{sen} z|^2 \geq \operatorname{senh}^2 y$, pues $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$, y como $\operatorname{senh}^2 y \rightarrow +\infty$ conforme $y \rightarrow +\infty$ se concluye que $\operatorname{sen} z$ no es acotada en \mathbb{C} . De manera análoga se deduce que $\operatorname{cos} z$ no es acotada en \mathbb{C} .

4.3. Las funciones hiperbólicas complejas

Definición 4.3.1. Dado un número complejo z definimos el seno hiperbólico de z ($\sinh z$) y el coseno hiperbólico de z ($\cosh z$) respectivamente por las ecuaciones:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Observación 4.3.1. Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ son funciones periódicas de período $2\pi i$. Además del hecho que dichas funciones son combinación lineal de funciones analíticas en todo el plano complejo, se deduce que $\sinh z$ y $\cosh z$ son funciones analíticas en todo el plano complejo, más aún,

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z.$$

Teorema 4.3.1. Los ceros de las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ están dados respectivamente por $z = n\pi i$ y $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$ donde $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. (Ejercicio)

Definición 4.3.2. Dado un número complejo z definimos

$$\begin{aligned} (a) \quad \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} && \text{para } z \neq (\frac{1}{2} + n)\pi i \\ (b) \quad \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} && \text{para } z \neq n\pi i \\ (c) \quad \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z} && \text{para } z \neq (\frac{1}{2} + n)\pi i \\ (d) \quad \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\sinh z} && \text{para } z \neq n\pi i \end{aligned}$$

donde en todos los casos $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 4.3.2. Las funciones $\tanh z$ y $\coth z$ son periódicas de período πi , mientras que $\operatorname{sech} z$ y $\operatorname{csch} z$ tienen período $2\pi i$. Además del hecho que dichas funciones son el cociente de funciones analíticas en todo el plano complejo, se deduce que éstas son analíticas en todo \mathbb{C} excepto en los valores para los cuales se anulan el denominador, es decir los valores que son excluidos en la Definición 4.3.2. Más aún, se cumple que:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{d}{dz}(\tanh z) &= \operatorname{sech}^2 z \quad \text{para } z \neq \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i \\
 (b) \quad \frac{d}{dz}(\coth z) &= -\operatorname{csch}^2 z \quad \text{para } z \neq n\pi i \\
 (c) \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) &= -\operatorname{sech} z \tanh z \quad \text{para } z \neq \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i \\
 (d) \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{csch} z) &= -\operatorname{csch} z \coth z \quad \text{para } z \neq n\pi i
 \end{aligned}$$

Donde en todos los casos $n \in \mathbb{Z}$.

Se propone al lector probar la observación anterior.

Teorema 4.3.2. Si $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sinh z &= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x \\
 \cosh z &= \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x
 \end{aligned}$$

Demostración. Se procede como en el Teorema 4.2.1. □

Observación 4.3.1. Del Teorema 4.3.2 se deduce que para $z = x + iy$,

$$\sinh(iz) = i \sin z \quad \text{y} \quad \sin(iz) = i \sinh z.$$

Así como también:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \cosh(iz) &= \cos z, \quad \cos(iz) = \cosh z \\
 (b) \quad \sinh(\bar{z}) &= \overline{\sinh z}, \quad \cosh(\bar{z}) = \overline{\cosh z} \\
 (c) \quad |\sinh z|^2 &= \sin^2 y + \sinh^2 x \\
 (d) \quad |\cosh z|^2 &= \cos^2 y + \sinh^2 x
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de (c) y (d) se deduce de las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ no son acotadas en \mathbb{C} .

4.4. La función logaritmo compleja

Por el Teorema 4.1.2 (a) sabemos que e^w , donde $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, es siempre distinta de cero ¿Existe otro valor de z en \mathbb{C} tal que $e^w \neq z$ para todo $w \in \mathbb{C}$?, el siguiente teorema muestra que $z = 0$ es el único valor que e^w no asume en \mathbb{C}

Teorema 4.4.1. Para cualquier número complejo $z \neq 0$, existe un número complejo w tal que $e^w = z$. En particular, un tal w es el número complejo

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i\text{Arg}z$$

y cualquier otro w esta dado por la ecuación

$$\ln |z| + i\text{Arg}z + 2n\pi i$$

donde \ln denota el logaritmo natural real

Demostración. Escribiendo $z = x + iy$ en forma polar tenemos que $z = |z|e^{i\theta}$ ($|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arg}z$, $-\pi < \theta \leq \pi$)

Ahora bien:

$$e^{\ln |z| + i\text{Arg}z} = e^{\ln |z|} e^{i\text{Arg}z} = |z|e^{i\theta} = z$$

Así $w = \ln |z| + i\text{Arg}z$ es solución de la ecuación $e^w = z$, por otra parte si w_1 satisface que $e^{w_1} = z$, entonces

$$e^w = e^{w_1} \Rightarrow w_1 - w = 2n\pi i$$

Luego $w_1 = w + 2n\pi i$, es decir;

$$\begin{aligned} w_1 &= \ln |z| + i\text{Arg}z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + i(\text{Arg}z + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.4.1. Sea $z \neq 0$ un número complejo. Si w es un número complejo tal que $e^w = z$, entonces w es llamado un **logaritmo** de z ; y lo denotamos por $w = \log z$.

Por el teorema

$$w = \log z = \ln |z| + i\text{Arg}z + 2n\pi i, \quad (-\pi < \text{Arg}z \leq \pi) \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{Z}$$

En particular $w = \ln |z| + i\text{Arg}z$ lo llamaremos el **Valor Principal del Logaritmo de z** , y lo denotamos por $\text{Log}(z)$

Observación 4.4.1. Nótese que para cada $z \neq 0$, existen infinitos w tales que $w = \text{Log}z$, así $\log z$ no es una función en el sentido usual, tal "función" se llama **Función Multi-valuada**, lo cual explicaremos más adelante.

Sin embargo, el Logaritmo Principal $\text{Log}z$ es una función univaluada, y viene a extender la función $\text{Log}z$ real al caso complejo, en efecto:

Si $\text{Im}(z) = 0$, $\text{Re}(z) > 0$, entonces $\text{Log}z = \ln |z| + i\text{Arg}z = \ln |x| + i0 = \ln x$. Así en el semieje $\text{Re}(z) > 0$, la función $\text{Log}z$ coincide con el logaritmo natural real.

Ejemplo 4.4.1. Calcular $\text{Log}(i)$; $\text{Log}(-1)$; $\text{Log}(-i)$

Solución: $\text{Log}(i) = \ln|i| + i\text{Arg}(i)$, Pero $|i| = 1$, y $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$, Así $\text{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}$, mientras que $\text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\text{Arg}(-1) = \pi i$
Por otra parte, $\text{Log}(-i) = \ln|-i| + i\text{Arg}(-i) = i\text{Arg}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.

Observación 4.4.2. En general no es cierto que $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$

Observación 4.4.3. ¿Es cierta la fórmula $\log(z.w) = \log z + \log w$ si por $\log z$ denotamos el conjunto de todos los logaritmos de z ?

La respuesta es afirmativa. En efecto:

$$\begin{aligned} \log(z.w) &= \{\ln|z.w| + i\arg(z.w) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ln|z| + \ln|w| + i(\arg(z) + \arg(w)) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} + \{\ln|w| + i\arg(w) + 2k'\pi i, k' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \log z + \log w \end{aligned}$$

Puesto que la suma de dos números enteros recorre todo \mathbb{Z} si ambos sumando lo hacen.

4.5. Analiticidad de la función $\text{Log}z$

Si escribimos $u + iv = \text{Log}z = \ln r + i\theta$, donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \text{Arg}z$, $-\pi < \theta \leq \pi$, entonces para $z = re^{i\theta}$

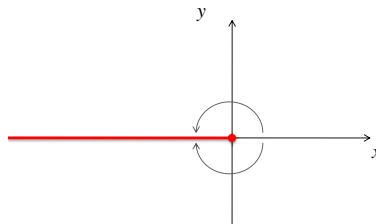
$$\text{Log}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

y así $u(r, \theta) = \ln r$ y $v(r, \theta) = \theta$

Ahora bien $\ln r$ no es continua en $r = 0$ y $\text{Arg}z$ no es continua para los valores del semi-eje negativo del eje real. En efecto

Si $x < 0$ entonces

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Arg}(x + iy) = \pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \text{Arg}(x - iy) = -\pi$$



Sin embargo si nos restringimos al dominio

$$D = \mathbb{C} - \{x + iy \in \mathbb{C} / x \leq 0, y = 0\}$$

Entonces notamos que para $u(r, \theta) = \ln r$, $v(r, \theta) = \theta$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

Así $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ y $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$, Luego $\text{Log}z$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

Además como $w = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ se tiene que

$$\frac{dw}{dz} = (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial w}{\partial r}$$

En consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\log z) &= (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{Log} r + i\theta) \\ &= \frac{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

con lo cual se establece el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. *La función $\text{Log}z$ es analítica en dominio $D = \mathbb{C} - \{z = x + iy / x \leq 0, y = 0\}$. Más aún para cada $z \in D$*

$$\frac{d}{dz}(\text{Log}z) = \frac{1}{z}$$

Definida la función $\text{Log}z$ podemos ahora extender a^x , para el caso z^w donde $z, w \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$

Definición 4.5.1. *Si $z \neq 0$ y $w \in \mathbb{C}$ entonces definamos $z^w = e^{w \log z}$ donde $\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2n\pi i$; $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Observación 4.5.1. *La función z^w también es multivaluada y definamos el **valor Principal** de z^w como $z^w = e^{w \text{Log} z}$, donde $\text{Log}z$ es el logaritmo principal de z . A menos que se indique lo contrario z^w denotara la función univaluada $e^{w \text{Log} z}$.*

Teorema 4.5.2. Si $z \neq 0$ y w_1, w_2 son números complejos entonces

$$z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} z^{w_1} z^{w_2} &= e^{w_1 \operatorname{Log} z} e^{w_2 \operatorname{Log} z} \\ &= e^{(w_1+w_2) \operatorname{Log} z} = z^{w_1+w_2} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.3. La función z^w donde w es un número complejo fijo es analítica en el dominio $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / x \leq 0, y = 0\}$ y $\frac{d}{dz}(z^w) = wz^{w-1}$

Demostración. Como $z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$, se sigue de la analiticidad de $\operatorname{Log} z$, que z^w es analítica en D . Además:

$$\frac{d}{dz}(z^w) = \frac{d}{dz}(e^{w \operatorname{Log} z}) = we^{w \operatorname{Log} z} \frac{1}{z} = wz^{w-1}$$

□

Ejemplo 4.5.1. Calcular el valor de: $(-i)^i$; $(-1)^{i+1}$

Solución:

$$(a) (-i)^i = e^{i \operatorname{Log}(-i)} = e^{i(\frac{i\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$(b) (-1)^{i+1} = e^{(i+1) \operatorname{Log}(-1)} = e^{(i+1)(i\pi)} = e^{-\pi} e^{i\pi}$$

Ejemplo 4.5.2. Resuelva la ecuación $e^{4z} = i$

Solución: Puesto que la función logaritmo es la inversa de la función exponencial, tenemos que:

$$4z = \log(i) = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Por lo tanto } z = (\frac{1}{8} + \frac{k}{2})\pi i \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 4.5.3. Hallar todos los números complejos que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

$$(a) \operatorname{sen}(z) = 3$$

$$(b) \operatorname{sen}(z) + \operatorname{cos}(z) = 2$$

Solución:

(a) Por definición, tenemos que

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$$

si y solo si $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$, es decir,

$$e^{iz} = \frac{6i \pm \sqrt{-36 + 4}}{2} = 3i \pm i\sqrt{8} = (3 \pm \sqrt{8})i$$

Así, finalmente,

$$z = -i \operatorname{Ln}(3 \pm \sqrt{8}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(b) Por definición, tenemos que:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$

Lo que equivale a

$$(1 - i)e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 + i = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1 - i)(1 + i)}}{2(1 - i)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{1 - i} \\ &= \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{2} + (2 \pm \sqrt{2})i) \end{aligned}$$

Con lo que

$$z = -i \left(\operatorname{Ln}(2(3 + \sqrt{2})) + i \arctan \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2 \mp \sqrt{2}} \right) + 2k\pi i \right), \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

4.6. Funciones multivaluadas

Definición 4.6.1. Una **función multivaluada** definida sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una asignación que asocia a cada punto $z \in \Omega$ un subconjunto $f(z) \subset \mathbb{C}$, $f(z) \neq \emptyset$

Definición 4.6.2. Una función $f_\alpha : \Omega \rightarrow X$ tal que $f_\alpha \in f(z)$, donde $f(z)$ es un subconjunto de \mathbb{C} obtenido por una asignación de la función multivaluada $f(z)$ se denomina una **rama** de f , si f_α es analítica en Ω

Una rama fijada de antemano recibe el nombre de **rama principal de la función multivaluada** $f(z)$.

Ejemplo 4.6.1. La función Raíz n -ésima: $z^{\frac{1}{n}}$
Sea $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$z^{\frac{1}{n}} := \{z \in \mathbb{C} / w^n = z\} = \{w_0(z), w_1(z), \dots, w_{n-1}(z)\}$$

donde

$$w_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad \text{si } z = |z|e^{i\theta}$$

Si, por ejemplo elegimos $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces cada $w_k(z) : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama de $z^{\frac{1}{n}}$.

Ejemplo 4.6.2. La función argumento

Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ definamos $\arg(z) = \{t \in \mathbb{R} / z = |z|e^{it}\} \subset \mathbb{R}$.

Notese que si $t_0 \in \arg(z) = \{t_0 + 2n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$ y si $a \in \mathbb{R}$, en cada intervalo semiabierto de longitud 2π $[a, a + \pi)$ existe exactamente un valor t de $\arg(z)$.

Definamos la rama $\arg_\alpha : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow [a, a + \pi)$ mediante $\arg_\alpha(z) = t$, siendo t el único número real que cumple $a \leq t \leq a + \pi$ y $z = |z|e^{it}$.

La rama \arg_0 se denomina Argumento principal y se denota $\text{Arg}(z)$. En forma explícita $\text{Arg}(z) = z \iff 0 \leq t < \pi$ y $z = |z|e^{it}$.

4.7. Ejercicios del capítulo 4

1. Demuestre que e^{iz} y e^{-iz} son funciones analíticas de z .
 2. Demuestre que $|e^{iiz^2}| = e^{-2\lambda xy}$ para λ real
 3. Demuestre que:
 - (a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
 - (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$
 - (c) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
 - (d) $\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}$
 4. Pruebe que:
 - (a) $\cos z_2 - \cos z_1 = -2 \sin\left(\frac{z_2+z_1}{2}\right) \sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$
 - (b) $\operatorname{sen} z_2 - \operatorname{sen} z_1 = 2 \cos\left(\frac{z_2+z_1}{2}\right) \sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$
 5. Demuestre que:
 - (a) $|\sin z| \leq \cosh y$ y $|\sin z| \geq |\sinh y|$
 - (b) $|\cos z| \leq \cosh y$ y $|\cos z| \geq |\sinh y|$
 6. Demuestre que si $|z| \leq 1$, entonces $|\cos z| \leq 2$ y $|\sin z| < \frac{6}{5}|z|$, $z \neq 0$.
(Sug: $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$. Se prueba que $\sin^2 x \leq \frac{36}{25}x^2$ si $|x| \leq 1$ y $\sinh^2 y \leq \frac{36}{25}y^2$ si $|y| \leq 1$)
 7. Pruebe que si $\sin z_1 = \sin z_2$ entonces ó $z_1 = z_2 + 2n\pi$ ó $z_1 = (2n + 1)\pi - z_2$ (Sug: Use el problema número 4, parte (b))
 8. Pruebe que si z_1, z_2, z_3 son números diferentes de cero entonces:
 - (a) $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n_1(z_1, z_2)$
 - (b) $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n_1(z_1, z_2)$
-

$$(c) \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2 + 2\pi n_2(z_1, z_2)$$

$$(d) \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log}z_1 - \operatorname{Log}z_2 + 2\pi i n_2(z_1, z_2)$$

$$(e) \operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg}z + 2\pi k(z, n)$$

$$(f) \operatorname{Log}(z^n) = n\operatorname{Log}z + 2\pi i k(z, n)$$

Donde n es un entero y n_1 y n_2 toman los valores $-1, 0, 1$ como sigue:

$$n_1(z_1, z_2) := \begin{cases} -1 & \text{si } \pi < \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2 \leq 2\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2 \leq \pi \\ 1 & \text{si } -2\pi < \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2 \leq -\pi \end{cases}$$

$$n_2(z_1, z_2) := \begin{cases} -1 & \text{si } \pi < \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2 < 2\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2 \leq \pi \\ 1 & \text{si } -2\pi < \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2 \leq -\pi \end{cases}$$

y k un entero dado por la función parte entera $[[x]]$, $k(z, n) = [[\frac{1}{2} - \frac{n}{2\pi}\operatorname{Arg}z]]$

9. Calcule $(\sqrt{3} + i)^{\frac{i}{2}}$
10. Calcule $[\frac{1+i}{2}]^{-i}$
11. Demuestre que $\frac{d}{dz}(b^z) = b^z \operatorname{Log}b$ donde b es un complejo diferente de cero.
12. Evalúe $e^{\log(1+i)}$ y $\log[(i+1)^{i-1}]$.
13. Muestre que $\operatorname{Re}[(1+i)^{\operatorname{Log}(1+i)}] = 2^{(1/4)\ln 2} \cdot e^{-(\pi^2/16)} \cdot \cos((1/4)\pi \ln 2)$.

Capítulo 5

EL TEOREMA DE CAUCHY Y SUS CONSECUENCIAS

En este capítulo se tratan las nociones básicas de la integración en el campo complejo, y tiene como principal objetivo la deducción del teorema de Cauchy, así como el análisis de algunas de sus principales consecuencias.

El teorema de Cauchy es uno de los más importantes resultados en la teoría de las funciones analíticas, y establece que la integral, sobre una curva de Jordan, de una función analítica es nula.

Las consecuencias que se derivan de este son de gran impacto y marcan diferencias notables con el análisis real. En el análisis real, si se considera la teoría de campos vectoriales, dentro de la cual se estudian las integrales de línea, la integral sobre curvas cerradas no es nula, solo satisfacen esta propiedad las funciones que admiten función potencial. La diferencia entre ambos casos radica justamente en las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Édourd Goursat (1858-1936, matemático francés) prueba en el teorema de Cauchy usando rectángulos y expresamente usa la continuidad de la derivada, aunque pronto reconoció que esta hipótesis era innecesaria, en 1901 Alfred Pringshoim (1850-1941) hace la prueba usando triángulos, esencialmente simplificó el método de la prueba de Goursat y le dio la elegante forma final que tiene hasta hoy en día; La variante del triángulo también tiene la ventaja económica de que produce la integral para regiones estrella inmediatamente, mientras que la versión del rectángulo no puede hacer esto.

5.1. Contornos y Curvas de Jordan

Definición 5.1.1. Una función $s = \gamma(t)$ continua de valores complejos sobre un intervalo $I = [\alpha, \beta]$, tal que $\gamma'(t)$ existe y es continua sobre el intervalo I , además $\gamma'(t) \neq 0$ excepto posiblemente para $t = \alpha$ y $t = \beta$ diremos que representa una **curva regular** sobre el intervalo I

Definición 5.1.2. Sea $z = \gamma(t)$ una función continua de valores complejos definida sobre un intervalo $I = [\alpha, \beta]$ supongamos que existe una partición de $I: \alpha \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = \beta$ tal que si restringimos la función $s = \gamma(t)$ a cualquier subintervalo $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ para $k = 1, 2, \dots, n$ esta es una curva regular, entonces diremos que $z = \gamma(t)$ representa un **contorno o curva regular a trozos** sobre I .

Observación 5.1.1. de la definición de contorno se concluye que $\gamma'(t)$ es continua y distinta de cero, excepto posiblemente para los valores $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$. A los puntos $\gamma(\alpha)$ y $\gamma(\beta)$ se les llama respectivamente **punto inicial** y **punto terminal** del contorno.

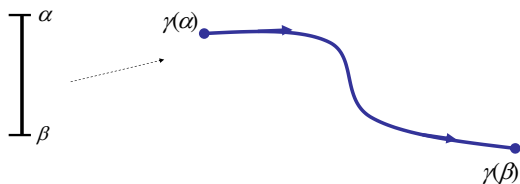


Figura 5.1: Contorno simple

Observación 5.1.2. Si $z = f(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ representa un contorno C . Escribiendo $z = x + iy$ y $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, el contorno C esta dado por dos ecuaciones

$$x = f_1(t), y = f_2(t)$$

con $\alpha \leq t \leq \beta$ donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones continuas de valores reales, además $f_1'(t)$ y $f_2'(t)$ son continuas a trozos sobre I , y excepto para a lo más un número finito de valores de t en I , $(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 \neq 0$

Definición 5.1.3. Sea $C_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ y $C_2 : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ dos contornos dados por $z = f(t)$ y $z = g(t)$ respectivamente diremos que C_1 y C_2 son **equivalentes** y lo denotamos por $(C_1 \sim C_2)$ si existe una función continua $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma, \delta]$ tal que:

1. $\varphi(\alpha) = \gamma$ y $\varphi(\beta) = \delta$
2. φ es Estrictamente Creciente
3. $g \circ \varphi(t) = f(t) \forall t \in [\alpha, \beta]$

Definición 5.1.4. (Curva de Jordan) Un contorno C representado por $z = f(t)$ sobre un intervalo $I = [\alpha, \beta]$ se dice que es **cerrado** si $f(\alpha) = f(\beta)$, C se dice que es **simple** si dado cualquier par de puntos $t_1 \neq t_2$ en I , $f(t_1) \neq f(t_2)$, excepto posiblemente, para $t_1 = \alpha$ y $t_2 = \beta$. Un contorno que es a la vez simple y cerrado es llamado un contorno simple cerrado (o **Curva de Jordan**)

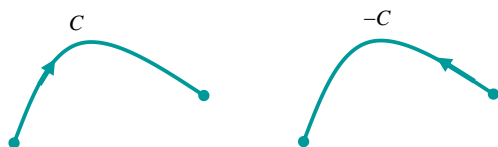
Observación 5.1.3. El siguiente resultado (intuitivamente evidente), cuya demostración omitiremos por ser bastante difícil, establece que la trayectoria de una curva de Jordan divide al plano complejo en exactamente, dos componentes. En lo sucesivo llamaremos componente a todo **abierto conexo maximal**; maximal para la inclusión. Para una demostración didáctica de este teorema, recomendamos consultar el artículo de Francisco García y María Puertas, publicado en la revista "Divulgaciones Matemáticas", en 1998. ver [6].

Teorema 5.1.1. (De la curva de Jordan)

Sea γ una curva de Jordan. Entonces, el conjunto abierto $\mathbb{C} - \text{Tray}\gamma$ consta de dos componentes, una de ellas acotada (la encerrada por $\text{Tray}\gamma$) y la otra no acotada (la exterior a $\text{Tray}\gamma$)

Observación 5.1.4. En este capítulo denotemos por $\text{Tray}(\gamma)$ a la trayectoria de la curva γ , es decir la imagen de γ , pero es importante destacar que en lo sucesivo, haciendo un abuso de notación, denotemos indistintamente a $\text{Tray}(\gamma)$ sin que esto origine confusión, cuando nos referimos a γ algunas veces estamos tratando con $\text{Tray}(\gamma)$.

Definición 5.1.1. Sea un contorno C dado por $z = f(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ entonces el **contorno opuesto**, \bar{C} , está dado por $z = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde $g(t) = f(\alpha + \beta - t)$



Observación 5.1.1. La definición de contorno opuesto, no depende de la ecuación que modela el contorno; En efecto:

Sean C_1, C_2 contornos equivalentes donde C_1 esta modelado por la ecuación $z(t) = f(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ y C_2 por la ecuación $z = g(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, entonces existe $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma, \delta]$ tal que;

1. $\varphi'(t) > 0$
2. $\varphi(\alpha) = \gamma, \varphi(\beta) = \delta$
3. $f(t) = g(\varphi(t))$

Por otra parte;

$$\overline{C}_1 : z = \overline{f}(t) = f(\alpha + \beta - t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\overline{C}_2 : z = \overline{g}(t) = g(\gamma + \delta - t) \quad \gamma \leq t \leq \delta$$

debemos encontrar $\overline{\varphi} : [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma, \delta]$ con $\overline{\varphi}'(t) > 0$, $\overline{\varphi}(\alpha) = \gamma, \overline{\varphi}(\beta) = \delta$ tal que

$$\overline{f}(t) = \overline{g}(\overline{\varphi}(t))$$

Ahora bien:

$$\overline{f}(t) = \overline{g}(\overline{\varphi}(t)) \Leftrightarrow f(\alpha + \beta - t) = g(\gamma + \delta - \overline{\varphi}(t))$$

Por (3)

$$f(t) = g(\varphi(t))$$

$$f(\alpha + \beta - t) = g(\varphi(\alpha + \beta - t)) = g(\gamma + \delta - \overline{\varphi}(t))$$

Esta última ecuación es válida siempre que:

$$\varphi(\alpha + \beta - t) = \gamma + \delta - \overline{\varphi}(t)$$

Escogiendo $\overline{\varphi}(t) = \gamma + \delta - \varphi(\alpha + \beta - t)$ se tiene que:

1. $\overline{\varphi}'(t) = -\varphi'(\alpha + \beta - t)(-1) > 0$
 2. $\overline{f}(t) = \overline{g}(\overline{\varphi}(t))$
-

3. $\overline{\varphi}(\alpha) = \gamma + \delta - \varphi(\beta) = \gamma$ $\overline{\varphi}(\beta) = \gamma + \delta - \varphi(\alpha) = \delta$. Esto demuestra que si dos contornos son equivalentes sus contornos opuestos también lo son y así la buena definición del contorno opuesto.

Definición 5.1.5. Si $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [\beta, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos contornos, se define el **Contorno Yuxtapuesto** de γ_1 y γ_2 y se designa con $\gamma_1 + \gamma_2$ al contorno $\gamma_1 + \gamma_2 : [\alpha, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \alpha \leq t \leq \beta; \\ \gamma_2(t), & \beta \leq t \leq \delta. \end{cases}$$

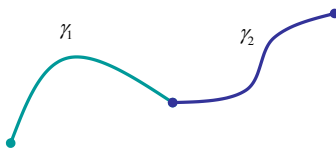


Figura 5.2: Yuxtaposición de γ_1 y γ_2

5.2. Integral sobre Curvas

Definición 5.2.1. Si $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, definimos **la integral de $\varphi(t)$** , sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ por:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(\varphi(t)) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im}(\varphi(t)) dt.$$

Observación 5.2.1. La integral anterior es un número complejo y es aplicable a funciones de una variable real a valores complejos, sin embargo para calcular integrales sobre curvas(contornos), procederemos como con las integrales de línea, la siguiente definición establecerá la forma de calcular dichas integrales.

Definición 5.2.2. Sea $C : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ un contorno dado por $C = \{z = f(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ si $G : C \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua sobre C definimos

La integral de G sobre C al número complejo:

$$\int_C G(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} G(f(t)) f'(t) dt \quad \in \mathbb{C}$$

Observación 5.2.2. Si C es el segmento $[z_1, z_2]$ en \mathbb{C} denotaremos por $\int_{[z_1, z_2]} f(z)dz$ a la integral sobre dicho segmento.

Observación 5.2.3. Notemos que;

(a) Si $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ con referencia a la definición anterior, la integral esta dada por la suma;

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} G(f(t))f'(t)dt$$

(b) Si C es un contorno cerrado simple usaremos $\oint G(z)dz$ para denotar la integral.

Lema 5.2.1. (Cambio de Variable).

Si $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_2]$ es una función continua diferenciable a trozos sobre el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ y $H : [\alpha_1, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua entonces se cumple que:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} H(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} H(\varphi(u)) \varphi'(u)du$$

Demostración. Definimos

$$h_1(s) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} H(t)dt \quad y \quad h_2(s) = \int_{\alpha}^s H(\varphi(u)) \varphi'(u)du$$

Así

$$h_1'(s) = H(\varphi(s)) \varphi'(s) \quad y \quad h_2'(s) = H(\varphi(s)) \varphi'(s).$$

En consecuencia $h_1(s) = h_2(s) + k \forall s \in [\alpha, \beta]$ donde k es una constante.

Por otra parte:

$$h_1(\alpha) = h_2(\alpha) = 0$$

Con lo que $k = 0$, es decir:

$$h_1(s) = h_2(s) \Leftrightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} H(t)dt = \int_{\alpha}^s H(\varphi(u)) \varphi'(u)du$$

La última igualdad es válida para todo $s \in [\alpha, \beta]$ en particular para $s = \beta$ se obtiene la igualdad del lema. \square

Lema 5.2.2. Si $f(t)$ es una función a valores complejos la cual es continua y acotada sobre $\alpha \leq t \leq \beta$ excepto a lo más para un número finito de puntos entonces

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt$$

Demostración. Sea $z = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$, entonces

$$z = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| e^{i\theta} \quad \text{donde} \quad \theta = \text{Arg } z$$

Luego;

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right) e^{-i\theta}$$

es un número real no negativo, de donde;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i\theta} dt \\ &= \text{Re} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i\theta} dt \right) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re} (f(t) e^{-i\theta}) dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t) e^{-i\theta}| dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt \end{aligned}$$

□

5.3. Propiedades de la integral

Teorema 5.3.1. Sean $F(z)$ y $G(z)$ dos funciones continuas de valores complejos, definidos sobre un contorno C entonces se cumple:

(a)

$$\int_{\overline{C}} F(z) dz = - \int_C F(z) dz$$

(b)

$$\int_{C_1+C_2} F(z)dz = \int_{C_1} F(z)dz + \int_{C_2} F(z)dz$$

(c)

$$\int_C kF(z)dz = k \int_C F(z)dz \quad \forall k \in \mathbb{C}$$

(d)

$$\int_C (F(z) \pm G(z))dz = \int_C G(z)dz \pm \int_C F(z)dz$$

(e)

$$\left| \int_C F(z)dz \right| \leq \|F\|_C L(C),$$

donde $\|F\|_C = \max\{|F(z)|/z \in C\}$ y $L(C)$ es la longitud del contorno C

Demostración. (a) Sean C dado por $z = h(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, entonces \bar{C} esta dado por $z = \bar{h}(t) = h(\alpha + \beta - t)$

Así

$$\begin{aligned} \int_{\bar{C}} F(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} F(h(\alpha + \beta - t))h'(\alpha + \beta - t)(-1)dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} F(h(u))h'(u)du \\ &= - \int_C F(z)dz \end{aligned}$$

(b), (c), (d) se proponen como ejercicio al lector.

(e) Supongamos que C esta representado por $z = h(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, entonces $C = \{h(t)/\alpha \leq t \leq \beta\}$ es un conjunto cerrado en C , debido a que $F(z)$ es continua sobre C , $|F(z)|$ alcanza un máximo sobre C , es decir existe $t_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que $|F(h(t_0))| \geq |F(z)| \quad \forall z \in C$, luego:

$$\begin{aligned} \left| \int_C F(z)dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(h(t))h'(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(h(t))||h'(t)|dt \\ &\leq \|F\|_C \int_{\alpha}^{\beta} |h'(t)|dt = \|F\|_C L(C) \end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ sobre un contorno $\gamma \subset \mathbb{C}$, y cada $f_n(z)$ es continua sobre γ , entonces:

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Demostración. Basta aplicar la definición de integral y el hecho demostrado en el capítulo 2 (teorema 2.8.2) que la convergencia uniforme permite intercambiar el símbolo de serie con el de la integral. \square

Ejemplo 5.3.1. Encuentre el valor de la integral $\int_C (z - z_0)^n$, (n cualquier entero) a lo largo de una circunferencia C con centro z_0 y radio r , descrito en dirección antihorario.

Solución: La ecuación de una circunferencia está dada por $z = f(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando el lema 2.1 con $H(z) = (z - z_0)^n$ y $\varphi'(t) = ire^{it}$ tenemos;

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t] dt \end{aligned}$$

Si $n = -1$, entonces

$$\int_C (z - z_0)^n dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Si $n \neq -1$, entonces

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \frac{ir^{n+1}}{n+1} [\sin(n+1)t - i\cos(n+1)t] \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Uniendo los resultados anteriores tenemos que para la circunferencia C descrita anteriormente tenemos;

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1; \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

Ejemplo 5.3.2. Encuentre el valor de la integral

$$\int_C |z - 1| |dz|$$

Donde C es la circunferencia $|z| = 1$ descrita en la dirección contraria a las agujas del reloj.

Solución: Sea $z = re^{i\theta}$. Como estamos en la circunferencia $|z| = 1$, tenemos $z = e^{i\theta}$ de donde $dz = ie^{i\theta}d\theta$ y en consecuencia $|dz| = d\theta$.

Además resulta fácil verificar que $|z - 1| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\theta)}$

Por otro lado;

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow 1 - \cos(2\theta) = 2\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &\Rightarrow 1 - \cos(\theta) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Luego:

$$|z - 1| = \sqrt{2}\sqrt{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow |z - 1| = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Así:

$$\begin{aligned} \int_C |z - 1||dz| &= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u)du \\ &= -4[\cos(u)]_0^{\pi} \\ &= 4[-\cos(\pi) + \cos(0)] \\ &= 4[1 + 1] = 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.3. Calcule las siguientes integrales

(a) $\int_{\gamma} |z|\bar{z}dz$ donde γ es la frontera del semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

(b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$ donde es $\gamma(t) = \{e^{i(\pi-t)} \text{ con } 0 \leq t \leq 1\}$

Solución:

- (a) la curva γ se compone de la circunferencia de radio 1 que se parametriza mediante $\gamma_1(t) = e^{it}$ $t \in [0, \pi]$ y el segmento $[-1, 1]$ que se parametriza por $\gamma_2(t) = t$, con $t \in [-1, 1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z| \bar{z} dz &= \int_0^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt + \int_{-1}^1 |t| t dt \\ &= i \int_0^{\pi} dt \\ &= \pi i \end{aligned}$$

- (b) Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}^2} &= \int_0^{\pi} \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{e^{-2i(\pi-t)}} dt \\ &= -i \int_0^{\pi} e^{3i(\pi-t)} dt \\ &= \frac{1}{3} \left[e^{3i(\pi-t)} \right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.4. Pruebe que el valor de la integral es independiente para contornos equivalentes

solución: Si $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos contornos equivalentes, entonces existe una función continua $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que

- (1) $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$
- (2) φ es estrictamente creciente
- (3) $\gamma_2 \circ \varphi(t) = \gamma_1(t) \forall t \in [a, b]$

Así que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt$$

y efectuando el cambio de variable $s = \varphi(t)$ se verifica

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_c^d f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds$$

en consecuencia, se puede definir la integral sobre un camino orientado como la integral sobre cualquier curva suave a trozos que sea un representante de la clase de equivalencia.

5.4. La Variación del Logaritmo a lo largo de un Contorno

Definición 5.4.1. Sea $\Gamma : z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ un contorno y $G(z)$ una función analítica sobre Γ tal que $G(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$. Supongamos que existe una función continua $\phi(t)$ sobre el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ tal que $e^{\phi(t)} = G(z(t))$. Esto es, para cada t sobre el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$, $\phi(t)$ es uno de los valores de $\text{Log}\{G(z(t))\}$, entonces el valor $\phi(\beta) - \phi(\alpha)$ es llamado **la variación del $\text{Log}\{G(z)\}$** a lo largo de Γ y lo denotaremos por $\Delta_{\Gamma}\text{Log}G(z)$.

Observación 5.4.1. La variación del logaritmo de $G(z)$ a lo largo del contorno Γ depende solo de $G(z)$ y Γ y es independiente de $\phi(t)$. Esto es, si $\psi(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$, es otra función continua tal que $e^{\psi(t)} = G(z(t))$, entonces $e^{\psi(t)} = e^{\phi(t)}$ y en consecuencia:

$$\psi(t) - \phi(t) = 2\pi ni \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \quad \text{con } n \in \text{entero}$$

Definimos

$$g(t) = \frac{\psi(t) - \phi(t)}{2\pi i}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

ya sabemos que $g(t)$ es un entero.

Por otro lado, del hecho que $g(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$, su imagen es un conjunto discreto y su dominio es conexo, se deduce que $g(t)$ es constante en $[\alpha, \beta]$, luego $\psi(t) - \phi(t)$ es constante en $[\alpha, \beta]$ así que:

$$\psi(\alpha) - \phi(\alpha) = \psi(\beta) - \phi(\beta)$$

o equivalente

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \psi(\beta) - \psi(\alpha)$$

Con lo que $\Delta_{\Gamma}\log G(z)$ no cambia si cambiamos la función de $\phi(t)$, que probado así la independencia de la variación del logaritmo a lo largo de Γ de la función $\phi(t)$.

Lema 5.4.1. Dado un contorno cerrado $\Gamma : z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ y una función $h(z)$ tal que $|h(z)| < 1$ para todo z en Γ , entonces $\Delta_{\Gamma}\text{Log}(1 + h(z)) = 0$

Demostración. Ya que para todo $z \in \Gamma$ $|h(z)| < 1$, entonces $1 + h(z)$ está en el semiplano $\text{Re}(z) > 0$, entonces podemos considerar la rama del logaritmo.

$$\text{Log}(1 + h(z)) = \log |1 + h(z)| + i\text{Arg}(1 + h(z)), \quad -\pi < \text{Arg}(1 + h(z)) \leq \pi$$

Así definiendo $\phi(t)$ por la ecuación

$$\phi(t) = \text{Log}\{1 + h(z(t))\}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

entonces $\phi(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$ y $e^{\phi(t)} = 1 + h(z(t))$ ya que Γ es un contorno cerrado $z(\beta) = z(\alpha)$ y en consecuencia

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \text{Log}(1 + h(z(\beta))) - \text{Log}(1 + h(z(\alpha))) = 0$$

por lo tanto $\Delta_{\Gamma} \text{Log}(1 + h(z)) = 0$ □

Observación 5.4.2. Nótese que en la definición (5.4.1) hemos supuesto la existencia de una función continua de valores complejos $\phi(t)$ sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ tal que $e^{\phi(t)} = G(z(t))$, veamos que tal función existe. En efecto;

Consideremos la función;

$$\phi(t) = \int_{\alpha}^t \frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))} ds + k$$

donde k es una función tal que $e^k = G(z(\alpha))$

$\phi(t)$ está bien definida, ya que $G(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$ y $\frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))}$ es continua en $\alpha \leq t \leq \beta$

Ahora bien;

$$\phi'(t) = \frac{G'(z(t))z'(t)}{G(z(t))}$$

Veamos ahora que $e^{\phi(t)} = G(z(t))$.

Para esto probaremos que $G(z(t))e^{-\phi(t)} = 1$

Sea $H(t) = G(z(t))e^{-\phi(t)}$, veamos que $H(t)$ es constante en $[\alpha, \beta]$, en efecto:

$$\begin{aligned} H'(t) &= G'(z(t))z'(t)e^{-\phi(t)} + G(z(t))e^{-\phi(t)}(-\phi'(t)) \\ &= G'(z(t))z'(t)e^{-\phi(t)} - G(z(t))e^{-\phi(t)} \frac{G'(z(t))z'(t)}{G(z(t))} \\ &= G'(z(t))z'(t)e^{-\phi(t)} - G'(z(t))z'(t)e^{-\phi(t)} = 0 \end{aligned}$$

Luego como $H'(t) = 0$ sobre $[\alpha, \beta]$, $H(t)$ es continua y $[\alpha, \beta]$ es conexo, se deduce que $H(t)$ es constante en $[\alpha, \beta]$. Por otra parte como $H(\alpha) = G(z(\alpha))e^{-\phi(\alpha)} = e^k e^{-k} = 1$, entonces $H(t) = 1$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ con lo que $G(z(t)) = e^{\phi(t)}$

Queda probado así la existencia de $\phi(t)$ continua en $[\alpha, \beta]$ y tal que $e^{\phi(t)} = G(z(t))$.

Observación 5.4.3. En la observación anterior se dedujo que $\phi(t)$ tiene como fórmula explícita:

$$\phi(t) = \int_{\alpha}^t \frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))} ds + k$$

donde k es una constante tal que $e^k = G(z(\alpha))$.

Así la variación del logaritmo de $G(z)$ a lo largo de un contorno Γ se puede expresar por:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma} \text{Log}(G(z)) &= \phi(\beta) - \phi(\alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))} ds + k - \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))} ds - k \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{G'(z(s))z'(s)}{G(z(s))} ds \\ &= \int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz \end{aligned}$$

Si en particular Γ es un contorno cerrado, $z(\alpha) = z(\beta)$ y así $e^{\phi(\alpha)} = G(z(\alpha)) = G(z(\beta)) = e^{\phi(\beta)}$

Luego, $e^{\phi(\alpha)} = e^{\phi(\beta)}$ y como consecuencia;

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = 2n\pi i, \quad \text{donde } n \text{ es un entero}$$

Así que

$$\frac{\Delta_{\Gamma} \text{Log}(G(z))}{2\pi i} = n \quad \text{es un entero}$$

5.5. Teoría del Índice

En la observación (5.4.3) tenemos que $\frac{\Delta_{\Gamma} \text{Log}(G(z))}{2\pi i}$ es un entero para Γ cerrado, en particular cuando $G(z) = z - z_0$ y z_0 es un punto que no pertenece a Γ , el entero obtenido tiene un significado especial, representa el número de vueltas del contorno Γ alrededor del punto z_0

Definición 5.5.1. Sea Γ un contorno cerrado y z_0 no pertenece a Γ se define $Ind(\Gamma, z_0)$ el **Índice** de Γ en z_0 por

$$Ind(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Observación 5.5.1. De la observación (5.4.3) se deduce que el índice es un entero, que depende solo de Γ y z_0

Además, cuando Γ es un contorno cerrado simple $Ind(\Gamma, z_0)$ es constante para todos los puntos encerrados en Γ ; esto es, si z_0 y z_1 están encerrados por Γ , entonces tienen el mismo índice.

Teorema 5.5.1. (Propiedades del Índice)

- (a) Si $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ entonces $Ind(\Gamma, z_0) = Ind(\Gamma_1, z_0) + Ind(\Gamma_2, z_0)$ para $z_0 \notin \Gamma$
- (b) Si $\Gamma = \sum_{j=1}^n \Gamma_j$, entonces, $Ind(\Gamma, z_0) = \sum_{j=1}^n Ind(\Gamma_j, z_0)$ para $z_0 \notin \Gamma$
- (c) Si Γ es un contorno entonces $Ind(\Gamma, z)$ es una función continua en z para cualquier $z \notin \Gamma$

Demostración. (a)

$$\begin{aligned} Ind(\Gamma, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= Ind(\Gamma_1, z_0) + Ind(\Gamma_2, z_0) \end{aligned}$$

(b) Usar inducción en (a)

(c) Sean z y z_0 que no pertenezcan a Γ , entonces

$$\begin{aligned} |Ind(\Gamma, z) - Ind(\Gamma, z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{du}{u - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{du}{u - z_0} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{z - z_0}{(u - z)(u - z_0)} du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |z - z_0| \int_{\Gamma} \frac{|du|}{|(u - z)(u - z_0)|} \end{aligned}$$

Como z_0 no pertenece a Γ y Γ es un conjunto compacto se deduce que existe $p > 0$ tal que $|u - z_0| \geq p$ para todo u sobre Γ .

También cuando $|z - z_0| \leq \frac{p}{2}$ tenemos que para todo u sobre Γ

$$|u - z| = |(u - z_0) - (z - z_0)| \geq |u - z_0| - |z - z_0| \geq \frac{p}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} |Ind(\Gamma, z) - Ind(\Gamma, z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} |z - z_0| \int_{\Gamma} \frac{2|du|}{p^2} \\ &= \frac{1}{\pi p^2} |z - z_0| \ell(\Gamma) \end{aligned}$$

Donde $\ell(\Gamma)$ es la longitud de Γ . Así dado $\epsilon \geq 0$, existe $\delta = \min\{\frac{p}{2}, \frac{\epsilon \pi p^2}{\ell(\Gamma)}\}$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|Ind(\Gamma, z) - Ind(\Gamma, z_0)| < \epsilon$, es decir que $Ind(\Gamma, z)$ es continua para todo $z_0 \notin \Gamma$. □

Teorema 5.5.2. Sea Γ un contorno cerrado y S un conjunto conexo que no tienen puntos en común con Γ , entonces $Ind(\Gamma, z_0)$ es constante para todo z_0 en S

Demostración. Por lo parte (c) del teorema anterior $Ind(\Gamma, z_0)$ es una función continua en z_0 , ya que S es conexo y $Ind(\Gamma, z_0)$ toma solo valores enteros entonces $Ind(\Gamma, z_0)$ es constante sobre Γ □

Lema 5.5.1. Sea C una curva de Jordan y sea $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de puntos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ind(C, \xi_n) = 0$$

Demostración. Como $\xi_n \rightarrow \infty$, tenemos que, dado cualquier $k > 0$, existe un número N tal que $|\xi_n| > k$ para $n > N$

En consecuencia, para n suficientemente grande, ξ_n está en el exterior de C , y además

$$\begin{aligned} |Ind(C, \xi_n)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - \xi_n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|dz|}{|z - \xi_n|} \end{aligned}$$

Por otro lado, como C es compacto, existe una constante M tal que $|z| < M$ para todo z sobre C . Para n suficientemente grande podemos hacer $|\xi_n| > 2M$.

$$\text{Así, } |z| < |\xi_n|/2 \quad \text{y} \quad |z - \xi_n| \geq |\xi_n| - |z| > |\xi_n|/2$$

Luego para $|\xi_n| > 2M$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |Ind(C, \xi_n)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|dz|}{|z - \xi_n|} \\ &< \frac{2}{2\pi|\xi_n|} \int_C |dz| \\ &= \frac{L}{\pi|\xi_n|} \end{aligned}$$

Donde L es la longitud de C

En consecuencia $Ind(C, \xi_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ □

Lema 5.5.2. Sea C un contorno cerrado y sea S un conjunto conexo que no tiene puntos en común con C . Si S contiene una sucesión de puntos $\{\xi_n\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty$$

Entonces $Ind(C, \xi) = 0$, $\forall \xi \in S$

Demostración. Usando el teorema (5.5.2) tenemos que $Ind(C, \xi)$ es constante en S . Así para cada n , $Ind(C, \xi_n) = Ind(C, \xi)$ luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ind(C, \xi_n) = Ind(C, \xi)$$

Pero por el lema (5.5.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ind(C, \xi_n) = 0$$

En consecuencia $Ind(C, \xi) = 0$, $\forall \xi \in S$ □

Teorema 5.5.3. Sea C un contorno cerrado, entonces $Ind(C, \xi) = 0$ para todo ξ en el exterior de C .

Demostración. Llamaremos D al exterior de C ($ext(C)$). Como D no es acotado, entonces este contiene una sucesión de puntos $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty$$

por otro lado D es conexo, de donde por el lema (5.5.2) se tiene que $Ind(C, \xi) = 0$, $\forall \xi \in D$. \square

Teorema 5.5.4. (Método de la Guitarra)

Sea Γ una curva de Jordan, entonces $Ind(\Gamma, \xi) = \pm 1$ para todo ξ en el interior de Γ

Demostración. Como ξ esta en el interior de un conjunto conexo que no tiene puntos en común con Γ entonces por el teorema (5.5.2) $Ind(\Gamma, \xi)$ es constante.

Sea Γ un contorno orientado en sentido antihorario y consideremos la circunferencia de radio $r > 0$ y centro ξ , $C(\xi, r)$ contenida en el interior de Γ , orientada en sentido horario, como en la figura

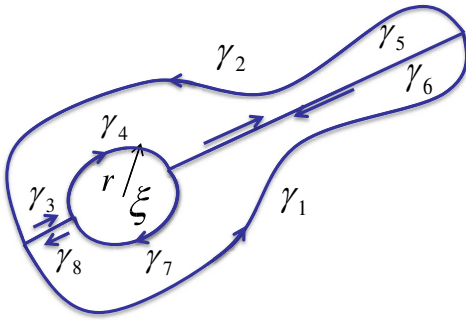


Figura 5.3: Ilustración del Método de la Guitarra

Si consideramos el contorno formado por $\Gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$ y $\Gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$ y usando el teorema (5.4.1) tenemos que

$$Ind(\Gamma_1, \xi) = 0 \quad y \quad Ind(\Gamma_2, \xi) = 0$$

ya que ξ queda contenido en el exterior de Γ_1 y Γ_2

Como $\gamma_5 = \overline{\gamma_6}$; $\gamma_3 = \overline{\gamma_8}$ obtenemos al sumar $Ind(\Gamma_1, \xi)$ con $Ind(\Gamma_2, \xi)$ que:

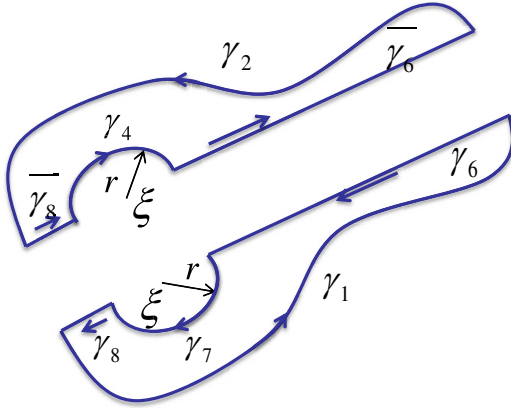


Figura 5.4: Separación de la guitarra en dos contornos cerrados

$$\begin{aligned}
 0 &= Ind(\Gamma_1, \xi) + Ind(\Gamma_2, \xi) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} + \int_{\gamma_5} \right) \frac{dz}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_6} + \int_{\gamma_7} + \int_{\gamma_8} \right) \frac{dz}{z - \xi} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] + \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_8} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_5} + \int_{\gamma_6} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] + \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_4} + \int_{\gamma_7} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_C \frac{dz}{z - \xi} \right) + \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_8} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \left[\left(\int_{\gamma_5} + \int_{\gamma_6} \right) \frac{dz}{z - \xi} \right] + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(\xi, r)} \frac{dz}{z - \xi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \xi} \right) + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(\xi, r)} \frac{dz}{z - \xi} \right)
 \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \xi} \right) = \frac{-1}{2\pi i} \left(\int_{C(\xi, r)} \frac{dz}{z - \xi} \right) = 1$$

Es decir, $Ind(C, \xi) = 1$.

Si repetimos el procedimiento anterior pero con orientación horario obtenemos que $Ind(C, \xi) = -1$ \square

Ejemplo 5.5.1. (Índice respecto a un círculo de m vueltas)

Sea $C(t) = z_0 + Re^{imt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y $m \in \mathbb{Z}$.

$$Ind(C, \xi) = \begin{cases} m, & \text{si } |\xi - z_0| < R; \\ 0, & \text{si } |\xi - z_0| > R. \end{cases}$$

Solución:

Sea ξ un punto cualquiera en $D(z_0, R)$, por el teorema 5.2.2 el índice constante en $D(z_0, R)$, así:

$$\begin{aligned} Ind(C, \xi) = Ind(C, z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{C'(t)dt}{C(t) - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{imRe^{imt} dt}{Re^{imt}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} im dt = \frac{im}{2\pi i} 2\pi = m. \end{aligned}$$

Nótese que si ξ está en la componente no acotada por C , por el teorema 5.5.3 $Ind(C, \xi) = 0$.

5.6. Invariancia del índice por Homotopía

Una propiedad fundamental del índice es su invarianza por homotopía. Dos curvas cerradas cuyas trayectorias estén contenida en un conjunto Ω se dice que son homótopas en Ω si pueden deformarse continuamente entre sí sin que las deformaciones salgan de Ω .

La siguiente definición establece rigurosamente este concepto.

Definición 5.6.1. (Homotopía)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que γ_0 y γ_1 son Homótopas en Ω si existe una aplicación continua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ para

cada $t \in [a, b]$, y $H(a, s) = H(b, s)$ para cada $s \in [0, 1]$.

En tal caso se dice que $H(t, s)$ es una homotopía admisible (en Ω) entre γ_0 y γ_1

Observación 5.6.1. Nótese que $\gamma_s = H(., s)$, $0 \leq s \leq 1$, constituye una familia uniparamétrica de curvas cerradas y continuas que deforman γ_0 en γ_1 sin abandonar Ω . Es muy sencillo probar que el concepto de Homotopía establece una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos orientados con trayectorias contenidas en Ω . Por consiguiente las particiones en clases de equivalencia.

Teorema 5.6.1. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas cerradas de clase C^1 a trozos y $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)|$$

para cada $t \in [0, 1]$. Demuéstrese que

$$Ind(\gamma_0, z) = Ind(\gamma_1, z)$$

Demostración. A partir de la hipótesis es muy sencillo demostrar que z no está sobre $\gamma_0 \cup \gamma_1$, luego, $Ind(\gamma_0, z)$ y $Ind(\gamma_1, z)$ están bien definidos. Además, la curva auxiliar

$$\gamma(t) := \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z}, t \in [0, 1],$$

está bien definida, es de clase C^1 a trozos y es cerrada, pues

$$\gamma(1) = \frac{\gamma_1(1) - z}{\gamma_0(1) - z} = \frac{\gamma_1(0) - z}{\gamma_0(0) - z} = \gamma(0)$$

por otra parte, para cada $t \in [0, 1]$ se cumple

$$|\gamma(t) - 1| = \left| \frac{\gamma_1(1) - z}{\gamma_0(1) - z} - 1 \right| = \frac{|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|}{|\gamma_0(t) - z|} < 1$$

Así

$$\gamma(t) \subset D(1, 1)$$

y en consecuencia 0 está en la componente no acotada definida por γ y gracias a las propiedades del índice, se tiene que

$$Ind(\gamma, 0) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)[\gamma_0(t) - z] - \gamma_0'(t)[\gamma_1(t) - z]}{[\gamma_1(t) - z][\gamma_0(t) - z]} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{[\gamma_1(t) - z]} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{[\gamma_0(t) - z]} dt \\
 &= \text{Ind}(\gamma_0, z) - \text{Ind}(\gamma_1, z),
 \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z).$$

□

El siguiente resultado, donde los detalles de la demostración se proponen como ejercicio, es muy importante desde el punto de vista de las aplicaciones.

Teorema 5.6.2. (*Invariancia del Índice por Homotopía*)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, y γ_0, γ_1 dos curvas cerradas de clase C^1 a trozos, cuyas trayectorias están contenidas en Ω . Supongamos que γ_0 y γ_1 son homótopas en Ω . Entonces,

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z)$$

para cada $z \in \mathbb{C} - \Omega$.

Demostración. (Bosquejo)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \mapsto \Omega$ dos curvas cerradas de clase C^1 a trozos homótopas en Ω . Sea $H: [0, 1]^2 \mapsto \Omega$ una homotopía admisible entre ambas y fijemos $z \in \mathbb{C} - \Omega$, entonces:

Paso 1 Demuestre que existen $\varepsilon > 0$ y un número natural $n \geq 1$ tales que

$$|z - H(t, s)| > 2\varepsilon$$

para cada $(t, s) \in [0, 1]^2$, y

$$|t - t_0| + |s - s_0| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |H(t, s) - H(t_0, s_0)| < \varepsilon.$$

Paso 2 Suponga que

$$H(., 0) = \gamma_0, \quad H(., 1) = \gamma_1,$$

y considerar, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ la poligonal P_k definida por

$$P_k(t) := H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)(nt + 1 - i) + H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(i - nt),$$

para cada $t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $1 \leq i \leq n$.

Demostrar que para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$|P_k(t) - H(t, \frac{k}{n})| < \varepsilon < |z - P_k(t)|.$$

Paso 3 Comprobar que para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $t \in [0, 1]$ se cumple que $|P_{k-1}(t) - P_k(t)| < \varepsilon$.

Paso 4 Use el teorema anterior para concluir que $Ind(\gamma_0, z) = Ind(\gamma_1, z)$.

□

Este concepto nos permite formalizar el concepto de abierto sin agujeros

Definición 5.6.2. (Abiertos Simplemente conexo)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo se dice que Ω es **simplemente conexo** cuando cualquier curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es homótopa a un punto en Ω . Por punto se entiende toda curva constante.

Observación 5.6.2. Una clase muy especial de abiertos simplemente conexos son los conjuntos convexos.

En efecto, si Ω es convexo, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada (contorno) y $z \in \Omega$ entonces $H(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s.z$, $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$ constituye una homotopía admisible de la curva γ y el punto z .

5.7. El Teorema de Cauchy-Goursat

En esta sección presentamos uno de los teoremas centrales del Análisis Complejo, el teorema de Cauchy-Goursat, el cual establece que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo y $f(z)$ es analítica en Ω , entonces $f(z)$ posee una primitiva analítica

en Ω y en particular su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es nula, supondremos inicialmente que Ω es convexo, luego demostraremos una versión en la cual Ω es simplemente conexo esta versión del teorema nos permitirá llegar a resultados de gran importancia como la fórmula integral de Cauchy entre otros.

Definición 5.7.1. El triángulo orientado $\Delta = \Delta(a, b, c)$, (cuya frontera fue definida en el ejemplo 2.9.3), esta dado por:

$$\Delta(a, b, c) = \{z \in \mathbb{C} / z = \alpha a + \beta b + \lambda c, \quad \alpha + \beta + \lambda = 1, \quad \alpha, \beta, \lambda \geq 0\}$$

Lema 5.7.1. El triángulo orientado $\Delta = \Delta(a, b, c)$, cumple las siguientes propiedades:

(i) Δ es compacto en \mathbb{C}

(ii) Para todo $\Delta = \Delta(a, b, c) \subseteq \mathbb{C}$ existe $\Delta_0 \subseteq \Delta$ tal que

$$L(\partial\Delta_0) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$$

(iii) $\text{Diam}(\Delta) = \sup\{|z - w| / z, w \in \Delta\} \leq |a - b| + |b - c| + |c - a| = L(\partial\Delta)$ donde $L(\partial\Delta)$ denota la longitud de la frontera de Δ

(iv) $\Delta(a, b, c)$ es convexo

Demostración. (i) Ejercicio

(ii) Seleccione $\Delta_0(m, n, p)$ donde $m = \frac{a+b}{2}$; $n = \frac{b+c}{2}$; $p = \frac{a+c}{2}$

(iii) Sean $z, w \in \Delta$, entonces por (2)

$$z = \alpha_1 a + \beta_1 b + \lambda_1 c; \quad y \quad w = \alpha_2 a + \beta_2 b + \lambda_2 c \text{ donde}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \lambda_1 = 1; \quad y \quad \alpha_2 + \beta_2 + \lambda_2 = 1, \text{ luego:}$$

$$\begin{aligned} |z - w| &= |(\alpha_1 - \alpha_2)a + (\beta_1 - \beta_2)b + (\lambda_1 - \lambda_2)c| \\ &= |(\alpha_1 - \alpha_2)a - (\alpha_1 - \alpha_2)b + (\alpha_1 - \alpha_2)b + (\beta_1 - \beta_2)b + (\lambda_1 - \lambda_2)c| \\ &= |(\alpha_1 - \alpha_2)(a - b) + [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)]b + (\lambda_1 - \lambda_2)c| \\ &= |(\alpha_1 - \alpha_2)(a - b) + [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)]b - [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)]c \\ &\quad + [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)]c + (\lambda_1 - \lambda_2)c| \\ &= |(\alpha_1 - \alpha_2)(a - b) + (\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2)(b - c) \\ &\quad + [(\alpha_1 + \beta_1 + \lambda_1) - (\alpha_2 + \beta_2 + \lambda_2)]c| \\ &\leq |\alpha_1 - \alpha_2||a - b| + |\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2||b - c| \\ &\leq |a - b| + |b - c| \leq |a - b| + |b - c| + |c - a| \\ &= L(\partial\Delta) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \text{Diam}(\Delta) \leq L(\partial\Delta)$$

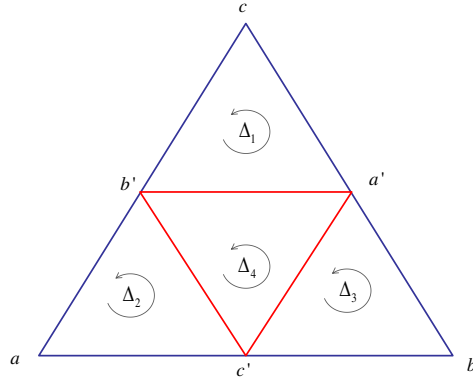


Figura 5.5: División $\Delta(a, b, c)$ en cuatro triángulos.

(iv) Ejercicio.

□

Lema 5.7.2. Sea $\Delta = \Delta(a, b, c) \subset \mathbb{C}$ y $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Δ . Entonces existe $\Delta_0 \subseteq \Delta$ tal que;

(i)

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z)dz \right|$$

(ii) $\text{Diam}(\Delta_0) \leq \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$

Demostración. (i) Uniendo los puntos medios de los lados del triángulo Δ se le subdivide en cuatro triángulos congruentes.

Entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz$$

En efecto en el segundo miembro se está integrando a lo largo de cada uno de los tres segmentos de subdivisión en ambas direcciones posibles, las integrales correspondientes se cancelan por pares y la suma de las integrales de la derecha es igual a la integral de la izquierda.

Así:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz \right|$$

Si designamos por Δ_0 el triángulo donde ocurre el máximo entre

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right|, \quad \left| \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz \right|, \quad \left| \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz \right|, \quad \left| \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz \right|$$

Entonces

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z)dz \right|$$

(ii) $\text{Diam}(\Delta_0) \leq L(\partial\Delta_0) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$ Por lo tanto;

$$\text{Diam}(\Delta_0) \leq \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$$

□

Lema 5.7.3. (Teorema de la antiderivada)

Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Si C es un contorno simple cerrado (Curva de Jordan) incluido en Ω y $f'(z)$ es continua en C , se cumple:

$$\int_C f'(z)dz = 0$$

Demostración. Ya que C es un contorno cerrado simple se tiene que $C : z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $z(\alpha) = z(\beta)$

Así:

$$\begin{aligned} \int_C f'(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dz}(f(z(t)))dt \\ &= f(z(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= f(z(\alpha)) - f(z(\beta)) = 0 \end{aligned}$$

□

Corolario 5.7.1. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ un contorno cerrado simple, $\int_{\gamma} P(z)dz = 0$ donde $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, con $a_k \in \mathbb{C}$.

Demostración. Basta notar que $F(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k z^{k+1}}{k+1}$ es una antiderivada para $P(z)$. \square

Teorema 5.7.1. (Cauchy-Goursat para triángulos)

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en Ω . Se cumple entonces que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \quad \forall \Delta \subset \Omega$$

Demostración. Paso 1 Usando de forma recursiva el Lema 5.7.2 se tiene que existe una sucesión de triángulos

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \supseteq \dots$$

tal que

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$$

$$\text{y } \text{Diam}(\Delta_n) \leq \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)$$

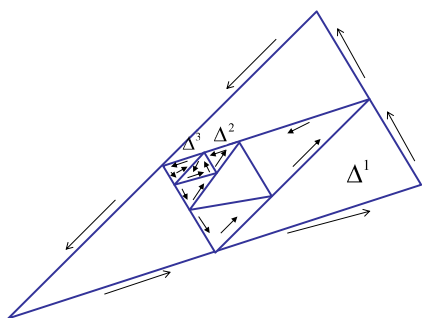


Figura 5.6: Sucesión de triángulos encajados

Paso 2 Existe $z_0 \in \Delta$, tal que $z_0 \in \Delta_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

En efecto, elijamos un punto $z_n \in \Delta_n$ para cada n , ahora si $m \geq n$ entonces

$$\Delta_m \subseteq \Delta_n$$

Por lo tanto

$$z_n, z_m \in \Delta_n \Rightarrow |z_m - z_n| \leq \text{Diam}(\Delta_n) \leq \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)$$

Así, $\{z_m\}$ es de Cauchy, y dado que \mathbb{C} es completo, existe $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ en \mathbb{C} , además del hecho que cada Δ_n es cerrado (compacto) con $\text{Diam}(\Delta_n) \rightarrow 0$ y ser conjuntos encajados, tenemos que z_0 es un punto común a todos los triángulos.

Paso 3

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \frac{(L(\partial\Delta))^2}{4^n} \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)|$$

donde $\xi(z)$ es una función continua en z_0

Como $f(z)$ es analítica en z_0 se tiene que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \xi(z)(z - z_0)$$

donde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \xi(z) = 0$$

Aquí

$$\xi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & \text{si } z \neq z_0; \\ 0, & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz &= \int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\partial\Delta_n} \xi(z)(z - z_0) dz \\ &= \int_{\partial\Delta_n} \xi(z)(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Ya que $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ es un polinomio, así que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| &= \int_{\partial\Delta_n} |\xi(z)| |z - z_0| |dz| \\
&\leq \sup_{z \in \Delta_n} \{|\xi(z)| |z - z_0|\} L(\partial\Delta_n) \\
&\leq \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)| \text{Diam}(\Delta_n) L(\partial\Delta_n) \\
&\leq \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)| \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 L(\partial\Delta)^2 \\
&= \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)| \frac{1}{4^n} L(\partial\Delta)^2
\end{aligned}$$

Ya que del lema 5.7.1 (i), (ii) usado en forma recursiva $\text{Diam}(\Delta_n) \leq L(\partial\Delta_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)L(\partial\Delta)$.

Paso 4

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq (L(\partial\Delta))^2 \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)|, \quad \forall n$$

Esto resulta como consecuencia inmediata de los pasos 1 y 3

Paso 5

$$\forall \epsilon > 0 \quad \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| < \epsilon$$

Como $\xi(z)$ es una función continua en z_0 , se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |\xi(z) - \xi(z_0)| = |\xi(z)| < \frac{\epsilon}{(L(\partial\Delta))^2}$$

Como $\text{Diam}(\Delta_n) \leq \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ tomamos n suficientemente grande de tal suerte que $\Delta_n \subseteq D(z_0, \delta)$

Así;

$$\begin{aligned}
z, z_0 \in \Delta_n &\Rightarrow z, z_0 \in D(z_0, \delta) \\
&\Rightarrow |z - z_0| < \delta \\
&\Rightarrow |\xi(z)| < \frac{\epsilon}{(L(\partial\Delta))^2}
\end{aligned}$$

Así pues, en ese triángulo Δ_n se tiene que:

$$\sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)| \leq \frac{\epsilon}{(L(\partial\Delta))^2}$$

luego

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq (L(\partial\Delta))^2 \sup_{z \in \Delta_n} |\xi(z)| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = 0$$

□

Observación 5.7.1. La hipótesis de analiticidad de $f(z)$ en Ω del teorema anterior puede ser debilitada a ser analítica en Ω excepto en un punto, en el cual solicitaremos la continuidad de la función $f(z)$, tal y como lo demostraremos en el siguiente corolario.

Corolario 5.7.2. Sea Ω un subconjunto abierto en \mathbb{C} y $f(z)$ una función continua en Ω y analítica en $\Omega - \{q\}$, donde $q \in \Omega$. Entonces:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0, \quad \forall \Delta = \Delta(a, b, c) \subseteq \Omega$$

Demostración. Sea Δ un triángulo cualquiera en Ω . Nótese que $\Omega - \{q\} = \Omega \cap \{q\}^c$ el cual es abierto.

Caso I $q \notin \Delta$, en este caso $f : \Omega - \{q\} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, por el teorema anterior, se tiene que

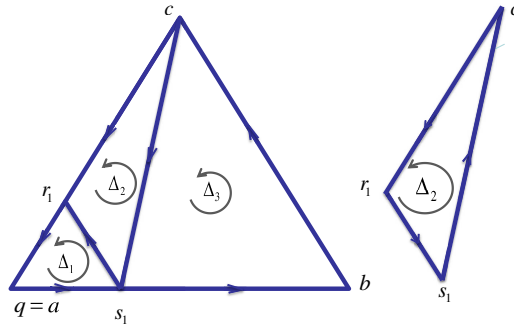
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Caso II Que q sea un vértice en $\Delta = \Delta(a, b, c)$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $q = a$. Tomemos dos puntos r_1, s_1 en los lados \overline{ac} y \overline{ab} respectivamente próximos a q , y consideremos los triángulos

$$\Delta_1 = \Delta_1(q, r_1, s_1); \quad \Delta_2(s_1, b, c); \quad \Delta_3(c, r_1, s_1)$$

todos orientados en sentido contrario a las agujas de reloj



Así

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz$$

Ya que los segmentos $\overline{s_1r_1}$, $\overline{s_1c}$ son recorridos en ambos sentidos y se cancelan. Pero las integrales sobre $\partial\Delta_i$, $i = 1, 2, 3$ se anulan pues estos no tienen a q como vértice.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{(1)}} f(z)dz$$

Se puede repetir el proceso tomando r_2, s_2 en los lados $\overline{as_1}$, $\overline{ar_1}$ respectivamente y próximos a q

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{(2)}} f(z)dz$$

repetiendo el proceso se llega a que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{(n)}} f(z)dz$$

Ahora bien:

$$L(\partial\Delta_{(n)}) = |q - r_n| + |r_n - s_n| + |s_n - q|$$

$$r_n \rightarrow q; \quad s_n \rightarrow q; \quad r_n - s_n \rightarrow 0$$

$$\therefore \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq ML(\partial\Delta_{(n)}) \rightarrow 0, \quad \text{conforme } n \rightarrow +\infty, \quad \text{con } M = \sup_{z \in \Delta} |f(z)|$$

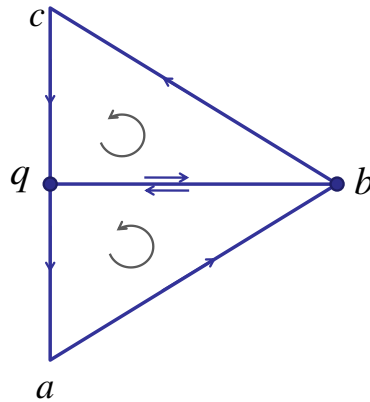
Caso III q esta ubicado en uno de los lados del triángulo $\Delta(a, b, c)$

Se toma un segmento del vértice opuesto al lado que tiene a q que una a tal

vértice con q . Orientamos los dos triángulos formados en sentido antihorario y se obtiene:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0$$

Pues Δ_1 y Δ_2 tiene a q como vértice y por el caso II tales integrales son nulas.

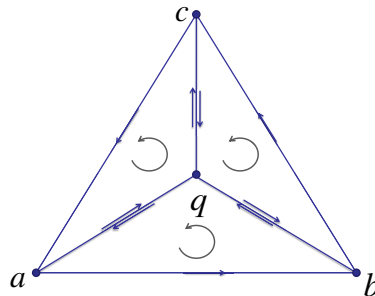


Caso IV q es un punto interior al triángulo

En este caso se forman tres triángulos trazando segmentos desde los vértices a q , se orientan tales triángulos en sentido antihorario y se obtiene:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz = 0$$

Pues $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ tienen a q como vértices.



□

Teorema 5.7.2. (Teorema de Cauchy-Goursat (para dominios convexos))

Sean Ω un subconjunto abierto y convexo de \mathbb{C} y $f(w)$ una función analítica en $\Omega - \{q\}$ y continua en Ω , se cumple que

(i) Existe una función $F(z)$ definida en Ω tal que

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

(ii) Para cualquier curva de Jordan (contorno cerrado simple) $\gamma \subset \Omega$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Demostración. (i) Fijemos $a \in \Omega$ y como Ω es un abierto y convexo, para cualquier $z \in \Omega$, existe un segmento $[a, z]$ que une a a con z y que está contenido en Ω . Definamos entonces

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw \quad \forall z \in \Omega$$

Veamos que $F(z)$ está bien definida:

$f(w)$ es continua en Ω y así también lo es en $[a, z] \subset \Omega$

Veamos ahora que $F'(z) = f(z)$, es decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[a,z+h]} f(w)dw - \int_{[a,z]} f(w)dw$$

Como Ω es abierto, para $z \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$

Como haremos tender h a cero, podemos suponer que $z+h \in D(z, r)$, de tal manera que el segmento $[z+h, z]$ que une a $z+h$ con z está contenido en $D(z, r) \subset \Omega$

Así;

$$\int_{[a,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,z]} f(w)dw + \int_{[z,a]} f(w)dw = 0$$

pues $[a, z+h] \cup [z+h, z] \cup [z, a] \subset \Omega$ forma un triángulo

luego;

$$\int_{[a,z+h]} f(w)dw - \int_{[a,z]} f(w)dw = - \int_{[z+h,z]} f(w)dw = \int_{[z,z+h]} f(w)dw$$

En consecuencia:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w)dw$$

Como el objetivo es estimar:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right|$$

comencemos notando que:

$$\int_{[z, z+h]} dw = \int_0^1 (z+th)' dt = \int_0^1 h dt = h$$

Así que:

$$f(z) = f(z) \frac{h}{h} = \frac{f(z)}{h} \int_{[z, z+h]} dw = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(z)dw$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_{[z, z+h]} f(w)dw - \int_{[z, z+h]} f(z)dw \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(w) - f(z)| |dw| \end{aligned}$$

Como $f(w)$ es continua en $z \in \Omega$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / |z - w| < \delta_1 \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$$

Como $h \rightarrow 0$, tomamos h suficientemente pequeño de tal suerte que $|h| < \delta_1$ y así, si $w \in [z, z+h]$ existe $t \in [0, 1]$ tal que $w = z + t.h$, en consecuencia:

$$w - z = th \Rightarrow |w - z| = |t||h| < |h| < \delta_1$$

De donde, para $h \in D(0, \delta_1)$, se tiene que $h + z \in D(z, \delta_1)$

Luego dado $\varepsilon > 0$, escogiendo $\delta = \min\{r, \delta_1\}$ tenemos que para $h \in D(0, \delta)$, se cumple $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$

y por lo tanto;

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(w) - f(z)| |dw| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon L([z, z+h]) \\ &= \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon \end{aligned}$$

luego, $F'(z) = f(z)$.

(ii) Como consecuencia inmediata de la parte (i) y el teorema de la antiderivada se concluye que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0; \quad \forall \gamma \subset \Omega$$

□

Observación 5.7.2. Nótese que $f(z)$ puede dejar de ser analítica en algún punto aunque, por ser continua en ese punto, f admite una extensión analítica en todo Ω , esto lo demostraremos más adelante, es decir la hipótesis que realmente usamos es $f(z)$ es analítica en Ω .

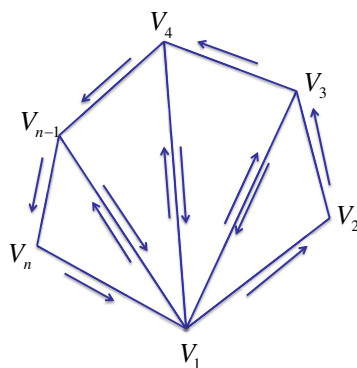
Teorema 5.7.3. (Cauchy-Goursat para dominios simplemente conexos)

Sea Ω un dominio simplemente conexo y sea f analítica en Ω , entonces para todo contorno cerrado γ en Ω se verifica

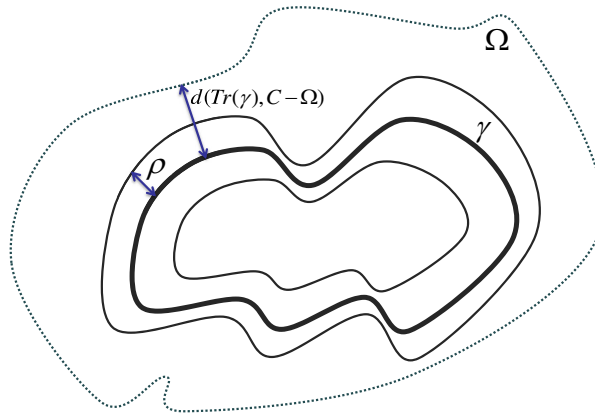
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Demostración. (Bosquejo)

Paso 1 Pruebe que la integral sobre una línea poligonal cerrada es cero. Nótese que toda poligonal se puede dividir en triángulos.



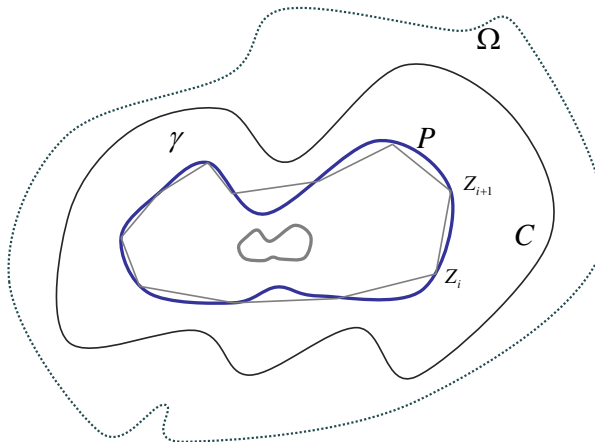
Paso 2 Sea γ un contorno cerrado simple, pruebe que existe un conjunto compacto K , tal que $\gamma \subset K \subset \Omega$.



Paso 3 Pruebe que existe $\delta > 0$ y una partición de γ en arcos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, con $L(\gamma_i) < \delta$ y tal que los extremos z_i, z_{i+1} de γ satisfacen que

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{P_i} f(z) dz = f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

donde P_i son los segmentos $[z_i, z_{i+1}]$ de la poligonal P .



Paso 4 Pruebe que

$$\left| \int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{P_i} f(z) dz \right| < \epsilon$$

para $z \in \gamma_i$

Paso 5 Use el paso 1 para deducir que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{P_i} f(z) dz \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Para ϵ arbitrario, y concluya que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

□

Ejemplo 5.7.1. El plano perforado por cero, $\Omega := \mathbb{C} - \{0\}$, no es simplemente conexo, pues ninguna curva que rodee al origen es homótopa a un punto en Ω . La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en Ω y no posee primitiva global en Ω . Obsérvese que $F(z) = \text{Log}(z)$ únicamente nos proporciona una primitiva en el subconjunto propio $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$. No posee una primitiva global porque para cada $R > 0$

$$\int_{C(0,R)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{Ind}(C(0,R), 0) = 2\pi i \neq 0$$

y en caso de poseerla, en virtud del teorema de Cauchy local, esas integrales deberían ser nulas. Sin embargo la función $G(z) = -\frac{1}{z}$ es una primitiva global de $g(z) = \frac{1}{z^2}$ en Ω , así cuando Ω no es simplemente conexo la existencia de la primitiva global depende de la función que se considere.

Ejemplo 5.7.2. Mostrar que

$$\int_{\Gamma} \frac{(\sinh 2z + \cos(\frac{z}{2}))^2}{(z + 3i)^2(z^2 + 16)} dz = 0$$

donde el contorno cerrado simple Γ esta dado por $|z| = 2$

Solución: Note que los puntos singulares de

$$f(z) = \frac{(\sinh 2z + \cos(\frac{z}{2}))^2}{(z + 3i)^2(z^2 + 16)}$$

son $z = -3i$, $z = \pm 4i$, y estos puntos no están contenidos en el interior de Γ , así $f(z)$ satisface las hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat, luego $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

Teorema 5.7.4. (Fórmula Integral de Cauchy)

Sea Ω un subconjunto abierto y convexo de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en Ω , entonces para cualquier curva de Jordan Γ incluida en el interior de Ω se cumple:

$$f(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para $z \notin \Gamma$

Demostración. Definamos una función

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

$g(w)$ es continua en Ω , ya que

$$\lim_{w \rightarrow z} g(w) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} = f'(z) = g(z)$$

además $g(w)$ es analítica en $\Omega - \{z\}$.

Así por el teorema de Cauchy-Goursat para convexos

$$\int_{\Gamma} g(w) dw = 0$$

Ahora bien, si $z \notin \Gamma$ entonces

$$0 = \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw \\ \therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \text{Ind}(\Gamma, z) f(z) \end{aligned}$$

Así pues

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{Ind}(\Gamma, z) f(z)$$

□

Observación 5.7.3. (a) Supongamos que γ es una curva de Jordan orientada positivamente. Entonces, gracias al teorema 5.5.4, la fórmula integral de Cauchy establece que para cada z en la componente interior acotada por γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (*)$$

mientras que, para cada $z \in \Omega$ en la componente exterior (no acotada) de γ

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, un abierto arbitrario no necesariamente convexo, f analítica en Ω , $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Entonces, por ser $D(z_0, R)$ convexo, a partir de (*) obtenemos que para cada $r \in (0, R)$

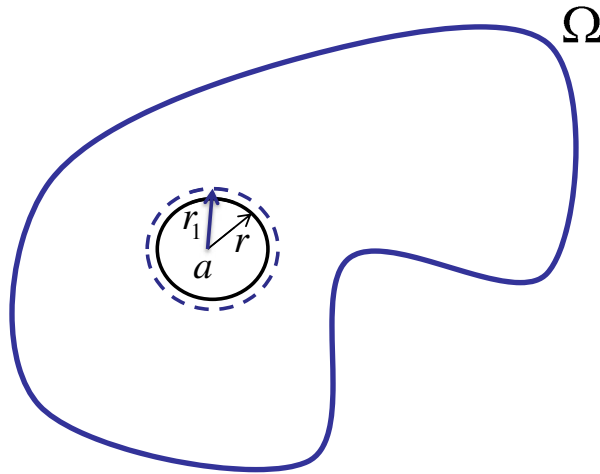
$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

Por consiguiente, $f(z_0)$ es el promedio de los valores de la función en cualquier circunferencia de centro z_0 y radio $r \in (0, R)$, tal y como se establece en el siguiente corolario.

Corolario 5.7.3. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C} , (no necesariamente convexo) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y $\overline{D(a, r)} \subseteq \Omega$ se cumple:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \quad z \in D(a, r)$$

Demostración. Dado que $D(a, r) \subset \overline{D(a, r)} \subseteq \Omega$ y como $D(a, r)$ es abierto, convexo, además $C(a, r) \subseteq \overline{D(a, r)}$



por el teorema anterior se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \text{Ind}(C(a,r), z)$$

Si $z \in D(a, r)$ entonces $\text{Ind}(C(a, r), z) = 1$, de donde:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \text{ para } z \in D(a, r)$$

□

Observación 5.7.4. Si Γ es una curva de Jordan y $z \in \text{int}(\Gamma)$, siempre es posible encontrar un $r > 0$, de tal suerte que $D(z, r)$ este contenido en un disco centrado en z y cuya clausura este contenida en Ω , así estamos en las condiciones del corolario anterior, y por una técnica similar a la aplicada en el método de la guitarra tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$$

donde γ se divide como en la figura

y así:

$$\left[\int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} + \int_{\gamma_5} \right] \frac{f(w)}{z-w} = 0 = \left[\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_6} + \int_{\gamma_7} + \int_{\gamma_8} \right] \frac{f(w)}{z-w}$$

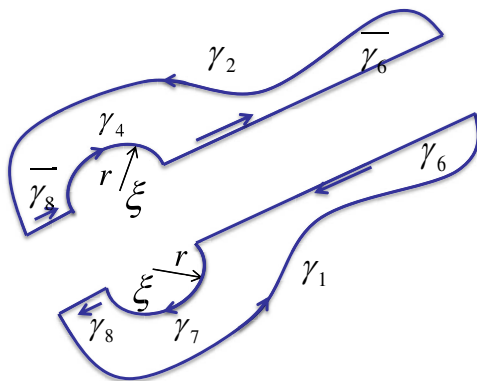


Figura 5.7: Método de la guitarra

Observación 5.7.5. A la luz de la observación anterior notamos que la fórmula integral de Cauchy es válida para abiertos conexos no necesariamente convexos, pues aun cuando la fórmula se demostró bajo la hipótesis de la convexidad, la observación anterior garantiza la extensión de tal fórmula a abiertos (simplemente conexos) arbitrarios.

Ejemplo 5.7.3. Encuentre el valor de la integral

$$\int_C \frac{[\cos^3(3z) + \cosh^4(4z)]^3}{z} dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 1$

Solución: Ya que la función del integrando es analítica en el interior de C , excepto en $z = 0$, de la fórmula integral de Cauchy se deduce que:

$$\int_C \frac{[\cos^3(3z) + \cosh^4(4z)]^3}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

donde $f(z) = [\cos^3(3z) + \cosh^4(4z)]^3$
 $f(0) = [\cos^3(3 \cdot 0) + \cosh^4(4 \cdot 0)]^3 = [1 + 1]^3 = 8$
 Así la integral vale $16\pi i$

5.8. Consecuencias del Teorema de Cauchy

Una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy es que la derivada de una función analítica es también analítica, en efecto,

Sea Γ una curva de Jordan, por la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

veamos que f es diferenciable

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right] dz$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} &= \frac{z - z_0 - (z - z_0 - h)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \\ &= \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \\ &= h \left[\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} \right] \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \int_{\Gamma} \frac{hf(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \end{aligned}$$

Estimemos

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{|f(z)||dz|}{|z - z_0|^2|z - z_0 - h|}$$

Sea $r = \inf\{|z - z_0| : z \in \Gamma\}$

Así $|z - z_0| \geq r, \quad \forall z \in \Gamma$

Consideremos

$$h \in D(0, \frac{r}{2}),$$

es decir

$$|h| < \frac{r}{2}$$

De aquí

$$|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

Por tanto

$$\int_{\Gamma} \frac{|f(z)||dz|}{|z - z_0|^2 |z - z_0 - h|} \leq \frac{M}{r^2 \frac{r}{2}} \int_{\Gamma} |dz| = \frac{2M}{r^3} L(\Gamma)$$

donde $M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$ y $L(\Gamma)$ representa la longitud de Γ , luego:

$$\frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{|f(z)||dz|}{|z - z_0|^2 |z - z_0 - h|} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

con lo que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Así $f(z)$ es analítica en z_0 .

Ahora bien

$$\frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{1}{(z - z_0 - h)^2} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right] dz$$

Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - z_0 - h)^2} - \frac{1}{(z - z_0)^2} &= \frac{(z - z_0)^2 - (z - z_0 - h)^2 + 2(z - z_0)h - h^2}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)^2} \\ &= \frac{2(z - z_0)h - h^2}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)^2} \\ &= h \left[\frac{2}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)} - \frac{h}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)^2} \right] \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)} dz - \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)^2} dz$$

Cuando $h \rightarrow 0$

$$\frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)^2} dz \rightarrow 0$$

Veamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2 (z - z_0)} dz = \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0-h)^2(z-z_0)} dz - \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz \right| = \left| \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{(z-z_0)^2 - (z-z_0-h)^2}{(z-z_0-h)^2(z-z_0)^3} \right] dz \right| \\ & \leq \int_{\Gamma} |f(z)| \left| \frac{2h(z-z_0) - h^2}{(z-z_0-h)^2(z-z_0)^3} \right| |dz| \leq |h| \int_{\Gamma} \frac{|f(z)| |2(z-z_0) - h|}{|z-z_0-h|^2 |z-z_0|^3} |dz| \rightarrow 0, \text{ si } h \rightarrow 0 \\ & \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(z_0+h) - f'(z_0)}{h} = \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz \end{aligned}$$

Se supone que la fórmula es válida para $n = k$.

$$f^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Probemos para $n = k + 1$

$$\frac{f^k(z_0+h) - f^k(z_0)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{h} \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{1}{(z-z_0-h)^{k+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \right] dz$$

Nuevamente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(z-z_0-h)^{k+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{(z-z_0)^{k+1} - (z-z_0-h)^{k+1}}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} \\ & = \frac{(z-z_0)^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (z-z_0)^{k+1-j} (-h)^j}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} \\ & = \frac{(z-z_0)^{k+1} - (z-z_0)^{k+1} - (k+1)(z-z_0)^k(-h) - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (z-z_0)^{k+1-j} (-h)^j}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} \\ & = \frac{(k+1)(z-z_0)^k h - h^2 \left[\sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (z-z_0)^{k+1-j} (-h)^{j-2} \right]}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} \\ & = \frac{(k+1)(z-z_0)^k h}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} - \frac{h^2 P(z-z_0, h)}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} \end{aligned}$$

Donde $P(z-z_0, h)$ es un polinomio, sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{f^k(z_0+h) - f^k(z_0)}{h} \\ & = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{h} \frac{(k+1)(z-z_0)^k h}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} dz - \frac{k! h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) P(z-z_0, h)}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} dz \end{aligned}$$

Ahora bien, cuando $h \rightarrow 0$,

$$\frac{k!h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)P(z-z_0, h)}{(z-z_0-h)^{k+1}(z-z_0)^{k+1}} dz \rightarrow 0$$

En consecuencia:

$$f^{k+1}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+2}} dz$$

Hemos probado el siguiente teorema

Teorema 5.8.1. (Existencia de derivadas de cualquier orden de una función analítica)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f(z)$ analítica en Ω . Entonces la función $f(z)$ posee derivadas de todos los órdenes y, por consiguiente, $f^{(n)}(z)$ es analítica en Ω para cada número natural $n \geq 1$. Además si γ es una curva de Jordan orientada positivamente cuya trayectoria está contenida en un subconjunto abierto convexo de Ω , entonces para cada z en la componente encerrada por γ y cada número natural $n \geq 0$ se cumple que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

donde $f^{(0)}(z) := f(z)$

Observación 5.8.1. La fórmula integral de Cauchy para derivadas permite calcular el valor de cualquier derivada de una función analítica en los puntos interiores a una curva de Jordan si se conocen los valores de la función en la curva.

Ejemplo 5.8.1. Calcule las siguientes integrales:

(a)

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3 - 1} dz$$

(b)

$$\int_{|z|=3} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz$$

(c)

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh 5z}{(1+z^2)z^2} dz$$

Solución:

(a) Usando fracciones simples obtenemos que

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z - e^{\frac{2\pi i}{3}}} + \frac{1}{z - e^{\frac{4\pi i}{3}}} \right)$$

así pues, aplicando la definición de índice, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - 1} &= \frac{1}{3} \left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z - 1} + \int_{|z|=2} \frac{dz}{z - e^{\frac{2\pi i}{3}}} + \int_{|z|=2} \frac{dz}{z - e^{\frac{4\pi i}{3}}} \right) \\ &= \frac{1}{3} (1 + 1 + 1) 2\pi i \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

(b) Aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas, con $f(z) = ze^{zt}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2} f''(-1) \\ &= \pi i (2t - t^2) e^{-t} \end{aligned}$$

(c) Haciendo $f(z) = \sinh 5z$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy usual y la de las derivadas, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh 5z}{(1+z^2)z^2} dz &= \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh 5z}{z^2} dz - \frac{1}{2i} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh 5z}{z-i} dz + \frac{1}{2i} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh 5z}{z+i} dz \\ &= 2\pi i f'(0) - \frac{1}{2i} 2\pi i f(i) + \frac{1}{2i} 2\pi i f(-i) \\ &= 2\pi i (5 - \sin 5) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.2. Encuentre el valor de la integral

$$\int_{|z-4|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2} dz$$

donde el contorno es recorrido con orientación positiva.

Solución:

Examinando los factores del denominador, notamos que el término $(z-1)^3$ no se anula dentro ni sobre el contorno de integración, sin embargo $z=5$ es un punto interior al

contorno de integración y anula al término $(z - 5)^2$. Por lo tanto, volvemos a escribir la integral de la forma:

$$\int_{|z-4|=2} \frac{\left(\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right)}{(z-5)^2} dz$$

Luego aplicando la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-4|=2} \frac{\left(\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right)}{(z-5)^2} dz = \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right) \Big|_{z=5} = \frac{-64 \operatorname{sen} 5 - 48 \operatorname{cos} 5}{4^6}$$

El valor de la integral inicial es igual al producto de $2\pi i$ por el resultado anterior.

5.9. Los Teoremas de Morera, Liouville y La Desigualdad de Cauchy

El siguiente teorema es un recíproco del teorema de Cauchy-Goursat y es debido a E. Morera (1865-1909). La demostración que presentaremos aprovecha el hecho que la derivada de una función analítica es a su vez analítica, de acuerdo con el teorema 5.8.1.

Teorema 5.9.1. (Teorema de Morera)

Si $f(z)$ es continua en un dominio D y $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado simple Γ en D , entonces $f(z)$ es analítica en D

Demostración. Usando el mismo argumento que la demostración de Cauchy-Goursat, podemos demostrar que $f(z)$ tiene una antiderivada $F(z) = \int_{P(a,z)} f(w) dw$ donde $P(a, z)$ es una poligonal que conecta a con z , tal que $F'(z) = f(z)$, y así por la fórmula integral de Cauchy obtenemos que $f(z)$ es analítica en D . \square

Teorema 5.9.2. (Desigualdad de Cauchy)

Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre una circunferencia $C(z_0, r)$ con centro z_0 y radio r , entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

Donde M el máximo valor de $|f(z)|$ sobre C .

Demostración. Dado que la ecuación del círculo es $|z - z_0| = r$, por la fórmula integral de Cauchy para derivadas tenemos:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Así

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{r^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)||dz|}{r^{n+1}} \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_C |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n} \end{aligned}$$

□

Observación 5.9.1. Gracias a la desigualdad de Cauchy, podemos demostrar que las únicas funciones enteras y acotadas en todo el plano complejo son las funciones constantes. Nuestro próximo resultado establece este hecho de forma algo diferente.

Teorema 5.9.3. (Teorema de Liouville)

Si $f(z)$ es acotada y analítica en todo \mathbb{C} (entera) entonces $f(z)$ es constante en todo el plano complejo.

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy para derivadas se tiene que:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y un disco $C : |z - z_0| = r$. Entonces

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)||dz|}{r^2} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} \int_C |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r}, \quad \text{donde } |f(z)| \leq M \end{aligned}$$

Como r se puede escoger tan grande como se quiera, si $r \rightarrow +\infty$ entonces $|f'(z_0)| = 0$, de donde $f'(z_0) = 0$, dado que z_0 es arbitrario en \mathbb{C} tenemos que $f'(z) \equiv 0$ de donde $f(z)$ es constante en \mathbb{C} . □

5.10. Preservación de Límites de Funciones Analíticas

A continuación veremos como la convergencia uniforme y una aplicación sencilla del teorema de Cauchy nos permite determinar que el límite de una sucesión de funciones analíticas es una función analítica, más aun veremos que el límite uniforme de las derivadas de una función analítica es la derivada del límite.

Teorema 5.10.1. *Sea $f_k(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, una sucesión de funciones analíticas en un dominio Ω . Si para todo $D(a, r) \subset \Omega$ la sucesión $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(z)$ uniformemente sobre $\overline{D(a, r)}$, (también se dice $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(z)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω) entonces:*

(i) $f(z)$ es analítica en Ω .

(ii) Para todo $n=1,2,\dots$ $f_k^{(n)}(z) \rightarrow f^{(n)}(z)$ uniformemente sobre cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$.

Demostración. (i) Como cada $f_k(z)$ es analítica en Ω , tenemos por la fórmula integral de Cauchy:

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f_k(w)}{w-z} dw \quad z \in D(a, r)$$

y ya que $f_k(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente sobre cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, podemos tomar límites dentro de la integral, obteniéndose:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad z \in D(a, r)$$

lo cual demuestra que $f(z)$ es analítica en $D(a, r)$ (y por consiguiente en Ω).

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, debemos probar que $f_k^{(n)}(z) \rightarrow f^{(n)}(z)$ uniformemente sobre cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, elijamos $r_1 > r$ tal que $\overline{D(a, r)} \subset \overline{D(a, r_1)} \subset \Omega$ y hagamos $\delta = r_1 - r > 0$, entonces para todo $z \in \overline{D(a, r)}$, tenemos por la desigualdad triangular que $\overline{D(z, \delta)} \subset \overline{D(a, r_1)}$ y por la definición de convergencia uniforme sobre $\overline{D(a, r_1)}$ se tiene también que $\|f - f_k\|_{\overline{D(a, r_1)}}$ tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, aquí :

$$\|f - f_k\|_{\overline{D(a, r_1)}} = \sup_{z \in \overline{D(a, r_1)}} |f(z) - f_k(z)|$$

Luego, usando la desigualdad de Cauchy tenemos:

$$|f^{(n)}(z) - f_k^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\delta^n} \|f - f_k\|_{\overline{D(a, \delta)}} \leq \frac{n!}{\delta^n} \|f - f_k\|_{\overline{D(a, r_1)}}$$

puesto que $\overline{D(z, \delta)} \subset \overline{D(a, r_1)}$ si $z \in \overline{D(a, r)}$, así tomando límite cuando k tiende a ∞ en ambos lados de la última desigualdad se tiene que

$\|f^{(n)}(z) - f_k^{(n)}(z)\|_{\overline{D(a, r)}}$ tiende a cero y de allí la convergencia uniforme. \square

Corolario 5.10.1. Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una serie de funciones analíticas $f_k(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ entonces $f(z)$ es analítica en Ω y

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

para $n = 1, 2, \dots$, uniformemente sobre cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$.

Demostración. Inmediata del teorema anterior aplicado a la sucesión de sumas parciales. \square

Teorema 5.10.2. (Teorema Fundamental del Álgebra)

Cualquier polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0$$

de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz. Esto es, existe al menos un punto z_0 tal que $P(z_0) = 0$

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos que $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es analítica en \mathbb{C} .

$$P(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right)$$

Ahora bien

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{a_i}{|z|^k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n; \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

Así dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\left| \frac{a_i}{z^k} \right| < \epsilon \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{si } |z| > R$$

Tomemos $\epsilon = \frac{|a_n|}{2n}$ entonces si $|z| > R$ se tiene

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \leq \frac{|a_n|}{2n} n = \frac{|a_n|}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| a_n + \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| &\geq |a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\geq |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2} \end{aligned}$$

Para $|z| > R$

$$\begin{aligned} |P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| &\geq \frac{|z|^n |a_n|}{2} \quad \text{si } |z| > R \\ \therefore |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} &\leq \frac{2}{R^n |a_n|} \end{aligned}$$

Luego $f(z)$ es acotada fuera del disco $D(0, R)$.

Pero por ser $f(z)$ continua y ser $\overline{D(0, R)}$ compacto, también es acotada dentro del disco $\overline{D(0, R)}$, así $f(z)$ es acotada en \mathbb{C} , por el teorema de Liouville $f(z)$ es constante en \mathbb{C} lo cual es una contradicción. \square

El teorema fundamental del Álgebra fue conjeturado por el holandés A. Girard (1590?-1633?) y muy probablemente antes que él. En 1746 se dio una demostración defectuosa por J. le Rond D'Alembert (1717-1783), como la posterior en tres años de L. Euler (1707-1783). C. F. Gauss dio varias demostraciones, la última inobjetable. En el marco del álgebra, las ideas básicas del tratamiento moderno se remontan a E. Galois (1811-1832), J.W.R. Dedekind (1831-1916) y L. Kronecker (1823-1891).

5.11. Principio del Módulo Máximo

Si $f(z)$ es analítica en un dominio $int\Gamma$ y $z_0 \in int\Gamma$, debido a la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Usando el método de la guitarra

Separamos en dos pedazos

Como z_0 está fuera de estos contornos entonces

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\overline{\Gamma_4} + \overline{\Gamma_3} + \overline{\Gamma_2} + \overline{\Gamma_1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

Sumando, agrupando y despejando se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde $C : |z - z_0| = r, z = z_0 + re^{i\theta} \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Así

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Esta última ecuación es conocida como **la fórmula del valor medio de Gauss**. Y así, al tomar módulo :

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \quad (1)$$

Si suponemos que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

para $|z - z_0| < r$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta \\ &= |f(z_0)| \end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq |f(z_0)| \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

Así

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = 0$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0 + re^{i\theta})| - |f(z_0)|) d\theta = 0$$

Como el integrando es menor o igual que cero se sigue que

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| - |f(z_0)| = 0$$

$\therefore |f(z)| = |f(z_0)|$ en $|z - z_0| < r$.

Ahora dado que el módulo de la función analítica $f(z)$ es constante en $D(z_0, r)$, entonces $f(z)$ es constante en $|z - z_0| < r$. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.11.1. (Principio del Módulo máximo)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y f analítica en Ω , no constante, entonces la función $|f|$ carece de máximos locales en Ω . En otras palabras, para cada $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$ existe algún $z \in \overline{D(z_0, R)}$ tal que $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Observación 5.11.1. En particular, cuando, además Ω es acotado y $f \in C(\overline{\Omega})$, se cumple que

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

donde $\partial\Omega$ denota el conjunto frontera de Ω (que es compacto).

Ejemplo 5.11.1. Supongamos que f es analítica en $D(0, R)$ para algún $R > 1$ y que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq 1$ siempre que $|z| = 1$. Por ejemplo, la función $f(z) = z$ cumple esos requerimientos. Consideremos la función auxiliar $g(z)$ definida por

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & 0 < |z| < R \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Nótese que $g(0) = f'(0)$ y así $g(z)$ es continua en $D(0, R)$ y analítica en $D(0, R) - \{0\}$ por el principio del módulo máximo

$$\max_{|z| \leq 1} |g(z)| = \max_{|z|=1} |g(z)|$$

Además, por las hipótesis efectuadas sobre $f(z)$ y la definición de $g(z)$ se obtiene

$$\max_{|z|=1} |g(z)| \leq 1$$

por lo tanto

$$\max_{|z| \leq 1} |g(z)| \leq 1$$

Por otro lado, $g(0) = 1$. Por consiguiente $z = 0$ es un máximo local interior de $|g|$ y de nuevo por el principio del módulo máximo obtenemos que g debe ser constante en $D(0, 1)$, como $g(0) = 1$, entonces $g(z) = 1$ en $D(0, 1)$ y por tanto $f(z) = z$ en $D(0, 1)$ más adelante veremos que de hecho $f(z) = z$ para cada $D(0, R)$ usando el principio de identidad.

5.12. Versión de Cauchy-Goursat en Dominios Múltiplemente Conexos

En esta sección consideraremos el caso en el que Ω es un dominio que no es simplemente conexo. En este caso el teorema no se verifica, pero la fórmula que obtenemos nos permitirá reducir el cálculo de la integral a contornos más simples o más adecuados para integrar la función dada.

Teorema 5.12.1. (Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos)

Sean γ y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ curvas de Jordan (contornos cerrados y simples) verificando

- (i) Todas las curvas tienen la misma orientación
- (ii) Cada curva $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ está contenida en la componente conexa interior de γ .

Si $f(z)$ es analítica en Ω , siendo Ω un dominio que contiene a todos los contornos y a la región

$$C_{int}(\gamma) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k C_{ext}(\Gamma_i) \right)$$

entonces se verifica

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z) dz$$

donde $C_{int}(\gamma)$ es la componente interior de γ y $C_{ext}(\Gamma_i)$ denota la componente exterior en Γ_i

Demostración. Sea γ y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$

Aplicando la misma técnica que en el teorema 5.5.4 podemos separar en dos dominios simplemente conexos como en la figura :

estos contornos cerrados y simples que denotaremos por γ_1 y γ_2 están formados por un arco de γ , los segmentos añadidos y un arco de Γ_i , aplicando el teorema de Cauchy-Goursat para dominios simplemente conexos, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z) dz \end{aligned}$$

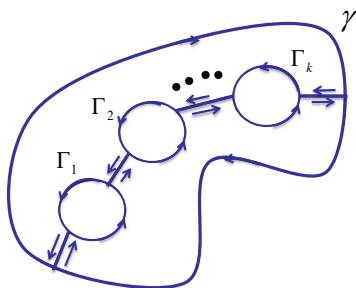


Figura 5.8: Ilustración Cauchy-Goursat para múltiplemente conexo

dado que las integrales sobre los segmentos se anulan pues son recorridos dos veces y en sentido contrario, con lo que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z) dz$$

□

5.13. Ejercicios del Capítulo 5

- Suponga que un contorno C está representado por la función $z = f(t)$, $\lambda \leq t \leq \mu$. Sea $\gamma \leq t \leq \delta$ un intervalo. Mostrar que existe una función $z = g(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, que también representa el contorno C
(Sug: Considere la recta que une a (λ, γ) con (δ, μ) y proceda como en la observación 5.1.5)
- Sea $C : f(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, un contorno y sea $t_0 \in (\alpha, \beta)$ un valor de t tal que $f'(t_0)$ está definida. Demuestre que $f'(t)$ es continua en t_0 .
- Pruebe que:

$$\int_{|z|=1} \frac{\text{Log}z}{z} dz = 0$$

aunque la función $\frac{\text{Log}z}{z}$ no es analítica en $|z| \leq 1$. ¿Qué resultado se obtiene si se integra

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log}z}{z} dz$$

sobre $\gamma : z(t) = e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$? Explique. (Sugerencia: Haga $z = e^{it}$)

- Pruebe que si $f(z)$ es una función continua en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:
 - $f(z)$ admite primitiva en Ω
 - La integral de contorno de f es independiente del contorno en Ω

(Sug: para $(i) \Rightarrow (ii)$ use el teorema de la antiderivada, y para $(ii) \Rightarrow (i)$ proceda como en la demostración del teorema de Morera)

- Evalúe las siguientes integrales usando la definición

(a) $\int_1^i (z-1) dz$ sobre el segmento que une a 1 con i .

(b) $\int_c x dz$, sobre el círculo $|z| = 1$ descrito en sentido antihorario.

(c) $\int_{-i}^i (x^2 + iy^2) dz$ sobre la mitad derecha del círculo $|z| = 1$ descrito en sentido antihorario.

(d) $\int_c \frac{dz}{z^2 - 1}$, $C : |z| = 2$

(e) $\int_C e^z dz$ donde C es el perímetro del cuadrado con vértices en los puntos $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = i$ recorrido en este orden.

6. Sin calcular la integral, muestre que:

$$\left| \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{4\pi}{3}$$

(Sugerencia: Use la desigualdad triangular y el teorema 5.3.1 (e))

7. Si γ es la semicircunferencia $|z| = Re^{i\theta}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $R > 1$, Muestre que:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\text{Log}z}{z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{R} (\text{Log}R + \pi/2)$$

Pruebe que el valor de la integral tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$.

8. Supongamos que $C = C_1 + C_2$ es un contorno cerrado simple y sea z_0 un punto en el exterior de C . Mostrar que $\text{Ind}(C_1, z_0) = \text{Ind}(\overline{C_2}, z_0)$, donde $\overline{C_2}$ es el contorno opuesto de C_2 .

9. Usando la fórmula Integral de Cauchy evaluar las siguientes integrales, en cada caso el contorno C es descrito en dirección positiva

(a) $\int_C \frac{e^z - 1}{z^2} dz$, sobre el círculo $|z| = 1$

(b) $\int_C \frac{\sinh^2 z + \cosh z}{z - \pi i} dz$, sobre el círculo $|z| = 4$.

(c) $\int_C \frac{z^4 + 4z^2 - 6}{z - 4i} dz$, sobre el círculo $|z| = 3$.

(d) $\int_C \left(\frac{3}{z^2 + 1} - \frac{4}{z^2 - 1} \right) dz$, sobre el círculo $|z| = 2$.

(e) $\int_C \frac{3z^4 + 4z^2 - 1}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)} dz$, sobre el círculo $|z| = 3$.

(f) $\int_C \frac{1}{z^2 - 4} dz$, sobre el círculo $|z| = 4$.

(g) $\int_C \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^6} dz$, sobre el contorno simple dado por la frontera de un cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 4$ y $y = \pm 4$, recorrida en dirección positiva.

10. Calcule: $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z^3 - z)} dz$ sobre los contornos dados por:

- (a) $\gamma : |z| = 2$ en sentido positivo.
 (b) $\gamma : |z| = 1/2$ en sentido positivo.
 (c) $\gamma : |z - i/2| = 1$ en sentido positivo.

(Sugerencia: Escriba al cociente $\frac{1}{(z^3 - z)}$ en fracciones simples y use la fórmula integral de Cauchy)

11. Enuncie y demuestre el segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea. (Sug: proceda como en la demostración del teorema de la antiderivada)
12. Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas sobre un dominio D simplemente conexo. Muestre que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)dz = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} g(z)f'(z)dz.$$

Donde el camino de integración es un contorno de $z = \alpha$ a $z = \beta$ contenido en D . Esta fórmula es conocida como la fórmula de integración por partes. (Sug: Use el mismo procedimiento que en cálculo integral)

13. Sea C un contorno cerrado simple, conteniendo al origen. Use la fórmula integral de Cauchy para la n -ésima derivada para probar que

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} dz$$

14. Sea $f(z)$ una función analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_0\}$. Pruebe que: si $|z_0| < R < R_0$ y $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(R^2 - |z_0|^2)f(z)dz}{(z - z_0)(R^2 - z \cdot \overline{z_0})}.$$

(Sug: descomponga el integrando en fracciones simples y use la fórmula de Cauchy-Goursat)

15. Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre el círculo $C : z = Re^{i\theta}$.
Si $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ es un punto interior a C , probar que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta$$

Esta ecuación es conocida como la fórmula integral de Poisson.

(Sug: Use el ejercicio anterior con $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$, para $0 \leq r_0 < R$ y parametrize la circunferencia $|z| = R$ por $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$).

16. Deducir la fórmula integral de Poisson para funciones armónicas en $D(0, R_0)$, esto es si $0 \leq r < R < R_0$ se cumple que

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)u(Re^{i\theta})}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta$$

(Sug: Use el hecho que toda función armónica es la parte real de una función analítica y el ejercicio anterior)

17. Pruebe que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cosh(\sin\theta) d\theta = 2\pi$$

(Sug: Aplique el teorema del valor medio de Gauss a la función $f(z) = \cos z$ en $z_0 = 0$)

18. Deduzca la fórmula del valor medio de Gauss para funciones armónicas. (Sug: Use el hecho que toda función armónica es la parte real de una función analítica)
19. Sea $\phi(z)$ una función de valores complejos definida y continua sobre un contorno C . Muestre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(w)}{w - z} dw$$

es analítica en todo dominio D que no contenga puntos de C , y su derivada está dada por la fórmula

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(w)}{(w - z)^2} dw$$

(Sug: Proceda como en la demostración de la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada)

20. Agregar los detalles a la prueba del teorema de Cauchy-Goursat para dominios simplemente conexos.

21. Sea $f(z)$ una función entera tal que $|f(z)| \leq A|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, donde A es un número positivo fijo. Probar que $f(z) = a_1z$ donde a_1 denota una constante compleja.
(Sug: Pruebe que $f''(z) \equiv 0$)
22. Sea $f(z)$ una función entera. Utilizando el teorema de Liouville demuestre que:
- (i) Si $|f(z)| \geq 1$, entonces $f(z)$ es constante.
 - (ii) Si $\operatorname{Re}(f(z)) \geq 0$, entonces $f(z)$ es constante.
 - (iii) Si $\operatorname{Im}(f(z)) \leq 1$, entonces $f(z)$ es constante.
 - (iv) Si $\operatorname{Re}(f(z))$ no tiene ceros, entonces $f(z)$ es constante.
 - (v) Si existe una recta que no corta a la imagen de $f(z)$, entonces $f(z)$ es constante.
- (Sugerencia: (i) Considere $1/f(z)$, (ii) considere $e^{f(z)}$ y use (i), (iii) Considere $e^{-i(f(z)-1)}$. (iv) Pruebe que $e^{f(z)}$ nunca tiene módulo 1, (v) Suponga que la imagen de $f(z)$, no corta la recta $y = ax + b$, considere $F_1(z) = f(z) - ib$, entonces si $a = \tan(\theta)$, pruebe que $F_2(z) = F_1(z)e^{i(\pi/2-\theta)}$ no corta al eje imaginario y use (iv))
23. Use el teorema de Liouville para demostrar que, a menos que sea constante, la imagen de una función entera es densa en \mathbb{C} .
(Sugerencia: Considere $\Omega = \mathbb{C} - \overline{f(\mathbb{C})}$, use que Ω es abierto para probar que si $w \in \Omega$ entonces $|f(z) - w| > R$ para cada $z \in \mathbb{C}$, luego considere la función auxiliar $g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$, con $z \in \mathbb{C}$, aplique el teorema de Liouville para $g(z)$, concluya que $f(z)$ es constante)
24. **(El Principio del Módulo Mínimo)**
Sea $f(z)$ una función continua y distinta de cero en todo punto de una región cerrada y acotada \mathbf{R} . Supongamos además que $f(z)$ no es constante y que es analítica en todo punto interior a \mathbf{R} . Entonces el valor mínimo que alcanza $|f(z)|$ en \mathbf{R} corresponde a un punto de la frontera de \mathbf{R} .
(Sugerencia: Aplique el principio del módulo máximo a $1/f(z)$)
25. Pruebe que si $f(z)$ es analítica y no constante en la región acotada G , es continua en \overline{G} (la clausura de G), y tiene módulo constante en la frontera de G , entonces debe tener al menos un cero en G .
(Sugerencia: $|f(z)| \neq 0$ en la frontera de G , y si $f(z)$ no tiene ceros en G , los principios del módulo máximo y el módulo mínimo implican que $f(z)$ es constante en G .)
-

26. Pruebe que una función entera tal que

$$F(z) = F(2z)$$

es constante.

(Sugerencia: Pruebe que $F(z)$ es acotada fuera del círculo unitario, y use el teorema de Liouville)

27. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo y $f(z)$ una función analítica en Ω y sin ceros en Ω . Pruebe que existe una función $g(z)$ analítica en Ω , tal que para cada $z \in \Omega$:

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Concluya que existe una función φ analítica en Ω tal que $\varphi(z)^2 = f(z)$.

(Sugerencia: Pruebe que existe una función $G(z)$ analítica en Ω , tal que $G'(z) = f'(z)/f(z)$, considere la función $H(z) = f(z).e^{-G(z)}$, la cual es constante en Ω , como $f(z).e^{-G(z)}$ no se anula en Ω concluya que $f(z) = e^{c+G(z)}$ donde $c \in \mathbb{C}$)

28. **(Una prueba diferente del teorema de Cauchy para derivadas)**

Sea $g(s)$ una función continua en el contorno γ , entonces la función

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{g(s)ds}{(s-z)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

es analítica para todo $z \notin \gamma$ y su derivada satisface $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$, este teorema es conocido como teorema de Riemann. Deduzca la expresión para $f^{(n)}(s)$, donde $f(z)$ es una función analítica en un dominio simplemente conexo y γ es una curva de Jordan contenida en este.

(Sug: Sea $z_0 \notin \gamma$, pruebe que $F_1(z)$ es continua en z_0 , aplique este hecho a las funciones $G_n(z) = \int_{\gamma} \frac{g(s)(s-z_0)^{-1}ds}{(s-z)^n}$, para demostrar que $G_1(z)$ es continua, además $F_2(z_0) = G_1(z_0) = F'_1(z_0)$, suponga que $F'_{n-1}(z) = (n-1)F_n(z)$ es verdadero (así también es verdadero que $G'_{n-1}(z) = (n-1)G_n(z)$), como $1/(s-z) = 1/(s-z_0) + (z-z_0)/[(s-z)(s-z_0)]$, lo cual implica que $F_n(z) - F_n(z_0) = [G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)] + (z-z_0)G_n(z_0)$, ya que $G_{n-1}(z)$ es derivable, será continua, concluya que $F_n(z)$ es continua en z_0 , finalmente $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$ se tiene por inducción. Para encontrar la expresión para $f^{(n)}(s)$ aplique el teorema de Riemann a $g(z) = f(z)$.)

Capítulo 6

SERIES DE POTENCIAS

En este capítulo estudiaremos la relación entre las series de potencias y las funciones analíticas, veremos que el hecho que una función admita representación en serie de potencias en un disco equivale a que tal función, sea analítica en dicho disco, más aún, también se estudiará la continuidad de las series de potencias, así como su diferenciación e integración término a término. Se estudiará la Serie de Taylor de una función analítica, así como una generalización de esta llamada Serie de Laurent.

6.1. Serie de Potencias de Centro z_0

Definición 6.1.1. Denominaremos *serie de potencias de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

con $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 6.1.1. Las siguientes expresiones son series de potencias de centro $z_0 = 0$ y $z_0 = 2i$ respectivamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(z - 2i)^n$$

6.2. Radio y Círculo de Convergencia de una Serie de Potencias

Teorema 6.2.1. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, existe

$R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty, 0\}$ tal que si $R \in \mathbb{R}^+$ la serie converge absolutamente en $D(z_0, R)$ y diverge si $z \notin D(z_0, R)$, aquí $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Además, si $R = 0$ la serie converge solamente en $z = z_0$, mientras si $R = \infty$ la serie converge absolutamente en todo \mathbb{C} , donde R , viene dado por la **fórmula de Cauchy-Hadamard**

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Demostración. Aplicando el criterio de la raíz n -ésima tenemos que si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| < 1$, la serie converge absolutamente es decir:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Ahora bien, si

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = A \in \mathbb{R}^+$$

entonces la convergencia absoluta ocurre si

$$|z - z_0| < \frac{1}{A} = R.$$

De igual manera si

$$|z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

la serie diverge, o sea si $|z - z_0| > R$

Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, entonces $|z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$, luego la serie converge absolutamente si $R = +\infty$ en todo \mathbb{C} , si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, de la única forma que $\limsup |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ es que $z = z_0$ \square

Definición 6.2.1. Cuando $R \in \mathbb{R}$, llamamos **círculo de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ al círculo $D(z_0, R)$ donde

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

de manera que la serie de potencias converge absolutamente en $D(z_0, R)$ y diverge fuera del disco $D(z_0, R)$. De igual manera denominamos **dominio de convergencia** de la serie al conjunto de puntos de \mathbb{C} , donde la serie converja y lo denotaremos por $Dom(z_0, R)$, en general $D(z_0, R) \subset Dom(z_0, R)$.

Observación 6.2.1. Nótese que como consecuencia del teorema 2.6.3, cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe, coincide con $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Y por consiguiente:

$$R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Ejemplo 6.2.1. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Solución:

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$, luego $R = 1$, es decir, si $|z| < 1$ la serie converge absolutamente y para $|z| > 1$ la serie diverge. Si $|z| = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 1 \neq 0$, luego la serie converge en la circunferencia unitaria.

Ejemplo 6.2.2. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

Solución

$\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, luego el círculo de convergencia es $D(0, 1)$, por otra parte, para $|z| = 1$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge es decir en la frontera hay convergencia absoluta.

Ejemplo 6.2.3. Estudie la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Solución

Aquí el círculo de convergencia es $D(0, 1)$ en $z \neq 1$ y $|z| = 1$ la serie converge, pero en $z = 1$ la serie diverge.

Lema 6.2.1 (Criterio de Dirichlet). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \in \mathbb{C}$ y tal que existe $M > 0$ cumpliendo con $\left| \sum_{n=1}^m a_n \right| < M, \forall m \in \mathbb{N}$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, decreciente y convergiendo a 0, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demostración. Sea $A_m = \sum_{n=1}^m a_n$, note que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n b_n &= \sum_{n=1}^m (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=1}^m A_n b_n - \sum_{n=1}^m A_{n-1} b_n \quad (A_0 = 0) \\ &= \sum_{n=1}^m A_n b_n - \sum_{n=1}^m A_n b_{n+1} + A_m b_{m+1} \\ &= A_m b_{m+1} - \sum_{n=1}^m A_n (b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

Así que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ depende del $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_n (b_{n+1} - b_n)$, ya que $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m b_{m+1} = 0$. Ahora bien, $|A_n (b_{n+1} - b_n)| \leq M(b_n - b_{n+1})$ luego

$$\sum_{n=1}^m M(b_n - b_{n+1}) = M(b_1 - b_{m+1})$$

así que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m M(b_n - b_{n+1}) = M b_1 \quad (\text{converge})$$

por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_{n+1} - b_n)$ converge absolutamente, luego converge por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. \square

En el ejemplo (6.2.3) tenemos para $z \neq 1$, $|z| = 1$

$$|S_m| = \left| \sum_{n=1}^m z^n \right| = \left| \frac{z^{m+1} - z}{z - 1} \right| \leq \frac{|z|^{m+1} + |z|}{|z - 1|} = \frac{2}{|z - 1|} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y $b_n = \frac{1}{n} \searrow 0$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge, luego $D(0, 1) = \text{Dom}(0, 1) - \{1\}$

6.3. Convergencia Uniforme de series de potencias

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, es claro que en el círculo de convergencia $D(z_0, R)$ esta serie define una función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. En $D(z_0, R)$, podemos

escribir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z - z_0)^n + R_N(z).$$

luego:

$$R_N(z) = F(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z - z_0)^n$$

y por tanto: $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$ en $D(z_0, R)$.

Es decir que:

Dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon, z)$ tal que $n \geq N \Rightarrow |R_N(z)| < \epsilon$

Cuando N solo depende de ϵ , decimos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente hacia $F(z)$ en $S \subset D(z_0, R)$, lo cual establece la siguiente definición.

Definición 6.3.1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente a $F(z)$ en

$S \subset D(z_0, R)$ si dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que $\forall n \geq N \Rightarrow |R_N(z)| < \epsilon \forall z \in S$.

Teorema 6.3.1. Sea $D(z_0, R)$ el círculo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entonces dicha serie converge uniformemente en $\overline{D(z_0, r)}$ para $0 < r < R$.

Demostración. Sea R_1 tal que $r < R_1 < R$ luego $r = \lambda R_1$ ($0 < \lambda < 1$). Para $z \in \overline{D(z_0, r)}$ tenemos que

$$|R_N(z)| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \lambda^n R_1^n$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_1^n$ converge absolutamente en $\partial D(z_0, R_1)$ ($R_1 < R$), entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_1^n$$

converge, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| R_1^n = 0$ y por lo tanto, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_1, |a_n| R_1^n < 1$ ahora bien

$$|R_N(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda^N}{1 - \lambda} \quad \forall N \geq N_1$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$, Dado $\epsilon(1 - \lambda) > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall N \geq N_2 \Rightarrow \lambda^N < \epsilon(1 - \lambda)$$

En consecuencia

$$|R_N(z)| \leq \frac{\lambda^N}{1 - \lambda} < \frac{\epsilon(1 - \lambda)}{(1 - \lambda)} = \epsilon$$

$\forall N \geq \max\{N_1, N_2\}$, $\forall z \in \overline{D(z_0, r)}$. □

Ejemplo 6.3.1. Halle el dominio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})z^n$$

Solución:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 1$$

(sugerimos al lector que demuestre esta última igualdad usando la regla de L'Hopital)

Luego $R = \frac{1}{A} = 1$, en $|z| < 1$ hay convergencia absoluta y en $|z| > 1$, diverge.

Si $z = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

la cual diverge, pues

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

Veamos ahora que pasa si $|z| = 1$, aunque ya sabemos que en $z = 1$ hay divergencia.

$$\left| \sum_{n=1}^m z^n \right| = \left| \frac{z^{m+1} - z}{z - 1} \right| \leq \frac{|z|^{m+1} + |z|}{|z - 1|} = \frac{2}{|z - 1|} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad z \neq 1$$

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

converge en forma decreciente a 0 ($b_n \rightarrow 0$) luego por Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})z^n$$

converge en $|z| = 1$ y $z \neq 1$.

Teorema 6.3.2. *Sea la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

con radio de convergencia $R > 0$. Entonces para cualquier círculo C con centro z_0 y radio $r < R$ la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

representa una función continua de z en la región cerrada acotada por el círculo C .

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_0 = 0$, así $F(z) = S_N(z) + R_N(z)$, donde

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n, \quad R_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n z^n$$

Sea K la región cerrada acotada por el círculo C y sea z_1 un punto en K , queremos demostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|F(z) - F(z_1)| < \epsilon$ para $|z - z_1| < \delta$ con $z \in K$. Como por el teorema 6.3.1 la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge uniformemente en K , podemos escoger un N tal que

$$|F(z) - S_N(z)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall z \in K$$

ya que $S_N(z)$ es un polinomio en z esta es una función continua de z , luego para el mismo N escogido antes, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3}$$

cuando $|z - z_1| < \delta$. Así, para $z \in K$ y $|z - z_1| < \delta$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |F(z) - F(z_1)| &\leq |F(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_1)| + |S_N(z_1) - F(z_1)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

□

Corolario 6.3.1. *Una serie de potencias representa una función continua en cualquier punto interior a su círculo de convergencia.*

Demostración. Basta tomar un punto interior al círculo de convergencia $C : |z - z_0| = R$, al cual es también interior a algún círculo C_0 enteramente en C y aplicar el teorema anterior. \square

El siguiente ejemplo establece la convergencia uniforme de la serie de potencias en compactos contenidos en su disco de convergencia.

Ejemplo 6.3.2. *Demuestre que la serie de potencias de centro z_0 converge uniformemente en cualquier compacto $K \subset D(z_0, R)$ (Círculo de convergencia).*

Solución: Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge absolutamente en $D(z_0, R)$ claramente converge absolutamente en $K \subset D(z_0, R)$. Ahora sea $U = \{D(z_0, r) : r \in (0, R)\}$ un cubrimiento de $D(z_0, R)$. (Demuéstrelo!!).

$$K \subset \bigcup_{r \in (0, R)} D(z_0, r)$$

luego por ser K compacto, existen r_1, r_2, \dots, r_m en $(0, R)$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m D(z_0, r_j)$$

Sea $r_0 = \max\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Entonces:

$$K \subset D(z_0, r_0) = \bigcup_{j=1}^m D(z_0, r_j)$$

y como $\overline{D(z_0, r_0)} \subset D(z_0, R)$ pues $|z - z_0| \leq r_0 < R$, entonces: $K \subset \overline{D(z_0, r_0)}$ y por teorema, la serie converge uniformemente en $\overline{D(z_0, r_0)}$, luego en K .

6.4. Problemas Resueltos

1. Calcule los Radios de convergencia de las siguientes series:
-

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, a \in \mathbb{C}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

Solución:

(a) Usando que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{((n+1)!)^2 (2n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 \end{aligned}$$

tenemos que $R = \frac{1}{4}$

(b) Puesto que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a|^n)^{\frac{1}{n}} = |a|$$

tenemos que $R = \frac{1}{|a|}$ (aquí si $|a| = 0$ entonces $R = +\infty$).

(c) Puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (3 + (-1)^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (3 + (-1)^n) = 4 \end{aligned}$$

tenemos que $R = \frac{1}{4}$

(d) Esta serie se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

donde

$$a_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2^n \text{ para algún } n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$ y por lo tanto $R = 1$

2. Si el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

es R ($0 \leq R \leq \infty$) estudie los radios de convergencia de

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} (z - z_0)^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{kn}$$

Solución:(a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_{2n}|^{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_{2n}|^{\frac{1}{(2n)}} \right)^2 \\ &\leq \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sup |c_N|^{\frac{1}{N}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Por lo que el radio de convergencia ρ de la serie (a) es $\rho \geq R^2$.

(b) Supongamos sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$, Poniendo $w = z^k$ la serie se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

cuyo radio de convergencia es R . Por lo tanto, la serie converge si $|z|^k < R$, es decir, si $|z| < R^{\frac{1}{k}}$ y diverge si $|z|^k > R$, esto es si $|z| > R^{\frac{1}{k}}$. Por lo tanto el radio de convergencia ρ de la serie (b) es $\rho = R^{\frac{1}{k}}$

6.5. Serie de Taylor

En lo que sigue veremos como se puede escribir una función analítica en un círculo $D(z_0, R)$, como una serie de potencias que llamaremos serie de Taylor.

Teorema 6.5.1. Sea $f(z)$ analítica en un círculo $D(z_0, R)$, entonces $\forall z \in D(z_0, R)$ se tiene que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

siendo esta convergencia uniforme en $\overline{D(z_0, r)}$, para $r \in (0, R)$

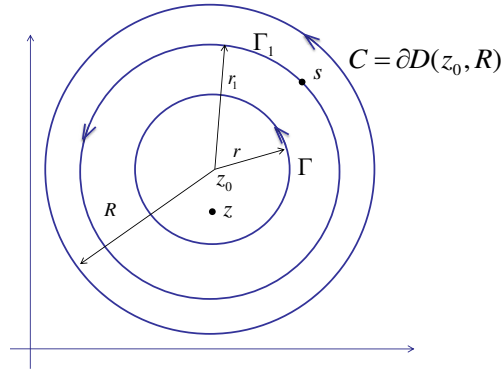


Figura 6.1: Círculos concéntricos de centro z_0

Demostración. Sea Γ y Γ_1 dos circunferencias concéntricas con $C = \partial D(z_0, R)$ con radios r y r_1 respectivamente, y tales que $r < r_1 < R$.

Sea z un punto cualquiera dentro o sobre Γ y sea s un punto cualquiera en Γ_1 entonces

$$|s - z| = |(s - z_0) - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| \geq r_1 - r$$

Por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(s)}{s - z} ds$$

Ahora bien, para cualquier número complejo $\beta \neq 1$, tenemos:

$$\frac{1}{1 - \beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1} + \frac{\beta^n}{1 - \beta}$$

Así podemos escribir $\frac{1}{s - z}$ como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{s - z} \right) &= \frac{1}{(s - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(s - z_0) \left[1 - \frac{z - z_0}{s - z_0} \right]} \\ &= \frac{1}{s - z_0} \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^n}{1 - \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)} \right] \end{aligned}$$

Así que:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} + \frac{(z-z_0)}{(s-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(s-z_0)^3} + \dots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(s-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{(s-z)(s-z_0)^n} \quad (*)$$

Nuevamente usando la fórmula Integral de Cauchy para la n-ésima derivada tenemos:

$$\frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Multiplicando ambos lados de (*) por $\frac{1}{2\pi i} f(s)$ e integrando sobre Γ_1 tenemos:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1} + R_n$$

donde

$$R_n = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(s) ds}{(s-z)(s-z_0)^n}$$

Solo falta probar que $|R_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea K el máximo valor de $|f(s)|$ sobre Γ_1 ya que $|s-z_0| = r_1$ y $|s-z| \geq r_1 - r$ para todo z dentro o sobre Γ y para todo $s \in \Gamma_1$, tenemos:

$$|R_n| \leq \frac{|z-z_0|^n}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|f(s)||ds|}{|s-z||s-z_0|^n} \leq \frac{2\pi K r_1 r^n}{2\pi(r_1-r)r_1^n} = \frac{K}{1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)} \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

ya que $0 < r < r_1$, $r = \lambda r_1$, donde $0 < \lambda < 1$, y así

$$|R_n(z)| < \left(\frac{K}{1-\lambda}\right) \lambda^n \quad \forall z \text{ dentro o sobre } \Gamma.$$

El lado derecho de la desigualdad anterior es independiente de z y tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Así la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

converge uniformemente a $f(z)$ para todo z dentro o sobre Γ . Ahora dado un punto cualquiera z en el interior del círculo C , podemos tomar r tal que $|z-z_0| < r < R$, entonces z esta en el interior del círculo $\Gamma : |s-z_0| = r < R$, y en consecuencia, la fórmula

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

es válida para todo z interior a C . □

Observación 6.5.1. La serie dada por el teorema anterior es conocida como serie de Taylor de centro z_0 , cuando $z_0 = 0$ la serie de Taylor es llamada serie de Maclaurin.

Observación 6.5.2. 1. Si $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$ entonces $R \leq R_c$ (R_c es el radio de convergencia) de la serie de potencias de centro z_0 y coeficiente de Taylor (es decir, la serie de Taylor de $f(z)$, alrededor de z_0)

2. Recíprocamente si $f(z)$ tiene una representación en series de potencias alrededor de z_0 , existe $D(z_0, R)$ donde ella y su derivada convergen a $f(z)$ y $f'(z_0)$ respectivamente (esto será probado en la sección siguiente).

3. Pudiera pensarse que el círculo de analiticidad $D(z_0, R)$ coincidan con el círculo de convergencia de su serie (de radio R_c), sin embargo esto es falso y se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5.1. $f(z) = \text{Log}(z) = \text{Ln}|z| + i\text{Arg}(z)$, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ su desarrollo alrededor de $z = -1 + i$ es:

$$f(z) = \frac{1}{2}\text{Ln}2 + \frac{3}{4}\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \frac{1}{n}(z - (-1+i))^n$$

$R_A = 1$, pues f no es analítica en puntos del semieje no positivo. Por otra parte, por el criterio de la raíz, tenemos:

$$R_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{2}\right|^n n}} = \sqrt{2} > 1 = R_A$$

más adelante, demostraremos el teorema de unicidad para series de potencias, el cual establece que el desarrollo en series de potencias de una función analítica en un disco $D(z_0, R)$ es único. Este hecho lo usaremos para resolver algunos ejercicios para obtener desarrollo en serie de potencias de funciones, utilizando métodos indirectos.

Ejemplo 6.5.2. Halle la serie de Taylor, radio de analiticidad y convergencia para:

(a) $\frac{1}{z}$ alrededor de $z_0 = 1$

(b) e^{z-1} alrededor de $z_0 = 2$

(c) $\frac{2z}{z-2}$ alrededor de $z_0 = 1$

(d) e^z alrededor de $z_0 = \pi i$

(e) $f(z) = \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}$ donde $\Gamma : |w| = 1$ en sentido positivo y $z_0 = 0$

Solución:

(a)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k$$

Usamos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \text{ para } |z| < 1$$

Así $|z-1| < 1$, luego $R_c = 1$, $R_A = 1$. pues era la distancia de 1 al origen, punto donde $f(z)$ no es analítica

(b) Sabemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{z-1} = e^{1+(z-2)} = e \cdot e^{z-2} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (z-2)^k$$

como $R_A = \infty$ claramente $R_c = \infty$, ($R_A \leq R_c$ en general)

(c)

$$\frac{2z}{z-2} = 2 + \frac{4}{z-2} = 2 + \frac{4}{-1+(z-1)} = 2 - 4 \cdot \frac{1}{1-(z-1)} = 2 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k$$

$$|z-1| < 1$$

distancia del centro 1, al punto donde no hay analiticidad, o sea 2, es $|2-1| = 1$, luego $R_A = 1$, y $R_c = 1$.

(d) Como a derivada de e^z es e^z , preferimos seguir la fórmula $f^{(k)}(z) = e^z$, $f^{(k)}(\pi i) = e^{\pi i} = -1$ luego

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z - \pi i)^k,$$

como e^z es entera, o sea, analítica en $D(\pi i, R) \quad \forall R > 0$, tenemos que $R_A = \infty$ y $R_C = \infty$.

(e)

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i \quad \forall z \in \{z : |z| < 1\}$$

en $|z| = 1$ no está definida, luego es analítica en $D(0, 1)$. Observe que:

$$f(z) := \begin{cases} 2\pi i & |z| < 1 \\ 0 & |z| > 1 \end{cases}$$

Así, $R_A = 1$ y $R_C = \infty$.

Ejemplo 6.5.3. Halle el desarrollo de Maclaurin de

$$f(z) = e^{z^2} \int_0^z e^{-w^2} dw$$

Solución: Como e^{-w^2} es analítica en todo \mathbb{C} , la integral no depende del camino que une a 0 con z . Además si

$$g(z) = \int_0^z e^{-w^2} dw$$

entonces $g'(z) = e^{-z^2}$ por otra parte e^{z^2} y $g(z)$ al ser analíticas en \mathbb{C} , lo será $f(z)$. Luego

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

ahora bien,

$$f'(z) = 1 + 2zf(z)$$

$$f''(z) = 2f'(z) + 2zf''(z)$$

$$f'''(z) = 4f'(z) + 2zf'''(z)$$

$$f^{(4)}(z) = 6f''(z) + 2zf^{(4)}(z)$$

$$f^{(5)}(z) = 8f'''(z) + 2zf^{(5)}(z)$$

Aparentemente la ley de formación de las derivadas viene dada por:

$$f^{(n)}(z) = 2(n-1)f^{(n-2)}(z) + 2zf^{(n-1)}(z)$$

O bien:

$$f^{(n+1)}(z) = 2nf^{(n-1)}(z) + 2zf^{(n)}(z)$$

Luego

$$f^{(k)}(z) = 2(k-1)f^{(k-1)}(z) + 2zf^{(k-1)}(z) \quad \forall k \geq 2$$

así $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, en general

$$f^{(2n)}(0) = 2(2n-1)f^{(2n-2)}(0) + 2 \cdot 0 \cdot f^{(2n-1)}(0) = 0,$$

con la hipótesis inductiva $f^{(2n-2)}(0) = 0$.

Para el caso impar:

$$f^{(2n+1)}(0) = 2 \cdot 2n f^{(2n-1)}(0) + 2 \cdot 0 f^{(2n)}(0) \quad \text{con } f'(0) = 1$$

Si suponemos $f^{(2n-1)}(0) \neq 0$, lo será $f^{(2n+1)}(0)$, luego $f^{(2k+1)}(0) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(3)}(0) = 2 \cdot 2 f^{(1)}(0)$$

$$f^{(5)}(0) = 2 \cdot 4 f^{(3)}(0)$$

En general,

$$f^{(2n+1)}(0) = 2(2n) f^{(2n-1)}(0)$$

multiplicando miembro a miembro y simplificando nos queda $f^{(2n+1)}(0) = 2^n 2^n n!$, luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} z^{(2n+1)}$$

6.6. Integración de Series de Potencias

Ya hemos probado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

representa una función continua en $D(z_0, R)$ (disco de convergencia). En lo que sigue demostraremos que tal serie de potencias puede ser integrada y derivada término a término y además representa una función analítica, todo esto en $D(z_0, R)$. O sea que $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$.

Teorema 6.6.1. *Sea $\partial D(z_0, R)$ la frontera del disco de convergencia (orientada en sentido positivo) de*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y supongamos un contorno $\Gamma \subset \text{int} D(z_0, R)$ y $h(z)$ continua sobre Γ , entonces existe

$$\int_{\Gamma} f(z) h(z) dz$$

y

$$\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n h(z)dz$$

Demostración. Como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es continua en $D(z_0, R)$ y $\Gamma \subset D(z_0, R)$, tenemos de la continuidad de $h(z)$ sobre Γ , que la integral

$$\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz$$

existe. Además de:

$$f(z)h(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (z - z_0)^n h(z) + R_N(z)h(z)$$

donde

$$R_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tenemos que al existir

$$\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz$$

y

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n (z - z_0)^n h(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n h(z) dz$$

también existe

$$\int_{\Gamma} R_N(z)h(z)dz.$$

Bastará entonces probar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} R_N(z)h(z)dz = 0.$$

Ahora bien, $R_N(z) \rightarrow 0$ uniformemente en Γ (Compacto contenido en $D(z_0, R)$) por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall N \geq N_0 \Rightarrow |R_N(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \Gamma$. De aquí que

$$\left| \int_{\Gamma} R_N(z)h(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |R_N(z)||h(z)||dz| < \varepsilon ML \quad \forall N \geq N_0$$

donde

$$M = \max_{z \in \Gamma} |h(z)|$$

(continuidad en compacto), y L es la longitud de Γ . Por tanto:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} R_N(z) h(z) dz \right| = 0$$

luego tomando $N \rightarrow +\infty$ en

$$\int_{\Gamma} f(z) h(z) dz = \sum_{n=0}^{n-1} a_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n h(z) dz + \int_{\Gamma} R_N(z) h(z) dz$$

se tiene el resultado del teorema. \square

Observación 6.6.1. (i) Cuando $h(z) = 1$, tenemos:

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$$

y si Γ es un contorno contenido en $D(z_0, R)$ uniendo a z_0 con $s \in D(z_0, R)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{z_0}^s (z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (s - z_0)^{n+1} \end{aligned}$$

(ii) Observe que el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (s - z_0)^{n+1}$$

es también R , ya que:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

Ejercicio: Sí $a_n, b_n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$

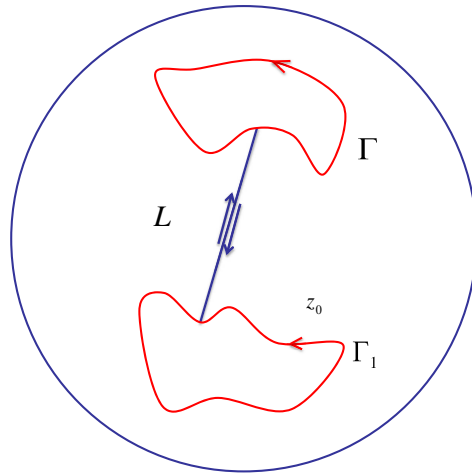


Figura 6.2: $\Gamma_0 = \Gamma + L + \Gamma_1 + \bar{L}$

Teorema 6.6.2. (Recíproco del Teorema de Taylor)

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

en $D(z_0, R)$, entonces $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$

Demostración. Por teorema 6.3.1 sabemos que $f(z)$ es continua en $D(z_0, R)$ sea Γ un contorno cerrado comenzando y terminando en z_0 , y contenido en $D(z_0, R)$ luego, la parte (1) de la observación anterior tendríamos que el segundo miembro sería cero, luego

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para cualquier contorno cerrado Γ que pase por z_0 . Si Γ_1 es cualquier contorno cerrado contenido en $D(z_0, R)$ y que no pase por z_0 , tomando un punto de él, digamos z_1 , y lo unimos mediante un segmento de recta con z_0 (L), como $D(z_0, R)$ es convexo, $L \subset D(z_0, R)$ y formamos el contorno cerrado

$\Gamma_0 = \Gamma + L + \Gamma_1 + \bar{L}$ Luego como $z_0 \in \Gamma_0$ y $z_0 \in \Gamma$ tenemos:

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = 0 = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

y además

$$\int_{\bar{L}} f(z) dz = - \int_L f(z) dz$$

así que:

$$0 = \int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_L f(z)dz - \int_L f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz$$

luego por el Teorema de Morera $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$ \square

Teorema 6.6.3. (Forma General del Teorema de Liouville)

Suponga que $f(z)$ es una función entera y que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$, $\forall z$; donde A, B y k son números positivos. Pruebe que $f(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo k .

Demostración. Como $f(z)$ es entera entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donde $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$.

Es suficiente probar que $a_n = 0$ para $n \geq k + 1$ y de esta forma $f(z)$ será un polinomio de grado a lo sumo k .

Ahora bien:

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz; \quad \forall R > 0.$$

de donde:

$$\begin{aligned} |f^n(0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D(0,R)} \frac{|f(z)|}{|z^{n+1}|} |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D(0,R)} \frac{A + B|z|^k}{|z|^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{A}{R^{n+1}} + B(R)^{k-n-1} \right) 2\pi R \\ &= n! \left(\frac{A}{R^n} + B(R)^{k-n} \right). \end{aligned}$$

Luego si $k - n < 0$, es decir, $n > k$ y hacemos tender $R \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$|f^n(0)| \leq 0; \quad \forall n \geq k + 1.$$

(Nótese que podemos hacer $R \rightarrow \infty$ pues f es entera), de donde $a_n = 0$, $\forall n > k$.

\square

Teorema 6.6.4. Una serie de potencias puede ser derivada término a término en $D(z_0, R)$ (disco de convergencia) más aún,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Demostración. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

sabemos por el teorema anterior que $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$, es decir, que existe $f'(z)$ en $D(z_0, R)$, y por la fórmula integral de Cauchy para $n = 1$, tenemos que para $\Gamma = \partial D(s, r) \subset \partial D(z_0, R)$ (y tal que $z_0 \in \text{ext}(\partial D(s, r))$ ver figura 6.3)

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - s)^2} = \int_{\Gamma} f(z) h(z) dz$$

donde

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i(z - s)^2}$$

luego

$$f'(s) = \int_{\Gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) h(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z - z_0)^n}{(z - s)^2} dz$$

por otra parte, usando nuevamente la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada tenemos para $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z - z_0)^n}{(z - s)^2} dz = \frac{d}{dz} ((z - z_0)^n) \Big|_{z=s} = n(s - z_0)^{n-1}$$

luego

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s - z_0)^{n-1}$$

ya que para $n = 0$

$$\frac{a_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - s)^2} = a_0 \frac{d}{dz} (1) \Big|_{z=s} = 0$$

Es fácil notar que el radio de convergencia para

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

es R .

□

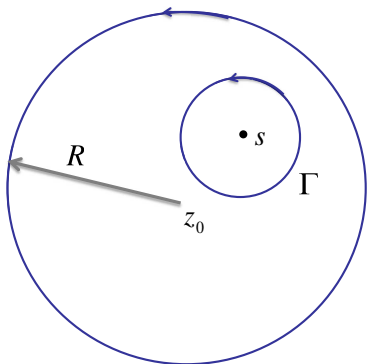


Figura 6.3: $\partial D(s, r) \subset \partial D(z_0, R)$

Observación 6.6.2. Hemos probado que una serie de potencias es analítica y su derivada es otra serie de potencias luego también es analítica, esto se puede hacer en forma reiterada, de manera que en $D(z_0, R)$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

pruebe esta última igualdad por inducción.

Teorema 6.6.5. (Unicidad para series de potencias)

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge en un disco $D(z_0, r)$ (no necesariamente el disco de convergencia) entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Demostración. Sea R el radio de convergencia de la serie, luego $r \leq R$, $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$ lo será en $D(z_0, r)$, además del teorema anterior y la observación, tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \forall z \in D(z_0, r) \\ &= \frac{k!}{(k-k)!} a_k (z - z_0)^0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\therefore f^{(k)}(z) = k!a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

Evaluando en la expresión anterior en $z = z_0$, tenemos: $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$

$$\therefore a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

□

Corolario 6.6.1. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

en $D(z_0, r)$ entonces

$$a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Más aún, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = 0 \quad \forall z \in D(z_0, r),$$

entonces $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 6.6.1. Halle el desarrollo de Taylor de $(4z^2 + 2)e^{z^2}$

Solución:

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

$$(e^{z^2})' = 2ze^{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nz^{2n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^{2n-1}}{(n-1)!}$$

volviendo a derivar:

$$\frac{d^2}{dz^2}(e^{z^2}) = 2e^{z^2} + 4z^2e^{z^2} = (4z^2 + 2)e^{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(2n-1)}{(n-1)!} z^{2n-2}$$

luego

$$(4z^2 + 2)e^{z^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{k!} z^{2k}$$

válida en \mathbb{C} .

Ejemplo 6.6.2. Encuentre la serie de Taylor de $f(z) = \text{Log}(z + 1)$.

Solución: Derivando respecto a z tenemos que

$$\frac{d}{dz}(\text{Log}(z + 1)) = \frac{1}{1 + z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

así

$$f(z) = \int_0^z \frac{du}{1 + u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k + 1}$$

Válido en $D(0, 1)$ pues $\text{Log}(z + 1)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{(x, 0) : x \leq -1\}$

6.7. Series de Laurent

El siguiente teorema, el cual es una generalización del teorema de Taylor es debido a Laurent.

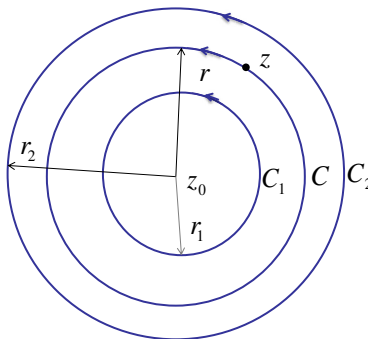


Figura 6.4: C contenida en S , recorrida en sentido antihorario

Teorema 6.7.1. Sea S la región acotada por las circunferencias concéntricas C_1 y C_2 , de centro z_0 , y radios r_1, r_2 con $r_1 < r_2$.

Sea $f(z)$ analítica dentro de S y sobre C_1 y C_2 entonces para cada punto z en el interior de S , $f(z)$ puede representarse por la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La integral a lo largo de C_1 y C_2 es tomada en sentido positivo.

Demostración. Sea $z \in \mathcal{S}$, y sea C una circunferencia de radio r y centro z_0 tal que $z \in C$, luego $r_1 < r < r_2$. (ver figura 6.4)

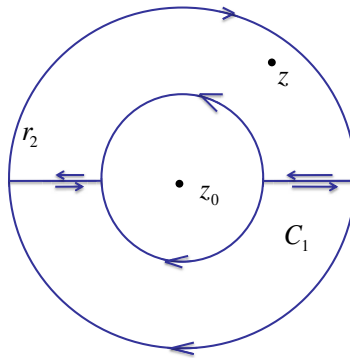


Figura 6.5:

Ahora bien, para $z \in \mathcal{S}$ consideramos los contornos de la figuras 6.5 y 6.6

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + L_1 + \varepsilon_1 + L_2} \frac{f(s)ds}{s-z} \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_2 + \bar{L}_2 + \varepsilon_2 + \bar{L}_1} \frac{f(s)ds}{s-z} = 0$$

(note que $\frac{f(s)}{s-z}$ es Analítica en el contorno cerrado $\gamma_2 + \bar{L}_2 + \varepsilon_2 + \bar{L}_1$) Así que sumando las integrales anteriores y cancelando las que son evaluadas en contornos opuestos tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{f(s)}{s-z} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds \end{aligned}$$

Ahora bien, por un razonamiento análogo al realizado en el teorema de la Serie de Taylor, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds$$

note que las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds$$

no son iguales a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pues $f(z)$ no es analítica en $\text{int}(C_2)$. Consideremos ahora la segunda integral, es decir,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{s-z}$$

procedamos como lo hicimos para obtener la expansión de Taylor, es decir, vamos a construir el integrando de la segunda integral:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s-z} &= \frac{1}{z-z_0-s+z_0} = \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\frac{s-z_0}{z-z_0}\right]} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \left(1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} \right) \\ &= \frac{1}{z-z_0} \left(1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \frac{(s-z_0)^2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{(s-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{(s-z_0)^n (z-z_0)}{(z-z_0)^n (z-s)} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{f(s) ds}{2\pi i}$ e integrando a lo largo de C_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{s-z} &= \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(s) ds + \frac{1}{(z-z_0)^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (s-z_0) f(s) ds \\ &+ \dots + \frac{1}{(z-z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (s-z_0)^{n-1} f(s) ds + \frac{1}{(z-z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(s-z_0)^n}{z-s} f(s) ds \end{aligned}$$

O sea:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{k=1}^n b_k(z-z_0)^{-k} + T_n(z)$$

donde

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-k+1}} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

y

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_0)^n} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(z-s)(s-z_0)^{-n}} ds$$

Ahora bien:

$$|T_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z-z_0|^n} \int_{C_1} \frac{|f(s)||ds|}{|z-s||s-z_0|^{-n}}$$

y como $|z-z_0| = r$, $|s-z_0| = r_1$, entonces: $|z-s| \geq |z-z_0| - |s-z_0| = r - r_1$, de donde

$$0 \leq |T_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^n} \frac{M2\pi r_1}{r_1^{-n}(r-r_1)} = \frac{Mr_1}{r-r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n$$

de donde M es el $\max_{s \in C} |f(s)|$, además como $0 < r_1 < r$ tenemos que:

$$0 < \frac{r_1}{r} < 1, \text{ así } \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \rightarrow 0 \text{ conforme } n \rightarrow \infty$$

con lo que $|T_n(z)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ luego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$$

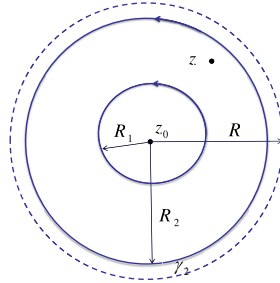
□

Observación 6.7.1. 1. Sea C una curva cerrada, simple tal que $\overline{\text{int}(C_1)} \subset \text{int}(C)$ y además $\text{int}(C) \subset \text{int}(C_2)$. Entonces por el teorema de Cauchy para múltiplemente conexo, tenemos:

$$\int_{C_2} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^n} = \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^n} \quad \text{y} \quad \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}} = \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}}$$

Por lo que:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

Figura 6.6: Anillo de radios R_1 y R_2

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = a_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = b_{n+1}, \quad n = -1, -2, \dots \end{aligned}$$

2. Decimos que z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_0 , pero si lo es en $D(z_0, R) - \{z_0\}$, para un cierto $R > 0$.

O sea, $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R)$, excepto en z_0 , entonces $f(z)$ se puede desarrollar en serie de Laurent.

En efecto, sea $z \in D(z_0, R) - \{z_0\}$ y sea R_1 y R_2 tales que: $0 < R < |z-z_0| < R_2 < R$. Aplicando Laurent en el anillo de radios R_1 y R_2 (ver figura 6.8), tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Esto es aplicable inclusive si $R = +\infty$. En adelante usaremos la notación $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ donde $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq +\infty$, para denotar el anillo con radios r_1 y r_2 .

3. Finalmente si $f(z)$ es analítica en $D(z_0, r_2)$ $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego la serie de Laurent se transforma en Taylor.

Suponiendo probada la unicidad del desarrollo de Laurent (Lo cual se propone como ejercicio al lector) hacemos algunos ejemplos de como calcular el desarrollo de Laurent por métodos indirectos.

Ejemplo 6.7.1. Halle el desarrollo de Laurent de

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 5z + 6} \quad \text{en} \quad (a) |z| < 2 \quad (b) 2 < |z| < 3 \quad (c) |z| > 3.$$

Solución:

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 + 5z + 6} = 1 + \frac{3}{z + 2} - \frac{8}{z + 3}$$

(a) $|z| < 2$

$$\frac{3}{z + 2} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{2^k}, \quad \text{pues } \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{8}{z + 3} = \frac{8}{3} = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{3}\right)} = \frac{8}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{3^k}, \quad \text{pues } \left|\frac{z}{3}\right| < \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

Luego

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{3}{2} - \frac{8}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3}{2^{k+1}} - \frac{8}{3^{k+1}} \right) z^k \\ &= -\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3}{2^{k+1}} - \frac{8}{3^{k+1}} \right) z^k \end{aligned}$$

(b) $2 < |z| < 3$

Como $\frac{2}{|z|} < 1$ y $\frac{|z|}{3} < 1$, procedemos así:

$$\frac{3}{z + 2} = \frac{3}{z \left(1 + \frac{2}{z}\right)} = \frac{3}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 2^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{z^k}$$

$$\frac{8}{z + 3} = \frac{8}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{3}\right)} = \frac{8}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^k} = \frac{8}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{3^k}$$

luego

$$f(z) = -\frac{5}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{z^k}$$

(c) $|z| > 3$ entonces

$$\frac{3}{|z|} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{2}{|z|} < \frac{3}{|z|} < 1$$

luego:

$$\frac{3}{z+2} = \frac{3}{z} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{z}\right)} = \frac{3}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 2^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{z^k}$$

$$\frac{8}{z+3} = \frac{8}{z} \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{z}\right)} = \frac{8}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8 \cdot 3^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{8 \cdot 3^{k-1}}{z^k}$$

o sea:

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(3 \cdot 2^{k-1} - 8 \cdot 3^{k-1})}{z^k}$$

Ejemplo 6.7.2. Para $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ encuentre la expansión en serie de Laurent alrededor de (a) $z = 0$ (b) $z = -1$. En cada caso determine la región donde es válida.

Solución: Se sabe que el desarrollo de la serie binomial

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} z^k + \dots$$

es válido para $|z| < 1$.

(a) En este caso $z_0 = 0$, entonces necesitamos una serie de potencias de z . Así:

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} (1+z)^{-1} = \frac{1}{z^2} (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots) \quad 0 < |z| < 1$$

Así la expansión en serie de Laurent requerida es

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

válida para $0 < |z| < 1$. El valor $z = 0$ debe ser excluido debido a los dos primeros términos de la serie. La región $0 < |z| < 1$ es un ejemplo de un disco agujereado.

(b) En este caso $z_0 = -1$, entonces necesitamos una serie de potencias de $(z + 1)$. Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(1+z)} &= \frac{1}{z+1}(z+1-1)^{-2} \\ &= \frac{1}{z+1}(1-(z+1))^{-2} \\ &= \frac{1}{z+1}[1+2(z+1)+3(z+1)^2+\dots] \\ &= \frac{1}{z+1}+2+3(z+1)+4(z+1)^2+\dots \end{aligned}$$

es válida para $0 < |z+1| < 1$.

Ejemplo 6.7.3. Demostrar que la serie de Laurent que representa a la función

$f(z) = e^{g(z)}$ donde $g(z) = \frac{u}{2}(z - \frac{1}{z})$, en la región $|z| > 0$ esta dada por:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^n, \text{ donde } J_n(u) = (-1)^n J_{-n}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - u \sin \theta) d\theta$$

(Función de Bessel de primera especie de orden n).

Solución: Sea $A(0; 0, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$ dado que $f(z) = e^{\frac{u}{2}(z - \frac{1}{z})}$ es analítica en $A(0; 0, \infty)$ tiene serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \text{ con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad n \in \mathbb{Z}, \quad C : z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

luego: $z - \frac{1}{z} = z - \bar{z} = 2i \sin \theta$, por lo tanto $f(\theta) = e^{\frac{u}{2} 2i \sin \theta} = e^{iu \sin \theta}$. o sea

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iu \sin \theta} i e^{i\theta}}{e^{i\theta(n+1)}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(u \sin \theta - n\theta)} d\theta$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \theta - n\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(u \sin \theta - n\theta) d\theta$$

la segunda integral es nula, pues si hacemos $\theta = 2\pi - \lambda$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sin(u \sin \theta - n\theta) d\theta = \int_{2\pi}^0 -\sin(u \sin \lambda - \lambda n)(-d\lambda) \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin(u \sin \lambda - \lambda n) d\lambda = -I \end{aligned}$$

Por lo que $I = 0$.

Como a_n depende de u , en realidad debe escribirse $a_n(u)$, y lo denotaremos por:

$$J_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (\text{función de Bessel de } 1^{\text{era}} \text{ especie de orden } n)$$

luego

$$e^{\frac{u}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u) z^n$$

Probemos que $J_{-n}(u) = (-1)^n J_n(u)$

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - u \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - u \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\theta - u \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

Haciendo $\theta = \beta + \pi$ en la segunda integral, nos queda

$$\begin{aligned} J_n(u) &= I_1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\beta + n\pi + u \sin \beta) d\beta \\ &= I_1 + (-1)^n I_2, \quad \text{donde } I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\beta + u \sin \beta) d\beta \end{aligned}$$

ahora bien:

$$\begin{aligned} J_{-n}(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta + u \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta + u \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\theta + u \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

Haciendo otra vez $\theta = \beta + \pi$ en la segunda integral tenemos:

$$\begin{aligned} J_{-n}(u) &= I_2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(n\beta + n\pi - u \sin\beta) d\beta \\ &= I_2 + (-1)^n I_1 = (-1)^n J_n(u) \end{aligned}$$

De esta forma podemos escribir:

$$\begin{aligned} e^{\frac{u}{z}(z-\frac{1}{z})} &= J_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u)z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(u)z^n \\ &= J_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(u)z^{-n} \\ &= J_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(u)z^{-n} \\ &= J_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u) \left[z^n + \frac{(-1)^n}{z^n} \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 6.7.4. Halle la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4(1-z^2)}$$

en $A(0; 0, 1)$

Solución:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } \frac{1}{z^4(1-z^2)} = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}$$

vamos a efectuar el producto del Cauchy para obtener la serie de Laurent de

$$e^z \frac{1}{z^4(1-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) \text{ donde } a_n(z) = \frac{z^n}{n!} \text{ y } b_n(z) = z^{2k} \text{ si } n = 2k$$

$b_n(z) = 0$ en otro caso.

Caso par

$$\begin{aligned}
C_{2k}(z) &= a_0(z)b_{2k}(z) + \dots + a_{2k}b_0 \\
&= \sum_{s=0}^k a_{2s}(z)b_{2k-2s}(z) \\
&= \sum_{s=0}^k \frac{z^{2s}}{(2s)!} z^{2k-2s} \\
&= \sum_{s=0}^k \frac{1}{(2s)!} z^{2k}
\end{aligned}$$

Caso impar

$$\begin{aligned}
C_{2k+1}(z) &= a_1(z)b_{2k}(z) + \dots + a_{2k-1}b_2 + a_{2k+1}(z)b_0(z) \\
&= \sum_{s=0}^k a_{2s+1}(z)b_{2k+1-(2s+1)}(z) \\
&= \sum_{s=0}^k \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} z^{2k-2s} \\
&= \sum_{s=0}^k \frac{1}{(2s+1)!} z^{(2k+1)}
\end{aligned}$$

Así, para $g(s) = \frac{1}{(2s)!}$ si k es par y $g(s) = \frac{1}{(2s+1)!}$ si k es impar, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{z^4(1-z^2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k g(s) \right) z^{k-4} \\
&= \frac{g(0)}{z^4} + \frac{\sum_{s=0}^1 g(s)}{z^3} + \frac{\sum_{s=0}^2 g(s)}{z^2} + \frac{\sum_{s=0}^3 g(s)}{z} + \sum_{k=4}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k g(s) \right) z^{k-4} \\
&= \frac{1}{z^4} + \frac{1 + \frac{1}{6}}{z^3} + \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24}}{z^2} + \frac{1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{120}}{z} + \sum_{k=4}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{k+4} g(s) \right) z^k \\
&= \frac{1}{z^4} + \frac{7}{6z^3} + \frac{37}{24z^2} + \frac{141}{120z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{k+4} g(s) \right) z^k
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.7.5. *Calcula los términos hasta el grado cuarto del desarrollo en series de potencias de z de las funciones:*

(a) $f(z) = (\text{Log}(1 - z))^2$

(b) $f(z) = e^{z/(1-z)}$

Solución:

(a) Usando el desarrollo en serie de potencias de la función $\text{Log}(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) = (\text{Log}(1 - z))^2 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right)^2 \\ &= \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \right) \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \right) \\ &= z^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) z^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) z^4 + \dots \\ &= z^2 + z^3 + \left(\frac{11}{12} \right) z^4 + \dots \end{aligned}$$

(b) Usando el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial y que

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(z) = e^{z/(1-z)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m \right)^n \\
 &= 1 + (z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots) + \frac{1}{2} (z + z^2 + z^3 + z^4 \dots)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6} (z + z^2 + z^3 + z^4 \dots)^3 + \frac{1}{24} (z + z^2 + z^3 + z^4 \dots) + \dots \\
 &= 1 + z + \left(1 + \frac{1}{2}\right) z^2 + \left(1 + 1 + \frac{1}{6}\right) z^3 + \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) z^4 + \dots \\
 &= 1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \frac{73}{24} z^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.7.6. Halle el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en $z_0 = 0$ y $z_0 = \infty$ (cuando sea posible) e indique en que anillo son convergentes:

$$(a) f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

$$(b) f(z) = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Solución:

(a) Veamos en primer lugar los desarrollos de Laurent alrededor de $z_0 = 0$. Es claro que si $a = b = 0$, entonces para $|z| > 0$,

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z^2}$$

Si $0 = a \neq b$, (el caso $0 = b \neq a$ es simétrico), tenemos

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z} \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{bz} \frac{1}{1-z/b}$$

Luego, si suponemos $0 < |z| < |b|$ la última expresión es igual a:

$$= -\frac{1}{bz} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{b^{n+1}} = -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+2}}.$$

Si $a = b \neq 0$, tenemos que

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-a} \right) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{a^{n+2}} z^n$$

si $|z| < |a|$.

Finalmente si $0 \neq a \neq b \neq 0$, tenemos, descomponiendo en fracciones simples, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b} \frac{1}{z-a} + \frac{1}{b-a} \frac{1}{z-b} \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b} \frac{1}{1-z/b} - \frac{1}{a} \frac{1}{1-z/a} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b} \right)^n - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n, \end{aligned}$$

si $|z| < \min\{|a|, |b|\}$.

Veamos ahora los desarrollos de Laurent alrededor de $z = \infty$.

Como antes, si $a = b = 0$, entonces

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z^2} \quad \text{si } 0 < |z| < \infty.$$

Si $0 = a \neq b$, (el caso $0 = b \neq a$ es simétrico), tenemos que

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z} \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-b/z} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z} \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n-2}}{z^n},$$

si $|b| < |z| < \infty$. Si $a = b \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-a} \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)a^n}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a^{n-2}}{z^n} \end{aligned}$$

si $|a| < |z| < \infty$.

Finalmente si $0 \neq a \neq b \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{1-b/z} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{z^n} \right), \end{aligned}$$

si $\max\{|a|, |b|\} < |z| < \infty$.

(b) Usando el desarrollo en serie de potencias de z de la función $\operatorname{sen} z$, (la cual proponemos como ejercicio) obtenemos que, si $0 < |z| < \infty$,

$$\operatorname{Sen} \left(\frac{1}{z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

6.8. Ejercicios Del Capítulo 6

1. Encuentre el dominio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})z^n$.

2. Determine el radio de convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (z-2)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{Log}(n)^n}{n!}\right) z^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n + 2}\right) z^n$

3. Para que disco $|z| \leq r$ las series en el ejercicio anterior convergen uniformemente.

4. Muestre que las dos series

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right) \frac{(1-z)^n}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{(z-1)^n}{n}$$

tienen el mismo círculo de convergencia.

5. Muestre que las dos series

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1}$$

tienen el mismo radio de convergencia.

6. Muestre que el radio de convergencia de la siguiente serie es la unidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right) z^n$$

donde α es un número complejo diferente de un entero negativo.

7. Demuestre el criterio de Abel, el cual establece lo siguiente:

Supongamos que los coeficientes c_0, c_1, \dots forman una sucesión decreciente de números positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad \text{Muestre que la serie } \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge para todos los puntos del círculo unitario, excepto posiblemente en $z = 1$.

8. Muestre que si la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge en $z = z_1$ y diverge en $z = z_2$, entonces esta converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ y diverge para todo z tal que $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ y así su radio de convergencia R satisface la desigualdad $|z_1 - z_0| \leq R \leq |z_2 - z_0|$

9. Muestre que la serie de potencias converge absolutamente y uniformemente en cualquier contorno γ contenida en el interior del círculo de convergencia de la serie de potencia.

10. Encuentre la serie de Maclaurin de las siguientes funciones y determine en cada caso el círculo de convergencia:

(a) e^z

- (b) $\sin z$
 (c) $\cos z$
 (d) $\sinh z$
 (e) $\cosh z$
 (f) $\log(1 + z^2)$
 (g) $\frac{z}{1 - z}$
 (h) $\frac{1}{1 + z}$

11. Demuestre que

$$(1 - z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \quad \text{en } |z| < 1 \quad \text{donde } (\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\dots(\alpha + k - 1)$$

12. Sea $f(z)$ analítica en el interior de un círculo C con centro z_0 . Suponga que $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ muestre que $f(z) \equiv 0$ en todos los puntos interiores a C .

13. Muestre que para todo los puntos z interiores al círculo $|z| = 1$ se cumple $|\log(1 + z)| \leq -\log(1 - |z|)$.

14. Muestre que la expresión en serie de Laurent, en potencias de z , que representa a la función

$$f(z) = \sinh\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{en } |z| > 0 \quad \text{esta dada por } \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sinh(2 \cos \theta) d\theta$$

15. Encuentre la expansión en serie de Laurent para las siguientes funciones, en las regiones indicadas (alrededor de z_0)

- (a) $\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}$ (i) $0 < |z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $|z| > 2$
 (b) $\frac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $|z| > 2$
 (c) $\frac{z^2+1}{(z+1)(z+3)}$ (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 3$, (iii) $|z| > 3$
 (d) $(z - \lambda)^{-k}$ (i) $|z| < |\lambda|$ $k = 1, 2, 3, \dots$ (ii) $|z| > |\lambda|$ $k = 1, 2, 3, \dots$

Capítulo 7

CÁLCULO DE RESIDUOS

7.1. Singularidades y Ceros

Definición 7.1.1. $f(z)$ tiene un cero en z_0 , si $f(z_0) = 0$ además z_0 es un cero aislado, si existe $\rho > 0$ tal que $f(z_0) = 0$ pero $f(z) \neq 0 \forall z \in D(z_0, \rho) - \{z_0\}$. Un punto z_0 es llamado un punto singular o una singularidad de la función $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en z_0 , pero toda vecindad de z_0 contiene al menos un punto donde $f(z)$ es analítica. z_0 es una singularidad aislada, si $f(z)$ no es analítica en z_0 , pero es analítica en alguna vecindad de z_0 suprimiendo z_0 .

Ejemplo 7.1.1. La función

$$f(z) = \frac{1}{z-3}$$

es analítica excepto en $z = 3$, así $z = 3$ es una singularidad aislada de $f(z)$

Ejemplo 7.1.2. La función

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

tiene un número infinito de singularidades aisladas, dadas por $z = \frac{1}{k\pi}$, con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ nótese además que $z = 0$ no es una singularidad aislada de $f(z)$, ya que $\{\frac{1}{k\pi}\}_{k=0}^{\infty}$ converge a 0.

Observación 7.1.1. Si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, la expansión en serie de Laurent de $f(z)$ converge para $0 < |z - z_0| < r$, donde r es la distancia de z_0 a la singularidad más próxima de z_0 distinta de z_0 misma. (Si z_0 es la única singularidad

$r = +\infty$).

En este caso:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r \quad (*)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes dados en el Teorema de Laurent.

La parte potencias negativas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}$$

es llamada La Parte Principal de $f(z)$ en la singularidad aislada z_0 , es esta parte la que caracteriza las singularidades de $f(z)$.

De hecho habrá tres tipos de singularidades de acuerdo a los valores de b_n

Definición 7.1.2. (a) Si $b_n = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ en (*) entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad z \neq z_0 \quad \text{y redefiniendo} \quad f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$$

entonces podemos remover la singularidad, por lo que en este caso $z = z_0$ será una singularidad removible.

(b) Si $b_n = 0$ excepto para un número finito de valores de n , diremos que $z = z_0$ es un polo de $f(z)$, si $b_m \neq 0$, $m \geq 1$, es el último coeficiente no nulo en (*), y $b_n = 0$ $n > m$ diremos que $z = z_0$ es un polo de orden m de $f(z)$ en este caso

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

si $m = 1$, $z = z_0$ lo llamaremos un polo simple. Nótese que $z = z_0$ se llamará una singularidad aislada de $f(z)$.

(c) Si un número infinito de b_n no se anula, es decir si $b_n \neq 0$ para un número infinito de n , $z = z_0$ se llamará una singularidad esencial. También llamaremos singularidad esencial a cualquier singularidad no aislada de $f(z)$.

En Resumen, si $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $z = z_0$ es una singularidad removible, $b_n \neq 0$ para un número finito de n , $z = z_0$ es un polo y $b_n \neq 0$ para un número infinito de n , $z = z_0$ sea una singularidad esencial, a una singularidad no aislada también se llamará singularidad esencial.

Ejemplo 7.1.3. Si

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \right) \\
 &= \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}
 \end{aligned}$$

aquí $b_n = 0 \forall n = 1, 2, 3, \dots$ luego f tiene una singularidad evitable en 0. Más aún, si

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = a_0 = +\frac{1}{2},$$

entonces \widehat{f} es analítica en \mathbb{C} , donde

$$\widehat{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq 0 \\ +\frac{1}{2} & \text{si } z=0 \end{cases}$$

Ejemplo 7.1.4.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+5)!}
 \end{aligned}$$

Luego $f(z)$ tiene un polo de orden 5 en $z = 0$.

Ejemplo 7.1.5.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{3n}} + 1 \text{ tiene una singularidad esencial en } z = 0.$$

Definición 7.1.3. Un punto $z = z_0$ es un cero de orden m , con $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, de $f(z)$, si $f(z)$ es analítica en z_0 , $f^{(k)}(z_0) = 0$ $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ y $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Definición 7.1.4. (Singularidades en Infinito) Sea $f(z)$ una función analítica en $|z| > r$ para algún $r > 0$ y consideremos la función $g(z) = f(\frac{1}{z})$ que, por tanto, es analítica en $|z| < 1/r$. Decimos que $f(z)$ es analítica en $z = \infty$ si $g(z)$ es analítica en $z = 0$. Decimos que $f(z)$ tiene en $z = \infty$ una singularidad evitable, un cero de orden k , un polo de orden k , una singularidad esencial, si lo mismo ocurre para $g(z)$ en $z = 0$.

Teorema 7.1.1. Sea $f(z)$ analítica en z_0 , entonces $f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 si y solo si $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Demostración. Dado que $f(z)$ es analítica en z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en $D(z_0, R)$ para algún $R > 0$, con

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

y siendo z_0 un cero de orden m tenemos que $a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, con

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

Más aun.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

así que llamando $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n$ la cual es analítica en $D(z_0, R)$

y con $g(z_0) = a_n \neq 0$ tenemos que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ analítica en $D(z_0, R)$ y $g(z_0) \neq 0$.

Recíprocamente, si lo anterior se cumple, tenemos que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

en $D(z_0, R)$ y $g(z_0) = a_0 \neq 0$ luego

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n, \text{ con}$$

$$a_{n-m} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = c_n, \text{ de donde } c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0 \text{ lo que implica}$$

que $f^{(k)}(z_0) = 0$ $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ y $c_m = a_0 \neq 0$. Luego $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, por lo que z_0 es un cero de orden m de $f(z)$. \square

Ejemplo 7.1.6. $f(z) = \sin^2 z$ tiene un cero de orden 2 en $z = 0$ ya que:

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z, f''(z) = 2(\cos^2 z - \sin^2 z) \text{ luego } f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 2 \neq 0$$

Teorema 7.1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en Ω , si $f(z)$ no es la función nula, entonces todos los ceros de $f(z)$ son puntos aislados, es decir si $f(z_0) = 0$, existe $r > 0$ tal que $|z - z_0| < r$ y $f(z) = 0$ entonces $z = z_0$.

Demostración. Mostraremos el contrarrecíproco, es decir, si existe un cero no aislado de $f(z)$, entonces $f(z)$ es idénticamente nula.

Si z_0 es el cero no aislado de f , entonces para todo disco $D(z_0, r) \subset \Omega$,

$f|_{D(z_0, r)} \equiv 0$. En efecto, como $D(z_0, r) \subset \Omega$,

$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ para $|z - z_0| < r$, luego $a_k = 0$ para todo k , pues de no ser así, sea k el entero más pequeño tal que $a_k \neq 0$ obteniendo

$$f(z) = (z - z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^k g(z)$$

$g(z)$ es analítica sobre $D(z_0, r)$ y $g(z_0) = a_k$. Por continuidad de g , $g(z) \neq 0$ en una vecindad de z_0 , es decir, z_0 sería un cero aislado de $f(z)$, lo cual es una contradicción. Así que $f(z) = 0 \forall z \in D(z_0, r)$.

Mostremos ahora que $f(z) = 0 \forall z \in \Omega$. Sea $z_0 \in \Omega$ un cero no aislado, puesto que Ω es abierto y conexo, también es conexo por caminos, sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un camino tal que $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z$. Consideremos el conjunto

$$I = \{t \in [0, 1] / f \circ \gamma|_{[0, t]} \equiv 0\} \subset [0, 1],$$

$I \neq \emptyset$ pues $0 \in I$. Por consiguiente al ser no vacío y acotado admite un supremo τ .

Afirmación: $\tau > 0$:

En efecto en un disco $D(z_0, r)$ la restricción de f en la porción del camino incluido en el disco es idénticamente nula. $z_1 = \gamma(\tau)$ es un cero de f por la continuidad de γ y f , en efecto es suficiente hacer tender t a τ por la izquierda. $\tau = 1$, pues si $\tau < 1$, se tendría que $z_1 \neq z$ en cualquier disco $D(z_1, \tau) \subset \Omega$, y z_1 no es un cero aislado, por lo que f es idénticamente nula en este disco y en particular en la porción del camino incluida en este disco y por consiguiente τ no sería el supremo de I .

Finalmente, como $\tau = 1$, $f(z)$ es nula sobre el camino que une a z_0 con z , en consecuencia $f(z) \equiv 0$ en Ω . \square

Observación 7.1.2. Si definimos $Z(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, el conjunto de ceros de $f(z)$, el teorema anterior puede enunciarse de la forma siguiente:

$$f(z) \equiv 0 \text{ en } \Omega \Leftrightarrow Z(f) \text{ posee un punto límite en } \Omega$$

Corolario 7.1.1. Si $f(z)$ es nula en todo un entorno de $z_0 \in \Omega$ entonces $f(z)$ es nula en todo Ω .

Demostración. Basta notar que z_0 es un punto límite de $Z(f)$ contenido en Ω . \square

Corolario 7.1.2. [Principio de Prolongación Analítica]

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas en Ω . Si $f(z)$ y $g(z)$ coinciden en todo un entorno de $z_0 \in \Omega$ entonces $f(z)$ y $g(z)$ coinciden en todo Ω .

Demostración. Aplique el corolario anterior a $f(z) - g(z)$. \square

Corolario 7.1.3. [Principio de Identidad]

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas en Ω . Si $E = \{z/g(z) = f(z)\} \neq \emptyset$ y tiene un punto no aislado en E , entonces $f \equiv g$ en Ω .

O sea, dos funciones que coincidan en un punto de acumulación son iguales.

Demostración. Considere $H = f - g$ y use el teorema 7.1.2. \square

Ejemplo 7.1.7. Sea $D = D(0, 2)$, ¿Existe una función analítica en D que verifique que $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 5, 6, 7, \dots$?

Solución:

Supongamos que existe una función analítica en D que satisfaga que: $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 5, 6, 7, \dots$

Las sucesiones $\left\{\frac{i}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ y $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ tienen un punto de acumulación dentro de D que son 0 y 1, respectivamente.

Ahora bien, las funciones analíticas $g(z) = z^2$ y $h(z) = z - 1$ coinciden con $f(z)$ en $\frac{i}{n}$, y $\frac{n+1}{n}$ respectivamente, luego si existiera tal función $f(z)$ analítica en D , el principio de identidad implicaría que $g(z) = h(z)$ en D , lo cual es una contradicción.

Proposición 7.1.1. Suponga que $f(z)$ es analítica en una vecindad del punto $z = z_0$ excepto posiblemente en z_0 , entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 , donde m es un entero positivo, si y solo si la función $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en $z = z_0$ y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

Demostración. Supongamos que $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$, esto es,

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $b_m \neq 0$. Luego:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} [b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}]$$

de donde:

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^m a_n (z - z_0)^n$$

tiene una singularidad removible en $z = z_0$, además:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \doteq b_m \neq 0$$

recíprocamente, si $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \doteq k \neq 0$$

entonces, $g(z)$ puede ser escrita en expresión de Laurent alrededor de z_0 con coeficientes de $(z - z_0)^n$ con $n < 0$, todos nulos, así que:

$$(z - z_0)^m f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Luego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-m}$$

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{(z - z_0)} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

denotando por b_{m-n} a c_n para $n < m$ y para a_{n-m} para $n \geq m$

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ya que

$$b_m = c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

tenemos que $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$ □

Corolario 7.1.4. $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Corolario 7.1.5. $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si z_0 es un cero de orden m de $\frac{1}{f(z)}$.

Demostración.(Ejercicio)

Proposición 7.1.2. Sea $f : \Omega = \{z/0 < |z - z_0| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Si f es acotada, entonces la singularidad es removible

Demostración.

Consideremos la serie de Laurent de $f(z)$ en el anillo $\{z/0 < |z - z_0| < r\} = \Omega$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}} ds$$

con $0 < \rho < r$. Si $f(z)$ es acotada en Ω , existe, $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M \forall z \in \Omega$, por consiguiente

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{k+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^k}$$

para $k < 0$, hacemos tender $\rho \rightarrow 0$, lo cual conduce a $|a_k| = 0$.

Corolario 7.1.6. Si $f(z)$ posee una singularidad esencial en z_0 entonces existe una sucesión $z_n \rightarrow z_0$ tal que $f(z_n) \rightarrow 0$

Demostración. Por el absurdo, supongamos lo contrario, es decir que toda sucesión $z_n \rightarrow z_0$ verifica que $f(z_n)$ no tiende a 0. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se tiene que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| \geq \epsilon$$

ya que de lo contrario sería posible construir una sucesión con las características señaladas. Por lo tanto, tomemos $\delta > 0$ con f analítica sobre $0 < |z - z_0| < \delta$, se tiene que $|\frac{1}{f(z)}| \leq 1/\epsilon$ sobre $0 < |z - z_0| < \delta$, de donde $\frac{1}{f(z)}$ es acotada y z_0 es una singularidad removible de $\frac{1}{f(z)}$ de acuerdo con la proposición anterior, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 7.1.7. Si $f(z)$ posee una singularidad esencial en z_0 , entonces para todo $c \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $z_n \rightarrow z_0$ tal que $f(z_n) \rightarrow c$

Demostración. Consideremos $g(z) = f(z) - c$ y apliquemos el corolario anterior. \square

7.2. Cálculo de Residuos

Sea $f(z)$ una función con una singularidad aislada en z_0 , luego en el anillo $A(z_0, 0, R)$ tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$$

La cual es la expresión de Laurent de $f(z)$ en z_0 . Aquí R es cualquier número real positivo menor o igual que la distancia de z_0 al punto singular $R = +\infty$.

Definición 7.2.1. En el desarrollo de Laurent anterior, al coeficiente b_1 , lo denominamos residuo de f en z_0 , es decir, $\text{Res}(f, z_0) = b_1$. De acuerdo con el teorema anterior de Laurent tenemos:

$$b_1 = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-1+1}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(s) ds$$

o sea,

$$\int_C f(s) ds = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$

Donde C es un contorno dentro de $A(z_0, 0, R)$. En general calcularemos $\text{Res}(f, z_0)$ al hallar la serie de Laurent de $f(z)$ en $A(z_0, 0, R)$ y usaremos esto para la evaluación de ciertas integrales de línea.

Ejemplo 7.2.1. Evaluar

$$\int_C \frac{\sin z}{z^5} dz$$

donde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Solución

$$\frac{\sin z}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n+1)!}$$

así $\text{Res}(f, 0) = 0$, luego

$$\int_C \frac{\sin z}{z^5} dz = 2\pi i 0 = 0$$

Nótese que por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_C \frac{\sin z}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(iv)}(0) = 0$$

Pues $f^{(iv)}(z) = \sin(z)$, luego $f^{(iv)}(0) = 0$

7.3. Teorema de los residuos

Teorema 7.3.1. Sea C un contorno cerrado simple y sea $f(z)$ analítica sobre C y en el interior de C excepto en un número finito de singularidades z_1, z_2, \dots, z_k contenidas en el interior de C . Entonces:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z), z_n)$$

donde la integrales formada a lo largo de C y en dirección positiva.

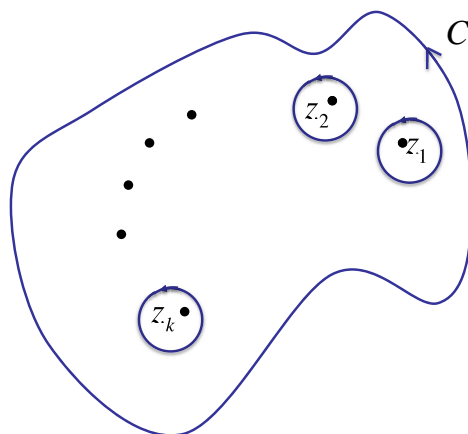


Figura 7.1: Ilustración del teorema de los Residuos

Demostración. Sea C_1, C_2, \dots, C_k , k -círculos con centro z_1, z_2, \dots, z_k y tales que todos ellos están en el interior de C y exterior de cada uno de los otros como en la figura 7.1 usando la versión del teorema de Cauchy para simplemente conexo tenemos:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^k \int_{C_n} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z), z_n)$$

□

7.4. Método para Calcular Residuos en Polos

En lo que sigue daremos un método para calcular el residuo en el caso en que z_0 sea un polo de orden m para $f(z)$.

Por la Proposición 1, tenemos que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

Así que:

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m}$$

así que derivando $(m-1)$ veces en ambos miembros de la ecuación anterior y evaluando en $z = z_0$ y tomando límite cuando $z \rightarrow z_0$ tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = (m-1)! b_1$$

es decir:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

hemos establecido el siguiente teorema.

Teorema 7.4.1. *Supongamos que $f(z)$ es analítica en una vecindad de $z = z_0$, excepto en z_0 , en el cual tiene un polo de orden m , entonces*

$$\text{Res}(f(z), z_0) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Corolario 7.4.1. *Si $z = z_0$ es un polo simple de $f(z)$ entonces*

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Demostración. Hacer $m = 1$ en el teorema anterior. □

Ejemplo 7.4.1. *Evaluar la integral $\int_C \frac{z^2 + 1}{(z-2)(z+3)} dz$ donde $C : |z| = 4$*

Solución: Dado que

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-2)(z+3)}{z^2 + 1}$$

tiene ceros simples en $z = 2$ y $z = -3$ tenemos que $f(z)$ tiene polos simples en $z = 2$ y $z = -3$ entonces:

$$\text{Res}(f(z), 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 1}{z+3} = 1$$

$$\text{Res}(f(z), -3) = \lim_{z \rightarrow -3} (z+3) f(z) = \lim_{z \rightarrow -3} \frac{z^2 + 1}{z-2} = -2.$$

Así por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z^2 + 1}{(z-2)(z+3)} dz &= 2\pi i(1) + 2\pi i(-2) \\ &= 2\pi i(-1) = -2\pi i \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.2. Encuentre los residuos de $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$

Solución: Como $\frac{(z-1)^2}{e^z}$ tiene un cero de orden 2 en $z = 1$, tenemos que $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, así

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-1)^2 e^z}{(z-1)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (e^z) = e \end{aligned}$$

Teorema 7.4.2. Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son ambas analíticas en $z = z_0$ y $p(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si z_0 es un cero de orden m de $q(z)$. En particular, cuando $q(z)$ tiene un cero simple en $z = z_0$, entonces $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$ y $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

Demostración. Suponga que z_0 es un cero de orden m de $q(z)$, entonces $q(z) = (z - z_0)^m g(z)$ donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$. Luego:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m g(z)}$$

Así $(z - z_0)^m f(z) = \varphi(z)$ donde $\varphi(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$ es analítica en z_0 , ya que $g(z_0) \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{g(z)} \\ &= \frac{p(z_0)}{g(z_0)} \neq 0 \end{aligned}$$

Así que por la proposición $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$.

Recíprocamente, si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$, entonces tenemos

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$. Así

$$q(z) = (z - z_0)^m \frac{p(z)}{g(z)} = (z - z_0)^m h(z)$$

donde $h(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$ es analítica en z_0 y $h(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)} \neq 0$, así $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 finalmente, cuando $q(z)$ tiene un cero simple en z_0 , tenemos que $q(z_0) = 0$ y

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

donde $q'(z_0) \neq 0$. Así

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{q(z)}{z - z_0} = q'(z_0).$$

De donde:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{(z - z_0)}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.4.3. Sea $f(z) = \cotg z$, entonces dado que $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ y $\sin z = 0$ en $z = k\pi$, con k entero, esta función tiene polos simples en $z_k = k\pi$, más aún $\text{Re}(f(z), k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1$ ya que $\cos(k\pi) \neq 0$ y $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$

7.5. Polos y Ceros de Funciones Meromorfas

Definición 7.5.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto se dirá que $f : \Omega - D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica es **meromorfa**, si D es un conjunto discreto y para todo $z \in D$, z es un polo ó una singularidad removible. Esto es, una función $f(z)$ es meromorfa si sus únicas singularidades son polos. Nótese que una función analítica en un caso especial de función meromorfa, aquí $D = \emptyset$.

Ejemplo 7.5.1. $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios es una función meromorfa pues sus singularidades son polos que corresponden a los ceros de $Q(z)$.

Ejemplo 7.5.2. Las funciones trigonométricas $\cos z$, $\sin z$, $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$, son funciones meromorfas.

Teorema 7.5.1. (Principio del argumento)

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y C un contorno cerrado simple sin ceros, ni polos de f , entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

donde Z_f y P_f son el número de ceros y polos de f en el interior de C contando multiplicidad.

Demostración. Por ser $f(z)$ meromorfa y el interior de C acotado el número de ceros y de polos es una cantidad finita. Note que un número infinito de polos en el interior de C garantiza por Bolzano-Weierstrass una singularidad no aislada de $f(z)$, luego $f(z)$ tendría una singularidad esencial y así no sería meromorfa. Denotemos por z_1, \dots, z_k los ceros y polos, dos a dos, diferentes. Ahora bien, por el teorema de los residuos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_k\right)$$

donde la suma se extiende a las singularidades de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ en $\operatorname{int}(C)$.

Ahora cuando $z = z_k$ es un cero con multiplicidad m_k de $f(z)$ entonces en un entorno de z_k , se satisface:

$$f(z) = (z - z_k)^{m_k} g(z) \text{ con } g(z) \text{ analítica en } z_k \text{ y } g(z_k) \neq 0.$$

mientras que

$$f'(z) = m_k(z - z_k)^{m_k-1} \cdot g(z) + (z - z_k)^{m_k} g'(z)$$

en consecuencia:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

con $g(z_k) \neq 0$.

Luego $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) = m_k$ para cada z_k cero de $f(z)$, así que:

$$\sum_{z_k \text{ es un cero de } f} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) = \sum m_k = Z_f$$

Por otra parte, cuando z_k es un polo de orden n_k

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_k)^{n_k}} = g(z)(z - z_k)^{-n_k},$$

con $g(z_k) \neq 0$. Derivando y procediendo como antes

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Así $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) = -n_k$ luego

$$\sum_{z_k \text{ es un polo de } f} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) = \sum -n_k = -P_f$$

En consecuencia, aplicando el teorema de los residuos tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_k \text{ en el int}(C)} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right)$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_k \text{ cero de } f} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right) + \sum_{z_k \text{ es un polo de } f} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right)$$

Así concluimos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

□

Teorema 7.5.2. (Teorema de Rouché)

Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado simple C . Suponga que $|g(z)| < |f(z)|$ para todo z sobre C . Entonces la función $f(z) + g(z)$ tiene exactamente la misma cantidad de ceros en el interior de C que la función $f(z)$ contando multiplicidades.

Demostración. Nótese que como $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in C$, ni $f(z)$ ni $f(z) + g(z)$ tienen ceros sobre C . En efecto, $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ sobre C . Sean N_1 y N_2 el número de ceros de $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ respectivamente, en el interior de C .

Así que

$$\Delta_C \text{Log}(f(z)) = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i N_1$$

pues $f(z)$ es analítica y por consiguiente el número de polos $P_f = 0$.

De la misma manera:

$$\Delta_C \text{Log}(f(z) + g(z)) = 2\pi i N_2.$$

Pero también:

$$\Delta_C \text{Log}(f(z) + g(z)) = \Delta_C \text{Log}\left(f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right)$$

$$\Delta_C \text{Log}(f(z) + g(z)) = \Delta_C \text{Log}(f(z)) + \Delta_C \text{Log}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

Así que

$$\begin{aligned} 2\pi i N_2 &= \Delta_C \text{Log}(f(z)) + \Delta_C \text{Log}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \\ &= 2\pi i N_1 \end{aligned}$$

ya que $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \forall z \in C$ y así por lema 5.4.1 visto en el capítulo 5

$$\Delta_C \text{Log}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Luego $N_1 = N_2$, es decir, $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen exactamente el mismo número de ceros en el interior de C , contando multiplicidades. \square

El siguiente corolario cuya prueba es inmediata, no es más que otra manera de enunciar el teorema de Rouché.

Corolario 7.5.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo, y $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan orientada positivamente, y sean $f(z)$, $g(z)$ dos funciones analíticas en Ω tales que:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

para todo z sobre γ . Entonces $f(z)$ y $g(z)$ tienen exactamente el mismo número de ceros en la componente acotada por γ contando multiplicidades.

Los siguientes ejemplos ilustran la utilidad de este teorema de conteo.

Ejemplo 7.5.3. Muestre que si $|a| > e$, la ecuación $az^n - e^z = 0$ tiene n -raíces en el interior del círculo unitario C .

Solución:

Sea $f(z) = az^n$ y $g(z) = -e^z$ en el círculo unitario $|z| = 1$ tenemos que:

$$|f(z)| = |a| > e \geq e^{\text{Re}(z)} = |e^z| = |g(z)|.$$

Así:

$$\forall z \in C, |g(z)| < |f(z)|$$

luego por el teorema de Rouché $f(z) + g(z) = az^n - e^z$ tiene exactamente el mismo número de ceros que $f(z) = az^n$ el cual tiene n - ceros ($z = 0$ tiene multiplicidad n) en el interior de C .

Ejemplo 7.5.4. Calcule el número de raíces del polinomio

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

en el interior del círculo unitario $|z| < 1$.

Solución:

Consideremos las siguientes funciones

$$g(z) := z^8 + z^2 - 1, \quad f(z) := -4z^5, \quad z \in \mathbb{C}$$

Ambas son enteras. Además, para cada $z \in D(0, 1)$ se cumple que:

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq 3 < 4 = |f(z)|$$

En consecuencia por el teorema de Rouché el número de ceros en el interior del círculo unitario de $f(z) + g(z)$ y $f(z)$ coinciden, y dado que $f(z) := -4z^5$ tiene un cero con multiplicidad cinco en el interior del círculo unitario, entonces el número de raíces del polinomio

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

en el interior del círculo unitario es cinco.

Ejemplo 7.5.5. (Teorema de Hurwitz) Sean Ω abierto y $f_n(z)$, con $n \geq 1$ una sucesión de funciones analíticas que convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω a una función f . Sean $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para cada $z \in C(z_0, R)$. Demuestre que existe un número natural $N \geq 1$, tal que para cada $n \geq N$ las funciones f_n y f poseen el mismo número de ceros en $D(z_0, R)$ contando multiplicidades.

Solución:

Puesto que la función $z \mapsto |f(z)|$ es continua en Ω y no se anula en $C(z_0, R)$, que es compacto, existe $z^* \in C(z_0, R)$ tal que

$$|f(z^*)| = \min_{|z-z_0|=R} |f(z)| > 0$$

Sea

$$\varepsilon := \frac{|f(z^*)|}{2}.$$

Por converger $f_n(z)$ a $f(z)$ uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto de Ω , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ y $z \in C(z_0, R)$,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon = \frac{|f(z^*)|}{2} < |f(z^*)| \leq |f(z)|.$$

En particular, para cada $n \geq N$ y $z \in C(z_0, R)$, se cumple que:

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|.$$

Por lo tanto por el teorema de Rouché, para cada $n \geq N$, las funciones f_n y f poseen el mismo número de ceros en $D(z_0, R)$ contando multiplicidades.

Ejemplo 7.5.6. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $z^4 - 6z + 3 = 0$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$?, ¿y en $D(0, 1)$?, ¿y en $A(0, 1, 2)$?

Solución:

Sea $f(z) = z^4 - 6z + 3$ y $g(z) = z^4$, entonces en la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ tenemos que:

$$|f(z) - g(z)| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)|,$$

luego por el teorema de Rouché $f(z)$ tiene tantas raíces como $g(z)$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, es decir, exactamente cuatro.

Si ahora tomamos $C(0, 1)$ la circunferencia unitaria y escogemos a $g(z) = -6z$, tenemos que:

$$|f(z) - g(z)| \leq |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |g(z)|,$$

si $|z| = 1$. El teorema de Rouché nos garantiza que $f(z)$ tiene tantas raíces como $g(z)$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, es decir, exactamente una. Finalmente de lo anterior se deduce claramente que $f(z)$ tiene exactamente tres raíces en el anillo $A(0, 1, 2)$, ya que $f(z)$ no se anula en la circunferencia unitaria.

Teorema 7.5.3. (De existencia y unicidad de punto fijo)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subset \Omega$, y $F(z)$ analítica en Ω tal que:

$$F(C(z_0, R)) \subset D(z_0, R).$$

Entonces $F(z)$ posee un único punto fijo en $\overline{D(z_0, R)}$.

Demostración. Supongamos que $F(C(z_0, R)) \subset \Omega$ y consideremos las funciones auxiliares

$$f(z) := F(z) - z$$

y

$$g(z) := z_0 - z.$$

Ambas analíticas en Ω , luego para cada $z \in C(z_0, R)$ se cumple que:

$$|f(z) - g(z)| = |F(z) - z_0| < R = |z - z_0| = |g(z)|$$

Por consiguiente del teorema de Rouché, $f(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de ceros en $\overline{D(z_0, R)}$ contando multiplicidades, puesto que $g(z)$ posee un único cero, y es simple, $f(z)$ posee un único cero y así $F(z)$ posee un único punto fijo en $\overline{D(z_0, R)}$. \square

7.6. El Teorema de la Aplicación Abierta

Lema 7.6.1. Sean $f(z) : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función analítica y $M = \min_{|z-a| \leq R} |g(z)|$. Si $a \in \Omega$ es un cero de orden m de la función $f(z) - f(a)$ en $D(a, R) \subset \Omega$, esto es, $f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z)$, siendo $g(z)$ analítica y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(a, R)}$, entonces para todo $w \in D(f(a), R^m M)$, la función $f(z) - w$ tiene exactamente m ceros en $D(a, R)$ (contando multiplicidades). Es decir, existen $z_1, \dots, z_m \in D(a, R)$ (algunos pueden ser repetidos) tales que

$$f(z) = w + \prod_{i=1}^m (z - z_i) g_w(z)$$

donde $g_w(z)$ es analítica y $g_w(z) \neq 0$ en $D(a, R)$.

Demostración. Sea $w \in D(f(a), R^m M)$, entonces:

$$Z(f(z) - w) = Z(f(z) - f(a)) = m$$

en $D(a, R)$, donde $Z(f(z) - w)$ denota el número de ceros de $f(z) - w$ en $D(a, R)$.

Basta aplicar el teorema de Rouché a las funciones $f(z) - w$ y $f(z) - f(a)$ sobre el disco $\overline{D(a, R)}$. En efecto, si $|z - a| = R$, tenemos:

$$\begin{aligned} |(f(z) - w) - (f(z) - f(a))| &= |w - f(a)| \\ &< R^m M \\ &\leq R^m |g(z)| \\ &= |f(z) - f(a)| \end{aligned}$$

Luego $f(z) - w$ tiene exactamente m ceros en $D(a, R)$. □

Observación 7.6.1. (i) Es evidente que $f(z_i) = w$ y $f(z) \neq 0$ en $D(a, R)$.

(ii) $z = a$ siempre es un cero de $f(z) - f(a)$, de modo que $m \geq 1$.

(iii) El teorema anterior también implica que $D(f(a), R^m M) \subseteq f(D(a, R))$ donde $M = \min_{|z-a| \leq R} |g(z)|$.

Observación 7.6.2. Si denotamos por $V_R(a) = \{z \in D(a, R) / f(z) \in D(f(a), R^m M)\}$ entonces:

(i) $V_R(a) \subseteq D(a, R)$.

(ii) $V_R(a)$ es abierto, ya que $f(z)$ es continua.

(iii) $a \in V_R(a)$.

(iv) $f(z) : V_R(a) \mapsto D(f(a), R^m M)$ es una función "m a 1".

Teorema 7.6.1. (De la aplicación abierta)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f(z) : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, una función analítica, entonces $f(\Omega)$ es un dominio o (consiste de) un punto (es decir, es constante en Ω).

Demostración. Supongamos que $f(z)$ no es constante en Ω . Demostraremos que $f(\Omega)$ es un dominio. El conjunto $f(\Omega)$ es evidentemente conexo ya que es la imagen de un conjunto conexo Ω bajo una función continua $f(z)$. Veamos a continuación que $f(\Omega)$ es abierto:

Dado $f(a) \in f(\Omega)$, $a \in \Omega$, debemos encontrar $r > 0$ tal que $D(f(a), r) \subset f(\Omega)$. Como a es un cero de $f(z) - f(a)$, la cual no es idénticamente nula en Ω , ya que $f(z)$ no es constante, concluimos por el teorema 7.1.1 y el hecho que los ceros de una función analítica son aislados, que en algún disco $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ se cumple

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z),$$

siendo $g(z) \neq 0$ en $\overline{D(a, R)}$. Por la observación 7.3.1 (iii) tenemos:

$$f(\Omega) \supseteq f(D(a, R)) \supseteq D(f(a), R^m M),$$

y así, $D(f(a), r) \subset f(\Omega)$ con $r = R^m M$. □

Corolario 7.6.1. Si $f(z)$ es una función analítica en el conjunto abierto Ω y $f(z)$ no es constante en disco alguno contenido en Ω , entonces $f(\Omega)$ es abierto.

Demostración. Podemos expresar Ω como una unión de discos abiertos Ω_i , ($i \in I$), por el teorema de la aplicación abierta $f(\Omega_i)$ es abierto para cada $i \in I$.

Luego $f(\Omega) = \bigcup_{i \in I} f(\Omega_i)$ es abierto. □

7.7. El Teorema de La Función Inversa

Teorema 7.7.1. (De la función inversa)

Sea $f(z) : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función analítica en el conjunto abierto Ω . Si $f(z)$ es inyectiva y $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, entonces:

(i) $f(\Omega)$ es un conjunto abierto.

(ii) La función inversa $g(w) : f(\Omega) \mapsto \Omega$ de $f(z) : \Omega \mapsto f(\Omega)$ que se define por:

$$g(w) = z \Leftrightarrow f(z) = w, \quad \forall w \in f(\Omega), z \in \Omega,$$

es analítica en $f(\Omega)$ y cumple que:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in f(\Omega).$$

Demostración. (i) Inmediato del teorema de la aplicación abierta.

(ii) Sea $b \in f(\Omega)$. Probaremos que se cumple

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Comencemos notando que $g(w)$ es continua en b , en efecto, sea $a = f(b) \in \Omega$ y fijemos $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$, puesto que $f(z)$ es inyectiva a es un cero simple (de orden 1) de $f(z) - f(a)$ en $\overline{D(a, R)}$, luego

$$f(z) - f(a) = (z - a)g(z), \quad \text{con } g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D(a, R)}.$$

Hagamos $M(r) := \min_{|z-a|=r} |g(z)|$, $0 < r \leq R$, y $M := M(R) \leq M(r)$. Aplicando el lema 7.6.1, $\forall w \in D(f(a), rM(r))$ se cumple que $f(z) - w$ tiene un cero en $D(a, r)$; es decir:

$$|w - b| < rM(r) \Rightarrow |g(w) - g(b)| < r,$$

ya que $g(w)$ es el cero de $f(z) - w$ en $D(a, r)$. Luego, $|w - b| < rM \Rightarrow |g(w) - g(b)| < r$ o $|w - b| < \delta \Rightarrow |g(w) - g(b)| < \frac{\delta}{M} = \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de $g(w)$ en b .

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{w \rightarrow b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} &= \frac{1}{\lim_{w \rightarrow b} \frac{w - b}{g(w) - g(b)}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(g(w)) - f(g(b))}{g(w) - g(b)}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{g(w) \rightarrow g(b)} \frac{f(g(w)) - f(g(b))}{g(w) - g(b)}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{z \rightarrow g(b)} \frac{f(z) - f(g(b))}{z - g(b)}} \\
 &= \frac{1}{f'(g(b))}
 \end{aligned}$$

y como el último límite existe, la existencia de todos los límites queda justificada, resultando entonces:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

□

Teorema 7.7.2. (Forma Local del Teorema de La Función Inversa)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, abierto y $f(z) : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, una función analítica, Si $a \in \Omega$ es tal que $f'(a) \neq 0$, entonces existe un subconjunto abierto $V \subset \Omega$ tal que:

(i) $a \in V$, $f(V)$ es abierto.

(ii) $f(z) : V \mapsto f(V)$ es una biyección con $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in V$, además $g(z) = (f|_V)^{-1} : f(V) \mapsto V$ es analítica con

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \forall w \in \Omega.$$

Demostración. La hipótesis $f'(a) \neq 0$ asegura que a es un cero de orden 1 de $f(z) - f(a)$, por ser los ceros de una función analítica aislados y por el teorema 7.1.1 podemos escribir

$$f(z) - f(a) = (z - a)h(z),$$

donde $h(z) \neq 0$ para todo z en algún disco $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$, además (por continuidad de $f'(z)$), tal que $f'(z) \neq 0, \forall z \in \overline{D(a, R)}$, por la observación 7.3.1 (iii), si $M = \min_{|z-a| \leq R} |g(z)| > 0$, entonces:

$\forall w \in D(f(a), RM), \exists! z \in D(a, R)$ tal que $f(z) = w$, si hacemos

$$V := \{z \in D(z, a) : f(z) \in D(f(a), RM)\},$$

entonces V es abierto, $f(V) = D(f(a), RM)$, $f(z) : V \mapsto f(V)$ es una biyección y $f'(z) \neq 0, \forall z \in V$, por el teorema de la función inversa se tiene (ii). \square

7.8. Cálculo de Integrales Reales usando métodos Complejos

Una de las aplicaciones de los residuos está dada por el cálculo de integrales definidas y/o impropias reales. A continuación veremos algunas situaciones típicas, en las cuales la utilización de los residuos permite fácilmente evaluar integrales.

7.8.1. Integrales del tipo: $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Consideremos

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

donde $P(x, y), Q(x, y)$ son polinomios y $Q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

Planteando $z = e^{i\theta}$ y $\gamma : |z| = 1$ la circunferencia unitaria tenemos:

$$\frac{z + z^{-1}}{2} = \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{z - z^{-1}}{2i} = \sin \theta$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

Ejemplo 7.8.1. Consideremos la integral, con $|a| > 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$$

Solución: Para $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, Luego

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad \text{y} \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \int_{\gamma} \frac{1}{a + \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \\ &= -2i \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \end{aligned}$$

Ahora bien, $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ tiene un polo simple en el interior de la circunferencia dada por $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ (el otro por $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ no esta en el interior de la circunferencia unitaria), además z_1 es real.

El residuo de $f(z)$ en z_1 es :

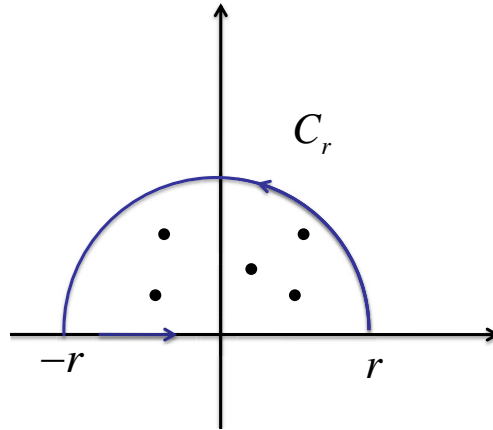
$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \\ &= \frac{1}{2z_1 + 2a} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= -2i \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \\ &= (-2i)(2\pi i) \text{Res}(f(z), z_1) \\ &= (-2i)(2\pi i) \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \end{aligned}$$

7.8.2. Integrales del tipo: $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

Donde $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x)$ polinomios con $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ y $\text{gr}(P(x)) + 2 \leq \text{gr}(Q(x))$

Figura 7.2: $\gamma = C_r + [-r, r]$

(o bien $gr(P(x)) + 1 < gr(Q(x))$) donde $gr(P(x))$ denota el grado de $P(x)$, algunas veces denotado $deg(P(x))$ por la palabra degree (grado en inglés).

Como $gr(P(x)) + 2 \leq gr(Q(x))$ se tiene que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ es convergente.

En consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Consideremos C_r como en la figura, de tal suerte que todos los polos de $R(x)$ (esto es los ceros de $Q(x)$) con $Im(iz) > 0$ estén en su interior.

Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{z_i \text{ Polo } Im(z_i) > 0} Res(R(z), z_i)$$

Luego:

$$\int_{-r}^r R(x) dx = \int_{\gamma} R(z) dz - \int_{C_r} R(z) dz$$

además si denotamos por $n = gr(P(z))$, $m = gr(Q(z))$

$$\left| \int_{C_r} R(z) dz \right| \leq \pi r \max_{z \in C_r} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right|$$

donde

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{S(z)}{z^{n-m}}, \quad y \quad S(z) = \frac{\frac{a_0}{z^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z} + a_m}{\frac{b_0}{z^n} + \dots + \frac{b_{n-1}}{z} + b_n}$$

ahora, para $|z|$ suficientemente grande

$$|S(z)| \leq \frac{|a_m| + |a_n|}{|b_n| - \frac{|b_n|}{2}} = K$$

es decir

$$\left| \int_{C_r} R(z) dz \right| \leq \pi r \cdot \frac{K}{r^{n-m}} \text{ y como } n - m \geq 2$$

Por lo cual concluimos que:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx = \int_{\gamma} R(z) dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \text{Im}(z) > 0} \text{Res}(f, z_i)$$

Ejemplo 7.8.2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

Solución: Consideremos

$$\int_C \frac{dz}{z^6 + 1},$$

donde C es el contorno que consiste del semi círculo Γ y el segmento $[R, -R]$

ya que $z^6 + 1 = 0$ cuando $z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}}$, todos son polos simples de

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 1},$$

y solo $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}$ y $e^{\frac{5\pi i}{6}}$ satisfacen que su parte imaginaria es estrictamente mayor que cero, es decir, están en el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$.

Además usando la regla de L'Hospital:

$$\text{Res}(f(z), e^{\frac{\pi i}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi i}{6}})}{z^6 + 1} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{6}}$$

$$\text{Res}(f(z), e^{\frac{3\pi i}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{6}}} \frac{(z - e^{\frac{3\pi i}{6}})}{z^6 + 1} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{2}}$$

$$\text{Res}(f(z), e^{\frac{5\pi i}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{5\pi i}{6}}} \frac{(z - e^{\frac{5\pi i}{6}})}{z^6 + 1} = \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi i}{6}}$$

Así por el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z^6 + 1} &= 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{6}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-5\pi i}{2}} + \frac{1}{6} e^{\frac{-25\pi i}{6}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Esto es:

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}$$

Tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ y del hecho que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} \text{ converge y } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^6 + 1} = 0$$

tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3} \text{ y así } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3}$$

7.8.3. Integrales del tipo: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x) dx$

Donde $m > 0$, $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a ∞ . (en particular, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $gr(Q(x)) > gr(P(x))$.) Para estudiar este tipo de integrales necesitamos establecer los siguientes lemas.

Lema 7.8.1. Desigualdad de Jordan

Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entonces $\frac{2\theta}{\pi} \leq \text{sen}\theta \leq \theta$.

Demostración. Comencemos por notar que $\cos\theta$ es decreciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$, en consecuencia el valor medio de $y = \cos x$ en $[0, \theta]$ también decrece. Este valor medio viene dado por

$$\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos x dx = \frac{1}{\theta} \text{sen}\theta$$

Así para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos x dx \geq \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos x dx = \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \geq \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}$$

Esto es:

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi} \quad \text{con } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

de donde:

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \operatorname{sen}\theta \leq \theta.$$

□

Lema 7.8.2.

$$\int_0^\pi e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta \quad \text{donde } m \text{ es constante}$$

Demostración. Debido a la aditividad de la integral tenemos:

$$\int_0^\pi e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

usando el cambio de variable $\theta = \pi - u$ en la última integral tenemos:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{m\operatorname{sen}(\pi-u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\operatorname{sen}(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

En consecuencia

$$\int_0^\pi e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m\operatorname{sen}\theta} d\theta.$$

□

Teorema 7.8.1. Supongamos que $f(z)$ es meromorfa en el semiplano superior, y además que existen constantes positivas p, k, R_0 tales que para $|z| \geq R_0$ se tiene:

$$|f(z)| \leq \frac{k}{|z|^p}.$$

(Esto es $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$) entonces para todo $m > 0$ se cumple que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz = 0,$$

donde C_R es la mitad superior del círculo $|z| = R$.

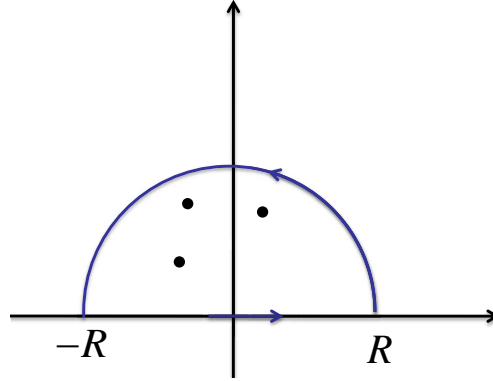


Figura 7.3: C_R , la mitad superior del círculo $|z| = R$.

Demostración. Sea z sobre C_R , entonces $z = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ Así:

$$|e^{imz}| = |e^{imR(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{-mR \sin \theta}| |e^{imR \cos \theta}| = e^{-mR \sin \theta}$$

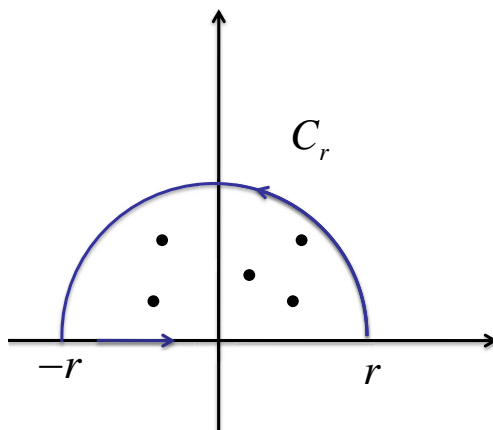
Luego usando los lemas 7.8.1 y 7.8.2 tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{imz} f(z) \frac{dz}{d\theta} d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^\pi e^{imz} f(z) Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{imz}| |f(z)| R d\theta \\ &= \frac{k}{R^p} \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} R d\theta \\ &\leq \frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\frac{2mR}{\pi})\theta} d\theta \quad (\text{Pues por lema 7.8.1 } \frac{-2\theta}{\pi} \geq -\sin \theta) \\ &= \frac{2k(1 - e^{-mR})}{mR^p} \end{aligned}$$

ya que $m > 0$ y $P > 0$ tenemos que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz = 0$$

□

Figura 7.4: $C_R + [-R, R]$,

Teorema 7.8.2. Sea $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios primos relativos y $Q(z)$ no tiene cero en el eje real. Si el $gr(Q(z))$ excede al $gr(P(z))$ (esto es $gr(Q(z)) > gr(P(z))$) o bien

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

y $m > 0$ entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z)e^{imz}, z_n)$$

donde z_n son los polos de $f(z)e^{imz}$ que están en el semiplano superior.

Demostración. Sea C_R la mitad superior del círculo $|z| = R$ y tomemos R suficientemente grande, digamos $R > R_0$ tal que todos los polos z_n de $f(z)e^{imz}$ que están en el semiplano superior se encuentren en el interior del contorno $C_R + [-R, R]$, vea la figura

Luego por el teorema de los residuos:

$$\int_{-R}^R f(x)e^{imx} dx + \int_{C_R} f(z)e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z)e^{imz}, z_n)$$

Como $gr(Q(z)) > gr(P(z))$ estamos en las condiciones del teorema anterior y dado que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x) dx$ converge, tenemos que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)e^{imx} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z)e^{imz}, z_n)$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f(z)e^{imz}, z_n)$$

□

Observación 7.8.1. (i) Los Polos de $f(z)e^{imz}$ en el semiplano superior son las raíces de $Q(z)$.

(ii) Ya que $e^{imx} = \cos mx + i \sin mx$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos mx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx \right)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin mx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx \right)$$

Ejemplo 7.8.3. Muestre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$$

Solución: Consideremos

$$\int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz$$

donde C es tal que $z = i$ (el único polo en el semiplano superior) este dentro de $C = C_R + [-R, R]$, esto es, basta tomar $R > 1$.

Entonces por el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz &= 2\pi \text{Res} \left(\frac{e^{imz}}{z^2 + 1}, i \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} \right] \\ &= 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} \\ &= \pi e^{-m} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi e^{-m}\end{aligned}$$

7.9. Problemas Resueltos

1. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad \text{con } 0 < a < 1$$

Solución:

Sea C la circunferencia unitaria $|z| = e^{i\theta}$ entonces

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{1 - 2a\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) + a^2} \frac{dz}{iz} &= \frac{1}{i} \int_C \frac{dz}{-az^2 + (1 + a^2)z - a} \\ &= i \int_C \frac{dz}{(z - a)(az - 1)}\end{aligned}$$

Las singularidades de

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)(az - 1)}$$

son $z_0 = a$ $z_1 = \frac{1}{a}$ (polos simples) pero solo $z_0 = a \in \operatorname{int}(C)$ además

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{az - 1} = \frac{1}{a^2 - 1}$$

así que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} &= i \frac{dz}{(z-a)(az-1)} \\
 &= i2\pi \operatorname{Res}(f, a) \\
 &= \frac{-2\pi}{a^2 - 1} \\
 &= \frac{2\pi}{1 - a^2}
 \end{aligned}$$

2. Evalúe:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

Solución:

Comencemos por notar que $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ se puede comparar en paso al límite con $\frac{1}{x^2}$, así que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

converge, además dado que $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ es una función par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

así que si consideramos $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ notamos que sus polos son $z = i$, $z = -i$ ambos de orden 2, pero solo $z = i$ se encuentra en el semiplano superior,

$$\begin{aligned}
 \text{Así que: } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{2\pi i}{2} \operatorname{Res}(f(z), i)
 \end{aligned}$$

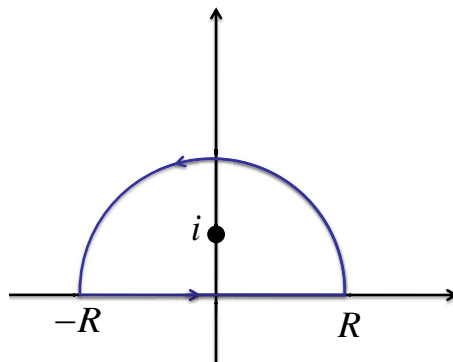


Figura 7.5:

además

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right) = \frac{-i}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \pi i \left(\frac{-i}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

3. Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx \right)$$

y dado que

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

es tal que no posee ceros en \mathbb{R} , y

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

se tiene que al aplicar el teorema:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 2i) + \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-2}}{20i} - \frac{e^{-3}}{30i} \right] \\ &= \left(\frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right) \pi \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \left(\frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right) \pi$$

además, también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 0$$

7.10. Ejercicios

1. Muestre que todas las singularidades de las siguientes funciones son polos, determine el orden de cada polo y el valor del residuo de la función en cada polo.

(a) $\frac{z^2 + 4z + 1}{z^4 - 3z^2 - 4}$

(b) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$

(c) $f(z) = \csc(z)^3$

(d) $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

(e) $f(z) = e^z \csc(z)^3$

(f) $f(z) = \frac{\cot(z) \coth(z)}{z^3}$

2. Evalúe la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$ alrededor del círculo $|z| = 3$.

Resp: $\frac{t-1}{2} + \frac{1}{4} e^{-t} (\sin(t) + \cot(t))$

3. Hallar los residuos en $z = 0$ de $f_p(z) = \frac{e^z}{z^p}$ (p entero positivo)

$$\text{Resp: } \text{Res}(f_p(z); 0) = \frac{1}{(p-1)!}$$

4. Evalúe cada una de las siguientes integrales, todos los contornos son tomados en sentido positivo.

(a) $\int_C \cotg(z) dz$ sobre el contorno $C : |z| = 4$

(b) $\int_C \frac{dz}{\sinh(z)}$ sobre el contorno $C : |z| = 1$

(c) $\int_C \frac{e^{iz}}{z^4 + 2z^2 + 1} dz$ sobre el contorno $C : |z| = 2$

5. Clasifique las singularidades de $f(z)$ en cada caso:

(a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z^2 - 1)^2}$

(b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

(c) $f(z) = \frac{\tan(z)}{z}$

(d) $f(z) = \cosh\left(\frac{1}{z - \pi}\right)^2$

(e) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$

(f) $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + 1} + 4z$

(g) $f(z) = \frac{\sin(3z) - 3z}{z^2}$

(h) $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$

(i) $f(z) = \frac{z}{\cos(z)}$

6. Calcule el residuo en sus singularidades.

(a) $\frac{z+1}{z^2 - z}$

(b) $\tanh(z)$

(c) $\frac{1 - e^{2z}}{z^4}$

(d) $\csc h(z)^2$

(e) $\frac{\csc(z^2)}{z^2}$

(f) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

(g) $\frac{\csc(z^2)}{z^3}$

Resp: (a) $\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$, $\text{Res}(f, 2) = \frac{3}{2}$, (b) $\text{Res}(f, \frac{(2m+1)\pi i}{2})$, (c) $\text{Res}(f, 0) = -\frac{4}{3}$, (d) $\text{Res}(f, n\pi) = 0$, (e) $\text{Res}(f, 0) = 0$, (f) $\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$, (g) $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{3!}$

7. Evalúe las siguientes integrales

(a) $\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$

(b) $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

(c) $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

(d) $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z^2-z} dz$

(e) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sinh(z)}{z^4} dz$

(f) $\int_{|z|=2} \frac{\csc h(z^2)}{z^2} dz$

(g) $\int_{|z-bi|=b} \frac{z^2 e^{miz}}{(z^2+b^2)^2} dz \quad b > 0, \quad m \in \mathbb{R}$

Resp: (a) $2\pi i e^{-1}$, (b) 0, (c) $2\pi i$, (d) $10\pi i$, (e) $\frac{\pi i}{3}$, (f) $-\pi \frac{1}{2} i$, (g) $\frac{\pi(1-mb)e^{-mb}}{2b}$

8. Pruebe que el teorema de Cauchy-Goursat, y su fórmula integral pueden ser obtenidas como caso especial del teorema de los residuos.

9. Determine todas las funciones enteras que para cada $z \in D(0, 1)$ cumplen que:

$$F(z) = F(2z).$$

(Sug: Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{z}{2^n}\right) = F(0)$, deduzca en consecuencia que $F(z)$ es constante en $D(0, 1)$ y use el principio de identidad)

10. Sea C un cuadrado acotado por $x = \pm 2, y = \pm 2$ evalúe $\int_C \frac{\sinh(3z)}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2} dz$ Resp: $-9\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Sean $f(z), g(z) : D(0, 1) \mapsto \mathbb{C}$ dos funciones analíticas tales que $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0 \forall z \in D(0, 1)$. Si

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \forall z \in \{1/n; n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Demuestre que $f(z) = cg(z) \quad \forall z \in D(0, 1)$, y algún $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$. (Sug: Aplique el principio de continuación analítica a la función $h(z) = f(z)/g(z)$).

12. Pruebe que el número de ceros en el interior de un círculo de una función meromorfa es finito.
13. Muestre que la ecuación $ze^{a-z} = 1, a > 1$, tiene una única raíz en el interior del círculo unitario $|z| = 1$.
14. Deduzca el teorema fundamental del álgebra a partir del teorema de Rouché.
15. Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre un círculo $|z| = 1$. Suponga que $|f(z)| < 1$ cuando $|z| = 1$. Muestre que $f(z)$ tiene un único punto fijo en el interior del círculo $|z| = 1$.
16. Probar que las raíces de $z^5 + 8z + 1 = 0$ pertenecen al disco $|z| < 2$.
17. Probar que todas las raíces de la ecuación $z^7 - 5z^3 + 7$ pertenecen al anillo $A(0, 1, 2) = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$
18. Pruebe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{\pi(2n-2)!}{2[(n-1)!]^2 4^{n-1}}$$

19. Cuando $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge esta coincide con el

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

el cual llamaremos valor principal de Cauchy (V.P.C.) de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ahora este límite puede existir aun cuando la integral diverge. Calcule V.P.C de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x-3)}dx,$$

además, de un ejemplo de integral divergente y con V.P.C

20. Evalúe las siguientes integrales.

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos^2 \theta} d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos \theta}$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$ con $1 > a \geq 0$

(d) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}$

(e) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \sin \theta)^2}$ ($a > 1$)

(f) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$

(g) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta, n \in \mathbb{N}$

(h) $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta \quad n \in \mathbb{N}$

(Sug: Calcule la parte real de $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$ y compare)

(i) $\int_0^{\pi} \tan(\theta + ia) d\theta \quad a \neq 0$

Respuestas: (a) $\frac{-\pi}{4}$, (b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, (c) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, (d) $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, (e) $\frac{\pi(2a)}{(a^2-1)^{3/2}}$, (f) $\frac{2\pi}{ab}$, (g) $\frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}$,

(h) $\frac{2\pi}{n!}$, (i) $\text{sig}(a)\pi i$

21. Evalúe las integrales:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 4}$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

(e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + 1)^2}$

Respuestas: a) $\frac{\pi}{4}$ b) π c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{16}$

22. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 1}$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 10} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$

Respuestas: a) $\frac{\pi}{2e^6}$ b) $\frac{\pi}{e}$ c) $\frac{\pi}{e^2}$ d) $\frac{\pi(3 \cos 1 + \sin 1)}{3e^3}$ e) $\frac{\pi}{2e}$

Bibliografía

- [1] Ahlfors L. V. *Complex Analysis*. McGraw-Hill. New York. 1979.
- [2] Churchill R. V. y Brown J. W. *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill. New York. 1986.
- [3] Conway , J.B., *Functions of One Complex Variable*. Second Edition, Springer-Verlag, 1978.
- [4] Derrick , W. *Variable Compleja con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, México 1987.
- [5] Dixon J.D., Proc. Amer. Math. Soc.29, 1971, 625-626.
- [6] García F. and Puertas M., Divulgaciones Matemáticas, Vol 6, No 1, (1998), 43-60.
- [7] Gómez J. L. *.Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja*. Prentice Hall. Madrid. 2001.
Springer-Verlag. New York. 1976.
- [8] James , G. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. 2da. Edición. Prentice Hall, México 2002.
- [9] Lang, S. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, 1999.
The American Mathematical Monthly, vol 110, N^o2, pag 89-108. 2003.
- [10] Pennisi, L. *Elements of Complex Variables*. Holt, Rinehart and Winston, New York 1969.
- [11] Pestana D, Rodriguez J. M. , y Marcellán F. *Variable Compleja Un Curso Práctico*. Editorial SINTESIS. Madrid. 2006.

- [12] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill. Third edition, 1999.
- [13] Vivas C, Miguel, *Curso Intermedio de Integración en una Variable Compleja*. Trabajo de Ascenso UCLA, 1999.
- [14] Volkovski I, Lunts G. L. and Aramanovich I.G.. *Problemas Sobre Teoría de Funciones de una Variable Compleja*. Editorial MIR, Moscú. 1972.
Springer-Verlag. New York. 1976.
- [15] Wunsch, A.David, *Variable Compleja con aplicaciones*. 2da Edición, Pearson Educación, 2004.
-

Índice alfabético

- abierto, 33
 - conexo maximal, 111
- acotado, 33
- Alfred Pringshoim, 109
- analítica
 - en un dominio, 72
- analítica
 - en un punto, 72
- Analiticidad
 - de la función Logaritmo, 102
- argumento, 17
- armónicas conjugadas, 84

- Bolzano-Weierstrass
 - propiedad de, 40

- círculo
 - de convergencia, 172
- Cambio de variable, 114
- camino, 56
- Cauchy
 - desigualdad de, 155
 - Fórmula integral de, 146
- Cauchy-Hadamard
 - fórmula de, 172
- Cauchy-Riemann
 - condiciones, 75
 - ecuaciones en coordenadas polares, 82

- cero
 - de orden m , 216
 - de una función, 213
- ceros
 - de las funciones seno y coseno, 97
- cerrado, 34
- clausura, 34
- cociente de
 - números complejos, 11
- compactos, 41
- Complejitud
 - propiedad de, 40
- conexo, 36
- conjugado, 12
- continua en
 - un punto, 70
- continua en
 - un Dominio, 70
- contorno
 - cerrado, 111
 - opuesto, 111
 - Yuxtapuesto, 113
- contornos
 - equivalentes, 110
- converge
 - absolutamente, 44
- convergencia

-
- puntal, 52
 - uniforme, 52
 - criterio de
 - comparación término a término, 44
 - convergencia uniforme de Cauchy, 54
 - criterio de
 - la razón, 45
 - criterio de la Raíz, 49
 - curva
 - de Jordan, 111
 - regular, 110
 - regular a trozos, 110
 - Dedekind
 - cortaduras de, 39
 - propiedad de, 40
 - derivada, 72
 - Desigualdad Triangular, 13
 - Dirichlet
 - criterio de, 173
 - disconexión, 35
 - Dominio, 57
 - dominio
 - simplemente conexo, 85
 - Enerston-Kakeya, 31
 - Fórmula de De Moivre, 21
 - forma Polar, 16
 - Función
 - logaritmo compleja, 100
 - Meromorfa, 226
 - función
 - argumento, 106
 - compleja, 67
 - cosecante compleja, 97
 - cosecante hiperbólica, 99
 - coseno, 95
 - coseno hiperbólico, 99
 - cotangente compleja, 97
 - cotangente hiperbólica, 99
 - entera, 72
 - exponencial compleja, 93
 - multivaluada, 105
 - secante compleja, 97
 - secante hiperbólica, 99
 - seno, 95
 - seno hiperbólico, 99
 - tangente compleja, 97
 - tangente hiperbólica, 99
 - trigonométricas complejas, 95
 - uniformemente continua, 71
 - univaluada, 67, 101
 - Función de
 - Bessel de primera especie, 201
 - Funciones
 - armónicas, 84
 - Funciones
 - hiperbólicas complejas, 99
 - Funciones continuas, 50
 - Goursat
 - Édourd, 109
 - Hahn-Banach, 65
 - Heine-Borel, 41
 - holomorfa, 72
 - homeomorfismo, 51
 - Homotopía, 129
 - Identidad de Lagrange, 31
 - Índice, 123
 - propiedades, 123
 - Integración
 - de serie de potencias, 186
 - integral
 - propiedades de, 115
 - integral sobre curvas, 113
-

-
- Invariancia del Índice por Homotopía, 130
- Jordan
 desigualdad de, 240
- Límite
 inferior, 48
 superior, 48
- Límite de
 una función compleja, 68
- Laurent
 Serie de, 194
- Línea poligonal, 57
- Linealmente independiente, 30
- Método de la guitarra, 126
- módulo, 12
- Maclaurin
 serie de, 183
- Minkowski, 31
- números complejos, 9
- Plano Complejo, 15
- Plano de Gauss, 15
- Polo, 214
 de orden m , 214
- Principio
 de identidad, 218
 de Prolongación Analítica, 218
 del Argumento, 227
 del Módulo Máximo, 161
 del Módulo Mínimo, 168
- producto de
 Cauchy, 46
- proyección estereográfica, 59
- punto de acumulación, 34
- punto de acumulación, 38
- punto frontera, 35
- punto interior, 35
- Raíces de la unidad, 22
- rama, 106
- Rama principal
 de la función multivaluada, 106
- región, 36
- Regla de la cadena, 74
- regular, 72
- residuo, 222
- Riemann
 esfera de, 60
- secuencialmente compacto, 42
- Serie
 de Taylor, 180
- serie
 de potencias, 171
- serie de
 números complejos, 43
- series de
 funciones, 52
- Simplymente conexo, 131
- singularidad
 aislada, 213
 de una función, 213
 en infinito, 216
 esencial, 214
 removible, 214
- subsucesión, 38
- sucesión, 37
 acotada, 38
 de Cauchy, 38
- término n -ésimo de
 sucesión, 37
- Teorema
 de Cauchy-Goursat
 para conjuntos convexos, 141
 para dominios simplemente conexos, 162
-

- para dominios simplemente conexos, 143
 - para triángulos, 135
 - de la antiderivada, 134
 - de la aplicación abierta, 233
 - de la curva de Jordan, 111
 - de la función inversa, 233
 - de La Función Inversa, Forma Local , 235
 - de Liouville, 156
 - de los residuos, 222
 - de Morera, 155
 - de una Rouché, 228
 - Fundamental del Álgebra, 158
 - Teorema
 - de Riemann, 169
 - Teorema de
 - existencia y unicidad de punto fijo, 231
 - Hurwitz, 230
 - Liouville
 - forma general, 190
 - totalmente acotado, 42

 - valor absoluto, 12
 - valor principal
 - de la función Logaritmo, 101
 - valor principal del argumento, 17
 - Variación del Logaritmo, 120
 - vecindad, 33

 - Weierstrass
 - M-test, 55
-