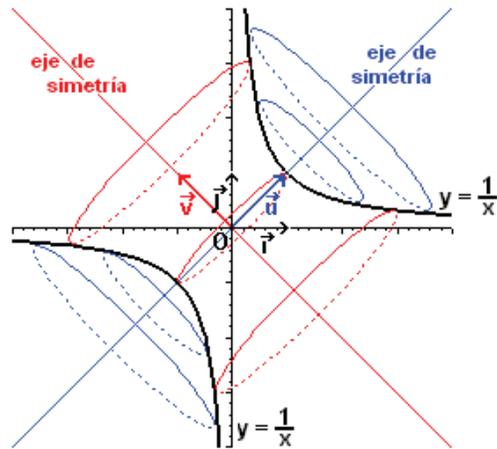




UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
POSTGRADO DE FÍSICA FUNDAMENTAL



Campos de Calibre, Resonancias Gravitacionales y Mundos Brana

Autor: R. Omar Rodriguez
Tutor: Nelson Pantoja

Trabajo de postgrado presentado ante la ilustre Universidad de Los Andes como requisito final para optar al título de Doctor en Física Fundamental.

Barquisimeto, febrero 2014

Índice general

Resumen	III
Introducción	IV
1. Resonancias Gravitacionales en Branas de deSitter	2
1.1. Escenario	3
1.2. Fluctuaciones Gravitacionales	5
1.3. Los Modos Resonantes y el Potencial Gravitacional	12
Análisis de los Resultados	19
2. Fotones y Campos de Calibre Masivos sobre la pared	21
2.1. El Mecanismo de Ghoroku-Nakamura	21
2.2. De Campos Vectoriales a Campos de Calibre	23
2.2.1. Acoplamiento $V(\kappa, z)A^2$	25
2.2.2. La Teoría Invariante de Calibre	26
Análisis de Resultados	35
3. Campos de Calibre sobre la pared	37
3.1. El Mecanismo DGS	37
3.2. Extensión del Mecanismo DGS	40
3.2.1. Escenario Randall-Sundrum	42
3.2.2. Pared de dominio plana	43
Análisis de Resultados	46
Conclusiones	48
Apéndices	50
A. Una pared delgada a partir de una pared de dominio dS sin simetría Z_2	51
B. Simplificaciones sobre las fluctuaciones gravitacionales en branas dS	54
C. Modos Resonantes	57

D. Potenciales de Interacción	59
D.1. Potencial electrostático	59
D.2. El Potencial gravitacional estático	60
E. El propagador vectorial en diferentes mecanismos de localización	64
E.1. Propagador en el mecanismo de Ghoroku-Nakamura	64
E.2. Propagador en el mecanismo DGS	68
E.3. Propagador para el mecanismo extendido DGS en el escenario RS	70
F. Fermiones sobre la Pared	73
G. Dos estrategias adicionales para tratar al mecanismo extendido DGS	75
G.1. Método Boisseau, Forgács y Giacomini	75
G.1.1. Solución analítica	77
G.1.2. Solución BFG	77
G.2. Solución perturbativa al acoplamiento Einstein-campo escalar	78
G.2.1. Fermiones a primer orden en el parametro ϵ	80
G.2.2. Propagador a primer orden en el parametro ϵ	80
G.2.3. Comentarios	82
Bibliografía	83

Resumen

Se estudia la viabilidad del mecanismo Dvali, Gabadadze y Shifman [1], propuesto para localizar campos de calibre sobre una brana de Minkowski en espaciotiempo plano, para localizar campos de calibre sobre 3-branas gruesas de Minkowski autogravitantes que generen espaciotiempos asintóticamente anti-de Sitter 5D (AdS_5), así como también la posibilidad de obtener dicho efecto como resultado de acoplamientos no convencionales de la brana con campos vectoriales 5D. Adicionalmente, se plantea el estudio y análisis del espectro de los modos de Kaluza-Klein en mundos brana de de Sitter embebidos en espaciotiempos con curvaturas AdS_5 diferentes a cada lado de la brana y la posible aparición de resonancias gravitacionales debido a esta asimetría.

Physics and Astronomy Classification Scheme: 04.20.-q, 04.50.+h, 11.27.+d

Palabras Claves: Branas con asimetría, expansión dS, localización de campos de calibre, potencial de interacción.

Introducción

En el ámbito de la física teórica existen problemas fundamentales que no han recibido una respuesta satisfactoria para la fecha, tal es el caso del problema de jerarquía planteado entre la escala de Planck y la escala electrodébil. Entre las propuestas tentativas de solución a estos problemas están aquellas que requieren visualizar a nuestro universo cuatro-dimensional como una porción de un espacio de mayor dimensionalidad en el cual las interacciones fundamentales corresponden a reflejos de su comportamiento en todo el espaciotiempo [2, 3]. En este sentido, el modelo de Randall-Sundrum (RS) [4] ha recibido una gran atención debido a que realiza gravitacionalmente nuestro universo sobre un marco conceptual relativamente simple: un espaciotiempo minkowskiano, \mathbb{M}_4 , confinado en una lámina de mundo cuatro-dimensional, o tres-brana, embebido en un espaciotiempo cinco-dimensional anti-de Sitter, AdS_5 , con simetría de reflexión, Z_2 . Es decir, el escenario RS corresponde a una variedad \mathbb{R}^5 con tensor métrico \mathbf{g} dado por

$$g_{mn} = e^{2a(z)} [\eta_{\mu\nu} dx_m^\mu dx_n^\nu + dz_m dz_n] , \quad (1)$$

con

$$a(z) = -\ln(1 + \kappa|z|) , \quad (2)$$

donde x^μ son las coordenadas del espaciotiempo $(3+1)$ -dimensional y z es la coordenada que describe a la dimensión adicional. El tensor de energía-impulso asociado a este escenario es

$$T_{mn} = -\tau\delta(z)\eta_{\mu\nu} dx_m^\mu dx_n^\nu + \Lambda g_{mn} , \quad (3)$$

siendo $\tau = 6\kappa$ la tensión de la brana y $\Lambda = -6\kappa^2$ la constante cosmológica en ambos lados de la brana.

En esta configuración, las fluctuaciones cinco-dimensionales, h_{ab} , del tensor métrico

$$g_{ab} \longrightarrow g_{ab} + \lambda h_{ab} , \quad \lambda \ll 1 , \quad (4)$$

en el calibre

$$h_{0c} = 0 , \quad g^{ab}h_{ab} = 0 , \quad \nabla_a h^a_b = 0 \quad (5)$$

y bajo la factorización

$$h_{\mu\nu} = e^{ip_\alpha x^\alpha} e^{a(z)/2} \psi_{\mu\nu}(z) , \quad (6)$$

corresponden a perturbaciones que se distribuyen a lo largo de la dimensional adicional siguiendo la ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{QM}) \psi_m = m^2 \psi_m , \quad V_{QM} = -3\kappa\delta(z) + \frac{15}{4} \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa_+|z|)^2} . \quad (7)$$

Por tanto, las fluctuaciones están conformadas por un gravitón no-masivo, ψ_0 , y un conjunto de gravitones masivos, ψ_m . Nótese que el potencial V_{QM} tiene un pozo infinito donde esta la brana y que para $z \rightarrow \pm\infty$ el $V_{QM} \rightarrow 0$. En consecuencia, se tiene que el modo cero se encuentra localizado y viene dado por $\psi_0 \sim e^{3a(z)/2}$ mientras que los modos masivos se propagan libremente a lo largo de la dimensión adicional.

Como se muestra en [4, 5], y se detalla en el apéndice D.2, estos modos definen al potencial gravitacional entre dos partículas separadas una distancia r sobre la brana de la siguiente manera

$$\mathcal{U} \sim \frac{|\psi_0(0)|^2}{r} + \frac{4}{3} \int |\psi_m(0)|^2 \frac{e^{-mr}}{r} dm, \quad (8)$$

siendo ψ_0 el modo que provee la interacción gravitacional estandar o newtoniana mientras que los ψ_m contribuyen con las correcciones al potencial de Newton. En particular, para el escenario RS el potencial se reduce a

$$\mathcal{U} \sim \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{\kappa r} \right), \quad (9)$$

de donde se obtiene que es posible recuperar gravedad newtoniana sobre la pared para $r \gg 1/\kappa$, con el radio crítico escogido como $1/\kappa \sim 1mm$ para estar acorde con las observaciones de nuestro universo [4].

La simetría de reflexión en el modelo RS no es una condición necesaria para la realización del mundo-brana, realmente es una condición escogida por razones de simplicidad. De hecho, el problema de una simple tres-brana embebida en un espacio AdS₅ sin simetría Z_2 , esto es, con diferentes constantes cosmológicas Λ_+ y Λ_- a cada lado de la brana, ha sido considerado en [6, 7]. En estos artículos se reporta que dicho espaciotiempo viene dado por (1) con factor métrico

$$a(z) = -\Theta(-z) \ln(1 - \kappa_- z) - \Theta(z) \ln(1 + \kappa_+ z) \quad (10)$$

donde $\kappa_{\pm} = \sqrt{-\Lambda_{\pm}/6}$. En este escenario los modos se propagan siguiendo una ecuación tipo Schrödinger con potencial

$$V_{QM} = \frac{15}{4} \frac{\kappa_-^2}{(1 - \kappa_- z)^2} \Theta(-z) - \frac{3}{2} (\kappa_- + \kappa_+) \delta(z) + \frac{15}{4} \frac{\kappa_+^2}{(1 + \kappa_+ z)^2} \Theta(z). \quad (11)$$

En concordancia con este potencial de pozo infinito y sin brecha, $V_{QM}(\pm\infty) = 0$, el espectro de los gravitones esta conformado por un modo cero localizado

$$\psi_0 = N_0 e^{3a(z)/2}, \quad (12)$$

con N_0 dado por

$$N_0 = \sqrt{2} (\kappa_-^{-1} + \kappa_+^{-1})^{-1/2}, \quad (13)$$

y un continuo de modos masivos ψ_m , semejante al espectro de los modos del escenario RS. Pero a diferencia de éste, y como consecuencia de la asimetría, en el conjunto de modos masivos reside un modo de masa

$$m_{res} \sim \sqrt{\kappa_- \kappa_+} \quad (14)$$

que resuena, esto es, un modo masivo con mayor probabilidad de estar sobre la brana que todos los demás. Con el fin de realizar un análisis metódico para indagar sobre los posibles efectos de la presencia del modo resonante en el mundo-brana se asume la condición de asimetría $\kappa_+/\kappa_- \leq 1$. Así, para valores fijos de κ_+ y valores arbitrarios pero grandes de κ_- el modo resonante pertenece a los modos pesados que no contribuyen con las correcciones al potencial newtoniano debido a que son atenuados por el factor e^{-mr} en el potencial (8). Si por el contrario, se considera el escenario para el que κ_+ toma valores arbitrarios pero pequeños y κ_- es un valor fijo, resulta que el modo que resuena pertenece a los modos ligeros, $m_{res} \sim \kappa_- \sqrt{\kappa_+/\kappa_-} \ll \kappa_-$, y en principio es posible evaluar su impacto sobre el potencial (8). Sin embargo, el incremento de la asimetría deslocaliza al modo cero, $N_0 \sim \kappa_+^{1/2}$, llevando a un universo sobre la brana donde la interacción gravitacional es dominada por las correcciones más que todo por la ausencia de la simetría de reflexión que por la presencia del modo resonante [7].

En el modelo RS el tensor métrico de Minkowski define al espaciotiempo más sencillo posible sobre la brana, $g_{\alpha\beta}^{(4)} = \eta_{\alpha\beta}$: un espaciotiempo cuatro-dimensional estático, homogéneo e isótropo. No obstante, un espaciotiempo \mathbb{M}_4 es un caso particular de una familia de espaciotiempos homogéneos e isótropos más generales dadas por las métricas de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$g_{\alpha\beta}^{(4)} = -dt_\alpha dt_\beta + R^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr_\alpha dr_\beta + r^2 d\Omega_\alpha d\Omega_\beta \right], \quad (15)$$

siendo $R(t)$ el factor de escala y k la curvatura espacial o intrínseca la cual puede tomar los valores de 0, +1, -1 para un universo espacialmente plano, cerrado o abierto respectivamente [8].

Así, un mundo brana de mayor interés cosmológico viene dado por uno cuyo tensor métrico sea

$$g_{mn} = f^2(z) \left[\delta_m^\alpha \delta_n^\beta g_{\alpha\beta}^{(4)} + dz_m dz_n \right], \quad (16)$$

donde $g^{(4)}$ corresponde a (15). Estos modelos y sus propiedades han sido tratados en varios artículos [9, 10, 11, 12], en particular, en [9] se analiza la localización de la gravedad sobre varios mundos-branas del tipo FRW embebidas en un espaciotiempo cinco-dimensional AdS_5 o dS_5 con simetría Z_2 . Acorde a [9], sobre una brana con una geometría AdS_4 , curvatura espacial $k = -1$ y embebida en un espaciotiempo cinco-dimensional AdS_5 , no se tiene al modo cero confinado sobre la brana. La pared \mathbb{M}_4 , con $k = 0$, en un espacio AdS_5 corresponde al escenario RS, y con $k = -1$ e inmerso en un espaciotiempo AdS_5 o dS_5 el gravitón está localizado al igual que para la brana con expansión dS_4 , con $k = \pm 1$ en un espacio AdS_5 o dS_5 .

Ahora, los datos de las observaciones realizadas de las Supernovas del tipo Ia [13, 14] y por el satélite COBE¹ del fondo cósmico de microondas indican que nuestro universo cuatro-dimensional es espacialmente plano, $k = 0$, y está dominado por una constante cosmológica positiva pero muy pequeña (para mayores detalles ver [15, 16, 17]). En tal sentido, cobran especial interés las branas con expansión dS_4 con $k = 0$. En [10, 11] se estudia la contribución del espectro de los gravitones al potencial gravitacional sobre una brana dS_4 embebida en un cinco-espacio \mathbb{M}_5 , AdS_5 o dS_5 . Esto es, para $k = 0$ se tiene al factor de escala $R(t) = e^{\beta t}$, el cual define una geometría de Sitter sobre la

¹Acrónimo de *Cosmic Background Explorer*.

brana con constante cosmológica $\Lambda_4 = 3\beta^2$ y factor métrico, según sea el caso,

$$\mathbb{M}_5 : \quad f^{-1}(z) = e^{\beta|z|} , \quad \Lambda = 0 , \quad (17)$$

$$dS_5 : \quad f^{-1}(z) = e^{\beta|z|} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{6\beta^2}} \right) \sinh(\beta|z|) , \quad \Lambda > 0 , \quad (18)$$

$$AdS_5 : \quad f^{-1}(z) = e^{\beta|z|} - \left(1 - \sqrt{1 + \frac{|\Lambda|}{6\beta^2}} \right) \sinh(\beta|z|) , \quad \Lambda < 0 . \quad (19)$$

Los potenciales V_{QM} para estos escenarios vienen expresados como

$$\mathbb{M}_5 : \quad V_{QM} = -\frac{\tau}{2}\delta(z) + \frac{9}{4}\beta^2 , \quad (20)$$

$$dS_5 : \quad V_{QM} = -\frac{\tau}{2}\delta(z) + \frac{9}{4}\beta^2 - 15 \left(\frac{C_{dS}\beta e^{-\beta|z|}}{1 + C_{dS}^2 e^{-2\beta|z|}} \right)^2 , \quad (21)$$

$$AdS_5 : \quad V_{QM} = -\frac{\tau}{2}\delta(z) + \frac{9}{4}\beta^2 - 15 \left(\frac{C_{AdS}\beta e^{-\beta|z|}}{1 - C_{AdS}^2 e^{-2\beta|z|}} \right)^2 , \quad (22)$$

donde $\tau = 6\sqrt{\beta^2 - \Lambda/6}$ es la tensión de la brana dS_4 , y C_{dS} y C_{AdS} son dos constantes definidas como

$$C_{dS} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda/6} - 1} , \quad C_{AdS} = \sqrt{\frac{\beta^2}{|\Lambda|/6} - 1} . \quad (23)$$

Estos V_{QM} presentan un pozo de potencial infinito y, a diferencia del escenario RS, tienen una brecha de masa dada por

$$\lim_{z \rightarrow \infty} V_{QM}(z) = \frac{9}{4}\beta^2 , \quad (24)$$

que es una cualidad genérica de las branas con expansión dS_4 [18]. En consecuencia, el espectro de modos ψ_m resulta conformado por un sólo estado acotado, $m = 0$, separado del continuo de modos masivos por una brecha de $9\beta^2/4$. Dada la presencia de dicha brecha se podría suponer la existencia de modos masivos discretos en $0 < V_{QM} < 9\beta^2/4$, además del modo cero; sin embargo, no existen tales modos ya que no hay más de un estado acotado en los potenciales tipo delta [19].

En [10, 11] se concluye que la única configuración que favorece la realización de un mundo-brana con características cosmológicas, semejantes a las de nuestro universo cuatro-dimensional, es una con expansión dS_4 en un *bulk* AdS_5 ya que sólo en esa configuración es posible recuperar un potencial gravitacional de la forma $\mathcal{U} \sim 1/r$. En los escenarios con *bulk* \mathbb{M}_5 y dS_5 las contribuciones de los modos masivos a la interacción gravitacional dominan frente al potencial newtoniano, llevando a un potencial cinco-dimensional sobre la brana, $\mathcal{U} \sim 1/r^2$.

Ahora bien, si se relaja la condición de simetría de reflexión en estos escenarios, es decir, diferentes constantes cosmológicas a cada lado de la pared, Λ_+ y Λ_- , un incremento de la asimetría, $\Lambda_+/\Lambda_- \ll 1$, no deslocalizaría al modo cero aún cuando $\Lambda_+ \rightarrow 0$, debido a la brecha de masa presente en el V_{QM} . En consecuencia, el término newtoniano estaría presente en el potencial gravitacional independientemente del grado de asimetría presente en el espaciotiempo cinco-dimensional, a diferencia de lo que sucede con la brana estática (1, 10). Por tanto, una brana dS_4 , sin simetría Z_2

ofrecería un escenario idoneo para contrastar la contribución del modo que resuena a las correcciones con la interacción newtoniana en el potencial gravitacional (8). En la presente tesis, se estudia el impacto de los modos resonantes, productos de la ausencia de la simetría Z_2 , sobre el potencial gravitacional en una brana dS_4 .

La brana RS es de espesor infinitesimal, lo cual es una idealización. Por esta razón en modelos más acordes con la realidad es tomado en cuenta el grosor de la pared. Una pared con ancho definido, o pared de dominio, se obtiene como solución al acoplamiento Einstein-Klein Gordon

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab} , \quad (25)$$

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + V(\phi) \right] , \quad (26)$$

$$\nabla_d \nabla^d \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 , \quad (27)$$

donde el campo escalar, ϕ , interpola entre los mínimos del potencial.

Como un ejemplo, considerese el tensor métrico

$$g_{ab} = e^{a(y)} \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b , \quad (28)$$

con

$$a(y) = -\delta \ln \cosh(\alpha y / \delta) . \quad (29)$$

Esta geometría es generada por una pared de dominio de espesor δ , con simetría Z_2 y asintóticamente AdS_5 con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$ entorno a la pared. En [20] se muestra que (28) y (29) es una solución al sistema acoplado (25), (26), y (27) con

$$\phi(y) = \sqrt{3\delta} \arctan \sinh(\alpha y / \delta) \quad (30)$$

y

$$V(\phi) = \frac{3\alpha^2}{2\delta + 2} \cos^2(\phi / \sqrt{3\delta}) - 6\alpha^2 , \quad (31)$$

donde ϕ interpola entre los mínimos del potencial $\pm \pi \sqrt{3\delta} / 2$. Esta pared es una versión regularizada de la brana RS ya que converge a ella en el límite de pared delgada [21]. Soluciones similares pueden ser encontradas en [22, 23, 24, 25, 26, 27].

En cuanto a la localización de otros campos sobre la pared RS, queda claro que dicho modelo será un mundo brana factible en la medida en que contenga sobre la brana los campos que definen a nuestro universo cuatro-dimensional, entre los que se encuentran los campos de materia y aquellos asociados a las interacciones fundamentales. En particular, revisemos brevemente los problemas que se presentan y posibles soluciones cuando se considera la localización de los fermiones y de los campos de calibre sobre la brana RS.

Sea la ecuación de Dirac

$$i\Gamma^b \nabla_b \Psi(x, y) = \mathbf{0} , \quad (32)$$

para un fermión Ψ en el escenario RS, este último descrito en las coordenadas de longitud propia

$$g_{ab} = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b , \quad a(y) = \kappa |y| . \quad (33)$$

Entonces, bajo la descomposición quirral

$$\Psi(x, y) = \psi_-(x)k_-(y) + \psi_+(x)k_+(y) , \quad (34)$$

y asumiendo que ψ_{\pm} satisface la ecuación de Dirac cuatro-dimensional

$$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\pm}(x) = 0 , \quad (35)$$

se tiene de (32)

$$[\partial_y + 2a'(y)]k_{\mp}(y) = 0 , \quad (36)$$

cuya solución viene dada por

$$k_{\mp}(y) \sim e^{-2a(y)} . \quad (37)$$

de donde se observa que no es posible obtener fermiones localizados sobre la brana RS porque la gravitación expulsa a los fermiones de la pared [28].

Ahora, si el espaciotiempo cinco-dimensional es una pared de dominio es posible considerar un mecanismo no-gravitacional para localizar a los fermiones sobre la pared, mediante el uso de un acoplamiento de Yukawa [29, 30, 31]: $\lambda \bar{\Psi}\phi\Psi$, siendo λ la constante de acoplamiento entre el fermión y la pared de dominio. Así, resulta

$$k_{\mp}(y) \sim e^{-2a(y)\mp\lambda\int\phi(y)dy} . \quad (38)$$

Nótese, que el mecanismo implementado permite establecer una competencia entre la gravitación y la interacción de Yukawa que se solventa una vez fijado el valor de λ , que a su vez, define cual de los modos quirales queda localizado (ver apéndice F). Una situación similar se presenta para los campos de calibre, en el sentido de que no pueden ser localizados sin un mecanismo para tal fin.

Asumiendo sobre el escenario RS la acción cinco-dimensional tipo Maxwell para el campo de calibre [28]

$$S_A = -\frac{1}{4}\int d^5x \sqrt{g} F_{ac}F^{ac} , \quad F_{ab} = \partial_c A_b - \partial_b A_c \quad (39)$$

y considerando la siguiente factorización

$$A_{\mu}(x, y) = a_{\mu}(x)\psi_0(y) , \quad (40)$$

se tiene, por reducción dimensional, que la teoría efectiva en el calibre axial, $A_5 = 0$, se expresa de la siguiente manera [28]

$$S_A = -\frac{1}{4}\int dy \psi_0^2(y) \int d^4x \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} f_{\mu\alpha}f_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\int dy \psi_0^2 \int d^4x \eta^{\mu\nu} a_{\mu}a_{\nu} . \quad (41)$$

El segundo término del lado derecho indica que a_{μ} es masivo. Como el fotón es un campo de masa nula entonces se debe escoger $\psi'_0 = 0$ cuya solución es $\psi_0 = ctte$. Por tanto, ψ_0 no es normalizable,

$$\int dy \psi_0^2(y) \rightarrow \infty , \quad (42)$$

y se sigue que no es posible identificar una teoría efectiva cuatro-dimensional que corresponda al fotón sobre la brana RS a partir de una acción cinco-dimensional tipo Maxwell (39).

Lo anterior sugiere que la dinámica de estos bosones en espacios de alta dimensionalidad es más complicada. Las opciones para representar dicha dinámica consideran desde incorporar a la acción (39) términos de interacción no convencionales entre la brana y el campo [32, 33] hasta agregar correcciones o modificaciones a la cinemática [1, 24, 34]. En particular, ilustran estas tendencias los mecanismos de Ghoroku-Nakamura [32]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(m_5^2 - m_4^2 \delta(z)) A_a A^a \quad (43)$$

y el de Dvali-Gabadadze-Shifman (DGS) [1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4Q^2} F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{4e^2}\delta(z)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_a J^a , \quad (44)$$

respectivamente.

El primero de ellos, (43), esta definido sobre el escenario RS, pero carece de simetría de calibre, mientras que el mecanismo DGS es invariante de calibre pero esta ideado para una brana \mathbb{M}_4 en un espaciotiempo \mathbb{M}_5 . En esta tesis, se trata la incorporación de la simetría de calibre al mecanismo de Ghoroku-Nakamura [32] así como su generalización, y la del mecanismo DGS [1], a paredes de dominio.

El proposito de esta tesis es el de realizar un estudio detallado sobre la localización del gravitón y el fotón en paredes de dominio que conlleve al análisis de nuevos fenómenos gravitacionales y a la propuesta de nuevos mecanismos de localización para los campo de calibre. En el Capítulo 1, se presenta la solución más general posible sin simetría de reflexión para el tensor métrico de una brana dS_4 y se calcula el potencial gravitacional sobre la brana, así como el respectivo efecto de la presencia de modos resonantes en el sistema. Por otra parte, como una aproximación preliminar al tema de la localización de campos de calibre, en el Capítulo 2 se postula una teoría efectiva con simetría de calibre sobre paredes de dominio que bajo el calibre axial y en el límite de pared delgada recupera al mecanismo de Ghoroku-Nakamura [32]. En el Capítulo 3, se plantea una extensión del enfoque DGS [1] para paredes de dominio autogravitantes y se estudian los efectos de la curvatura y del ancho de la pared sobre el propagador del bosón vectorial de calibre. Finalmente se presentan las conclusiones.

En lo sucesivo, se usa el Sistema de Unidades de Heaviside-Lorentz donde

$$c = \hbar = 1 \quad \text{y} \quad \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \quad (45)$$

y se considera que las letras latinas, a, b, c, \dots , y griegas, $\alpha, \beta, \mu, \dots$, fungen como índices de mundo cinco y cuatro dimensionales respectivamente, mientras que las letras latinas y griegas con barras, por ejemplo \bar{c} y $\bar{\alpha}$, son índices de Lorentz cinco y cuatro dimensionales respectivamente.

Capítulo 1

Resonancias Gravitacionales en Branas de deSitter

Considérese la siguiente estructura gravitacional físicamente relevante: una pared que separa dos espaciotiempos de constantes cosmológicas distintas y con tensor métrico dado por

$$g_{mn} = f^2(z) [-dt_m dt_n + dz_m dz_n + e^{2\beta t} \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j] , \quad (1.1)$$

donde

$$f(z)^{-1} = \cosh^\delta(\beta z/\delta) + \text{sgn}(z) \frac{\alpha \delta}{\beta(1-2\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta z/\delta) \text{Re} [i {}_2F_1(1/2 - \delta, 1/2, 3/2 - \delta, \cosh^2(\beta z/\delta))] , \quad (1.2)$$

con δ el espesor de la brana y ${}_2F_1$ la función hipergeométrica. El parámetro α mide la ausencia de simetría Z_2 [35], tal que para $\alpha = 0$ se recupera la pared de dominio con simetría de reflexión [36]. En [35] se muestra que la métrica (1.2), es una solución al sistema acoplado Einstein-campo escalar con

$$\phi(z) = \phi_0 \arctan \sinh(\beta z/\delta) , \quad \phi_0 = \sqrt{3\delta(1-\delta)} \quad (1.3)$$

y

$$V(\phi) = \frac{3}{2}\beta^2 \left[4 + \frac{1-\delta}{\delta} \cos^2\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \right] f^{-2}(\phi) - 6\beta^2 \cos^{2\delta}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \left[\frac{\alpha}{\beta} + \cos^{1-\delta}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \tan\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) f^{-1}(\phi) \right]^2 \quad (1.4)$$

siendo

$$f(\phi)^{-1} = \cos^{-\delta} \frac{\phi}{\phi_0} + \text{sgn}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \frac{\alpha \delta}{\beta(1-2\delta)} \cos^{-(1-\delta)} \frac{\phi}{\phi_0} \text{Re} \left[i {}_2F_1\left(1/2 - \delta, 1/2, 3/2 - \delta, \cos^{-2} \frac{\phi}{\phi_0}\right) \right] \quad (1.5)$$

y donde ϕ interpola entre los mínimos del potencial $V(\phi)$, $\pm\pi\phi_0/2$.

Ahora, el límite de pared delgada correspondiente a esta configuración viene dada por (ver apéndice A)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g_{mn} = \left(e^{\beta|z|} + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta z \right) [-dt_m dt_n + dz_m dz_n + e^{2\beta t} \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j] , \quad (1.6)$$

y la densidad de energía

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} G_t^t = -6\alpha(2\beta - \alpha) \Theta(-z) + 6\alpha(2\beta + \alpha) \Theta(z) + 6\beta \delta(z) , \quad (1.7)$$

donde $0 < \alpha < 2\beta$. Un tratamiento riguroso de este límite requiere un análisis distribucional en el sentido de [37] con el fin de relacionar consistentemente el límite distribucional de los tensores de curvatura con el límite del tensor métrico, análisis que está fuera del alcance de este trabajo.

Las expresiones (1.6) y (1.7) muestran que para $\delta \rightarrow 0$ la pared de dominio con expansión dS_4 (1.1-1.4) se reduce a una brana localizada en $z = 0$. La misma corresponde a una región de transición entre un cinco-espacio dS_5 , $\Lambda_- = 6\alpha(2\beta - \alpha)$, y un cinco-espacio AdS_5 , $\Lambda_+ = -6\alpha(2\beta + \alpha)$. En el límite de *bulk* plano $\Lambda_{\pm} = 0$, esto es $\alpha \rightarrow 0$, se recupera consistentemente la solución con simetría de reflexión sumergida en una variedad cinco-dimensional plana reportada en [21].

Si bien es cierto que la brana dada por (1.6), (1.7) se obtiene como un caso límite de una configuración suave, la pared de dominio (1.1-1.4), también es cierto que no es la única manera. Otra manera es a través del formalismo de Israel [38]. Mediante este formalismo, en la próxima sección generamos una familia tri-paramétrica de soluciones dinámicas correspondientes a una pared infinitamente delgada con diferentes constantes cosmológicas a cada lado de la pared, que no corresponde con el límite de pared delgada de alguna pared de dominio, donde es posible identificar a (1.6), (1.7) como un miembro de dicha familia.

1.1. Escenario

Sea el espaciotiempo $(\mathbb{R}^5, \mathbf{g})$ donde la métrica es solución a las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{mn} + \Lambda g_{mn} = T_{mn} , \quad m, n = 0, \dots, 4 \quad (1.8)$$

$$T_{mn} = -\tau \delta_m^\mu \delta_n^\nu g_{\mu\nu} \frac{\delta(z)}{f(z)} , \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (1.9)$$

con

$$\Lambda = \Theta(-z) \Lambda_- + \Theta(z) \Lambda_+ , \quad (1.10)$$

donde z es la coordenada a lo largo de la dimensión adicional.

Esta variedad corresponde a dos subespacios con constantes cosmológicas Λ_+ y Λ_- , separados por una densidad de energía (brana) con tensión $\tau > 0$ y soporte sobre la hipersuperficie $z = 0$. Se sigue que el tensor métrico viene dado por

$$g_{mn} = \Theta(-z) g_{-mn} + \Theta(z) g_{+mn} , \quad (1.11)$$

con g_- y g_+ los tensores métricos de los subespacios entorno a la brana, solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$G_{-mn} + \Lambda_- g_{-mn} = 0 , \quad z < 0 , \quad (1.12)$$

$$G_{+mn} + \Lambda_+ g_{+mn} = 0 , \quad z > 0 , \quad (1.13)$$

sujeta a las condiciones de borde sobre la brana

$$g_{-mn}|_{z=0} = g_{+mn}|_{z=0} , \quad (1.14)$$

$$2g^{pq} \left(\delta_m^c \delta_n^d - \frac{1}{2} g_{mn} g^{cd} \right) (\partial_{[c} g_{+q]d} - \partial_{[c} g_{-q]d}) \delta_{p]z} \Big|_{z=0} = -\frac{\tau}{f(z)} \delta_m^\mu \delta_n^\nu g_{\mu\nu} \Big|_{z=0} \quad (1.15)$$

tal y como se obtiene por simple sustitución de (1.11) en (1.8).

En lo que sigue, se está interesado en hallar soluciones al sistema (1.12 -1.15) tal que el espaciotiempo 5-dimensional sea dinámico y exhiba simetría plano-paralela. Para ello considérese el siguiente tensor métrico

$$g_{\pm mn} = f_{\pm}^2(z) [-dt_m dt_n + e^{2\beta t} \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j + dz_m dz_n] \quad (1.16)$$

Así, las ecuaciones (1.12) y (1.13) se reducen a

$$\frac{f_{\pm}^{\prime 2}}{f_{\pm}^2} + \frac{\Lambda_{\pm}}{6} f_{\pm}^2 = \frac{f_{\mp}^{\prime 2}}{f_{\mp}^2} + \frac{\Lambda_{\mp}}{6} f_{\mp}^2 = \beta^2 \quad (1.17)$$

y de la ec. (1.15) resulta

$$f_{+}^{\prime}(0) - f_{-}^{\prime}(0) = -\frac{1}{3} \tau f^2(0) . \quad (1.18)$$

Combinando (1.17) y (1.18) se obtiene para la tensión

$$\tau^4 + 3 (\Lambda_{-} + \Lambda_{+} - 12\beta^2) \tau^2 + \frac{9}{4} (\Lambda_{+} - \Lambda_{-})^2 = 0 , \quad (1.19)$$

donde se ha considerado $f(0) = 1$. Así

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{6\beta^2 - \Lambda_{+}} + \sqrt{6\beta^2 - \Lambda_{-}} \right) , \quad \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2 . \quad (1.20)$$

Ahora, integrando (1.17) tal que se satisfaga (1.18) se tiene el factor métrico

$$f_{\pm}^{-1}(z) = e^{\pm\beta z} \mp \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda_{\pm}}{6\beta^2}} \right) \sinh \beta z , \quad \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2 . \quad (1.21)$$

De acuerdo con (1.8), (1.10) y (1.16), la solución dada por (1.20) y (1.21) representa un espaciotiempo cinco-dimensional con constantes cosmológicas arbitrarias, asociadas a la misma curvatura cuatro-dimensional positiva dispuesta sobre la brana con soporte sobre una hipersuperficie transversa a la dimensión adicional.

Por otro lado, dicha solución también corresponde a una familia tri-paramétrica de paredes dinámicas simples con límite de pared estática plana bien definido y de *bulk* plano consistente con lo reportado en [10, 21], tal y como se muestra a continuación

1. En cuanto a la curvatura de la pared, se tiene el límite de pared plana y estática

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} f_{\pm} = \left(1 \pm \sqrt{-\Lambda_{\pm}/6} z\right)^{-1}, \quad \tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{-\Lambda_+} + \sqrt{-\Lambda_-}\right). \quad (1.22)$$

En la misma se refleja un resultado bien conocido en la literatura: las branas estáticas se realizan en un espaciotiempo AdS₅; es decir, para $\Lambda_{\pm} < 0$. Este escenario es una versión del modelo de Randall y Sundrum [4]

$$f(z) = \left(1 + \sqrt{|\Lambda|/6} |z|\right)^{-1}, \quad \tau = \sqrt{6|\Lambda|}. \quad (1.23)$$

en ausencia de simetría de reflexión. Ver [7] para más detalles.

2. Con respecto a la constante cosmológica del *bulk*

- Curvatura nula: Para $\Lambda_{\pm} = 0$

$$f_{\pm}(z) = e^{\mp\beta z}, \quad \tau = 3\beta. \quad (1.24)$$

Esto es, el factor métrico se reduce al reportado en [21, 10] para una configuración plana. Finalmente, en lo que sigue se demuestra la equivalencia entre un espacio \mathbb{M}_5 y un dS₅.

- Espaciotiempo dS₅: Para $0 < \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2$

$$e^{\mp\beta z} < f_{\pm}(z) \leq \left(\frac{2}{1 + e^{\mp 2\beta z}}\right) e^{\mp\beta z}, \quad (1.25)$$

donde el coeficiente de la cota superior esta acotado entre [1, 2). En consecuencia el comportamiento del factor métrico es semejante al del caso plano.

Finalmente, y retornando a la motivación inicial, por simple sustitución de las constantes cosmológicas $\Lambda_{\pm} = \mp 6\alpha(2\beta \pm \alpha)$ se demuestra que la familia (1.21) se reduce a (1.6).

■

1.2. Fluctuaciones Gravitacionales

Con la finalidad de mostrar cuán factible es considerar a la pared dada por (1.16) y (1.21) como un modelo de nuestro universo, a continuación se discute el potencial gravitacional sobre dicha brana.

En nuestro entorno cuatro-dimensional, es un hecho que la interacción gravitacional entre dos partículas sigue un potencial newtoniano, es decir, interaccionan como si estuviesen en un universo estático a pesar de lo realmente dinámico que es nuestro universo. En analogía y por consistencia, en esta tesis se asume que el potencial gravitacional que se realiza sobre una brana estática es el

mismo que se realiza sobre una brana con expansión dS_4 . Esto es, como se muestra en [4, 5] el potencial es el siguiente

$$\mathcal{U}(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \frac{4}{3} \sum_{m>0} |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \right] \quad (1.26)$$

donde ψ_m son las fluctuaciones gravitacionales, soluciones a la ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{QM}) \psi_m = m^2 \psi_m, \quad V_{QM} = -\frac{13}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{2} \frac{f''}{f} - \frac{2}{3} \tau \delta(z) - \frac{4}{3} \Lambda f^2. \quad (1.27)$$

Para detalles ver el apéndice D.2.

Ahora bien, en [7] se demuestra que a cada autovalor, $m^2 > 0$, le corresponden dos autofunciones. Esto es, la solución a (1.27) viene dada por un autovalor m^2 con grado de degeneración dos: ψ_m^c , ψ_m^d . La solución ψ_m^c es continua y al menos del tipo \mathcal{C}^1 en todo el espacio, mientras que ψ_m^d es del tipo \mathcal{C}^0 . Es decir, lleva la información de las singularidades presentes en el sistema y en particular es afectada por la presencia de la brana.

Los estados $\psi_m^{c,d}$ son autofunciones de un problema de autovalores con un espectro continuo y por lo tanto se espera que satisfagan relaciones de ortonormalidad en el sentido de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^{*c}(z) \psi_m^c(z) dz = \delta(m - m'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^{*d}(z) \psi_m^d(z) dz = \delta(m - m'). \quad (1.28)$$

Adicionalmente, puesto que ψ_m^c y ψ_m^d corresponden a un mismo autovalor m^2 , serán escogidos de forma tal que satisfagan la relación de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^{*c}(z) \psi_m^d(z) dz = 0. \quad (1.29)$$

De esta manera se tiene que para evaluar el potencial gravitacional, $\mathcal{U}(r)$, presente en la brana, se requiere del conocimiento de la forma explícita de las autofunciones, ψ_m , y por lo tanto en el próximo apartado se le prestará especial atención al cálculo de los mismos.

La solución general

Sustituyendo el factor (1.21) en el potencial (1.27), se encuentra

$$V_{QM}(z) = -\frac{\tau}{2} \delta(z) + m_0^2 - 15 \left(\frac{C_- \beta e^{\beta z}}{1 + C_-^2 e^{2\beta z}} \right)^2 \Theta(-z) - 15 \left(\frac{C_+ \beta e^{-\beta z}}{1 + C_+^2 e^{-2\beta z}} \right)^2 \Theta(z) \quad (1.30)$$

donde $m_0^2 \equiv 9\beta^2/4$ y

$$C_{\pm} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_{\pm}/6}} - \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_{\pm}/6} - 1}. \quad (1.31)$$

y τ es dado por (1.20). Nótese que para $z \rightarrow \pm\infty$ el potencial V_{QM} tiende asintóticamente a m_0^2 . La presencia de esta brecha de energía es una cualidad genérica en las branas con expansión dS_4 [18].

La estructura del potencial (1.30) sugiere que la solución debe estar dada por una función de onda con un comportamiento diferente en cada lado de la brana y por tanto se propone que las fluctuaciones gravitacionales vengan dadas por

$$\psi_m(z) = \psi_-(z) \Theta(-z) + \psi_+(z) \Theta(z) . \quad (1.32)$$

Así, la expresión (1.32) será solución a la ecuación tipo Schrödinger (1.27) con V_{QM} dado por (1.30) si, y solo si, ψ_- y ψ_+ satisfacen

$$-\partial_z^2 \psi_- + V_- \psi_- = m^2 \psi_- \quad , \quad V_-(z) = \frac{9}{4} \beta^2 - 15 \left(\frac{C_- \beta e^{-\beta z}}{1 + C_-^2 e^{-2\beta z}} \right)^2 \quad , \quad z < 0 \quad , \quad (1.33)$$

$$-\partial_z^2 \psi_+ + V_+ \psi_+ = m^2 \psi_+ \quad , \quad V_+(z) = \frac{9}{4} \beta^2 - 15 \left(\frac{C_+ \beta e^{-\beta z}}{1 + C_+^2 e^{-2\beta z}} \right)^2 \quad , \quad z > 0 \quad , \quad (1.34)$$

tales que

$$\psi_-^c(0) = \psi_+^c(0) = 0 \quad , \quad \psi_-'^c(0) = \psi_+'^c(0) \quad , \quad (1.35)$$

$$\psi_-^d(0) = \psi_+^d(0) \quad , \quad \psi_-'^d(0) - \psi_+'^d(0) = \frac{\tau}{2} \psi^d(0) . \quad (1.36)$$

Para $m = 0$, la solución a este sistema viene dada por el modo cero

$$\psi_0(z) = N_0 \left[f_-^{3/2} \Theta(-z) + f_+^{3/2} \Theta(z) \right] \quad , \quad (1.37)$$

donde

$$N_0^{-2} = -\frac{1}{2\sqrt{\Lambda_-/6}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_-/6} - 1} + \frac{\beta^2}{(\sqrt{\Lambda_-/6})^3} \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\Lambda_-/6}} - \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_-/6} - 1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_+/6}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_+/6} - 1} + \frac{\beta^2}{(\sqrt{\Lambda_+/6})^3} \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\Lambda_+/6}} - \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_+/6} - 1} \right) . \quad (1.38)$$

Para $m > 0$, la ecuación (1.34), análogo para (1.33), es equivalente a la ecuación hipergeométrica de Gauss. Esto es, bajo el siguiente cambio

$$\psi_+(z) = \left(\frac{1}{4} C_+^2 + e^{2\beta z} \right)^{5/2} e^{\pm i\mu z} \chi(z) \quad , \quad \xi = -\frac{4}{C_+^2} e^{2\beta z} \quad , \quad (1.39)$$

donde $\mu^2 = m^2 - m_0^2$, resulta que (1.34) se reduce

$$(1 - \xi) \xi \chi''(\xi) + [c - (a + b + 1)\xi] \chi'(\xi) - ab \chi(\xi) = 0 \quad , \quad (1.40)$$

que no es más que la ecuación hipergeométrica, donde

$$a = \frac{5}{2} \quad , \quad b = \frac{5}{2} \pm \frac{i\mu}{\beta} \quad , \quad c = 1 \pm \frac{i\mu}{\beta} .$$

En [39] se muestran diferentes formas en la que puede ser presentada la solución a (1.40). Escogiendo convenientemente una de ellas, se tiene

$$\chi(\xi) = (1 - \xi)^{-a} {}_2F_1[a, c - b; a - b + 1; (1 - \xi)^{-1}] , \quad (1.41)$$

siendo ${}_2F_1$ la función hipergeométrica.

Así, para la función de onda ψ_+ se tiene

$$\psi_+(z) = N_m \left[\frac{A_+}{2} (e^{i\mu z} F_+ + e^{-i\mu z} F_+^*) - \frac{i}{2} (e^{i\mu z} F_+ - e^{-i\mu z} F_+^*) \right] \quad (1.42)$$

y de manera similar

$$\psi_-(z) = N_m \left[\frac{A_-}{2} (e^{-i\mu z} F_- + e^{i\mu z} F_-^*) - i \frac{B_-}{2} (e^{-i\mu z} F_- - e^{i\mu z} F_-^*) \right] , \quad (1.43)$$

siendo, en ambos casos, el primer término la parte real y el segundo la parte imaginaria, N_m , A_\pm , B_- la norma del estado excitado y las constantes de integración, respectivamente, a ser determinadas y

$$F_\pm \equiv {}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; 1 - i \frac{\mu}{\beta}; \left(1 + \frac{1}{C_\pm^2} e^{\pm 2\beta z} \right)^{-1} \right] . \quad (1.44)$$

Para ψ^c , las constantes de integración están unívocamente determinadas por las tres condiciones de borde (1.35) y la correspondiente relación de clausura en (1.28). Mientras que para ψ^d están determinadas por (1.36) y las condiciones de clausura y de ortogonalidad (1.28) y (1.29) respectivamente. En cuanto a la continuidad del espectro, se tiene que debido a $V_{QM}(\pm\infty) = m_0^2$ el modo cero y el espectro masivo están separados por dicha brecha de energía, de tal manera que $m^2 \geq m_0^2$.

Ahora bien, antes de proceder al cálculo de las constantes de integración, nótese que las funciones dadas por (1.42) y (1.43) no son ortonormales en el sentido de (1.28) ya que la integral diverge $\forall m, m'$. Esto nos lleva a considerar algún tipo de regularización para obtener las funciones correctamente ortonormalizadas: modificar el escenario con la introducción de dos branas reguladoras de tensión negativa ubicadas en $\pm z_r$ [5], de tal manera que el escenario original se recupera en límite $z_r \rightarrow \infty$.

Branas Reguladoras

La presencia de las dos branas reguladoras en el sistema se manifiesta en la geometría a través del coeficiente métrico

$$f(z) = f_{<} \Theta(-z_r - z) + f_- \Theta(z + z_r) \Theta(-z) + f_+ \Theta(z_r - z) \Theta(z) + f_{>} \Theta(z - z_r) . \quad (1.45)$$

Haciendo uso de la libertad de proponer cualquier configuración mas allá de las branas reguladoras, se exige

$$f_{>}(z) = f_-(z - 2z_r) \longrightarrow f_{>}(z_r) = f_-(-z_r) , \quad (1.46)$$

$$f_{<}(z) = f_+(z + 2z_r) \longrightarrow f_{<}(-z_r) = f_+(z_r) . \quad (1.47)$$

Como una consecuencia de la presencia de las branas reguladoras, se modifica el potencial (1.30) de tal manera que ahora exhibe dos barreras tipo δ con soportes en $\pm z_r$

$$V_{QM}(z) = -\frac{\tau}{2}\delta(z) + \frac{9}{4}\beta^2 + 3\beta \left(\frac{1 - C_-^2 e^{-2\beta z_r}}{1 + C_-^2 e^{-2\beta z_r}} \right) \delta(z + z_r) + 3\beta \left(\frac{1 - C_+^2 e^{-2\beta z_r}}{1 + C_+^2 e^{-2\beta z_r}} \right) \delta(z - z_r) \\ - 15 \left(\frac{C_- \beta e^{\beta z}}{1 + C_-^2 e^{2\beta z}} \right)^2 \Theta(z + z_r)\Theta(-z) - 15 \left(\frac{C_+ \beta e^{-\beta z}}{1 + C_+^2 e^{-2\beta z}} \right)^2 \Theta(z_r - z)\Theta(z), \quad (1.48)$$

los modos masivos deben satisfacer la siguiente condición de integración sobre dichas barreras

$$\frac{d}{dz}\psi_{\pm}^d(\pm z_r) = \mp 3\beta \left(\frac{1 - C_{\pm}^2 e^{-2\beta z_r}}{1 + C_{\pm}^2 e^{-2\beta z_r}} \right) \psi_{\pm}^d(\pm z_r), \quad (1.49)$$

y la condición de ortonormalidad se reescribe de forma concisa como

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{1}{z_r} \int_{-z_r}^{z_r} dz \psi_m^p * \psi_m^q = \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{\delta^{pq}}{z_r}. \quad (1.50)$$

Los modos masivos son soluciones de onda que se propagan libremente por toda la dimensión adicional. Por tanto, su comportamiento es esencialmente sinusoidal salvo en un entorno de la brana. En consecuencia, la contribución a la norma del comportamiento alrededor de la brana es despreciable en comparación con la correspondiente contribución de aquella porción relativamente alejada de la pared. Dicho con mayor precisión, la norma de los modos masivos queda determinada por aquella parte de la función para la cual se cumple $\beta|z| \gg 1$

$$\psi_m(z) = N_m [(A_- \cos \mu z - B_- \sin \mu z) \Theta(-z) + (A_+ \cos \mu z + \sin \mu z) \Theta(z)]. \quad (1.51)$$

Teniendo en cuenta esto último, es posible demostrar que (1.50) es equivalente a

$$N_m^2 = \frac{2}{z_r} (A_-^2 + B_-^2 + A_+^2 + 1)^{-1}, \quad (1.52)$$

$$A_-^c A_-^d + B_-^c B_-^d + A_+^c A_+^d + 1 = 0. \quad (1.53)$$

Así, se tiene un sistema de ecuaciones bien planteado determinado por (1.35, 1.36, 1.52) y (1.53). Sin embargo; debido a que los modos masivos vienen dados en términos de funciones hipergeométricas, es altamente no trivial hallar un resultado analítico de las constantes de integración para cualquier valor de los parámetros de la teoría. En consecuencia, es necesario apelar a criterios de aproximación para el cálculo de los mismos. En particular, dado que el cálculo del potencial gravitacional es físicamente relevante, el criterio a ser utilizado puede ser determinado a partir de la contribución efectiva a las correcciones de $\mathcal{U}(r)$ dadas por

$$\sum_m |\psi_m(0)|^2 e^{-mr}. \quad (1.54)$$

Ahora, como m_0 es la escala mas pequeña de energía que m puede alcanzar, para cualquiera de los escenarios discutidos aquí se tiene que $m \gg m_0$. Por otro lado, acorde a (1.54) los modos pesados

son exponencialmente atenuados en m . Por lo tanto, es necesario tomar en cuenta que $m_c \gg m$, donde m_c es una escala de energía a determinar en cada caso en particular que se trata¹. En lo que sigue, se consideran las siguientes escalas de energía $k_{\pm} = \sqrt{|\Lambda_{\pm}|/6}$ y en los casos con simetría de reflexión se tiene $k_{\pm} \equiv k$.

- Escenario simétrico \mathbb{M}_5 : $\Lambda = 0$

No existe un m_c y por tanto $m \gg m_0$. Bajo esta aproximación, resulta

$$A_+ = A_- \simeq \frac{m}{m_0}, \quad B_- = 1, \quad (1.55)$$

- Escenario simétrico dS_5 : $6\beta^2 \geq \Lambda > 0$.

Se tienen dos escalas, m_0 y k . Sin embargo, de acuerdo con la restricción sobre la constante cosmológica, estas son del mismo orden. Entonces, en este caso tampoco existe una cota superior m_c , y se considera $m \gg m_0$

$$A_+ = A_- = 4 \frac{\sqrt{6\beta^2/\Lambda}}{\left(5\sqrt{6\beta^2/\Lambda} - \sqrt{6\beta^2/\Lambda - 1}\right)} \frac{m}{m_0}, \quad B_- = 1. \quad (1.56)$$

Nótese que

$$A_{\pm} \in 4 \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right) \frac{m}{m_0}. \quad (1.57)$$

Esto es, las constantes de integración relacionadas con un espaciotiempo dS_5 son del mismo orden que sus pares, (1.55), en \mathbb{M}_5 .

- Escenario simétrico AdS_5 : $\Lambda < 0$.

Al igual que en el caso anterior, se pueden identificar dos escalas de energía, m_0 y k . Pero a diferencia del caso previo, la escala k no tiene cota superior por lo que se corresponde con m_c y en consecuencia se tiene $k \gg m \gg m_0$. Así

$$A_+ = A_- \simeq -1 + \frac{7 m_0}{3 m} + \frac{7 m}{3 k_+}, \quad B_- = 1. \quad (1.58)$$

- Escenario débilmente asimétrico AdS_5 : $k_+/k_- \sim 1$, $k_{\pm} \gg m_0$

Las escalas presentes son k_{\pm} y m_0 . Pero, a consecuencia de la ligera ausencia de simetría de reflexión, la energía de los gravitones está acotada entre $k_{\pm} \gg m \gg m_0$.

$$A_+ \simeq -1 + \frac{7 m_0}{3 m} + \frac{7 m}{3 k_+}, \quad (1.59)$$

$$A_- \simeq -1 + \frac{7 m_0}{3 m} + \frac{7 m}{3 k_+} - \frac{3}{2} \left(\frac{k_+}{k_-} - 1 \right), \quad (1.60)$$

$$B_- = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{k_+}{k_-} - 1 \right). \quad (1.61)$$

¹Ver apéndice B para las aproximaciones correspondientes en las funciones hipergeométricas.

- Escenario fuertemente asimétrico AdS₅: $k_+/k_- \ll 1$, $m_0 \ll k_\pm$
De las tres escalas, la cota superior en m está definida por $\min\{k_+, k_-\} = k_+$.

$$A_+ \simeq -1 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{m} + 2 \frac{m}{k_+}, \quad (1.62)$$

$$A_- \simeq \left(\frac{k_+}{k_-}\right)^{3/2} \left(-1 + \frac{17}{12} \frac{m_0}{m} + \frac{m}{k_+}\right), \quad (1.63)$$

$$B_- \simeq \left(\frac{k_+}{k_-}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{11}{12} \frac{m_0}{m} - \frac{m}{k_+}\right). \quad (1.64)$$

- Escenario AdS₅-M₅: $k_- \gg m_0$
En este caso la cota superior viene dada por k_- , y de aquí que $k_- \gg m \gg m_0$.

$$A_+ \simeq \frac{144}{33\pi} \left(\frac{k_-}{m}\right)^4 \left(\frac{26}{11} \frac{m}{k_-} - \frac{m_0}{m}\right) \frac{m}{m_0}, \quad (1.65)$$

$$A_- \simeq \frac{8}{33} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\frac{k_-}{m}\right)^5} \left[\frac{1}{3} \left(6 - 7 \frac{m_0}{m}\right) \frac{m_0}{m} - \frac{1}{11} \left(52 + 9 \frac{m_0}{m}\right) \frac{m}{k_-} \right] \frac{m}{m_0}, \quad (1.66)$$

$$B_- \simeq \frac{8}{33} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\frac{k_-}{m}\right)^5} \left[-\frac{1}{3} \left(6 + 7 \frac{m_0}{m}\right) \frac{m_0}{m} + \frac{1}{11} \left(52 - 9 \frac{m_0}{m}\right) \frac{m}{k_-} \right] \frac{m}{m_0}, \quad (1.67)$$

Escenarios asimétricos donde estén presentes vacíos dS₅ no han sido considerados ya que tanto la geometría, gobernada por el factor métrico (1.25), la constante cosmológica, acotada entre cero y una cantidad positiva muy pequeña (la constante de Hubble), como las ondas gravitacionales, definidas por las constantes de integración (1.57), son equivalentes al correspondiente en una brana dS₄ con vacíos M₅, (1.24) y (1.55). En este sentido, el comportamiento en configuraciones como AdS₅-dS₅ y dS₅-dS₅ es como en las configuraciones AdS₅-M₅ y M₅-M₅ respectivamente, contenidas en el listado previo.

La cuantización de la masa

Finalmente, usando la condición de borde (1.49) se tiene para $\beta z_r \gg 1$

$$\tan m z_r = \frac{m(1 + B_-) + m_0(A_+ + A_-)}{m(A_+ + A_-) - m_0(1 + B_-)} \quad (1.68)$$

e identificando en (1.68) las constante de integración para cada caso

$$\tan m z_r = 0 \quad \longrightarrow \quad m z_r \sim n\pi \quad \text{para} \quad \Lambda \geq 0, \quad (1.69)$$

$$\tan m z_r = -1 \quad \longrightarrow \quad m z_r \sim n\pi + 3\pi/4 \quad \text{para} \quad \Lambda < 0, \quad (1.70)$$

$$\tan m z_r = -1 \quad \longrightarrow \quad m z_r \sim n\pi + 3\pi/4 \quad \text{para} \quad \text{AdS}_5 - \text{AdS}_5, \quad (1.71)$$

$$\tan m z_r = 0 \quad \longrightarrow \quad m z_r \sim n\pi \quad \text{para} \quad \text{AdS}_5 - \text{M}_5. \quad (1.72)$$

Por lo tanto, como se espera de (1.49), la torre masiva está cuantizada en unidades de π/z_r

$$m \sim m_n \simeq \frac{n\pi}{z_r}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.73)$$

Así, con $\Delta m \rightarrow 0$ en el límite $z_r \rightarrow \infty$, es posible establecer la transición de la suma a una integral sobre m de la siguiente manera

$$\sum_m h(m) = \sum_m h(m) \frac{z_r}{\pi} \Delta m \quad \rightarrow \quad \int h(m) \frac{z_r}{\pi} dm . \quad (1.74)$$

y en consecuencia el potencial gravitacional sobre la pared vendrá dado por

$$\mathcal{U}(r) = \frac{|\psi_0(0)|^2 m_1 m_2}{4\pi r} \left(1 + \frac{4}{3\pi |\psi_0(0)|^2} \sum_{i=1}^2 \int_{m_0}^{\infty} |\psi_m^i(0)|^2 e^{-mr} z_r dm \right), \quad (1.75)$$

donde la suma remanente corre sobre los estados degenerados.

1.3. Los Modos Resonantes y el Potencial Gravitacional

En el límite $\beta \rightarrow 0$, la norma (1.38) se reduce a la siguiente expresión

$$N_0^2 = 2i (k_+^{-1} + k_-^{-1})^{-1}, \quad (1.76)$$

la cual corresponde a la norma del modo no-masivo en un espaciotiempo estático con vacíos Λ_{\pm} . Ahora, nótese que para N_0 real, es condición necesaria y suficiente que las constantes cosmológicas sean negativas².

Por tanto, acorde a (1.16) para $\beta \rightarrow 0$, las branas sin dinámica tienen una geometría \mathbb{M}_4 y necesariamente requieren que el entorno 5-dimensional sea del tipo AdS_5 para localizar al gravitón sobre la brana [7]. En contraste, las branas dS_4 admiten un modo cero normalizable aún cuando la curvatura del 5-espacio es nula, a consecuencia de la brecha de energía que domina a las fluctuaciones gravitacionales en (1.30), ver Fig.1.1. Por lo tanto; y a diferencia del caso estático, el incremento de la asimetría, $k_+/k_- \ll 1$, no deslocaliza al modo cero y, en consecuencia, es de esperar una contribución del tipo newtoniano en (1.26) inclusive cuando $k_+ \rightarrow 0$.

En lo que sigue, se muestra el potencial gravitacional en las branas dS, asociadas a casos con o sin simetría Z_2 . Por otro lado, se hace uso de las constantes de integración calculadas en la Sección previa, la norma del modo cero (1.38), así como el espectro masivo acotado, $m_c \gg m \gg m_0$, que saturan la integral

$$\int_{m_0}^{\infty} |\psi_m^i(0)|^2 e^{-mr} z_r dm, \quad (1.77)$$

asociada a las correcciones del potencial.

²y si $\Lambda_- = \Lambda_+ < 0$, se obtiene el escenario RS [4] y la norma se reduce a $N_0^2 = \sqrt{|\Lambda|/6}$

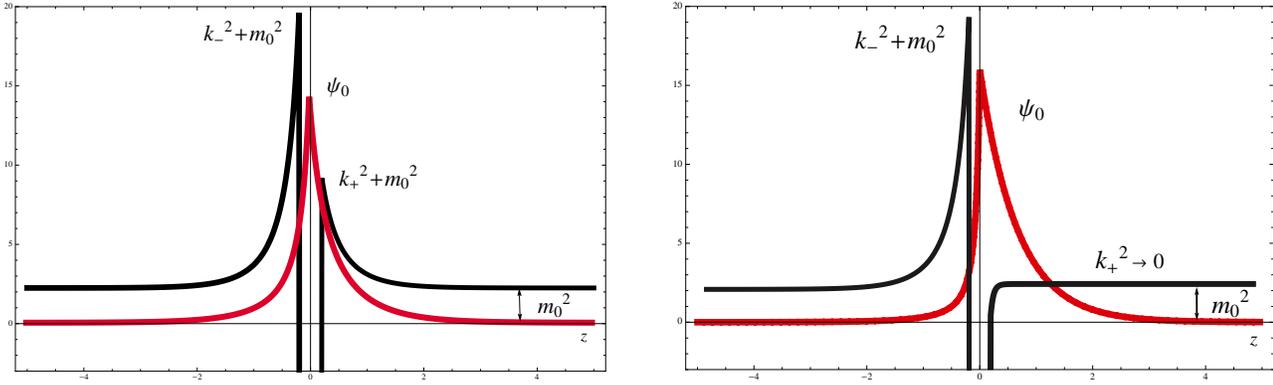


Figura 1.1: Gráficas del V_{QM} y el modo cero (línea roja) para $\Lambda_- < 0$ y $\Lambda_+ < 0$ (izquierda) ó $\Lambda_+ = 0$ (derecha).

- Escenario simétrico \mathbb{M}_5 : $\Lambda = 0$.

En este caso, son los modos masivos acotados por $m \gg m_0$ los que contribuyen al potencial. Bajo esta restricción se tienen las constantes de integración dadas por (1.55), de tal manera que el modo cero y los modos masivos en $z = 0$ vienen dados por

$$|\psi_0(0)|^2 = \frac{3\beta}{2}, \quad |\psi_m(0)|^2 = \frac{1}{z_r}, \quad (1.78)$$

donde se ha hecho uso de las constantes de normalización

$$N_0^2 = \frac{3\beta}{2}, \quad N_m^2 = \frac{1}{4z_r} \frac{m_0^2}{m^2}. \quad (1.79)$$

Sustituyendo (1.78) en (1.77), obtenemos el potencial gravitacional

$$\mathcal{U}(r) = \frac{3\beta}{8\pi} \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{8}{9\pi} \frac{1}{\beta r} \right). \quad (1.80)$$

Ahora, el potencial newtoniano se recupera sólo para $r \gg 1/\beta$; es decir, mas allá del universo visible. Y para $r \ll 1/\beta$, el potencial gravitacional va como $1/r^2$. Por tanto, en aquella posible región que podría corresponder a nuestro universo visible las partículas median su interacción a través de una cinco-gravedad sobre la brana [10, 11]. En consecuencia, este modelo no representa nuestro universo.

- Escenario simétrico dS_5 : $6\beta^2 \geq \Lambda > 0$.

Para una brana dS con curvatura positiva en el *bulk*, son los modos para los cuales $m \gg m_0$ los que contribuyen a la integral. Estas fluctuaciones tienen un modo cero con una norma dada por

$$N_0^2 = \beta \left[\sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda}} \left[2 \left(\frac{6\beta^2}{\Lambda} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda} - 1} \right) - \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda} - 1} \right] \right]^{-1}. \quad (1.81)$$

Nótese que

$$\frac{4}{3\pi} \frac{3}{2} \beta \leq N_0^2 < \frac{3}{2} \beta . \quad (1.82)$$

En el *background* de esta configuración también están presentes un continuo de modos masivos con norma

$$N_m^2 \sim \frac{1}{4z_r} \frac{1}{A^2} , \quad (1.83)$$

donde A es la constante de integración (1.57), y por tanto

$$\frac{1}{z_r} \frac{m_0^2}{m^2} < N_m^2 < \frac{25}{64z_r} \frac{m_0^2}{m^2} . \quad (1.84)$$

Así, el espectro de las fluctuaciones en $z = 0$, queda determinado por

$$|\psi_0(0)|^2 \sim N_0^2 , \quad |\psi_m(0)|^2 \sim \frac{1}{z_r} \quad (1.85)$$

y sustituyendo nuevamente en (1.77) resulta

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{N_0^2}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \frac{1}{N_0^2 r} \right) . \quad (1.86)$$

Ahora, de acuerdo con (1.82), la norma N_0^2 es del orden de $3\beta/2$. Por tanto, y procediendo de manera análoga al caso previo, en un espaciotiempo con vacíos dS_5 se tiene cinco-gravedad, sobre una brana dS_4 , a lo largo de una región comparable con el radio del universo visible, $r \ll 1/N_0^2$; lo cual no corresponde a un comportamiento gravitacional fenomenológicamente aceptable [10, 11].

■ Escenario simétrico AdS_5 : $\Lambda < 0$.

Cuando las fluctuaciones gravitacionales, que se propagan por todo el espaciotiempo cinco-dimensional, inciden sobre la brana, manifiestan su presencia sobre el cuatro-espacio como desviaciones a la ley de Gravitación de Newton. En particular, si el espaciotiempo es AdS_5 y la brana dS_4 los modos gravitacionales sobre la pared vienen dados por

$$|\psi_0(0)|^2 \sim k , \quad |\psi_m(0)|^2 \sim \frac{8}{\pi z_r} \frac{k^3}{m^3} , \quad (1.87)$$

donde se ha hecho uso de (1.58), la norma de los modos

$$N_0^2 \sim k , \quad N_m^2 \sim \frac{1}{8z_r} \quad (1.88)$$

y se ha considerado que la contribución efectiva a la desviación viene dada por aquellos modos cuyas masas están acotadas de la siguiente manera

$$k \gg m \gg m_0 . \quad (1.89)$$

Así pues, el espectro de las fluctuaciones sobre la brana determina una interacción gravitacional vía el siguiente potencial

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{k}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{2^4 k^2}{3\pi^2 m_0^2} (1 - 3\beta r) + \frac{2^7 3}{\pi^2} \frac{1}{(\sqrt{|\Lambda|/6})r} (2 - 3\beta r) \right]. \quad (1.90)$$

el cual se reduce a un potencial proporcional a $1/r$ para [10, 11]

$$(\sqrt{|\Lambda|/6})^{-1} \ll r \ll \beta^{-1}. \quad (1.91)$$

Nótese que con el fin de hacer compatibles la cota inferior de (1.91) con las medidas experimentales actuales a cortas distancias³, que corroboran la validez de la ley de Newton; la teoría requiere que la constante cosmológica Λ adquiera grandes valores respecto a la constante de Hubble, β . En consecuencia, es factible que nuestro universo cuatro-dimensional corresponda a una realización de una brana dS_4 embebida en un espacio de mayor dimensionalidad AdS_5 ; si, y solo si, tiene una alta curvatura negativa.

Estos resultados ya fueron reportados en [10, 11], pero bajo el uso de procedimientos cuestionables, esto es, en [11] no se considera la normalización de los modos, mientras que en [10] no se tiene claro ni el proceso de regularización ni la presencia de m como parte del factor de atenuación en el término correspondiente a las correcciones del potencial

$$\frac{1}{r} \int_{m_0}^{\infty} dm (me^{-mr}) |\psi_m(0)|^2, \quad (1.92)$$

lo cual no corresponde a un potencial estático, como se argumenta en dicho artículo.

Por otro lado, a diferencia de [10] y [11], en este trabajo se ha considerado el uso de las branas reguladoras, la normalización de las funciones de onda, así como la expresión correcta del potencial estático en correspondencia con el tratamiento formal mostrado en [7].

En resumen, las configuraciones asociadas a espaciotiempos dS_5 son similares a aquellos escenarios embebidos en un *bulk* plano 5-dimensional (recuérdese que $\Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2$); donde, a diferencia de los escenarios AdS_5 , la interacción gravitacional sobre la brana tiene un comportamiento cinco-dimensional. Por lo tanto, y con la intención de considerar los efectos generados por la asimetría sobre el potencial newtoniano, en lo que sigue sólo se tomarán en cuenta geometrías con vacíos AdS_5 .

Escenarios sin simetría de reflexión

En estos escenarios, un análisis numérico revela la existencia de modos masivos resonantes en $z = 0$; esto es, estados masivos cuya función de onda tiene un máximo en $z = 0$ y por lo tanto tienen una mayor probabilidad que los demás de estar sobre la brana. En la Fig.1.2 se muestra el comportamiento de $|\psi_m^d(0)|^2$ para diferentes valores de $k_+/k_- \leq 1$, tales que $k_+ < m_0$ corresponde al lado izquierdo de la figura, mientras que $k_{\pm} \gg m_0$ corresponde al lado derecho.

³Del orden del milímetro.

Se observa en la Fig.1.2, en el primer caso, que la masa del modo resonante decrece con el aumento de la asimetría; a diferencia del segundo caso, donde la masa resonante se incrementa para grandes valores de k_+ and k_- . En todos los casos, siempre que $k_+/k_- \lesssim 1/4$, la masa resonante viene dada aproximadamente por

$$m_{res} \sim [(k_+^2 + m_0^2)(k_-^2 + m_0^2)]^{1/4}, \quad (1.93)$$

bajo la siguiente restricción

$$\frac{15}{4}k_+^2 + m_0^2 \ll m_{res}^2 \ll \frac{15}{4}k_-^2 + m_0^2. \quad (1.94)$$

Observe que las cotas superior e inferior de (1.94) están dadas por $V_{QM}(0^-)$ y $V_{QM}(0^+)$, respectivamente.

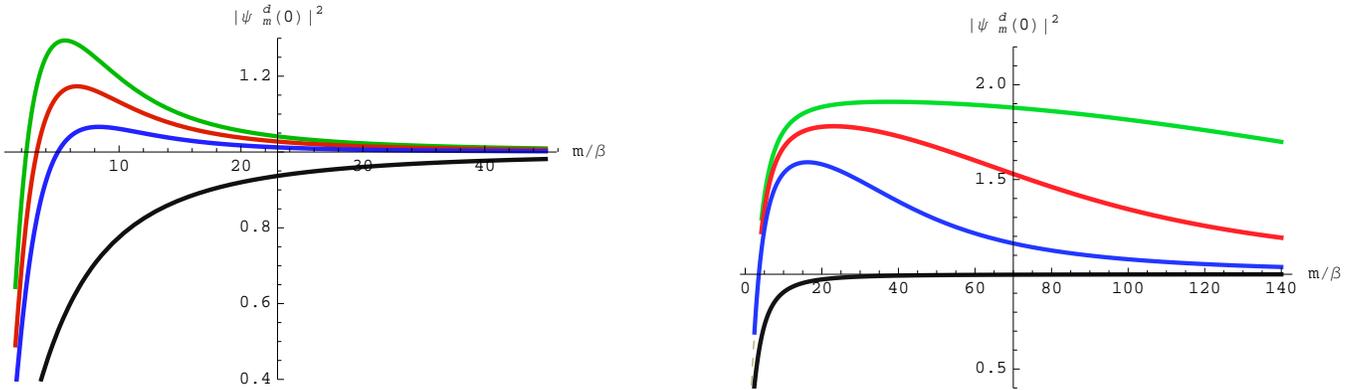


Figura 1.2: Modos Resonantes para diferentes escenarios asimetricos AdS₅: $k_+/k_- = 1$ (negro), 0.1(azul), 0.05(rojo), 0.01(verde). $k_+ < m_0$ (izquierda) y $k_\pm \gg m_0$ (derecha).

Ahora, debido a la presencia de la exponencial en el término correspondiente a las correcciones del potencial

$$\mathcal{U}(r) = \frac{|\psi_0(0)|^2}{4\pi M_5^3} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{4}{3\pi} \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \sum_{i=1}^2 \int_{m_0}^{\infty} |\psi_m^i(0)|^2 e^{-mr} z_r dm \right], \quad (1.95)$$

se espera que las desviaciones efectivas a la ley de Newton sean generadas por modos ligeros, de tal manera que la contribución de la resonancia sea despreciable, para aquellos escenarios donde el modo resonante pertenece al conjunto de estados pesados. Por otra parte, en aquellos escenarios donde el modo resonante es ligero su contribución a (1.95) debe ser analizada. En este sentido, encontramos lo siguiente (ver demostración en el apéndice C)

Sean los estados masivos que saturan la integral que define las correcciones al potencial (1.95), aquellos modos cuyas masas pertenecen al siguiente intervalo de masas ligeras⁴

⁴Estos intervalos corresponden a aquellos modos masivos que contribuyen de forma efectiva a las correcciones del potencial para los escenarios que se tratarán a continuación.

- A) $m_0 \ll m \ll \min\{k_+, k_-\}$ ó
 B) $\max\{k_+, m_0\} \ll m \ll k_-$.

Entonces, el modo resonante no tiene soporte en (A) pero si en (B).

A continuación, considérese el potencial gravitacional asociado a tres escenarios asimétricos AdS₅, donde la integral en (1.95) es saturada para $m_0 \ll m \ll k_{\pm}$.

- Escenario débilmente asimétrico AdS₅: $k_+/k_- \sim 1$, $k_{\pm} \gg m_0$
 La contribución efectiva de la energía de los gravitones está acotada entre $k_{\pm} \gg m \gg m_0$. A primer orden en $(k_+/k_- - 1)$, se tiene que el espectro de las fluctuaciones se reduce a

$$|\psi_0(0)|^2 \simeq 2 (k_-^{-1} + k_+^{-1})^{-1} \quad (1.96)$$

y

$$z_r |\psi_m(0)|^2 \simeq \frac{4}{\pi} \left(\frac{k_+}{m}\right)^3 \left[2 - 3 \left(\frac{k_+}{k_-} - 1\right)\right], \quad (1.97)$$

donde se han usado las constantes (1.59), (1.60) y (1.61). Sustituyendo en (1.95) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r) \simeq \frac{k_+ m_1 m_2}{4\pi r} & \left[1 + \frac{2^4}{3\pi^2} \left[\left(\frac{k_-}{m_0}\right)^3 (1 - 3\beta r) + 3^2 2^3 \frac{(2 - 3\beta r)}{k_+ r} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2^3}{3\pi^2} \left[3 \left(\frac{k_-}{m_0}\right)^3 (1 - 3\beta r) - 2^5 \frac{(2 - 3\beta r)}{k_+ r} \right] \left(\frac{k_+}{k_-} - 1\right) \right] \end{aligned} \quad (1.98)$$

y la gravedad newtoniana se obtiene sobre la brana cuando

$$\max\{k_+^{-1}, k_-^{-1}\} \ll r \ll \beta^{-1}. \quad (1.99)$$

Por otro lado, para $k_{\pm} = k$, el potencial (1.98) se reduce consistentemente al correspondiente en el escenario con simetría de reflexión (1.90).

- Escenario fuertemente asimétrico AdS₅: $k_+/k_- \ll 1$, $m_0 \ll k_{\pm}$
 Al igual que en el caso precedente $k_{\pm} \gg m \gg m_0$. En consecuencia, haciendo uso de (1.62), (1.63) y (1.64), la correspondiente densidad de estados viene dada por

$$|\psi_0(0)|^2 \simeq \frac{k_+}{2} \quad \text{y} \quad z_r |\psi_m(0)|^2 \simeq \frac{16}{\pi} \left(\frac{k_+}{m}\right)^3. \quad (1.100)$$

Por lo tanto, el potencial gravitacional resulta

$$\mathcal{U}(r) = \frac{k_+}{2\pi M_5^3} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{2^4}{3\pi^2} \frac{k_+}{k_-} \left[\frac{k_+}{k_-} \left(\frac{k_-}{m_0}\right)^2 (1 - 3\beta r) - \frac{(2 - 3\beta r)}{k_+ r} \right] \right], \quad (1.101)$$

y cuatro-gravedad se obtiene en la región

$$k_+^{-1} \ll r \ll \beta^{-1}. \quad (1.102)$$

Por consiguiente en la medida en que la asimetría se va incrementando, es decir $k_+/k_- \ll 1$, aparecen modos resonantes caracterizados por una masa dada por (1.93) la cual se reduce bajo la aproximación considerada a la siguiente expresión

$$m_{res} \sim \sqrt{k_+ k_-} . \quad (1.103)$$

Ahora, dado que la configuración es del tipo (A) se tiene que el modo resonante no pertenece al espectro de los modos masivos que contribuyen de forma efectiva a las correcciones del potencial (2.61).

■ Escenario AdS₅-M₅: $k_- \gg m_0$

En este caso $k_- \gg m \gg m_0$, y de aquí que

$$|\psi_0(0)|^2 \sim 2m_0 \quad , \quad z_r |\psi_m(0)|^2 \sim 2 . \quad (1.104)$$

En esta aproximación, el potencial gravitacional entre dos partículas puntuales m_1 y m_2 localizadas sobre la brana viene dado por

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{m_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{2}{9\pi} \left[2 - \frac{9\pi}{2^5} \frac{(2 + 3\beta r)}{k_- r} \right] \frac{(2 - 3\beta r)}{\beta r} \right] . \quad (1.105)$$

Así, se tiene que sobre la brana el potencial presenta un comportamiento cinco-dimensional, $1/r^2$, para

$$k_-^{-1} \ll r \ll \beta^{-1} . \quad (1.106)$$

Nuevamente, cuando el escenario es fuertemente asimétrico, se observan modos resonantes cuyas masas quedan determinadas por

$$m_{res} \sim \sqrt{m_0 k_-} . \quad (1.107)$$

Aún mas, obsérvese que la configuración AdS₅-M₅ es equivalente a una con vacíos AdS₅ donde $k_+ \rightarrow 0$; la cual es compatible con el caso (B), donde los modos resonantes contribuyen con las correcciones al potencial (1.105).

Ahora, el término que provee la mayor contribución a la suma es, por definición, el estado resonante. Por tanto, siendo la resonancia el modo dominante, el mismo induce el comportamiento cinco-dimensional que exhibe el potencial gravitacional.

Análisis de los Resultados

Se encontro una brana con expansión dS_4 , embebida en un espaciotiempo sin simetría Z_2 , con una geometría AdS_5 y energías de vacío k_- y k_+ . Esta solución tiene como límite de pared estática al mundo brana asimétrico reportado en [7] y presenta un espectro de fluctuaciones gravitacionales que permiten la realización de un potencial newtoniano en una región fenomenológicamente aceptable.

En la imagen izquierda de la Fig.1.3 se muestra el potencial V_{QM} al que están sometidos los modos gravitacionales, para $k_- > k_+$. Con la intención de realizar un análisis cualitativo, consideremos los sectores del potencial

$$\text{región I: } V_+(0) \geq V_{QM} \geq m_0^2, \quad (1.108)$$

$$\text{región II: } V_-(0) \geq V_{QM} \geq V_+(0), \quad (1.109)$$

siendo $V_{\pm}(0) \equiv \max[V_{QM}(z^{\pm})] = m_0^2 + k_{\pm}^2$. Para este escenario, la energía de los modos masivos que contribuyen de forma efectiva con las correcciones al potencial gravitacional solo pueden tomar un conjunto continuo de valores en el rango $k_{\pm} \gg m \gg m_0$, dentro de la región I. Mientras que el modo que resuena lo hace con una energía, m_{res} , dentro de la región II. En particular, para $k_- = k_+$ se recupera la simetría Z_2 y desaparece la región II por lo que es de esperar que también desaparezca el modo resonante. De hecho, como se constató en esta tesis, sobre una brana AdS_5 con simetría de reflexión no existen modos resonantes.

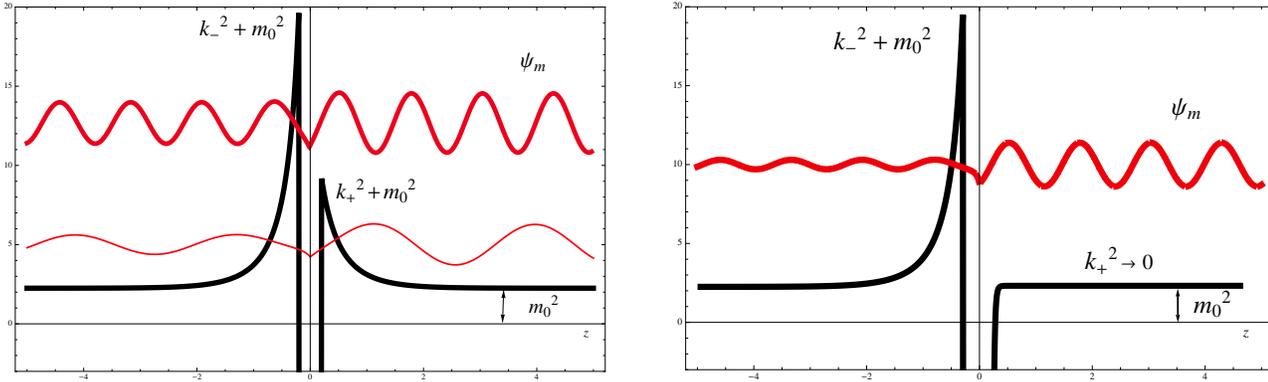


Figura 1.3: El V_{QM} (línea negra) y los modos masivos (línea roja) para $\Lambda_- < 0$ y $\Lambda_+ < 0$ (izquierda) ó $\Lambda_+ = 0$ (derecha).

Aún más, en la figura, también se puede notar que los modos masivos experimentan un cambio en la amplitud de la onda, siendo menor en aquella región con mayor energía de vacío, $z < 0$. En particular, para chequear la presencia de resonancias en la región II, note que para $k/m_0 \gg 1$ el potencial V_{QM} puede ser aproximado por una barrera sin grosor y altura $V_-(0) - V_+(0) = k_-^2 - k_+^2$. Por tanto, el coeficiente de transmisión viene dado por

$$T \simeq \left(1 - \frac{k_+^2}{k_-^2}\right)^{-1} \left[1 - \left(1 - \frac{k_+^2}{k_-^2}\right)^{-1} \frac{m}{k_-}\right] \frac{m}{k_-} \ll 1, \quad \text{para } \frac{k_+}{k_-} \ll 1. \quad (1.110)$$

En consecuencia, debido a que se transmite poco se genera resonancia por reflexión cuya masa esta dada por (1.93) y es proporcional al aumento de la altura de la barrera, debida al incremento de la asimetría.

Si $k_+ = 0$, el *bulk* se reduce a dos porciones, siendo AdS₅ en un lado y plano en el otro, a lo largo de la dirección perpendicular a la pared. En contraste con el caso anterior, las fluctuaciones no están sometidas a una doble barrera en el V_{QM} sino a una barrera simple de altura $V_-(0) - m_0^2$ análoga a la región resonante del caso previo, la región II. Así, el potencial newtoniano experimenta correcciones apreciables debido a la existencia de modos con masas del tipo $m_{res} \sim \sqrt{m_0 k_-}$ sobre la brana. Para mayor claridad, en la Fig.1.3 se muestra la función de onda para los modos masivos y el potencial V_{QM} .

Finalmente, la presencia de resonancia en el escenario AdS₅-M₅ implica que el coeficiente de transmisión entre la intensidad del flujo de la función de onda transmitida en la región $z < 0$ y la intensidad del flujo incidente corresponde a $T \simeq m/k_- \ll 1$, y por tanto que los modos masivos tienen mayor amplitud de probabilidad en aquella porción del espaciotiempo con menor curvatura, $k_+ = 0$. En consecuencia, los modos masivos, $|\psi_m(0)|^2 \simeq 2/z_r$ y el potencial gravitacional (1.105), exhiben un comportamiento semejante al de su análogo simétrico con vacíos nulos, $|\psi_m(0)|^2 \sim 1/z_r$, donde el potencial dominante, $1/r^2$, es de la forma cinco-dimensional.

Capítulo 2

Fotones y Campos de Calibre Masivos sobre la pared

Como fue mostrado en [28], bajo reducción dimensional un campo de calibre cuya dinámica sobre el escenario RS

$$ds^2 = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad a(y) = -\alpha|y|, \quad (2.1)$$

sea la descrita por la acción de Maxwell cinco-dimensional

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x dy \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} F_{ac} F_{bd}, \quad (2.2)$$

lleva a la acción efectiva cuatro-dimensional

$$S_M^{(4)} \sim -\frac{1}{4} \int dy \psi_0^2(y) \int d^4x \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} f_{\mu\alpha} f_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \int dy e^{2a(y)} \psi_0'^2 \int d^4x \eta^{\mu\nu} a_\mu a_\nu, \quad (2.3)$$

donde se ha considerado el calibre $A_5 = 0$ y asumido *grosso modo* al campo factorizado de la siguiente manera

$$A_\mu(x, y) \sim a_\mu(x) \psi_0(y), \quad (2.4)$$

con la intención de estimar solo la contribución del estado base, ψ_0 , a la acción (2.2). De (2.3) se tiene que ψ_0 necesariamente debe ser una constante para que el campo no sea masivo y, en consecuencia, no es normalizable. Por lo tanto, (2.2) no contiene un estado vectorial de masa nula o fotón sobre la brana.

2.1. El Mecanismo de Ghoroku-Nakamura

Entre las propuestas para resolver este problema está el mecanismo ideado por Ghoroku y Nakamura [32]. Dicho mecanismo postula que la dinámica de un campo vectorial (4+1)-dimensional, que se propaga en el escenario RS viene dado por

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} (m_5^2 - \eta \delta(y)) A_a A^a, \quad (2.5)$$

donde se considera al bosón vectorial cinco-dimensional A_b con una masa m_5 y acoplado a la brana, en $z = 0$, vía el parámetro de acoplamiento η .

Para estimar como (2.5) da solución a la no-normalizabilidad del modo cero vectorial, considerese la reducción dimensional de \mathcal{L}_{GN} bajo la factorización (2.4). Así

$$\begin{aligned}
 S_{GN} \sim & -\frac{1}{4} \int dy \psi_0^2(y) \int d^4x f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \\
 & -\frac{1}{2} \int dy e^{2a(y)} [-\psi_0'' - 2a'\psi_0' + (m_5^2 - \eta \delta(y)) \psi_0] \psi_0 \int d^4x \eta^{\mu\nu} a_\mu a_\nu \\
 & -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \int d^5x [e^{2a(y)} (\partial_\alpha A_5 \partial_\beta A_5 - 2\psi_0' a_\alpha \partial_\beta A_5) + e^{4a} (m_5^2 - \eta \delta(y)) A_5^2] , \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

donde es posible observar que para evitar el término masivo es necesario que ψ_0 satisfaga

$$-\psi_0'' - 2a'\psi_0' + (m_5^2 - \eta \delta(y)) \psi_0 = 0 . \quad (2.7)$$

Esta ecuación tiene como solución

$$\psi_0 = N_0 e^{(\kappa-1/2)a(y)} , \quad (2.8)$$

con N_0 la constante de normalización, siempre que

$$m_5^2 = \alpha^2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \left(\kappa + \frac{3}{2} \right) , \quad \eta = 2\alpha \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) , \quad (2.9)$$

es decir, para una relación entre los parámetros de la teoría dada por [32]

$$\eta = 2\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{m_5}{\alpha} \right)^2} - 1 \right) . \quad (2.10)$$

Nótese que (2.8) es normalizable

$$\int dy e^{2(\kappa-1/2)a(y)} < \infty \quad (2.11)$$

para todo $\kappa > 1/2$, ya que siendo el coeficiente del argumento positivo la exponencial es acampanada para $a(y)$ dada por (2.1). Para $\kappa < 1/2$ el coeficiente es negativo y la exponencial adquiere un perfil no acotado (parabólico) y por ende no normalizable. Aún más, para $\kappa = 1/2$ resulta $m_5 = \eta = 0$ y (2.5) se reduce a Maxwell cinco-dimensional e inclusive el modo cero (2.8) se reduce a una constante y (2.11) muestra que en ese caso ya no es normalizable. Por tanto, el mecanismo logra resolver el problema en cuestión. Así, la propuesta de Ghoroku-Nakamura (2.5) logra proveer la cinemática correspondiente a un campo vectorial no masivo sobre la brana, en contraste con la acción tipo Maxwell (2.2).

Ahora, no es suficiente con que el mecanismo [32] provea un modo cero acotado que asegure la presencia de la acción de Maxwell bajo reducción dimensional; la teoría también debe ser capaz de reproducir interacción coulombiana sobre la brana en un amplio rango observacional del sector tres-dimensional. Para ello considérese la componente del propagador cinco-dimensional responsable de la interacción entre dos partículas cargadas sobre la brana (ver [32] o el apéndice D.1 para detalles)

$$G_{\alpha\beta}(p, 0, 0) = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \right) G_1(p, 0, 0) + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} G_2(p, 0, 0) \quad (2.12)$$

donde G_2 corresponde a grados de libertad espurios y G_1 define la interacción compatible con la teoría. En particular, para (2.5) G_1 viene dado por (apéndice E.1)

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{\mathcal{Q}^2}{4\pi\alpha} i \frac{H_\nu^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} \left[J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)H_\nu^{(1)}(i\bar{p}/\alpha) - J_\nu(i\bar{p}/\alpha)H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha) \right], \quad (2.13)$$

donde $\nu^2 = m_5^2/\alpha^2 + 1$. Esta expresión puede ser reescrita como¹

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{\mathcal{Q}^2}{\pi^2} \left[\frac{\alpha(\nu-1)}{p^2} - \frac{i H_{\nu-2}^{(1)}(ip/\alpha)}{2 H_{\nu-1}^{(1)}(ip/\alpha)} \frac{1}{p} \right], \quad (2.15)$$

Así, para $p \gg \alpha$ se tiene $H_{\nu-2}^{(1)}(ip/\alpha)/H_{\nu-1}^{(1)}(ip/\alpha) \sim i$ y la función $G_1 \sim 1/p$ por lo que el potencial electrostático presenta un comportamiento cinco-dimensional, $\mathcal{U}(r) \sim 1/r^2$, para $r \ll 1/\alpha$ (ver apéndice D.1). Ahora, para $p \ll \alpha$

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{\alpha(\nu-1)}{p^2} - \frac{1}{4\alpha(\nu-2)} + \frac{\pi i^{2\nu+1}}{2^{2(\nu-1)}} \frac{(1+i \cot \pi\nu)}{\Gamma(\nu-1)^2 \alpha^{2\nu-3}} p^{2(\nu-2)} \quad (2.16)$$

corresponde

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{\alpha(\nu-1)}{r} + \frac{\pi i^{2(\nu+1)}}{2^{2(\nu-1)}} \frac{e^{-i\pi\nu}}{\alpha^{2\nu-3}} \frac{\Gamma(2\nu-2)}{\Gamma(\nu-1)^2} \frac{1}{r^{2\nu-1}} \quad (2.17)$$

por lo que el potencial se manifiesta tipo Coulomb para distancias por encima de $1/\alpha$. Nótese que, a diferencia de lo reportado en [32]², para todo $\nu > 1$ la corrección al potencial va como $r^{-2\nu+1}$.

Sumado a lo expuesto, pero en detrimento, la teoría (2.5) adolece de un problema estructural: el mecanismo de Ghoroku-Nakamura no es invariante de calibre debido al término de masa presente en la acción, $m_5^2 A_b^2$. A este respecto en la presente tesis se desarrolla una teoría con simetría de calibre sobre una pared de dominio tal que en el límite de pared delgada y bajo fijación de calibre se logra obtener el mecanismo de Ghoroku-Nakamura [32] sobre la brana RS [4]. Para ello, primero se extenderá la aplicabilidad de la teoría de Ghoroku-Nakamura hacia paredes de dominio en la sección 2.2.1 y luego se le incorporará la simetría de calibre en la sección 2.2.2.

2.2. De Campos Vectoriales a Campos de Calibre

En la próximas secciones se estará interesado en encontrar la teoría cuatro-dimensional efectiva asociada a la teoría cinco-dimensional propuesta. Para ello, nótese lo siguiente

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^4x \mathcal{L} \longrightarrow S = \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.18)$$

¹Donde se ha hecho uso de las identidades

$$J_{\nu-1}(\epsilon)H_\nu^{(1)}(\epsilon) - J_\nu(\epsilon)H_{\nu-1}^{(1)}(\epsilon) = \frac{2}{i\pi\epsilon}, \quad (2.14)$$

y

$$H_{\nu-2}^{(1)}(\epsilon) + H_\nu^{(1)}(\epsilon) = 2 \frac{(\nu-1)}{\epsilon} H_{\nu-1}^{(1)}(\epsilon).$$

² Si $\nu > 2$ la corrección al potencial va como r^{-3} y si $2 > \nu > 1$ se tiene $r^{-(\nu+1)}$.

Esto es, como una condición límite la teoría puede ser concebida sobre un espaciotiempo con una dimensión adicional acotada por dos branas reguladoras con tensión negativa (que fungen como dos barreras de potencial) y ubicadas en $\pm z_r$. Bajo este enfoque es posible desarrollar los campos en términos de una base discreta en el espacio de Hilbert con soporte a lo largo de la dimensión adicional. En este sentido, considérese los operadores

$$\mathbf{Q} = \partial_z + \kappa a' \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}^+ = -\partial_z + \kappa a' \quad , \quad \kappa \in \mathbb{R} . \quad (2.19)$$

Ahora bien, si ψ_n es un conjunto de estados que satisfacen el siguiente problema de autovalores [40]

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+\psi_n = m_n^2\psi_n , \quad (2.20)$$

con $m^2 \geq 0$ ya que el operador diferencial es factorizable, entonces se cumple³

$$\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}\varphi_n = m_n^2\varphi_n , \quad (2.21)$$

donde $\varphi_n = \mathbf{Q}^+\psi_n/m_n$ para todo $m_n \neq 0$. Por tanto, las autofunciones que acompañan a cada autovalor, m^2 , siempre vienen a pares (excepto para el modo cero): ψ_n y φ_n . Cabe destacar que ambos forman una base en el espacio de Hilbert

$$\int_{-z_r}^{z_r} dz \psi_n \psi_p = \delta_{np} \quad , \quad \int_{-z_r}^{z_r} dz \varphi_n \varphi_p = \delta_{np} \quad (2.22)$$

y que el espectro de autofunciones ψ_n contiene un estado base con $m_0 = 0$ dado por

$$\psi_0(z) = N_0 e^{\kappa a(z)} , \quad (2.23)$$

correspondiente a un estado a baja energía, mientras que la base φ_n esta definida rigurosamente para $m_n \neq 0$.

Se sigue que, para un campo vectorial cinco-dimensional, A_b , la componente cuatro-dimensional

$$A_\mu(x, z) = a_\mu(x) \psi_0(z) + \sum_{n \neq 0} a_\mu^n \psi_n(z) , \quad (2.24)$$

se desarrolla en términos de la base ψ_n ya que la misma contribuye con un estado no-masivo que se puede asociar con el fotón. La componente adicional,

$$A_5(x, z) = \sum_{p \neq 0} a_5^p(x) \varphi_p(z) , \quad (2.25)$$

se expande en la base φ_n ya que no existen campos escalares a baja energía [41].

Por otro lado, los estados ψ_n que se consideran a continuación son unos tales que deben satisfacer las condiciones de borde

$$\mathbf{Q}^+\psi_n \Big|_{\pm z_r} = 0 . \quad (2.26)$$

³Demostración: Sustituyendo $\varphi_n = \mathbf{Q}^+\psi_n/m_n$ en (2.21)

$$\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^+\psi_n/m_n) = m_n^2 (\mathbf{Q}^+\psi_n/m_n)$$

el cual se satisface idénticamente por (2.20).

2.2.1. Acoplamiento $V(\kappa, z)A^2$

Para generalizar el mecanismo de Ghoroku-Nakamura a paredes con grosor definido se propone para el campo A_b la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{2}{3}V(\kappa, z)A_aA^a, \quad (2.27)$$

donde

$$V(\kappa, z) = -\frac{3}{4}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)a'^2 + a''\right]e^{-2a}, \quad \kappa \geq 1/2. \quad (2.28)$$

define un término de acoplamiento no-convencional entre el campo vectorial A_a y el espaciotiempo pared de dominio con tensor métrico

$$g_{ab} = e^{2a(z)}(\eta_{\mu\nu}dx_a^\mu dx_b^\nu + dz_a dz_b). \quad (2.29)$$

Nótese que el término de acoplamiento rompe la simetría de calibre de la teoría por ser cuadrático en el campo vectorial.

Reducción Dimensional

Realizando en (2.27) el cambio $A_b \rightarrow e^{-a/2}A_b$, desarrollando acorde a (2.24) y (2.25) e integrando respecto a la dimensión adicional z , se tiene la representación de la teoría sobre el quadri-espacio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GN}^{(4)} &= -\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_n \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_5^n)^2 \right] \\ &+ 2\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \sum_{n,p} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz a' \psi_p (\mathbf{Q}^+ \psi_n / m_n) \right] \partial^\mu a_5^n a_\mu^p \\ &+ \frac{2}{3} \sum_{n,p} \frac{m_n}{m_p} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{2a} V(\kappa, z) \psi_n \psi_p \right] a_5^n a_5^p. \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde los estados ψ_n cumplen con (2.21), esto es

$$(\partial_z + \kappa a')(-\partial_z + \kappa a')\psi_n = m_n^2 \psi_n. \quad (2.31)$$

Para $m_0 = 0$ se logra obtener un estado base, $\psi_0 \sim e^{\kappa a(z)}$, como una solución normalizable para $\kappa > 1/2$

$$\int dz e^{2\kappa a(z)} = \int (e^{a(z)} dz) e^{2(\kappa-1/2)a(z)} = \int dy e^{2(\kappa-1/2)a(y)} < \infty, \quad (2.32)$$

donde se ha implementado el cambio a coordenadas de longitud propia, $dy = e^{a(z)} dz$.

Los dos primeros términos de (2.30) corresponden a teorías invariantes de calibre: la acción de Maxwell, $f_{\alpha\beta}^2$, para a_μ y la acción de Stueckelberg [42, 43]

$$-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_5^n)^2, \quad (2.33)$$

para los bosones vectoriales a_μ^n de masa m_n . Sin embargo, la ausencia de simetría de calibre presente en (2.27) se mantiene en $\mathcal{L}_{GN}^{(4)}$ debido a los dos últimos términos. El penúltimo refiere a un término de interacción entre a_μ^p y a_5^n vía la dinámica de los modos escalares masivos $\partial^\mu a_5^n$, y el último corresponde a un término de masa para a_5^n y a la interacción directa entre los modos a_5^n .

Nótese que para $\kappa = 1/2$ se tiene $V(1/2, z) = 0$. En este caso, la teoría (2.27) se reduce a la acción cinco-dimensional de Maxwell, F_{ab}^2 , y la correspondiente teoría cuatro-dimensional (2.30) a la acción de Stueckelberg [42, 43], en consistencia con el hecho de que el estado a_μ no pertenece al espectro de los estados masivos a_μ^n , como fue demostrado de forma alternativa en [28].

Ahora, si $\kappa = 5/2$ la función $V(5/2, z)$ coincide con el potencial de autointeracción del campo escalar

$$V(5/2, z) \equiv V(\phi(z)) = -\frac{3}{2} (3a'^2 + a'') e^{-2a} . \quad (2.34)$$

En las versiones regularizadas de RS [11, 20, 44], cuando el “grosor” $\rightarrow 0$ el potencial se reduce

$$V(\phi) \rightarrow \Lambda + \frac{1}{2} \tau \delta(z) , \quad (2.35)$$

donde Λ es la constante cosmológica y τ la tensión de la brana. Así, la teoría toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} |\Lambda| - \frac{2}{3} \tau \delta(z) \right) A_a A^a , \quad (2.36)$$

que no es más que un caso particular del mecanismo de localización (2.5) donde la masa, $m_5^2 = 4|\Lambda|/3$, y la constante de acoplamiento, $\eta = 2\tau/3$, son de origen topológico. En este sentido (2.27) es una generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura.

En general, para $\kappa > 1/2$ la teoría no es invariante $U(1)$ en consecuencia el modo vectorial no-masivo a_μ no corresponde a un campo de Maxwell, no corresponde al fotón. Por lo tanto, desde ese punto de vista, la teoría no es fenomenológicamente importante. Sin embargo, es plausible como una aproximación preliminar hacia una teoría de calibre que pretenda generalizar el mecanismo de localización de Ghoroku-Nakamura.

2.2.2. La Teoría Invariante de Calibre

Una propuesta que incorpora la simetría de calibre es la siguiente

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{GN} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' A^z \partial^c A_c + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) (a'' + a'^2) - \frac{2}{3} V(\kappa, z) \right] (A^z)^2 , \quad (2.37)$$

la cual es invariante bajo la transformación de calibre

$$\delta A_b = \partial_b \chi - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \chi \delta_b^z . \quad (2.38)$$

Demostración

Por simplicidad, considérese la lagrangiana equivalente a (2.37)

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) g^{a[c} g^{d]b} a' \delta_c^z \left[2\partial_a A_b - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \delta_a^z A_b \right] A_d \quad (2.39)$$

Aplicando la transformación (2.38) a cada término de la Acción (2.39)

- Primer término

$$\delta \left(-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right) = 2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \delta_a^z g^{a[c} g^{d]b} \partial_a A_b \partial_c \chi . \quad (2.40)$$

- Segundo término

$$\begin{aligned} \delta \left(2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) g^{a[c} g^{d]b} a' \delta_c^z A_d \partial_a A_b \right) = \\ = 2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \delta_c^z g^{a[c} g^{d]b} \left[\partial_a A_b \partial_d \chi - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \delta_b^z A_d \partial_a \chi \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

- Tercer término

$$\delta \left(- \left(\kappa - \frac{1}{2} \right)^2 a'^2 \delta_a^z \delta_c^z g^{a[c} g^{d]b} A_d A_b \right) = +2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right)^2 a'^2 \delta_b^z \delta_c^z g^{a[c} g^{d]b} A_d \partial_a \chi . \quad (2.42)$$

Finalmente, con (2.40), (2.41) y (2.42) se concluye que la teoría es invariante bajo la transformación (2.38), es decir, $\delta \mathcal{L} = 0$.

■

Vale destacar que bajo el calibre axial, $A_z = 0$, la teoría (2.37) se reduce a la teoría de Ghoroku-Nakamura, $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{GN}$, por lo que la localización del fotón sobre la brana esta garantizada. Aún más, sobre la brana la teoría se reduce dimensionalmente a

$$\mathcal{L}_c^{(4)} = -\frac{1}{4} f_{\alpha\beta}^2 + \sum_n \left[-\frac{1}{4} (f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2} (m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_5^n)^2 \right] , \quad (2.43)$$

$$\delta a_\mu = \partial_\mu \chi_0 , \quad \delta a_\mu^n = \partial_\mu \chi_n \quad \text{y} \quad \delta a_5^n = -m_n \chi_n . \quad (2.44)$$

Esto es, para un observador cuatro-dimensional la teoría da cuenta del comportamiento de un campo de Maxwell y de una torre de campos de Stueckelberg [42, 43]. Como se mostrará a continuación, la presencia de los campos de Stueckelberg se manifiesta a nivel del potencial electrostático como correcciones al potencial de Coulomb. En este sentido, la realización explícita de nuestro universo sobre una pared de dominio depende fuertemente de que tan significativas sean estas correcciones.

Demostración

A continuación, se hallarán aquellos componentes del propagador de la teoría (2.37) necesarios para definir el potencial electrostático correspondiente, acorde al apéndice D.1. Para ello, considérese a la teoría (2.37) con fuente y un término de fijación de calibre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{GN} - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) g^{a[c} g^{d]b} \left[(a'' + a'^2) \delta_a^5 A_d + 2a' \partial_a A_d \right] \delta_c^5 A_b \\ - \frac{2}{3} V(\kappa, z) e^{2a} \delta_b^5 \delta_c^5 A^b A^c - \frac{1}{2\xi} (n^b A_b)^2 - \mathcal{Q}^2 A_b J^b , \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde $n^b = m\delta_5^b$ y ξ es el parámetro de calibre tal que para $\xi \rightarrow 0$ se tiene el calibre axial $A_5 = 0$.

Realizando variaciones de Euler-Lagrange respecto al campo A_b , se obtienen las ecuaciones de campo

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}F^{cd}) + \frac{4}{3}V(\kappa, z)A^d - \frac{4}{3}V(\kappa, z)\delta_5^d A^5 - 2\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'g^{a[b}g^{d]5}\partial_a A_b - \frac{1}{\xi}m^2\delta_5^d A_5 = \mathcal{Q}^2 J^d, \quad (2.46)$$

Ahora, representando al campo en términos del propagador

$$A_b(x, z) = \int d^4x' \int dz' \sqrt{g(z')} G_{bc}(x - x', z, z') J^c(x', z'), \quad (2.47)$$

se obtiene para $\xi \rightarrow 0$ que la componente en el espacio de Fourier

$$\tilde{G}_{5\mu} = -\frac{\xi}{\xi e^{-4a}\bar{p}^2 + m^2} i e^{-4a}\bar{p}^\beta \left[\partial_z \tilde{G}_{\beta\mu} - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' \tilde{G}_{\beta\mu} \right] \rightarrow 0. \quad (2.48)$$

En consecuencia

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} \right) G_1 + \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} G_2, \quad (2.49)$$

siendo $\bar{p}^\alpha = \eta^{\alpha\beta} p_\beta$, y G_1 y G_2 solución a

$$\left[e^{-a}\partial_z(e^a\partial_z) - \bar{p}^2 + \frac{4}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \right] G_1 = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} e^{-a}\delta(z - z'), \quad (2.50)$$

y

$$\left[e^{-a}\partial_z(e^a\partial_z) + \frac{4}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \right] G_2 = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} e^{-a}\delta(z - z'), \quad (2.51)$$

respectivamente. Note que G_2 es independiente del momentum y adicionalmente esta asociado a un sector del propagador que propaga grados de libertad no físicos o espurios⁴.

⁴En el espacio de momentum, el campo (2.47) viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_c(p, z) &= \int dz' \sqrt{g'} \tilde{G}_{cb}(p; z, z') \tilde{J}^b(p, z') \\ &= \int dz' \sqrt{g'} \left[\tilde{G}_{c\beta}(p; z, z') \tilde{J}^\beta(p, z') + \tilde{G}_{c5}(p; z, z') \tilde{J}^z(p, z') \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se está interesado en el comportamiento del campo asociado a fuentes localizadas en $z = 0$, es decir $\tilde{J}^b(p, z) = \delta(z) \delta_\mu^b \tilde{j}^\mu(p)$. En consecuencia, para $c = \alpha$ en el primer término del lado derecho de (2.52) se tiene la contracción $\tilde{G}_{\alpha\beta} \tilde{j}^\beta$ que bajo la identificación de (2.49) y el uso de la transversalidad, $p_\beta \tilde{j}^\beta(p) = 0$, se reduce a $G_1(p, z, 0) \eta_{\alpha\beta} \tilde{j}^\beta(p)$. El segundo término se simplifica a consecuencia de que la densidad de corriente tiene una componente z nula. Así, se tiene

$$\tilde{A}_\alpha(p, z) = G_1(p, z, 0) \eta_{\alpha\beta} \tilde{j}^\beta(p). \quad (2.53)$$

Nótese que a pesar de que la componente (α, β) del propagador contiene a G_2 , el mismo no provee ninguna información física ya que por transversalidad no contribuye con el campo (2.53). Por lo tanto G_2 es un grado de libertad espurio.

La solución G_1 viene dada por

$$G_1(p, z; z') = -\frac{Q^2}{(2\pi)^2} \sum_j \frac{\psi_j^*(z')}{p^2 + m_j^2} e^{-[a(z') + a(z)]/2} \psi_j(z), \quad (2.54)$$

donde m y ψ son los autovalores y autofunciones, respectivamente, de la siguiente ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{QM}) \psi_j = m_j^2 \psi_j, \quad V_{QM} = \frac{1}{2}a'' + \frac{1}{4}a'^2 - \frac{4}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \quad (2.55)$$

donde V_{QM} es el equivalente al potencial mecánico-cuántico.

Dos observaciones. Primero, que ψ corresponde de forma consistente a la misma base que se uso para reducir dimensionalmente a la teoría, dado que (2.55) corresponde a la misma ecuación discutida en la sección 2.2 y por tanto $m \geq 0$. Segundo, los efectos de una interacción tipo $V(\kappa, z)A^2$ se manifiestan directamente sobre los estados vectoriales a nivel del V_{QM} como un término $V(\kappa, z)e^{2a}$.

Finalmente, realizando la transformada inversa del seno de Fourier de $|\vec{p}|G_1(\vec{p}, 0, 0)$ (ver apéndice D.1) se obtiene que, en el marco de esta teoría, el potencial creado por una partícula q_1 sobre otra partícula q_2 a una distancia r toma la siguiente forma

$$\mathcal{U}(r) = \frac{Q^2}{(2\pi)^{5/2}} \frac{q_1 q_2}{4r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \sum_{m>0} |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \right]. \quad (2.56)$$

Por otro lado, la dimensión adicional está regularizada. En consecuencia, el potencial V_{QM} debe mostrar esta información en términos de un par de barreras de potencial infinitas en $\pm z_r$ donde los estados masivos satisfacen las condiciones de borde (2.26). Asintóticamente el sistema se asemeja a un pozo de potencial infinito de ancho $2z_r$ por lo que se estima que la condición (2.26) lleve a la cuantización del autovalor de (2.55) en unidades de π/z_r [45]

$$m_n \simeq \frac{n\pi}{z_r}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

Así, con $\Delta m \rightarrow 0$ en el límite $z_r \rightarrow \infty$, es posible establecer la transición de la suma a una integral sobre m de la misma forma que en (1.74) y en consecuencia el potencial electrostático sobre la pared vendrá dado por

$$\mathcal{U}(r) = \frac{Q^2}{(2\pi)^{5/2}} \frac{q_1 q_2}{4r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{z_r}{\pi} \int_0^\infty |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} dm \right]. \quad (2.58)$$

De (2.58) se tiene explícitamente que el modo cero corresponde al potencial electrostático estándar mientras que la torre masiva contribuye con las desviaciones a la misma. ■

Por tanto, cuanto más significativa sea la presencia de los campos de Stueckelberg en la hiper-superficie $z = 0$ menos probable es que ésta resulte ser un modelo de nuestro universo, lo cual depende de la pared de dominio en consideración. En este sentido, en general no es posible hallar una solución analítica de (2.55) para una pared de dominio cualquiera. A continuación, se considera la localización del campo vectorial sobre tres paredes.

Campos de Calibre sobre la Brana RS

En el escenario RS [4]

$$g_{ab} = e^{-2a(z)} \left(-dt_a dt_b + dx_a^i dx_b^i + dz_a dz_b \right) , \quad (2.59)$$

$$a(z) = -\ln(1 + \alpha|z|) , \quad (2.60)$$

considérese por simplicidad la ecuación para los modos vectoriales en el caso $\kappa = 5/2$

$$\left(-\partial_z^2 + V_{QM} \right) \psi_m = m^2 \psi_m , \quad V_{QM} = \frac{1}{2} a'' + \frac{1}{4} a'^2 - \frac{4}{3} V(5/2, z) e^{2a} \quad (2.61)$$

donde $V(5/2, z)$ viene dado por (2.35), con $\Lambda = -6\alpha^2$ y $\tau = 6\alpha$, y

$$V_{QM} = \frac{35}{4} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha|z|)^2} - 5\alpha\delta(z) . \quad (2.62)$$

Las soluciones a (2.61) vienen dadas por el modo cero

$$\psi_0(z) = N_0 (1 + \alpha|z|)^{-5/2}$$

y un continuo de modos masivos

$$\psi_{m+} = N_m (\alpha^{-1} + z)^{1/2} \left\{ J_3 [m(\alpha^{-1} + z)] + B_+ Y_3 [m(\alpha^{-1} + z)] \right\} , \quad z > 0 , \quad (2.63)$$

$$\psi_{m-} = N_m (\alpha^{-1} - z)^{1/2} \left\{ A_- J_3 [m(\alpha^{-1} - z)] + B_- Y_3 [m(\alpha^{-1} - z)] \right\} , \quad z < 0 , \quad (2.64)$$

con grado de degeneración dos en el autovalor m , tales que [7]

$$\psi_{m-}^c(0) = \psi_{m+}^c(0) = 0 \quad , \quad \psi_{m-}'^c(0) = \psi_{m+}'^c(0) , \quad (2.65)$$

$$\psi_{m-}^d(0) = \psi_{m+}^d(0) \quad , \quad \left(\psi_{m-}'^d - \psi_{m+}'^d \right)_{z=0} - 5\alpha \psi_m^d(0) = 0 . \quad (2.66)$$

Adicionalmente, las condiciones de borde (2.26) se reducen a

$$\frac{d}{dz} \psi_{m\pm}^d(\pm z_r) \simeq 0 , \quad \forall m^2 \ll \alpha^2 \quad (2.67)$$

y llevan a la discretización del autovalor $m \sim n\pi/z_r$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.65), (2.66) en conjunto con la relación de ortonormalidad

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{1}{z_r} \int_{-z_r}^{z_r} \psi_m^{*i}(z) \psi_m^j(z) dz = \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{\delta^{ij}}{z_r} , \quad i, j = c, d , \quad (2.68)$$

se tiene para las constantes de integración

$$A_-^d = 1 , \quad B_+ = B_- = -\frac{J_2(m/\alpha)}{Y_2(m/\alpha)} \quad (2.69)$$

y las normas del modo cero y los modos masivos

$$N_0^2 = 2\alpha, \quad (N_m^d)^2 = \frac{2\pi m}{z_r} \left[1 + \frac{J_2^2(m/\alpha)}{Y_2^2(m/\alpha)} \right]^{-1}. \quad (2.70)$$

Así,

$$|\psi_m(0)|^2 \simeq \frac{1}{z_r} \frac{\pi m^3}{2 \alpha^3}, \quad \forall m^2 \ll \alpha^2. \quad (2.71)$$

y el potencial electrostático (2.58) se reduce a

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{1}{r} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(\alpha r)^4} \right],$$

donde las correcciones al potencial de Coulomb, generadas por los estados masivos, van como r^{-5} . Por lo tanto, dos partículas sobre la brana interactúan siguiendo la ley de Coulomb para todo $r \gg \alpha^{-1}$, en consistencia con el radio crítico gravitacional de RS [4].

Paredes de Dominio: versiones regularizadas del escenario RS

Sea $a(z)$ el factor métrico de una pared de dominio correspondiente a una versión regularizada de la brana RS. Siguiendo a Csáki *et al* [23] es posible estimar, al menos, el orden de las correcciones de la siguiente manera. Asintóticamente (donde los efectos del grosor de la pared son despreciables) el factor métrico de una pared regularizada se asemeja al de la solución RS: $a(z) \sim -\ln(1 + \alpha|z|)$, $a'(z) \sim -\alpha/(1 + \alpha|z|)$. En consecuencia, asintóticamente el potencial mecánico-cuántico (2.55)

$$V_{QM} = \kappa a'' + \kappa^2 a'^2 \longrightarrow V_{QM} \sim \frac{\kappa(\kappa + 1)}{z^2}. \quad (2.72)$$

En [23], se demuestra que para todo V_{QM} cuyo comportamiento asintótico es (2.72) se tiene que $\psi_m(0) \sim (m/\alpha)^{\kappa-1}$. Finalmente, las correcciones al potencial electrostático (2.58) sobre una pared de dominio, versión regularizada del escenario RS, van como $r^{-2\kappa}$.

Paredes de Dominio Singulares

Las paredes de dominio se entienden como soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar donde ϕ interpola entre los mínimos del potencial escalar $V(\phi)$. Ahora bien, existe otra familia de paredes cuyo campo ϕ interpola entre los “menores valores” del potencial escalar que no necesariamente tiene mínimos y sin embargo se tiene gravedad localizada sobre los mismos [46, 47, 48]. En lo que sigue se explora el comportamiento efectivo cuatro-dimensional del campo vectorial sobre uno de estos escenarios.

Considérese un espaciotiempo cinco-dimensional con simetría plano-paralela y tensor métrico en coordenadas conformes a Minkowski dado por

$$ds^2 = e^{2a(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (2.73)$$

donde el factor *warp* viene dado por

$$a(z) = -\ln \cosh(\alpha z). \quad (2.74)$$

y $\alpha > 0$. En [48], se demostró que este espaciotiempo es generado por un campo escalar

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha z , \quad (2.75)$$

con potencial de autointeracción

$$V(\phi) = 3 \alpha^2 \left[1 - \frac{3}{4} \cosh^2 \left(\sqrt{2/3} \phi \right) \right] . \quad (2.76)$$

Nótese que a diferencia de las paredes de dominio estándares, el campo escalar interpola entre $\pm\infty$ y el potencial de autointeracción tiene un máximo en $\phi = 0$ y es monótonamente decreciente en ϕ . Sin embargo, a pesar de la ausencia de vacíos (mínimos) el sistema soporta un defecto topológico. En [48] fueron ampliamente estudiadas y discutidas las propiedades gravitacionales de esta solución y se muestra que el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales está localizado y que los modos masivos se encuentran dispersos a lo largo de la dimensión adicional.

Para esta configuración el escalar de curvatura viene dado por

$$R = 14\alpha^2 \left[1 - \frac{3}{2} \cosh(2\alpha z) \right] \quad (2.77)$$

y diverge para $z \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, la solución representa una pared de dominio sumergida en un espaciotiempo que interpola entre dos espacios con singularidades desnudas en el horizonte.

Para estimar el potencial electrostático asociado a dicho escenario se necesitan los estados del campo vectorial asociado a la teoría (2.37) sobre la pared (2.73 -2.76). En este sentido considérese la ecuación diferencial

$$\left(-\partial_z^2 + V_{QM} \right) \psi_m = m^2 \psi_m , \quad (2.78)$$

siendo el potencial dado por

$$V_{QM} = m_0^2 - \frac{1 + \kappa}{\kappa} m_0^2 \cosh^{-2}(\alpha z) , \quad m_0 \equiv \kappa \alpha , \quad (2.79)$$

donde es posible identificar una brecha de energía definida por m_0 .

Ahora, la ecuación (2.78) se puede reescribir de la siguiente manera

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) - \frac{1}{2} \kappa(\kappa + 1) \cosh^{-2}(\xi) \psi(\xi) = E \psi(\xi) , \quad (2.80)$$

donde $\xi = \alpha z$ y

$$E = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{m^2}{m_0^2} - 1 \right) . \quad (2.81)$$

La ec. (2.80) tiene la forma de una ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un potencial de Pöschl-Teller [49]. Acorde a [50], el espectro de los autoestados corresponde a dos modos localizados dentro de la brecha y una torre continua de modos masivos con $m > m_0$ propagándose libremente por el espacio. Los estados acotados y correspondientes autovalores vienen dados por [51]

$$E_0 = -\frac{\kappa^2}{2} , \quad \psi_0 = N_0 \cosh^{-\kappa}(\xi) , \quad (2.82)$$

y

$$E_1 = -\frac{(\kappa - 1)^2}{2}, \quad \psi_1 = N_1 \cosh^{-\kappa}(\xi) \sinh(\xi). \quad (2.83)$$

Por tanto

$$m_0^2 = 0, \quad m_1^2 = \frac{2\kappa - 1}{\kappa^2} m_0^2 \quad y \quad N_0^2 = \frac{m_0}{4\kappa} {}_2F_1^{-1}(\kappa, 2\kappa; 1 + \kappa; -1), \quad (2.84)$$

para todo $\kappa > 1/2$.

Continuando con los estados libres, bajo el cambio de variable $u = \tanh(\xi)$, la ecuación diferencial (2.80) se reduce a

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{d}{du} \psi \right] + \left[\kappa(\kappa + 1) + \frac{2E^2}{(1 - u^2)} \right] \psi = 0, \quad (2.85)$$

que corresponde a la ecuación diferencial de Legendre. Así, la solución viene dada por

$$P_\kappa^\mu(u) = \frac{1}{\Gamma(1 - u)} \left(\frac{1 + u}{1 - u} \right)^{\mu/2} {}_2F_1[-\kappa, \kappa + 1; 1 - \mu; (1 - u)/2], \quad (2.86)$$

$$Q_\kappa^\mu(u) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\kappa + \mu + 1) e^{i\pi\mu} (u^2 - 1)^{\mu/2}}{\Gamma(\kappa + 3/2) u^{\kappa + \mu + 1}} {}_2F_1[(\kappa + \mu + 1)/2, (\kappa + \mu + 2)/2; \kappa + 3/2; 1/u^2], \quad (2.87)$$

las funciones asociadas de Legendre de primera y segunda clase, respectivamente, de grado κ y orden $\mu = \pm\sqrt{-2E}$.

El conjunto P_κ^μ es ortogonal en el intervalo $|1 - u| < 2$ y el conjunto Q_κ^μ lo es en $|u| > 1$. En particular para $u = \tanh(\alpha z)$ se satisface $|1 - u| < 2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \psi_m(z) = \frac{N_m}{2} [& A_m [\Gamma(1 - \mu) P_\kappa^\mu(\tanh \alpha |z|) + \Gamma(1 + \mu) P_\kappa^{-\mu}(\tanh \alpha |z|)] \\ & - i [\Gamma(1 - \mu) P_\kappa^\mu(\tanh \alpha |z|) - \Gamma(1 + \mu) P_\kappa^{-\mu}(\tanh \alpha |z|)]], \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde se ha rescrito la solución en términos de su parte real e imaginaria y usado la simetría de reflexión.

La solución es doblemente degenerada [7], tal que satisfacen las condiciones de borde

$$\psi_m^c(0^-) = \psi_m^c(0^+) = 0, \quad \psi_m'^c(0^-) = \psi_m'^c(0^+), \quad (2.89)$$

$$\psi_m^d(0^-) = \psi_m^d(0^+), \quad \psi_m'^d(0^-) = \psi_m'^d(0^+) \quad (2.90)$$

y la condición de ortonormalidad

$$\frac{1}{z_r} \int_{-z_r}^{z_r} dz \psi_m^i \psi_m^{j*} = \frac{\delta^{ij}}{z_r}, \quad i = c, d. \quad (2.91)$$

Por otro lado, las condiciones de borde sobre las branas reguladoras llevan a la cuantización de la masa, en unidades de π/z_r .

Así, de (2.89) y (2.90) resulta

$$A_m^c = i \frac{\Gamma(1 - \mu) P_\kappa^\mu(0) - \Gamma(1 + \mu) P_\kappa^{-\mu}(0)}{\Gamma(1 - \mu) P_\kappa^\mu(0) + \Gamma(1 + \mu) P_\kappa^{-\mu}(0)} \quad (2.92)$$

y de (2.91) se tiene

$$N_m^{d^2} = \frac{1}{z_r} (1 + A_m^{d^2})^{-1}, \quad 1 + A_m^c A_m^d = 0. \quad (2.93)$$

donde se ha hecho uso del comportamiento de (2.88) para $\alpha z/\delta \gg 1$,

$$\psi_m(z) \simeq N_m \left[A_m \cos \left(\sqrt{m^2 - m_0^2} |z| \right) + \sin \left(\sqrt{m^2 - m_0^2} |z| \right) \right] \quad (2.94)$$

y de la aproximación

$$P_\kappa^\mu(\tanh \xi) \simeq \frac{e^{\mu\xi}}{\Gamma(1-\mu)}, \quad \forall \xi \gg 1. \quad (2.95)$$

Por tanto

$$z_r |\psi_m^d(0)|^2 = \Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)P_\kappa^\mu(0)P_\kappa^{-\mu}(0), \quad (2.96)$$

Ahora, en el cálculo del potencial electrostático el modo (2.96) participa en el desarrollo del siguiente término

$$\int_{m_0} | \psi_m^d(0) |^2 e^{-mr} dm, \quad (2.97)$$

cuya resolución analítica no es posible en este caso. Así, con la intención de obtener un resultado aproximado muy semejante al real, considérese que la contribución efectiva a la integral la realizan los estados de masa $m \gg m_0$. Por consistencia, para que la exponencial no atenúe estos modos se debe esperar que r muestre un comportamiento inverso a m . Por otro lado, es claro que considerar $m \ll m_0$ no tiene sentido ya sea porque (2.96) no es un modo acotado o porque se está fuera del rango de integración en (2.97). En consecuencia, para $m \gg m_0$

$$z_r |\psi_m^d(0)|^2 \simeq 1 - \left[\frac{\kappa(\kappa+1)}{5} \right]^2 \frac{m_0^2}{m^2}, \quad (2.98)$$

donde las hipergeométricas involucradas en la definición de las funciones de Legendre han sido aproximadas por

$${}_2F_1(a, b; c; \xi) \simeq 1 + \frac{ab}{c} \xi, \quad c \gg 1. \quad (2.99)$$

Ahora, con los modos (2.82), (2.83) y (2.98) en (2.58) se obtiene que el potencial electrostático

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{1}{r} \left[1 - \frac{8}{3\pi} \frac{4^\kappa}{\kappa} {}_2F_1(\kappa, 2\kappa; 1+\kappa; -1) \left[\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{25} (1 + m_0 r \ln m_0 r) - \frac{1 - m_0 r}{m_0 r} \right] \right] \quad (2.100)$$

es cinco-dimensional para $r \ll \alpha^{-1}$, lo cual implica que el escenario definido por (2.73-2.76) no es un posible modelo de nuestro universo.

Análisis de Resultados

En [28] se muestra que para un campo cinco-dimensional A_b descrito por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}, \quad (2.101)$$

en un espaciotiempo pared de dominio con tensor métrico

$$g_{ab} = e^{2a(z)} (-dt_a dt_b + dx_a^j dx_b^j + dz_a dz_b), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.102)$$

se tiene que el modo cero no pertenece al espectro de los estados vectoriales ya que debe satisfacer

$$(-\partial_z^2 + V_{QM}) \psi_0 = 0, \quad V_{QM} = \frac{1}{2}a'' + \frac{1}{4}a'^2 \quad (2.103)$$

que tiene como solución un estado base no-normalizable

$$\psi_0(y) = e^{a(z)/2} : \int dz \psi_0^2(z) = \int dz e^{a(z)} = \int dy \rightarrow \infty \quad (2.104)$$

donde se ha hecho el cambio $dy = e^{a(z)} dz$.

Parafraseando lo anterior, para \mathcal{L}_M dado por (2.101) se genera un V_{QM} que no logra atrapar al modo cero en la pared. Sobre la base de este resultado, el mecanismo propuesto en esta tesis incluye un término de interacción no-convencional que permite acoplar al campo con la pared, esto es,

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{2}{3}V(\kappa, z)A_a A^a, \quad (2.105)$$

y como es de esperar se manifiesta en el potencial V_{QM} como un ajuste a (2.103)

$$V_{QM} = \frac{1}{2}a'' + \frac{1}{4}a'^2 - \frac{4}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \quad (2.106)$$

donde un potencial de acople dado por

$$V(\kappa, z) = -\frac{3}{4} \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \left[\left(\kappa + \frac{1}{2} \right) a'^2 + a'' \right] e^{-2a}, \quad \kappa \geq 1/2. \quad (2.107)$$

lleva a un modo cero normalizable, $\psi_0 \sim e^{\kappa a(z)}$, y por ende a un campo cuatro-dimensional tipo Maxwell sobre la brana, pero sin simetría de calibre ya que fue rota por el mismo término de interacción.

Una teoría invariante de calibre que se reduce a (2.105) bajo fijación de calibre es la siguiente

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{GN} - \frac{2}{3}V(\kappa, z)e^{2a}(A^z)^2 - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) g^{a[c} g^{d]b} [(a'' + a'^2) \delta_a^z A_d + 2a' \partial_a A_d] \delta_c^z A_b \quad (2.108)$$

Esta teoría es invariante bajo la transformación

$$\delta A_b = \partial_b \chi - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \chi \delta_b^z. \quad (2.109)$$

Una manera de evaluar, al menos parcialmente, la equivalencia en la física descrita por \mathcal{L}_c y \mathcal{L}_{GN} consiste en comparar el potencial electrostático

$$\mathcal{U}(r) \sim \frac{1}{r} \left(|\psi_0(0)|^2 + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{z_r}{\pi} \int |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} dm \right), \quad (2.110)$$

sobre una pared particular generado por ambas teorías. Si la pared es la brana RS, para $\kappa = 5/2$ y bajo el calibre axial, las correcciones al potencial, asociadas a \mathcal{L}_c , van como r^{-5} . Por otro lado, nótese que \mathcal{L}_{GN} se reduce al mecanismo de Ghoroku-Nakamura [32] dado que el segundo término en (2.105) se expresa como

$$\frac{2}{3} V(5/2, z) A_a A^a = -\frac{1}{2} (8\alpha^2 - 4\alpha \delta(z)) A_a A^a, \quad (2.111)$$

donde es posible identificar a $m_5^2 = 8\alpha^2$ y a $\eta = 4\alpha$. Dicho mecanismo, predice correcciones al potencial del orden de $r^{-(2\nu-1)}$ donde $\nu^2 = m_5^2/\alpha^2 + 1$ que para $m_5^2 = 8\alpha^2$ se reduce a r^{-5} . En consecuencia, la teoría de calibre \mathcal{L}_c arroja la misma información física que el mecanismo no-invariante de calibre de \mathcal{L}_{GN} sobre la brana RS.

A pesar de que con \mathcal{L}_c se ha logrado una teoría de calibre de \mathcal{L}_{GN} sin perder sus beneficios, la teoría adolece de un problema. La procedencia de los términos de acoplamiento no estan debidamente justificados más allá de que simplemente aseguren que la teoría sea invariante de calibre. En este sentido, existe otro enfoque en el que el término de acoplamiento con la pared se entiende como un término cinético inducido: el mecanismo DGS [1]. Este mecanismo será tratado en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Campos de Calibre sobre la pared

La presencia de otros campos que se propagan en el espaciotiempo generado por una pared de dominio $(4 + 1)$ -dimensional no deforma significativamente la configuración del *background* gravitacional, debido a que su contribución energética es despreciable en comparación con la del campo gravitacional. Bajo estas circunstancias, y como se mostró en los preliminares del capítulo 2, se tiene que un campo vectorial que se propague libremente en dicho espaciotiempo no contiene un estado base de masa nula que emule el comportamiento $(3 + 1)$ -dimensional del fotón [28].

Para lograr el confinamiento de campos de calibre sobre branas, una alternativa interesante es la propuesta de Dvali, Gabadadze y Shifman [1]. En esta se añade a la acción convencional de un campo de calibre en 5-dimensiones, un término cinético con soporte sobre la brana, la cual se supone infinitamente delgada y embebida en un espaciotiempo plano. El análisis del comportamiento del propagador resultante, muestra que por debajo de una distancia crítica se recupera sobre la brana el potencial electromagnético estándar 4-dimensional.

En la sección 3.2, se considera la extensión del mecanismo DGS para campos de calibre que se propagan en un espaciotiempo pared de dominio. Se trata el alcance de la propuesta en dos sentidos. En el primer caso, con la intención de apreciar los efectos de la curvatura se discute la localización sobre una brana sumergida en un espaciotiempo AdS_5 [4]. En el segundo caso, se considera a una pared sumergida en un espaciotiempo plano, para estudiar los efectos del grosor de la pared, y se chequea consistencia entre el límite de pared delgada de esta solución y la propuesta original de DGS [1]. Finalmente, se discuten los resultados.

3.1. El Mecanismo DGS

Considérese el espaciotiempo 5-dimensional plano con métrica

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.1)$$

y sea la teoría para el sector de calibre $U(1)$ definida por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4Q^2} F_{ab} F^{ab} - J^c(x, y) A_c, \quad (3.2)$$

donde $J^c(x, y)$ es la densidad de corriente asociada a los fermiones localizados sobre la brana

$$J^c(x, y) = E_{\bar{\mu}}^\mu \delta(y) j^{\bar{\mu}}(x) \delta_\mu^c, \quad (3.3)$$

$E_{\bar{\mu}}^{\mu}$ son los vielbein y $j^{\bar{\mu}}(x)$ está dado por

$$j^{\bar{\mu}}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^{\bar{\mu}} \psi(x) . \quad (3.4)$$

De (3.1) se tiene $E_y^y = 1$, $E_{\bar{\mu}}^{\mu} = \delta_{\bar{\mu}}^{\mu}$ y por lo tanto

$$J^c(x, y) = \delta(y) j^{\nu}(x) \delta_{\nu}^c . \quad (3.5)$$

Así, sustituyendo en (3.2) se obtiene

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mathcal{Q}^2} F_{ab} F^{ab} - \delta(y) A_{\mu}(x, y) j^{\mu}(x) . \quad (3.6)$$

La lagrangiana describe a un campo de calibre, $A_{\mu}(x, y)$, que se propaga libremente por todo el espacio cinco-dimensional, η_{ab} , y cuya fuente, $j^{\mu}(x)$, está localizada sobre la hipersuperficie $y = 0$. Sin embargo, esta teoría no localiza al bosón vectorial sobre la brana [28]. No obstante, en [1] se argumenta que la teoría esta incompleta en el sentido de que se han obviado las contribuciones provistas por las fluctuaciones cuánticas de los fermiones sobre la brana. Esto es, los *loops* asociado a las partículas sobre la brana proveen contratérminos que corrigen la cinemática de los grados de libertad cuatro-dimensionales del campo vectorial

$$\bar{\psi}(x) A_{\mu}(x, 0) \psi(x) \quad F_{\mu\nu}^2(x, 0)$$


$$+ \quad (3.7)$$

En consecuencia, la acción efectiva cinco-dimensional queda

$$S = \int d^4x dy \left[-\frac{1}{4\mathcal{Q}^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} \delta(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^c(x, y) A_c \right] , \quad (3.8)$$

donde \mathcal{Q} y e son las constantes de acoplamiento de calibre cinco y cuatro-dimensional respectivamente.

Esta teoría es invariante de calibre. En vista de lo anterior, considérese entonces la acción

$$S = \int d^4x dy \left[-\frac{1}{4\mathcal{Q}^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} \delta(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (n^b A_b)^2 - J^c(x, y) A_c \right] , \quad (3.9)$$

donde el término extra es un término de fijación de calibre con $n^b = m\delta_y^b$ y ξ el parámetro de calibre. Para $\xi \rightarrow 0$ se tiene el calibre unitario $A_y = 0$. Las ecuaciones de movimiento de la teoría vienen dadas por

$$\partial_a F^{ab} + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} \delta(y) \delta_{\nu}^b \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \frac{\mathcal{Q}^2}{\xi} n^b n^c A_c = \mathcal{Q}^2 J^b . \quad (3.10)$$

En particular, para $b = \nu$ se tiene

$$\left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} \delta(y) \right) \eta^{\alpha\mu} \partial_{\mu} (\partial_{\alpha} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha}) + \partial_y (\partial_y A_{\nu} - \partial_{\nu} A_y) = \mathcal{Q}^2 J_{\nu} \quad (3.11)$$

y para $b = y$

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial_\alpha A_y - \partial_y A_\alpha) - \frac{\mathcal{Q}^2}{\xi} m^2 A_y = \mathcal{Q}^2 J_y . \quad (3.12)$$

Ahora, sustituyendo A_b en (3.12) por su expresión en términos del propagador

$$A_b(x, y) = \int d^4 x' \int dy' G_{bc}(x - x', y, y') J^c(x', y') , \quad (3.13)$$

resulta

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial_\alpha G_{y\mu} - \partial_y G_{\alpha\mu}) - \frac{\mathcal{Q}^2}{\xi} m^2 G_{y\mu} = 0 , \quad (3.14)$$

y

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial_\alpha G_{yy} - \partial_y G_{\alpha y}) - \frac{\mathcal{Q}^2}{\xi} m^2 G_{yy} = \mathcal{Q}^2 \delta^4(x - x') \delta(y) . \quad (3.15)$$

Transformando por Fourier (3.14) en la variable x , se obtiene

$$\tilde{G}_{y\mu} = \frac{\xi}{\xi \bar{p}^2 + m^2 \mathcal{Q}^2} \left(i \bar{p}^\alpha \partial_y \tilde{G}_{\alpha\mu} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{para } \xi \rightarrow 0 . \quad (3.16)$$

donde $\bar{p}^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} p_\beta$. Así, para $\xi \rightarrow 0$, se sigue de (3.11), (3.13) y (3.16), que en el espacio de Fourier $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ satisface

$$\left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} \delta(y) \right) \left(-\bar{p}^2 \eta^{\sigma\beta} + \bar{p}^\sigma \bar{p}^\beta \right) \tilde{G}_{\beta\alpha} + \eta^{\sigma\beta} \partial_y^2 \tilde{G}_{\beta\alpha} = \mathcal{Q}^2 \delta_\alpha^\sigma \delta(y - y') . \quad (3.17)$$

Ahora, escribiendo $\tilde{G}_{\beta\alpha}$ en la forma

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} \right) G_1 + \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} G_2 . \quad (3.18)$$

se encuentra que G_1 y G_2 satisfacen

$$\left[-\bar{p}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} \delta(y) \right) + \partial_y^2 \right] G_1(p, y, y') = \mathcal{Q}^2 \delta(y - y') , \quad (3.19)$$

y

$$\partial_y^2 G_2(p, y, y') = \mathcal{Q}^2 \delta(y - y') . \quad (3.20)$$

Por otro lado (vease apéndice D.1) para un par de cargas puntuales localizadas sobre la hipersuperficie $y = 0$ se tiene que la interacción electrostática viene dada por

$$\mathcal{W}(r) = -\frac{q_1 q_2}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\bar{p}\cdot\vec{r}} G_1(\vec{p}, 0, 0) \quad (3.21)$$

y está por lo tanto completamente determinada por G_1 . En el apéndice E.2 se desarrolla la solución para la función de Green G_1 sujeta a condiciones de contorno $G_1(\pm\infty) = 0$. Así, se tiene

$$G_1(p, y, y') = -\frac{e^2}{p(p+p^*)} e^{-p|y-y'|} - \frac{\mathcal{Q}^2 p}{2p(p+p^*)} \left[e^{-p|y-y'|} - e^{-p|y|} e^{-p|y'|} \right] , \quad (3.22)$$

donde se ha definido $p^* \equiv 2e^2/Q^2$. Se sigue que

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{e^2}{p(p+p^*)} . \quad (3.23)$$

Esto es, para $p \gg p^*$ la función $G_1 \sim 1/p^2$ y se tiene que las partículas cargadas interactúan siguiendo un potencial tipo Coulomb, $\mathcal{U}(r) \sim 1/r$, por debajo del radio crítico $r \ll r^* = p^{*-1}$. Y para $p \ll p^*$ resulta que $G_1 \sim 1/p$ y el potencial electrostático presenta un comportamiento cinco-dimensional, $\mathcal{U}(r) \sim 1/r^2$, por encima de r^* . Este resultado es bien conocido en la literatura y el mismo fue reportado por Dvali, Gabadadze y Shifman en [1].

A continuación, se propone una extensión del mecanismo DGS a Paredes de Dominio embebidas en espaciotiempos con curvatura.

3.2. Extensión del Mecanismo DGS

Como mencionamos previamente se desea generalizar la propuesta DGS al caso de una pared de dominio en un espaciotiempo curvo con una métrica dada por

$$ds^2 = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 . \quad (3.24)$$

Para ello, considérese la acción

$$S = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4Q^2} F_{ab} F^{ab} - J^c(x, y) A_c \right] , \quad (3.25)$$

donde $J^c(x, y)$ es la densidad de corriente asociada a los fermiones localizados sobre la brana

$$J^c(x, y) = E_{\bar{\mu}}^\mu \bar{\Psi}(x, y) \Gamma^{\bar{\mu}} \Psi(x, y) \delta_\mu^c = E_{\bar{\mu}}^\mu k^2(y) j^{\bar{\mu}}(x) \delta_\mu^c , \quad (3.26)$$

$$j^{\bar{\mu}}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^{\bar{\mu}} \psi(x) , \quad (3.27)$$

además, se ha hecho uso de que $\Psi(x, y) = \psi(x)k(y)$ [28, 24, 31] y $E_y^{\bar{y}} = 1$ y $E_{\bar{\mu}}^\mu = e^{-a(y)} \delta_{\bar{\mu}}^\mu$ son los vielbein compatibles con (3.24) (ver apéndice F). Por tanto

$$J^c(x, y) = e^{-a(y)} k(y) j^\nu(x) \delta_\nu^c , \quad (3.28)$$

Ahora, en el mecanismo DGS la interacción entre el campo de calibre del *bulk* y la materia localizada sobre una pared delgada en un espaciotiempo de Minkowski induce un término cuatro-dimensional proporcional a $F_{\mu\nu}^2$, el cual también está localizado sobre la brana [1]. Para extender dicho mecanismo, es de notar que un término análogo puede ser incorporado en (3.25) mediante el reemplazo

$$j^{\bar{\nu}}(x) \rightarrow j^{\bar{\nu}}(x) - E_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} \left(\frac{1}{2e^2} \nabla_\alpha F^{\alpha\mu} \right) \quad (3.29)$$

donde e es el acoplamiento de calibre cuatro-dimensional. El término adicional se interpreta como la contribución al campo electromagnético de la corriente asociada a las correcciones cuánticas debidas a la interacción del campo que se propaga en el bulk con los fermiones confinados a la brana.

Así, se tiene a la acción

$$S = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4\mathcal{Q}^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} k^2(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^c(x, y) A_c \right], \quad (3.30)$$

como la propuesta que generaliza al mecanismo DGS.

Procediendo de manera análoga a lo hecho en la sección anterior, se agrega a la acción un término de fijación de calibre $-(n^b A_b)^2/\xi$, de tal manera que la componente

$$\tilde{G}_{y\mu} = \frac{\xi}{\xi e^{2a(y)} \bar{p}^2 + m^2 \mathcal{Q}^2} \left(i e^{2a(y)} \bar{p} \partial_y \tilde{G}_{\alpha\mu} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

donde $\bar{p}^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} p_\beta$. En consecuencia, para $\xi \rightarrow 0$, se sigue que $\tilde{G}_{\beta\alpha}$ viene dado por

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} \right) G_1 + \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} G_2, \quad (3.32)$$

donde G_1 y G_2 satisfacen

$$\left[-\bar{p}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} k^2(y) \right) + \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] G_1(p, y, y') = \mathcal{Q}^2 \delta(y - y'), \quad (3.33)$$

y

$$\partial_y [e^{2a(y)} \partial_y G_2(p, y, y')] = \mathcal{Q}^2 \delta(y - y'). \quad (3.34)$$

Por otro lado, para una densidad de corriente (3.28) se tiene, de la interacción electrostática (ver apéndice D.1)

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{j}^\mu(\vec{p}) \left(\int dy \int dy' e^{3a(y)} k^2(y) \tilde{G}_{\mu\nu}(\vec{p}, y, y') e^{3a(y')} k^2(y') \right) \tilde{j}^\nu(-\vec{p}), \quad (3.35)$$

que el propagador efectivo cuatrodimensional esta dado por

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(4)}(\vec{p}) = \int dy \int dy' e^{3a(y)} k^2(y) \tilde{G}_{\mu\nu}(\vec{p}, y, y') e^{3a(y')} k^2(y'), \quad (3.36)$$

Ahora, se tienen fermiones localizados sobre la pared siempre que estén acoplados al campo escalar ϕ vía un término de Yukawa $\lambda \bar{\Psi} \Psi \phi$ [28, 24, 31]. Así, se obtiene (ver apéndice F)

$$k(y) = \mathcal{N} e^{-2a(y) - \lambda \int dy \phi(y)}. \quad (3.37)$$

En particular, para una pared simple con simetría Z_2 asintóticamente AdS₅ con constante cosmológica Λ y valores asintóticos del campo escalar $\phi(\pm\infty) = \pm\varphi$, el perfil $k(y)$ resulta normalizable para valores de λ mayores que $\sqrt{|\Lambda|/6}/\varphi$.

Nótese que para $k^2(y)$ que resulta apreciable solo en torno a la pared, la cantidad $e^{3a(y)} k^2(y)$ lo es aún mas de tal manera que es posible considerar una evaluación del tipo *saddle-point* como un método para aproximar las integrales en (3.36). Así

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(4)}(p) \simeq e^{6a(0)} \tilde{G}_{\mu\nu}(p, 0, 0) \quad (3.38)$$

y por lo tanto $\tilde{G}_{\mu\nu}(p, 0, 0)$ es esencialmente el propagador cuatro-dimensional. El potencial \mathcal{U} es independiente de G_2 debido a la contracción con \tilde{j} en (3.35) y tendremos para G_1

$$\left[\bar{p}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} k^2(y) \right) - \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] \bar{G}_1(p, y, y') = -\delta(y - y'), \quad \bar{G}_1(\pm\infty) = 0, \quad (3.39)$$

donde $\bar{G}_1 \equiv G_1(p, y, y')/\mathcal{Q}^2$

En lo que sigue consideraremos varios escenarios con el fin de estudiar los efectos de la curvatura de la geometría *warped* así como del grosor de la pared sobre la localización del bosón vectorial.

3.2.1. Escenario Randall-Sundrum

Con $a(y) = -\alpha|y|$ en (3.24) se obtiene el tensor métrico del espaciotiempo AdS₅ que genera una pared de dominio infinitamente delgada con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$.

Ahora, como se muestra en el apéndice F, los fermiones sobre una pared delgada no provienen de un acoplamiento tipo Yukawa [31] por lo que es menester prescribir su comportamiento a lo largo de la dimensión adicional. Así

- $k^2(y) = 0$: En este caso el término cinético inducido no esta presente y, como es bien sabido, el campo vectorial no puede ser gravitacionalmente atrapado en el escenario RS [28]. Para $k^2(y) = 0$ se encuentra (ver apéndice E.3)

$$G_1(p, y, y') = -\frac{\mathcal{Q}^2}{\alpha} e^{\alpha|y|} \left[\mathcal{F}(\bar{p}) K_1(e^{\alpha|y|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y'|} \bar{p}/\alpha) + I_1(e^{\alpha|y_{<}|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y_{>}|} \bar{p}/\alpha) \right], \quad (3.40)$$

donde K_n e I_n son las funciones de Bessel modificadas de orden n , las variables $y_{<} = \min\{y, y'\}$, $y_{>} = \max\{y, y'\}$ y

$$\mathcal{F}(\bar{p}) = \frac{I_0(\bar{p}/\alpha)}{K_0(\bar{p}/\alpha)}. \quad (3.41)$$

Para $p \ll \alpha$, resulta

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{\mathcal{Q}^2}{2} \frac{\alpha}{p^2 \ln(\alpha/p)}, \quad (3.42)$$

el cual no se asemeja al propagador cuatro-dimensional en el espacio de momentum. Por otro lado, para $p \gg \alpha$

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{\mathcal{Q}^2}{2} \frac{1}{p}, \quad (3.43)$$

se tiene un propagador con un comportamiento cinco-dimensional semejante al presente en un espacio de Minkowski de la misma dimensionalidad. Es decir, no se perciben los efectos de la curvatura en el propagador para distancias $r \ll \alpha^{-1}$.

- $k^2(y) = \delta(y)$: El propagador también viene dado por (3.40) salvo que (ver apéndice E.3)

$$\mathcal{F}(\bar{p}) = \frac{p^* I_0(\bar{p}/\alpha) - \bar{p} I_0(\bar{p}/\alpha)}{p^* K_0(\bar{p}/\alpha) + \bar{p} K_1(\bar{p}/\alpha)}, \quad (3.44)$$

donde al igual que antes, p^* viene dado por $2e^2/\mathcal{Q}^2$. Por tanto, sobre la brana $y = y' = 0$

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{e^2}{p(p + p^* K_0(p/\alpha)) / K_1(p/\alpha)} , \quad (3.45)$$

Así, para $p \gg \alpha$

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{e^2}{p(p + p^*)} . \quad (3.46)$$

En el límite de *bulk* plano, $\alpha \rightarrow 0$, este resultado, corresponde al reportado por DGS [1].

Para $p \ll p^*$ la función $G_1 \sim 1/p$ por lo que el propagador presenta un comportamiento cinco-dimensional. Y para $p \gg \max\{p^*, \alpha\}$, se tiene $G_1 \sim 1/p^2$ y sobre la brana las partículas interactúan siguiendo el potencial de Coulomb $\mathcal{U}(r) \sim 1/r$ para $r \ll r_c \equiv \min\{p^{*-1}, \alpha^{-1}\}$. Ahora, nótese que ya sea $p^* < \alpha$ ó $p^* > \alpha$ para el radio crítico siempre se cumple $r_c \leq \alpha^{-1}$. Por otro lado, por debajo de α^{-1} la gravedad deja de ser cuatro-dimensional sobre la brana RS [4]. En consecuencia, no es posible establecer electromagnetismo y gravitación cuatro-dimensional ordinaria para $r \ll \alpha^{-1}$.

En contraste, existe otra región donde dichos campos tienen un comportamiento estándar cuatro-dimensional. En particular, se tiene

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{e^2}{p^2} , \quad (3.47)$$

para

$$\alpha \gg p \gg p^* \frac{K_0(p/\alpha)}{K_1(p/\alpha)} \sim -p^* \frac{p}{\alpha} \ln \frac{p}{\alpha} , \quad (3.48)$$

es decir

$$\alpha e^{-\alpha/p^*} \ll p \ll \alpha , \quad (3.49)$$

A diferencia del resultado DGS en términos de una cota inferior, p^* , la presencia de curvatura en el escenario RS define la existencia tanto de una escala inferior como de una escala superior entre las cuales el propagador presenta un comportamiento cuatro-dimensional.

3.2.2. Pared de dominio plana

En un espaciotiempo de Minkowski cinco-dimensional, definido por $a(y) = 0$, una pared de dominio viene dada por

$$\phi(y) = \phi_0 \tanh(\alpha y/\delta) , \quad (3.50)$$

para un potencial de la forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \beta (\phi_0^2 - \phi^2)^2 , \quad (3.51)$$

donde $\phi_0 = \beta^{1/2} \alpha/\delta$. En este caso

$$k^2(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \delta} \frac{\Gamma(\lambda/\sqrt{\beta} + 1/2)}{\Gamma(\lambda/\sqrt{\beta})} \cosh(\alpha y/\delta)^{-2\lambda/\sqrt{\beta}} . \quad (3.52)$$

Sin embargo, una solución analítica de (3.39) para G_1 no puede ser hallada para λ y β arbitrarios.

En lo que sigue, con la intención de explorar el comportamiento de la solución se escoge la constante de Yukawa tal que $\lambda = \sqrt{\beta}$. Esta particular selección esta motivada por el hecho de que (3.52) se reduce a una familia delta, lo que nos permitirá reproducir al mecanismo DGS en el límite de pared delgada.

El problema homogéneo asociado a (3.39) es

$$u''(y) - p^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\delta} \frac{1}{p^*} \cosh(\alpha y/\delta)^{-2} \right) u(y) = 0, \quad (3.53)$$

con $u(+\infty) = u(-\infty) = 0$ y es fácil verificar que admite como única solución $u = 0$.

Ahora, dos soluciones linealmente independientes de (3.53) que satisfacen $u_1(+\infty) = 0$ y $u_2(-\infty) = 0$ son

$$u_1(y) = P_n^m(\tanh(\alpha y/\delta)), \quad u_2(y) = u_1(-y), \quad (3.54)$$

donde $P_n^m(x)$ son las funciones asociadas de Legendre de grado n y orden m con

$$n = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{p^2 \delta}{p^* \alpha}} \right), \quad m = \pm \frac{\delta}{\alpha} p. \quad (3.55)$$

Las condiciones de contorno demandan que el signo negativo sea escogido en m , mientras que ambos signos en n dan la misma solución. Por tanto sobre la brana

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{\delta e^2}{2p^* \alpha} \frac{\Gamma[-(n+m)/2] \Gamma[(1+n-m)/2]}{\Gamma[(1-n-m)/2] \Gamma[(2+n-m)/2]}. \quad (3.56)$$

Para $p \ll \alpha/\delta$ se pueden tratar dos casos

- $p^2 \gg p^* \alpha/\delta$: En este límite, el electromagnetismo ordinario nunca se recobra, ya que

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{e^2}{p} \sqrt{\frac{\delta}{\alpha p^*}}. \quad (3.57)$$

- $p^2 \ll p^* \alpha/\delta$: En este caso se tiene¹

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{e^2}{p(p+p^*)} \left[1 + \frac{2p^2 \ln 2}{p^* \alpha} \delta + \mathcal{O}(p\delta/\alpha)^2 \right] \quad (3.58)$$

¹Donde se ha hecho uso de

$$\Gamma\left(-\frac{\epsilon}{2} + 1\right) = 1 + \frac{1}{2} \gamma \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \Gamma\left(\pm \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \left(1 \pm \frac{1}{2} \psi^{(0)}(1/2) \epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

y

$$\Gamma(\epsilon/2) = 2\epsilon^{-1} - \gamma + \frac{1}{24}(6\gamma^2 + \pi^2)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \psi^{(0)}(1/2) = -\gamma - 2 \ln(2).$$

para $\epsilon \ll 1$, siendo $\gamma = 0,5772$ la constante de Euler-Mascheroni y $\psi^{(m)}$ la función polygamma de orden m .

el cual se reduce a la ecuación (3.23), correspondiente al resultado DGS, en el límite de pared delgada, $\delta \rightarrow 0$.

Se sigue que en la región

$$p^* \ll p \ll \sqrt{p^* \alpha / \delta} \quad (3.59)$$

el tensor $G_{\mu\nu}$ se comporta como un propagador estandar cuatro-dimensional y por lo tanto electromagnetismo estandar se recobra en la región

$$\sqrt{r^* r_c} \ll r \ll r^* \quad (3.60)$$

donde $r_c = \delta/\alpha$ es el grosor de la pared y $r^* = p^{*-1}$.

La cota superior en (3.60) es el radio critico DGS [1] mientras que la inferior coincide con el resultado estimado en [52] e implica universalidad de la carga.

Análisis de Resultados

El mecanismo DGS [1] está condicionado a que la brana sea infinitamente delgada y que el espaciotiempo 5-dimensional sea plano. En esta tesis se relajaron estas condiciones y se investigaron sus efectos sobre las escalas críticas, a partir de las cuales se recupera el electromagnetismo 4-dimensional convencional sobre la brana, mediante la propuesta de que el comportamiento del campo de calibre viene descrito por una extensión del mecanismo DGS hacia paredes de dominio dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4Q^2}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{4e^2}k^2(y) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^c(x, y)A_c, \quad (3.61)$$

siendo $k(y)$ el perfil del fermión a lo largo de la dimensión adicional que acopla a A_c sobre la pared.

En una pared infinitamente delgada en un espaciotiempo *warped* [4] se estudiaron los efectos de la presencia de gravitación en el *bulk*. Para fermiones localizados sobre la brana vía un término tipo δ , tanto el límite ultravioleta como el infrarrojo del propagador del campo de calibre son afectados por la gravedad de la brana, ya que con gravitación se incluye una nueva escala de energía en el sistema: la constante cosmológica. El resultado DGS es recuperado para $r \ll \alpha^{-1}$, en el mismo rango en el que gravitación luce cinco-dimensional, por lo que es una región en franca contradicción con la fenomenología. Sin embargo, existe otra región donde el comportamiento del propagador del campo de calibre sobre la brana se asemeja al de uno cuatro-dimensional y donde la gravedad efectiva es cuatro-dimensional

$$\alpha^{-1} \ll r \ll \alpha^{-1}e^{\alpha/p^*}. \quad (3.62)$$

La cota superior de este intervalo, por encima de la cual los efectos de la dimensión adicional comienzan a ser importantes, resulta modificada respecto a su análogo DGS, $r \ll p^{*-1}$. Esta nueva escala depende exponencialmente de la constante cosmológica y de las constantes de calibre cuatro y cinco-dimensional. La distancia crítica RS, α^{-1} , por debajo de la cual se empiezan a manifestar los efectos de la quinta dimensión en el potencial gravitacional, aparece como la cota inferior de la región donde el propagador para el campo electromagnético sobre la brana mantiene un comportamiento semejante al cuatro-dimensional.

Ahora, dado que electromagnetismo ha sido verificado desde distancias del orden de 10^{-16} cm hasta distancias del orden del radio del sistema solar, 10^{15} cm, se sigue que las cotas inferior y superior de (3.62) deben coincidir con dichas escalas respectivamente

$$\alpha^{-1} \leq 10^{-16} \text{ cm} \quad \text{y} \quad \alpha^{-1}e^{\alpha/p^*} \geq 10^{15} \text{ cm}. \quad (3.63)$$

En consecuencia, se obtiene una jerarquía entre las constantes de acoplamiento de calibre 4 y 5-dimensional dada por

$$\frac{Q^2}{e^2} \geq 10^{-14} \text{ cm} \quad (3.64)$$

Por otro lado, en esta tesis los efectos del grosor de la pared fueron investigados al considerar una pared de dominio en un espaciotiempo plano generado por un campo escalar, con fermiones acoplados a la brana bajo interacción de Yukawa cuyo modo zero puede ser calculado de manera exacta. Adicionalmente, para un valor particular de la constante de acoplamiento en términos de la constante de auto-acoplamiento del campo escalar, $\lambda = \sqrt{\beta}$, fue encontrada una solución analítica

para el propagador. En este caso encontramos que el electromagnetismo cuatro-dimensional se realiza en la siguiente región

$$\sqrt{p^{*-1}\delta/\alpha} \ll r \ll p^{*-1} \quad (3.65)$$

cuyo límite superior coincide con el radio crítico DGS. En el otro extremo, el grosor de la pared juega un papel relevante en el límite ultravioleta y se recupera el resultado estimado en [52] donde el radio crítico viene dada por el radio DGS escalado por el grosor de la pared.

Haciendo compatible el modelo con la fenomenología, se obtiene para la cota inferior de (3.65) que $\sqrt{p^{*-1}\delta/\alpha} \leq 10^{-16}\text{cm}$ y para la escala DGS que $p^{*-1} \geq 10^{15}\text{cm}$. Lo que lleva a la siguiente restricción sobre el ancho de la pared

$$\frac{\delta}{\alpha} \leq 10^{-47}\text{cm} . \quad (3.66)$$

El acoplamiento Einstein-campo escalar es una teoría clásica y como tal es válida para escalas por encima de la longitud de Planck, 10^{-33}cm . Se sigue entonces, que el ancho de la pared estimado (3.66) esta fuera del rango de validez de la teoría lo cual invalida el resultado.

En el marco de paredes de dominio autogravitantes, es posible que la localización de campos de calibre sobre las mismas vía el mecanismo DGS ocurra en una región asociada a un ancho de brana por encima de la escala de Planck ya que la incorporación de gravedad sobre una pared con grosor modificará tanto el comportamiento ultravioleta como el infrarrojo del propagador cuatro-dimensional, como lo sugiere el resultado obtenido en la brana RS. Sin embargo, encontrar una solución exacta para el propagador del campo de calibre, correspondiente al caso general de una pared con grosor en un espaciotiempo *warped* y constantes de acoplamientos arbitrarias, es un problema altamente no-trivial incluso si el escenario considerado corresponde a la más simple de las paredes de dominio autogravitantes que se encuentra en la literatura.

Por último, comentaremos brevemente sobre dos estrategias que fueron consideradas con el fin de determinar la viabilidad el mecanismo DGS en la localización de campos de calibre en paredes gruesas autogravitantes. En la primera de ellas, optamos por encontrar el comportamiento del propagador del campo de calibre en un entorno de la brana gruesa, empleando el método desarrollado en [53] para obtener soluciones aproximadas a problemas de contorno con condiciones en dos puntos. Sin embargo, al contrastar los resultados exactos obtenidos por nosotros para el caso de una brana gruesa en espaciotiempo plano con los resultantes de la aplicación del método expuesto en [53] para el mismo caso, encontramos que dicho método no permite obtener el grado de certeza requerido. Para mas detalles sobre este punto en particular véase el apéndice G.1.

En una segunda estrategia, encontramos el propagador sobre una pared de dominio autogravitante a partir del propagador en una pared de dominio plana, usando el método presentado en [54] que permite generar una pared autogravitante a partir de la incorporación de vacíos AdS_5 al *bulk* de una pared de plana. Sin embargo, la pared obtenida por el método [54] presenta unos vacíos tan “débilmente” AdS_5 que el nuevo propagador no guarda información de la presencia de curvatura en el *bulk* y en consecuencia es indistinguible de su análogo en la pared plana. Por lo tanto, no es posible evaluar simultáneamente los efectos del grosor de la pared y la curvatura del espaciotiempo sobre la localización de los campos de calibre en dichas configuraciones. Los detalles se muestran en el apéndice G.2.

Conclusiones

Se generó una familia de branas con expansión de Sitter sin simetría Z_2 . En todos los escenarios, se encontró localizado sobre la brana al modo cero de las fluctuaciones gravitacionales debido a que la brecha de masa presente en el potencial V_{QM} es independiente de las constantes cosmológicas alrededor de la pared. En consecuencia el confinamiento del gravitón no es afectado por el aumento o disminución de la asimetría, ha diferencia de lo que sucede con el gravitón en las branas estáticas sin simetría de reflexión [7]. Aún más, con el incremento de la asimetría se halló un modo resonante dentro del conjunto de los estados excitados del gravitón que contribuye de forma efectiva a las correcciones del potencial, de tal manera que lleva a mundos-branas con un potencial gravitacional dominado más por las correcciones que por el potencial newtoniano.

Partiendo de dos mecanismos bien conocidos para localizar a un campo vectorial ya sea sobre la brana RS [32] o sobre una brana en un *bulk* minkowskiano [1], se logró generar dos teorías para describir el comportamiento del campo de calibre que media la interacción electrostática entre dos partículas cargadas sobre una pared de dominio. La primera de ellas viene descrita por

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{GN} + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' A^z \partial^c A_c + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) (a'' + a'^2) - \frac{2}{3} V(\kappa, z)\right] (A^z)^2, \quad (3.67)$$

donde

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{2}{3} V(\kappa, z) A_a A^a, \quad (3.68)$$

con

$$V(\kappa, z) = -\frac{3}{4} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \left[\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) a'^2 + a''\right] e^{-2a}, \quad (3.69)$$

siendo κ el parámetro de acoplamiento. Esta teoría es invariante bajo la transformación de calibre

$$\delta A_b = \partial_b \chi - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' \chi \delta_b^z \quad (3.70)$$

y en el límite de pared delgada, bajo el calibre axial $A_z = 0$, la teoría \mathcal{L}_c se reduce al mecanismo de Ghoroku-Nakamura [32] por lo que \mathcal{L}_c también genera los mismos efectos físicos que dicho mecanismo: en particular la localización del fotón sobre la pared.

Finalmente, en cuanto al segundo mecanismo, y en analogía con [1], se propuso una teoría de calibre corregida por un término cinético adicional para paredes de dominio

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4Q^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} k^2(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.71)$$

siendo $k(y)$ el perfil del fermión a lo largo de la dimensión adicional. Vía (3.71) sobre la brana RS se encontró que los límites ultravioleta e infrarrojos del propagador del campo de calibre son afectados por la constante cosmológica del *bulk*, permitiendo la coexistencia de la gravitación y el electromagnetismo estándar en una región semejante a la dada por las observaciones. Asimismo, para una pared de dominio plana en un espaciotiempo cinco-dimensional plano se pudo obtener electromagnetismo cuatro-dimensional en una región en la que el ancho de la pared dio origen a un límite ultravioleta que desaparece en el límite de pared delgada, en consistencia con lo reportado en [1].

Por último, en base a lo anteriormente expuesto, para una pared de ancho definido y embebida en un espaciotiempo AdS_5 se debe esperar que el límite ultravioleta este dominado tanto por la constante cosmológica como por el grosor de la pared, mientras que para el límite infrarrojo solo se encuentre definido por la constante cosmológica.

Apéndice

Apéndice A

Una pared delgada a partir de una pared de dominio dS sin simetría Z_2

En el capítulo 1 se introduce el tema de las branas dS sin simetría Z_2 , generando una de estas a partir del límite de pared delgada de una pared de dominio dS reportada en [35]. En lo que sigue se muestran los detalles de dicho cálculo.

Sea un espaciotiempo 5-dimensional con expansión dS₄, donde el tensor métrico

$$g_{mn} = f^2(z) [-dt_m dt_n + dz_m dz_n + e^{2\beta t} \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j] , \quad (\text{A.1})$$

con

$$f(z)^{-1} = \cosh^\delta(\beta z/\delta) + \text{sgn}(z) \frac{\alpha \delta}{\beta(1-2\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta z/\delta) \text{Re} \left[i {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \cosh^2 \beta z/\delta \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Esta geometría es generada por una pared de dominio gruesa de espesor δ , sin simetría de reflexión Z_2 en torno de la pared, siendo α el parámetro de asimetría [35] y

$${}_2F_1(a, b; c; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\xi^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c} \xi + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \xi^2 + \dots \quad (\text{A.3})$$

la conocida función hipergeométrica, con

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+n-1) \quad (\text{A.4})$$

los símbolos de Pochhammer y la función gamma

$$\frac{1}{\Gamma(\xi)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k \quad / \quad \frac{1}{\Gamma(\xi)} < \infty : \forall |\xi| < 1 , \quad (\text{A.5})$$

donde c_k son los coeficientes de la expansión, siendo $c_1 = 1$ [39].

La serie (A.3) tiene convergencia absoluta si $c \notin \mathbb{Z}_-$ (1) para todo $|\xi| < 1$ y (2) sobre el círculo unitario $|\xi| = 1$ si $\Re(c - a - b) > 0$. Fuera del círculo unitario la función hipergeométrica se define

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; \xi) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-\xi)^{-a} {}_2F_1\left[a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{\xi}\right] \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-\xi)^{-b} {}_2F_1\left[b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{\xi}\right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

para $|\xi| > 1$ y $a - b \notin \mathbb{Z}$.

Ahora bien, como una función por partes la ec. (A.2) luce como

$$f_+^{-1} = \cosh^\delta(\beta z/\delta) + \frac{\alpha \delta}{\beta(1-2\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta z/\delta) \operatorname{Re} \left[i {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \cosh^2 \beta z/\delta\right) \right], \quad (\text{A.7})$$

$$f_-^{-1} = \cosh^\delta(\beta z/\delta) - \frac{\alpha \delta}{\beta(1-2\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta z/\delta) \operatorname{Re} \left[i {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \cosh^2 \beta z/\delta\right) \right] \quad (\text{A.8})$$

y haciendo uso de la siguiente identidad [39]

$${}_2F_1(a, b, c; \xi) = (1-\xi)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{\xi}{\xi-1}\right) \quad (\text{A.9})$$

la hipergeométrica se reescribe como

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \cosh^2 \beta z/\delta\right) &= i(-1)^{1+\delta} (\sinh^2 \beta z/\delta)^{-(\frac{1}{2}-\delta)} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \delta, 1 - \delta, \frac{3}{2} - \delta, \coth^2 \beta z/\delta\right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, dado que $\delta \rightarrow 0$ implica $\coth^2 \beta z/\delta \rightarrow 1$ entonces se tiene que para la hipergeométrica (A.10) un desarrollo en serie en un entorno de $\delta \sim 0$ ó de $(1 - \coth^2 \beta z/\delta) \sim 0$ es equivalente. Por tanto, con el fin de hacer uso de esta equivalencia, se considera el siguiente cambio [39]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; \xi) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c; 1-\xi) \\ &\quad + (1-\xi)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-\xi). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \delta, 1 - \delta; \frac{3}{2} - \delta; \coth^2 \beta z/\delta\right) \simeq \\ &\simeq \Gamma(3/2 - \delta) \left[(-1)^\delta \sinh^{-2\delta} \beta z/\delta \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(1/2 - \delta)\Gamma(1 - \delta)} + \frac{\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}} \right] + \mathcal{O}(1 - \coth^2 \beta z/\delta), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde se ha hecho uso de ${}_2F_1[a, b; c; 0] = 1$.

Nótese que esta expresión es real. Por tanto, sustituyendo en (A.10) se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[i {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \cosh^2 \beta z / \delta \right) \right] &= (-1)^\delta |\sinh \beta z / \delta|^{-(1-\delta)} \Gamma(3/2 - \delta) \left[\frac{\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}} \sinh^\delta \beta z / \delta \right. \\ &\quad \left. + (-1)^\delta \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(1/2 - \delta)\Gamma(1 - \delta)} \sinh^{-\delta} \beta z / \delta \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e identificando en (A.7) y (A.8)

$$\begin{aligned} f_+^{-1} \simeq \cosh^\delta(\beta z / \delta) &+ \frac{\alpha \delta}{\beta(1 - 2\delta)} (-1)^\delta \Gamma(3/2 - \delta) (+1)^{-(1-\delta)} (\coth \beta z / \delta)^{(1-\delta)} \\ &\times \left[(-1)^\delta \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(1/2 - \delta)\Gamma(1 - \delta)} \sinh^{-\delta} \beta z / \delta + \frac{\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}} \sinh^\delta \beta z / \delta \right], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} f_-^{-1} \simeq \cosh^\delta(\beta z / \delta) &- \frac{\alpha \delta}{\beta(1 - 2\delta)} \Gamma(3/2 - \delta) (-1)^{-(1-2\delta)} (\coth \beta z / \delta)^{(1-\delta)} \\ &\times \left[(-1)^\delta \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(1/2 - \delta)\Gamma(1 - \delta)} \sinh^{-\delta} \beta z / \delta + \frac{\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}} \sinh^\delta \beta z / \delta \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Aún más, haciendo uso de la expansión en serie (A.5)

$$\Gamma(-\delta) \simeq -\frac{1}{\delta}, \quad \Gamma(\delta) \simeq \frac{1}{\delta}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2} - \delta\right) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - \delta\right) \Gamma(1 - \delta) \simeq \sqrt{\pi} \quad (\text{A.16})$$

y del desarrollo en potencias de las funciones hiperbólicas tanto para $z > 0$

$$\cosh^\delta \beta z / \delta = \sinh^\delta \beta z / \delta \simeq 2^{-\delta} e^{\beta z}, \quad \coth \beta z / \delta \simeq 1, \quad (\text{A.17})$$

como para $z < 0$

$$\cosh^\delta \beta z / \delta \simeq 2^{-\delta} e^{-\beta z}, \quad \sinh^\delta \beta z / \delta \simeq (-2)^{-\delta} e^{-\beta z}, \quad \coth \beta z / \delta \simeq 1, \quad (\text{A.18})$$

se tiene

$$f_+^{-1} \simeq 2^{-\delta} e^{\beta z} + \frac{\alpha}{\beta} \left[2^{-\delta} \frac{e^{\beta z}}{2} - (-2)^\delta \frac{e^{-\beta z}}{2} \right], \quad (\text{A.19})$$

$$f_-^{-1} \simeq 2^{-\delta} e^{-\beta z} + \frac{\alpha}{\beta} \left[2^\delta \frac{e^{\beta z}}{2} + (-2)^{-\delta} \frac{e^{-\beta z}}{2} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, en el límite de pared delgada, $\delta \rightarrow 0$, resulta

$$f^{-1} = e^{\beta|z|} + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta z. \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Simplificaciones sobre las fluctuaciones gravitacionales en branas dS

El espaciotiempo

$$g_{mn} = f^2(z) [-dt_m dt_n + dz_m dz_n + e^{2\beta t} \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j] , \quad (\text{B.1})$$

con

$$f_{\pm}^{-1}(z) = e^{\pm\beta z} \mp \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda_{\pm}}{6\beta^2}} \right) \sinh \beta z , \quad \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2 , \quad (\text{B.2})$$

representa un espaciotiempo cinco-dimensional con constantes cosmológicas arbitrarias, Λ_{\pm} , asociadas a la misma curvatura cuatro-dimensional positiva dispuesta sobre la brana con soporte sobre una hipersuperficie transversa a la dimensión adicional.

El continuo de modos masivos del gravitón sobre este escenario viene dado por

$$\psi_{m^+}(z) = N_m \left[\frac{A_+}{2} (e^{i\mu z} F_+ + e^{-i\mu z} F_+^*) - \frac{i}{2} (e^{i\mu z} F_+ - e^{-i\mu z} F_+^*) \right] , \quad (\text{B.3})$$

$$\psi_{m^-}(z) = N_m \left[\frac{A_-}{2} (e^{-i\mu z} F_- + e^{i\mu z} F_-^*) - i \frac{B_-}{2} (e^{-i\mu z} F_- - e^{i\mu z} F_-^*) \right] , \quad (\text{B.4})$$

con $\mu^2 = m^2 - m_0^2$ y

$$F_{\pm} \equiv {}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; 1 - i\frac{\mu}{\beta}; \left(1 + \frac{1}{C_{\pm}^2} e^{\pm 2\beta z} \right)^{-1} \right] , \quad C_{\pm} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_{\pm}/6}} - \sqrt{\frac{\beta^2}{\Lambda_{\pm}/6} - 1} . \quad (\text{B.5})$$

Nótese que las fluctuaciones gravitacionales sobre la brana, $z = 0$, vienen dadas en términos de

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; 1 - i\frac{m}{\beta}; \frac{C^2}{1 + C^2} \right] , \quad (\text{B.6})$$

donde se ha considerado $m \gg m_0$, ya que en este intervalo los modos masivos contribuyen significativamente con las correcciones al potencial. Adicionalmente, si se considera el tipo de espaciotiempo alrededor de la brana es posible simplificar aún más la expresión (B.6), tal y como se muestra a continuación.

- Si el espaciotiempo es dS_5 se tiene que $6\beta^2 > \Lambda > 0$. En consecuencia, $C \in (0, 1)$ y

$$\frac{1}{2} > \frac{C^2}{1+C^2} > 0. \quad (\text{B.7})$$

Es decir, el argumento de la función hipergeométrica esta acotado y por tanto, para $m/\beta \gg 1$ se puede aproximar de la siguiente manera

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; 1 - i\frac{m}{\beta}; \frac{C^2}{1+C^2} \right] \sim 1, \quad (\text{B.8})$$

donde se ha hecho uso del desarrollo en serie (A.3) para $c \sim -im/\beta$ y $\xi < 1$.

- Si el espaciotiempo es AdS_5 , la constante $\Lambda < 0$ y el argumento de (B.6) diverge para $k \gg \beta$. Esto es

$$\frac{C^2}{1+C^2} \simeq -\frac{1}{2} \frac{k}{\beta} \quad (\text{B.9})$$

donde se ha considerado la redefinición $\Lambda = -|\Lambda|$ y la escala de energía $k \equiv \sqrt{|\Lambda|/6}$.

Por tanto, no es posible hacer uso de (A.3) para aproximar (B.6) ya que no se cumple $\xi < 1$. En este sentido, el comportamiento de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ para grandes $|\xi|$ se sigue de la formula de transformación [39]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; \xi) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-\xi)^{-a} {}_2F_1 \left[a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{\xi} \right] \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-\xi)^{-b} {}_2F_1 \left[b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{\xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde $|\text{ph}(-\xi)| < \pi$.

Para (B.6) bajo el cambio (B.10), el par de hipergeométricas del lado derecho de la expresión anterior se cumple $\mathcal{R}(c' - a' - b') = 0$, donde $a' = 5/2$, $b' = 7/2 - c$, $c' = 5$ corresponden a la primera hipergeométrica y $a' = -3/2$, $b' = -(c + 1/2)$, $c' = -3$ corresponden a la segunda, donde $c = 1 - im/\beta$. Por tanto, acorde a [39], tienen una convergencia condicionada y en consecuencia es conveniente regularizar con un parametro $1 \gg \epsilon > 0$ para asegurar la convergencia de las hipergeométricas para $1/\xi < 1$ y el buen comportamiento de las mismas.

Para ello nótese que $\Gamma(b-a) = \Gamma(-4)$, la cual diverge hacia $+\infty$ por definición de la función Gamma. Sin embargo, bajo la siguiente regularización $a \rightarrow a - \epsilon$ se tiene que $\Gamma(b-a+\epsilon) = \Gamma(-4+\epsilon)$ es finito. Por tanto, asumiendo la anterior regularización y considerando que en el límite cuando ϵ se anula se recupera el sistema original

$${}_2F_1(a, b; c; \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}_2F_1(a, b - \epsilon; c; \xi) \quad (\text{B.11})$$

se tiene $\mathcal{R}(c' - a' - b') = \epsilon > 0$.

En consecuencia, (B.6) regularizada converge para $\beta/k \ll 1$. Además, aquel término con potencia $(k/2\beta)^{-5/2}$ es despreciable en comparación con el término contiguo de grado $+3/2$. Por lo tanto, (B.6) se reduce a

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{2} - \epsilon, -\frac{3}{2}; c; -\frac{1}{2} \frac{k}{\beta} \right] \simeq \frac{\Gamma(4 - \epsilon)}{\Gamma(5/2 - \epsilon)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c + 3/2)} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{3/2} {}_2F_1 \left[-\frac{3}{2}, -c - \frac{1}{2}; -3 + \epsilon; -\frac{2\beta}{k} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Haciendo uso del desarrollo en serie (A.3) y del límite $\epsilon \rightarrow 0$, resulta

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; c; -\frac{1}{2} \frac{k}{\beta} \right] \sim \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c + 3/2)} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{1}{4}(1 + 2c) \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{-1} + \mathcal{O} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{-2} \right] \quad (\text{B.13})$$

y así

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; c; -\frac{1}{2} \frac{k}{\beta} \right] \sim \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c + 3/2)} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{3/2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c + 1/2)} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{1/2} + \mathcal{O} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad (\text{B.14})$$

Para evaluar las condiciones de borde se necesita hacer uso de la derivada de una hipergeométrica

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; \xi) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a + 1, b + 1; c + 1; \xi). \quad (\text{B.15})$$

La cuál provee una nueva función que amerita ser aproximada. Así, de la derivada de (B.6) se tiene la hipergeométrica ${}_2F_1(7/2, -1/2; c; -k/2\beta)$ y procediendo de igual manera que en el caso anterior

$${}_2F_1 \left[\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}; c; -\frac{1}{2} \frac{k}{\beta} \right] \sim -\frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c + 1/2)} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{1/2} + \mathcal{O} \left(\frac{k}{2\beta} \right)^{-\frac{2n+1}{2}}. \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

Modos Resonantes

Considérese una 3-brana con expansión dS_4 que separa dos espaciotiempos AdS_5 con escalas de energía $k_{\pm} = \sqrt{\Lambda_{\pm}/6}$; y supongase que los estados masivos que contribuyen de forma efectiva con la integral que define las correcciones al potencial

$$\int_{m_0}^{\infty} dm e^{-rm} |\psi_m(0)|^2 \quad (\text{C.1})$$

son aquellos modos cuyas masas pertenecen al siguiente intervalo de masas ligeras

A) $m_0 \ll m \ll \min\{k_+, k_-\}$ ó

B) $\max\{k_+, m_0\} \ll m \ll k_-$.

Entonces, el modo resonante

$$m_{res} \sim [(k_+^2 + m_0^2)(k_-^2 + m_0^2)]^{1/4}, \quad (\text{C.2})$$

solo contribuye a la saturación de (C.1) para escenarios tipo B.

Demostración.

- Supóngase que m_{res} satisface la desigualdad del caso A. En particular, considérese la desigualdad asociada con la cota superior. Entonces, $m_{res} \ll \min\{k_+, k_-\}$ puede ser reescrita como

$$\sqrt{m_0 k_-} \sqrt{\left[\left(\frac{k_-}{m_0}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \left[\left(\frac{k_+}{k_-}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{k_-}\right)^2\right]^{1/2}} \ll k_+, \quad (\text{C.3})$$

donde se ha sustituido $\min\{k_+, k_-\} = k_+$ debido a que $k_+/k_- \ll 1$.

Esta inecuación tiene como solución $k_+/k_- \gg 1$, donde se ha hecho uso de $k_{\pm} \gg m_0$. Esto implica, que m_{res} no satisface la desigualdad ya que el resultado entra en conflicto con la premisa $k_+/k_- \ll 1$.

- Ahora, supongase que m_{res} satisface la desigualdad del caso B.

i) Sea la desigualdad asociada con la cota superior $m_{res} \ll k_-$, entonces

$$\sqrt{m_0 k_-} \sqrt{\left[\left(\frac{k_-}{m_0} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{k_+}{k_-} \right)^2 + \left(\frac{m_0}{k_-} \right)^2 \right]^{1/2}} \ll k_- . \quad (\text{C.4})$$

Esta expresión se reduce

$$\left(\frac{k_+}{k_-} \right)^2 + \left(\frac{m_0}{k_-} \right)^2 \ll 1 . \quad (\text{C.5})$$

La cual se cumple bajo las hipótesis considerada.

ii) Sea la desigualdad asociada con la cota inferior $m_{res} \gg \max\{k_+, m_0\}$, entonces se tienen dos casos

a) Para $\max\{k_+, m_0\} = m_0$, resulta

$$\sqrt{m_0 k_-} \sqrt{\left[\left(\frac{k_-}{m_0} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{k_+}{k_-} \right)^2 + \left(\frac{m_0}{k_-} \right)^2 \right]^{1/2}} \gg m_0 . \quad (\text{C.6})$$

Haciendo uso de $k_-/m_0 \gg 1$ y notando que en este caso k_+/m_0 es una cantidad finita y menor que la unidad

$$\frac{k_-}{m_0} \left[\left(\frac{k_+}{m_0} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \gg 1 . \quad (\text{C.7})$$

Esta expresión se satisface para $k_- \gg m_0$ y $m_0 > k_+$, lo cual es compatible con las premisas y consistente con Fig.1.2.

Por tanto, para $k_+ < m_0$ se tienen contribuciones de los modos resonantes al potencial gravitacional. Aún más, como una consecuencia de la brecha de masa presente en el potencial (1.30), es decir $V_{QM}(\pm\infty) = m_0^2$, en los escenarios donde $k_+ < m_0$ el incremento de la asimetría no descarta la localización del modo cero y, en consecuencia, también se espera la presencia de un término Newtoniano en (1.95) incluso cuando $k_+ \rightarrow 0$.

b) Para $\max\{k_+, m_0\} = k_+$, resulta

$$\sqrt{m_0 k_-} \sqrt{\left[\left(\frac{k_-}{m_0} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{k_+}{k_-} \right)^2 + \left(\frac{m_0}{k_-} \right)^2 \right]^{1/2}} \gg k_+ . \quad (\text{C.8})$$

Haciendo uso de las relaciones $k_+/k_- \ll 1$ y notando que en este caso $k_+/m_0 > 1$

$$\frac{k_-}{k_+} \left[\left(\frac{m_0}{k_+} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \gg 1 , \quad (\text{C.9})$$

la cual se satisface a consecuencia de las premisas. ■

Apéndice D

Potenciales de Interacción

D.1. Potencial electrostático

Considérese el operador hamiltoniano, independiente del tiempo, de una partícula

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}^2 + \mathbf{U}_J(\mathbf{X}) , \quad (\text{D.1})$$

donde \mathbf{X} y \mathbf{P} son los operadores de posición y momentum respectivamente y $\mathbf{U}_J(\mathbf{X})$ es el operador potencial que obra sobre la misma y creado por la fuente J . Entonces, para una partícula estática, $\mathbf{H} = \mathbf{U}_J(\mathbf{X})$, la amplitud de probabilidad de persistencia en el vacío en presencia de una fuente externa J , o funcional generatriz, viene dada en el formalismo canónico por [55]

$$Z[J] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0 | \exp(-i \mathbf{H} T) | 0 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \exp(-i \mathcal{U}_J(r) T) , \quad (\text{D.2})$$

donde r es la distancia entre la partícula y la fuente del potencial y T el intervalo temporal.

Equivalentemente (y acorde al formalismo de las integrales de camino) el funcional generatriz puede ser referido en términos del propagador del campo generado por la fuente [56]. En particular, para un campo vectorial extendido en un espaciotiempo cinco-dimensional se tiene

$$Z[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x dz \sqrt{-g(z)} \int d^4 x' dz' \sqrt{-g(z')} J_1^a(x, z) G_{ab}(x - x', z, z') J_2^b(x', z') \right] , \quad (\text{D.3})$$

donde G_{ab} es el propagador de la interacción entre las densidades de corrientes (fuentes) ubicadas en (x, z) y (x', z') con z la coordenada asociada a la dimensión adicional y g el tensor métrico de la variedad.

Ahora, con la intención de hacer compatible (D.2) y (D.3) considérese el caso en el cual las densidades de corriente son independientes del tiempo. Así para $J^a(x, z) = J^a(\vec{x}, z)$ resulta

$$Z[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} (2\pi)^{3/2} \left(\int dt \right) \int d^3 p \int dz \sqrt{-g(z)} \int dz' \sqrt{-g(z')} \tilde{J}_1^a(\vec{p}, z) \tilde{G}_{ab}(\vec{p}, z, z') \tilde{J}_2^b(-\vec{p}, z') \right] . \quad (\text{D.4})$$

En consecuencia, se obtiene el potencial

$$\mathcal{U}_J = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2} \int d^3 p \int dz \sqrt{-g(z)} \int dz' \sqrt{-g(z')} \tilde{J}_1^a(\vec{p}, z) \tilde{G}_{ab}(\vec{p}, z, z') \tilde{J}_2^b(-\vec{p}, z') , \quad (\text{D.5})$$

donde se ha hecho uso de la identidad $\int dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T$.

Aún más, si las fuentes corresponden a corrientes delta-localizadas sobre el cuadri-espacio, $\tilde{J}^a(\vec{p}, z) = \delta_\mu^a \tilde{j}^\mu(\vec{p}) \delta(z)$, el potencial se reduce

$$\mathcal{U}_J = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2} \int d^3p \tilde{j}_1^\mu(\vec{p}) \tilde{G}_{\mu\nu}(\vec{p}, 0, 0) \tilde{j}_2^\nu(-\vec{p}) . \quad (\text{D.6})$$

Asumiendo que la solución para la componente cuatro-dimensional del propagador cinco-dimensional viene dada por

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p, z, z') = \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) G_1(p, z, z') + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} G_2(p, z, z') , \quad (\text{D.7})$$

se tiene

$$\mathcal{U}_J = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2} \int d^3p \tilde{j}_1^\mu(\vec{p}) \tilde{j}_2^\nu(-\vec{p}) \eta_{\mu\nu} G_1(\vec{p}, 0, 0) , \quad (\text{D.8})$$

donde se a hecho uso de la condición de transversalidad $\tilde{j}^\nu p_\nu = 0$, por lo que G_2 no contribuye y en consecuencia corresponde a un grado de libertad espurio.

Adicionalmente, si la cuadri-corriente corresponde a una partícula puntual en reposo en \vec{x}_i , es decir $j_i^\mu(\vec{x}) = q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \delta_0^\mu$, finalmente se obtiene

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{q_1 q_2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} G_1(\vec{p}, 0, 0) \quad (\text{D.9})$$

donde $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ es la distancia que separa a las partículas. Integrando en coordenadas esfericas

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{q_1 q_2}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d|\vec{p}| |\vec{p}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{i|\vec{p}|r \cos \theta} G_1(\vec{p}, 0, 0) \quad (\text{D.10})$$

se tiene

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty d|\vec{p}| \sin(|\vec{p}|r) |\vec{p}| G_1(\vec{p}, 0, 0) \right] . \quad (\text{D.11})$$

Por tanto, dada la teoría que rige la dinámica del bosón vectorial es posible determinar el propagador asociado y así establecer el potencial de interacción compatible con la teoría via la transformada inversa del seno de Fourier de $|\vec{p}| G_1(\vec{p}, 0, 0)$ definida por (D.11).

D.2. El Potencial gravitacional estático

Considérese un espacio cinco-dimensional conforme a Minkowski, y sean j_1 y j_2 dos fuentes estáticas sobre la hipersuperficie $z = 0$. Entonces, procediendo de forma semejante al caso previo, la interacción gravitacional viene dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{j}_1^{\mu\nu}(\vec{p}) \tilde{G}_{\mu\nu\alpha\beta}(\vec{p}, 0, 0) \tilde{j}_2^{\alpha\beta}(-\vec{p}) . \quad (\text{D.12})$$

donde

$$\tilde{G}_{\mu\nu\alpha\beta} = \tilde{G}^{(0)}(p, z, z')P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{m>0} \tilde{G}^{(m)}(p, z, z')P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m)}, \quad (\text{D.13})$$

son los grados de libertad cuatro-dimensionales del propagador correspondiente a un gravitón dispuesto sobre un espaciotiempo plano cinco-dimensional y

$$P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.14})$$

$$P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(p). \quad (\text{D.15})$$

son los tensores de polarización [5, 56]. Nótese que (D.12) es el análogo gravitacional de (D.6)

Ahora, si la fuente considerada corresponde a una partícula puntual en reposo en \vec{x}_i , es decir $j_i^{\mu\nu}(\vec{x}) = m_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)\delta_0^\mu\delta_0^\nu$, se obtiene

$$\mathcal{U}(r) = \frac{m_1 m_2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \left[\frac{1}{2}\tilde{G}^{(0)}(\vec{p}, 0, 0) + \frac{2}{3} \sum_{m>0} \tilde{G}^{(m)}(\vec{p}, 0, 0) \right] \quad (\text{D.16})$$

donde $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ es la distancia que separa a las partículas masivas.

Para hallar la representación explícita del potencial en el espacio coordenado es necesario mostrar una realización analítica de los coeficientes $\tilde{G}^{(0)}(p, 0, 0)$ y $\tilde{G}^{(m)}(p, 0, 0)$. Para ello considérese las pequeñas fluctuaciones de un espaciotiempo cinco-dimensional generadas por una perturbación, h_{ab} , sobre el tensor métrico

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \lambda \ll 1. \quad (\text{D.17})$$

En consecuencia, las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica perturbadas

$$\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R} + \Lambda\tilde{g}_{ab} = \tilde{T}_{ab} + \lambda J_{ab}, \quad (\text{D.18})$$

donde

$$J_{ab} \equiv J_{\mu\nu}\delta_a^\mu\delta_b^\nu\delta(z) \quad (\text{D.19})$$

corresponde a la fuente asociada a la perturbación gravitacional.

Ahora bien, la ecuación de Einstein en la forma del Ricci se reescribe como

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ab} - \left(\tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T} + \frac{2}{3}\Lambda\tilde{g}_{ab} \right) &= \lambda \left(J_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}J_{cd} \right) \\ &= \lambda \left[J_{ab} - \frac{1}{3}(g_{ab} + \lambda h^{ab})(g^{cd} - \lambda h^{cd}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Así, se obtiene que la ecuación de campo (D.18), a primer orden en λ se reduce a

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{R}_{ab} - \left(\tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T} + \frac{2}{3}\Lambda\tilde{g}_{ab} \right) \right]_{\lambda=0} = \left(J_{\mu\nu}\delta_a^\mu\delta_b^\nu - \frac{1}{3}g_{ab}J \right) \delta(z). \quad (\text{D.21})$$

En el sector transverso y sin traza, $\nabla^a h_{ac} = 0$, $g^{ac} h_{ac} = 0$, y en el calibre axial, $h_{ay} = 0$, las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones h_{ab} vienen dadas por

$$-\frac{1}{2}\square^{(5)}h_{ac} + R_{(ac)}^{bd}h_{bd} + R_{(a|d|}^{bd}h_{c)b} - \left[\frac{1}{3}\tau\delta(z) + \frac{2}{3}\Lambda\right] = \left(J_{\mu\nu}\delta_a^\mu\delta_c^\nu - \frac{1}{3}g_{ac}J\right)\delta(z), \quad (\text{D.22})$$

donde adicionalmente se ha considerado

$$T_{ab} = -\tau\delta_a^\alpha\delta_b^\beta g_{\alpha\beta}\delta(z). \quad (\text{D.23})$$

Específicamente, para las coordenadas donde la métrica toma la forma

$$ds^2 = f^2(z)(-dt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) + f^2(z)dz^2 \quad (\text{D.24})$$

se tiene

$$-\frac{1}{2f^2}\left[\square^{(4)} + \partial_z^2 - \frac{f'}{f}\partial_z + 4\frac{f'^2}{f^2} + \frac{2}{3}\tau\delta(z) + \frac{4}{3}\Lambda f^2\right]h_{ac} = \left(J_{\mu\nu}\delta_a^\mu\delta_c^\nu - \frac{1}{3}g_{ac}J\right)\delta(z), \quad (\text{D.25})$$

donde

$$\square^{(4)} = -\partial_t^2 + \partial_i^2 \quad (\text{D.26})$$

De acuerdo con el calibre axial se tiene $h_{zz} = 0$. En consecuencia, es necesario exigir $J = 0$ para evitar inconsistencias en la ecuación de movimiento. Por tanto,

$$\left[\square^{(4)} + \partial_z^2 - \frac{f'}{f}\partial_z + 4\frac{f'^2}{f^2} + \frac{2}{3}\tau\delta(z) + \frac{4}{3}\Lambda f^2\right]h_{\mu\nu} = -2J_{\mu\nu}\delta(z). \quad (\text{D.27})$$

Tomando la transformada de Fourier, asociada al cuatro-espacio, para pasar al espacio de momentum¹

$$\left[-p^2 + \partial_z^2 - \frac{f'}{f}\partial_z + 4\frac{f'^2}{f^2} + \frac{2}{3}\tau\delta(z) + \frac{4}{3}\Lambda f^2\right]\tilde{h}_{\mu\nu}(p, z) = -2\tilde{J}_{\mu\nu}(p)\delta(z). \quad (\text{D.28})$$

donde $p^2 = \eta_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta$.

La solución al problema (D.28) viene dada por

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = -2\int dz'\tilde{G}_{\mu\nu\alpha\beta}(p, z, z')\tilde{J}^{\alpha\beta}(p)\delta(z') \quad (\text{D.29})$$

¹ Sea la transformada de Fourier de una función $G(x, z)$ de rápido decaimiento en x

$$\tilde{G}(p, z) = \int dx^4 G(x, z)e^{in_{\alpha\beta}p^\alpha x^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 3.$$

Entonces

$$\widetilde{\square_4 G} = -\int e^{ipx}\left[\int \partial_t^2 G e^{-ip_0 t} dt\right]d^3x + \int e^{-ip_0 t}\left[\int \Delta G e^{ip^i x^i} d^3x\right]dt.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\square_4 G} = -p^2\tilde{G}(p, z).$$

donde $\tilde{G}_{\mu\nu\alpha\beta}$ es la función de Green de cuarto orden ó 5-propagador dado por (D.13), (D.14) y (D.15) y los coeficientes $\tilde{G}^{(0)}$ y $\tilde{G}^{(m)}$, en este caso, son tales que

$$\left[-p^2 + \partial_z^2 - \frac{f'}{f} \partial_z + 4 \frac{f'^2}{f^2} + \frac{2}{3} \tau \delta(z) + \frac{4}{3} \Lambda f^2 \right] \sum_{m=0} \tilde{G}^{(m)}(p, z, z') = \delta(z - z') . \quad (\text{D.30})$$

donde se ha hecho uso de $\eta_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} = 0$ y $p_\alpha J^{\alpha\beta} = 0$.

La solución a la ecuación (D.30) viene dada por

$$\tilde{G}^{(m)}(p, z, z') = - \frac{\phi_m(z) \phi_m^*(z')}{p^2 + m^2}, \quad (\text{D.31})$$

tal que las ϕ_m son las autofunciones de la ecuación de autovalores

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{f'}{f} \partial_z - 4 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{2}{3} \tau \delta(z) - \frac{4}{3} \Lambda f^2 \right] \phi_m(z) = m^2 \phi_m(z) \quad (\text{D.32})$$

y satisfacen la siguiente relación de clausura

$$\phi_0(z) \phi_0^*(z') + \sum_{m>0} \phi_m(z) \phi_m^*(z') = \frac{\delta(z - z')}{\sqrt{g}} . \quad (\text{D.33})$$

Por otro lado, si se considera el cambio

$$\phi_m = f^{1/2} \psi_m , \quad (\text{D.34})$$

la anterior expresión puede ser llevada a una ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{QM}) \psi_m = m^2 \psi_m, \quad V_{QM} = -\frac{13}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{2} \frac{f''}{f} - \frac{2}{3} \tau \delta(z) - \frac{4}{3} \Lambda f^2 \quad (\text{D.35})$$

cuyo tratamiento e interpretación física son bien conocidos en la literatura.

Finalmente, ya se está en condiciones de desarrollar la representación en el espacio de coordenadas del potencial gravitacional (D.16). Es decir, considerando la transformada inversa resulta

$$\mathcal{U}(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \frac{4}{3} \sum_{m>0} |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \right] \quad (\text{D.36})$$

Así, la anterior expresión provee una medida de la interacción gravitacional entre dos partículas masivas, situadas sobre la brana y separadas por una distancia r . Nótese que la contribución al potencial del modo cero ψ_0 corresponde al potencial newtoniano mientras que los modos masivos ψ_m definen la desviación al mismo, asociada a la presencia de la dimensión adicional.

Apéndice E

El propagador vectorial en diferentes mecanismos de localización

E.1. Propagador en el mecanismo de Ghoroku-Nakamura

Cónderese el escenario RS con tensor métrico en coordenadas conformes a Minkowski

$$g_{ab} = e^{2a(z)} (-dt_a dt_b + dx_a^i dx_b^i + dz_a dz_b) , \quad e^{a(z)} = (1 + \alpha|z|)^{-1} . \quad (\text{E.1})$$

Ahora, siguiendo a [32], sobre este *background* se propone

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} (m_5^2 - \eta \delta(z)) A_a A^a - \mathcal{Q}^2 A_a J^a , \quad (\text{E.2})$$

donde se asume que el bosón vectorial tiene masa m_5 y que el mismo esta acoplado a la brana, $z = 0$, via el parametro de acoplamiento η . Dado que A_b es un campo vectorial masivo la teoría carece de simetría de calibre.

De (E.2) se obtienen las ecuaciones de campo

$$\partial_b (\sqrt{g} F^{ba}) - \sqrt{g} (m_5^2 - \eta \delta(z)) A^a = \mathcal{Q}^2 \sqrt{g} J^a , \quad (\text{E.3})$$

donde se asume que a lo largo de la dimensión

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} A_a(x, z) = 0 . \quad (\text{E.4})$$

Proponiendo la solución en términos del propagador

$$A_a(x, z) = \int d^4 x' dz' \sqrt{g'} G_{ab}(x - x'; z, z') J^b(x', z') , \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} G_{ab}(x - x'; z, z') = 0 . \quad (\text{E.5})$$

en las coordenadas en las cuales el tensor métrico es de la forma (E.1), se obtiene

$$\begin{aligned} & \eta^{\delta\alpha} [e^{-a} \partial_z (e^a \partial_z) - \bar{p}^2 - (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a}] \tilde{G}_{\alpha b} \\ & + \bar{p}^\delta \bar{p}^\alpha \tilde{G}_{\alpha b} + i \bar{p}^\delta e^{-a} \partial_z (e^a \tilde{G}_{5b}) = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} \delta_b^\delta e^{-a} \delta(z - z') , \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

y

$$[-\bar{p}^2 - (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a}] \tilde{G}_{5b} + i\bar{p}^\alpha \partial_z \tilde{G}_{\alpha b} = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} \delta_b^5 \delta(z - z') e^{-a}, \quad (\text{E.7})$$

pasando al espacio de momentos en las variables x , donde $\bar{p}^\mu \equiv \eta^{\mu\beta} p_\beta$ y $\mu, \beta = 0, \dots, 3$.

Ahora, para que la componente A_5 del campo sea transparente a la brana exigiremos que A_5 sea una función impar de z tal que $A_5(p, z)|_{z=0} = 0$. De (E.5) se deduce $\tilde{G}_{5b}(p; z, z')|_{z=0} = 0$.

Así, para $b = \beta$, se obtienen dos ecuaciones acopladas con $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ y $\tilde{G}_{5\beta}$ como incógnitas y cuyas soluciones vienen dadas por

$$\tilde{G}_{5\beta}(p, z, z') = \frac{ip_\beta}{\bar{p}^2 + m_5^2 e^{2a}} \partial_z G_2(p, z, z'), \quad (\text{E.8})$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(p, z, z') = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} \right) G_1(p, z, z') + \frac{p_\alpha p_\beta}{\bar{p}^2} G_2(p, z, z'), \quad (\text{E.9})$$

donde G_1 y G_2 son soluciones a

$$[e^{-a} \partial_z (e^a \partial_z) - \bar{p}^2 - (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a}] G_1 = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} e^{-a} \delta(z - z'), \quad (\text{E.10})$$

$$\left[e^{-a} \partial_z \left[\left(1 - \frac{\bar{p}^2}{\bar{p}^2 + m_5^2 e^{2a}} \right) e^a \partial_z \right] - (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a} \right] G_2 = \frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} e^{-a} \delta(z - z'). \quad (\text{E.11})$$

Para $b = 5$, el sistema esta formado por dos ecuaciones acopladas en $\tilde{G}_{\beta 5}$ y \tilde{G}_{55} . En este caso las soluciones vienen dadas por

$$\tilde{G}_{55}(p, z, z') = -\frac{\mathcal{Q}^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\bar{p}^2 + m_5^2 e^{2a}} e^{-a} \delta(z - z') + \frac{i \bar{p}^\beta}{\bar{p}^2 + m_5^2 e^{2a}} \partial_z \tilde{G}_{\beta 5}(p, z, z'), \quad (\text{E.12})$$

$$\tilde{G}_{\beta 5}(p, z, z') = -\frac{i p_\beta}{\bar{p}^2 + m_5^2 e^{2a(z')}} \partial_{z'} G_2(p, z, z'). \quad (\text{E.13})$$

Por tanto, dadas las funciones G_1 y G_2 se obtienen las componentes del propagador G_{ab} a través de (E.8, E.9, E.12) y (E.13). Aún más, dado que se esta interesado en el comportamiento del campo generado por fuentes sobre la brana, $\tilde{J}^\alpha = \delta(z) \tilde{j}^\alpha(p)$, se tiene que $J^5 = 0$ y en consecuencia de (E.5) y por transversalidad, $p_\alpha \tilde{j}^\alpha = 0$, resulta

$$\tilde{A}_\alpha(p, z) = \eta_{\alpha\beta} G_1(p; z, 0) \tilde{j}^\beta(p). \quad (\text{E.14})$$

Esto es, para fuentes sobre la brana los grados de libertad cuatro-dimensionales longitudinales del campo son espurios. Definiendo

$$\bar{G}_1 \equiv \frac{(2\pi)^2}{\mathcal{Q}^2} G_1(p, z, z') \quad (\text{E.15})$$

se sigue que

$$[\partial_z (e^a \partial_z) - \bar{p}^2 e^a - m_5^2 e^{3a} + \eta \delta(z)] \bar{G}_1 = \delta(z - z'), \quad -\infty < z, z' < +\infty. \quad (\text{E.16})$$

Por otro lado, dado que G_1 es una función de Green de clase \mathcal{C}^0 se tiene

$$\bar{G}_1 = \Theta(-z)\bar{G}_1^-(p, z, z') + \Theta(z)\bar{G}_1^+(p, z, z') , \quad \bar{G}_1^-(p, 0, z') = \bar{G}_1^+(p, 0, z') \quad (\text{E.17})$$

y

$$\partial_z^2 \bar{G}_1 = [\partial_z \bar{G}_1^+(p, 0, z') - \partial_z \bar{G}_1^-(p, 0, z')] \delta(z) + \Theta(-z)\partial_z^2 \bar{G}_1^-(p, z, z') + \Theta(z)\partial_z^2 \bar{G}_1^+(p, z, z') . \quad (\text{E.18})$$

En consecuencia, la ecuación diferencial (E.16) es equivalente a

$$[\partial_z (e^a \partial_z) - \bar{p}^2 e^a - m_5^2 e^{3a}] \bar{G}_1^+(p, z, z') = \delta(z - z') , \quad 0 < z , \quad (\text{E.19})$$

$$[\partial_z (e^a \partial_z) - \bar{p}^2 e^a - m_5^2 e^{3a}] \bar{G}_1^-(p, z, z') = \delta(z - z') , \quad z < 0 , \quad (\text{E.20})$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$\partial_z \bar{G}_1^+(p, 0, z') - \partial_z \bar{G}_1^-(p, 0, z') = -\eta \bar{G}_1(p, 0, z') , \quad \bar{G}_1^\pm(p, \pm\infty, z') = 0 . \quad (\text{E.21})$$

En virtud de la simetría Z_2 resolveremos para \bar{G}_1^+ .

Ahora, bajo el cambio¹

$$e^{a(z)} dz = \frac{1}{\alpha\xi} d\xi \quad / \quad e^{a(z)} = \frac{1}{\alpha\xi} , \quad (\text{E.22})$$

se tiene de (E.19)

$$\left[\partial_\xi \left(-\frac{1}{\alpha\xi} \partial_\xi \right) + \frac{\bar{p}^2}{\alpha\xi} + \frac{m_5^2}{(\alpha\xi)^3} \right] \bar{G}_1^+(p, \xi, \xi') = -\delta(\xi - \xi') , \quad -\alpha^{-1} < \xi , \quad (\text{E.23})$$

y de las condiciones de contorno (E.21)

$$\partial_\xi \bar{G}_1^+(p, \alpha^{-1}, \xi') = -\frac{1}{2}\eta \bar{G}_1^+(p, \alpha^{-1}, \xi') , \quad \bar{G}_1^+(p, +\infty, \xi') = 0 , \quad (\text{E.24})$$

donde se ha hecho uso de $\partial_z \bar{G}_1^-(0) = -\partial_z \bar{G}_1^+(0)$, producto de la simetría de reflexión.

Nótese que el operador diferencial está dado en la forma de Sturm-Liouville [57]

$$\mathbb{L}_\xi = \partial_\xi [p(\xi)\partial_\xi] + q(\xi) , \quad (\text{E.25})$$

donde

$$p(\xi) = -\frac{1}{\alpha\xi} \quad \text{y} \quad q(\xi) = \frac{\bar{p}^2}{\alpha\xi} + \frac{m_5^2}{(\alpha\xi)^3} . \quad (\text{E.26})$$

Por tanto, (E.23) y (E.24) plantea un problema de Sturm-Liouville que consiste en encontrar la función de Green apropiada al problema dado. Para ello, se deben encontrar dos soluciones y_1, y_2 al problema homogéneo

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\alpha\xi} \frac{d}{d\xi} \right) - \frac{\bar{p}^2}{\alpha\xi} - \frac{m_5^2}{(\alpha\xi)^3} \right] y(\xi) = 0 , \quad \alpha^{-1} < \xi < +\infty , \quad (\text{E.27})$$

¹La cual corresponde a la transformación

$$ds^2 = e^{2a(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \longrightarrow ds^2 = \frac{1}{(\alpha\xi)^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\xi^2) .$$

que satisfagan

$$\left. \frac{d}{d\xi} y_1(\xi) \right|_{\xi=\alpha^{-1}} = -\frac{1}{2} \eta y_1(\xi) \Big|_{\xi=\alpha^{-1}}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} y_2(\xi) = 0. \quad (\text{E.28})$$

Realizando el cambio $y(\xi) = \xi \psi(\xi)$ en (E.27) se obtiene

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) + \xi \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) + [(i\bar{p}\xi)^2 - \nu^2] \psi(\xi) = 0, \quad (\text{E.29})$$

la ecuación de Bessel de orden $\nu^2 = m_5^2/\alpha^2 + 1$ y, en consecuencia, la solución general al problema homogéneo

$$y(\xi) = \xi [B H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) - A J_\nu(i\bar{p}\xi)], \quad (\text{E.30})$$

donde J_ν y $H_\nu^{(1)}$ son las funciones de Bessel de primera y tercera especie respectivamente.

Así, las dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(\xi) = A_1 \xi \left[\frac{J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) - J_\nu(i\bar{p}\xi) \right], \quad y_2(\xi) = B_2 \xi H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi), \quad (\text{E.31})$$

con Wronskiano dado por

$$W(y_1, y_2, \xi) = -\frac{2i}{\pi} A_1 B_2 \xi, \quad \alpha^{-1} < \xi < +\infty. \quad (\text{E.32})$$

En las expresiones previas, se ha impuesto *ad hoc* la restricción $3\alpha(\nu - 1) - 3\eta/2 = 0$ y considerado que para $\bar{p}\xi \gg 1$ la función

$$\xi J_\nu(i\bar{p}\xi) \sim \xi \sqrt{\frac{2}{i\bar{p}\xi}} \cos(i\bar{p}\xi - \pi\alpha/2 - \pi/4) = \sqrt{\frac{2\xi}{i\bar{p}}} \cosh(\bar{p}\xi - i\pi(\alpha/2 - 1/4)), \quad (\text{E.33})$$

diverge, mientras que

$$\xi H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) \sim \xi \sqrt{\frac{2}{i\bar{p}\xi}} \exp[i(i\bar{p}\xi - (\nu + 1/2)\pi/2)] = \sqrt{\frac{2\xi}{i\bar{p}}} \exp[-\bar{p}\xi - i(\nu + 1/2)\pi/2]. \quad (\text{E.34})$$

converge, lo cual ha llevado a fijar $A_2 = 0$.

Se sigue entonces que la función de Green, solución elemental del problema de contorno (E.23, E.24) viene dado por [57]

$$\bar{G}_1^+(p, \xi, \xi') = \Theta(\xi' - \xi) u_1(\xi') y_1(\xi) + \Theta(\xi - \xi') u_2(\xi') y_2(\xi),$$

donde

$$u_1(\xi) = -\frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2, \xi)} = -\frac{\pi\alpha}{2iA_1} \xi H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi),$$

$$u_2(\xi) = -\frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2, \xi)} = -\frac{\pi\alpha}{2iB_2} \xi \left[\frac{J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) - J_\nu(i\bar{p}\xi) \right].$$

Por tanto

$$\bar{G}_1^+(p, \xi, \xi') = \frac{\pi\alpha i}{2} \Theta(\xi' - \xi) \xi \xi' H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi') \left[\frac{J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) - J_\nu(i\bar{p}\xi) \right] \quad (\text{E.35})$$

$$+ \frac{\pi\alpha i}{2} \Theta(\xi' - \xi) \xi \xi' H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) \left[\frac{J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi') - J_\nu(i\bar{p}\xi') \right] \quad (\text{E.36})$$

La función de Green G_1 asociada al problema de contorno (E.19, E.21) viene dado por

$$G_1^+(p, \xi, \xi') = \frac{\mathcal{Q}^2}{4\pi} i\alpha \xi \xi' \left[\frac{J_{\nu-1}(i\bar{p}/\alpha)}{H_{\nu-1}^{(1)}(i\bar{p}/\alpha)} H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi') H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi) - J_\nu(i\bar{p}\xi_<) H_\nu^{(1)}(i\bar{p}\xi_>) \right], \quad \xi = \alpha^{-1} e^{-a(z)} \quad (\text{E.37})$$

donde $\xi_> = \max\{\xi, \xi'\}$ y $\xi_< = \min\{\xi, \xi'\}$.

Esto permite determinar el comportamiento de los grados de libertad cuatro-dimensionales del campo vectorial cinco-dimensional, (E.14). Alternativamente es posible determinar influencia del comportamiento del campo vectorial sobre la brana mediante el desarrollo del potencial electrostático correspondiente, véase el apéndice D.1.

E.2. Propagador en el mecanismo DGS

La función de Green $G_0(E, y, y')$ compatible con el operador diferencial \mathbb{H}_0 es la solución a la ecuación diferencial

$$(E - \mathbb{H}_0)G_0(E, y, y') = \delta(y - y'), \quad (\text{E.38})$$

que satisface las condiciones de contorno

$$\lim_{|y-y'| \rightarrow \infty} G_0(E, y, y') = 0. \quad (\text{E.39})$$

Ahora, si el operador diferencial es uno tal que puede ser escrito como la suma de dos términos, uno de los cuales es un potencial tipo delta,

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \lambda \delta(y). \quad (\text{E.40})$$

donde λ es una constante arbitraria. Entonces la función de Green apropiada a las condiciones de contorno del problema

$$(E - \mathbb{H})G(E, y, y') = \delta(y - y'), \quad (\text{E.41})$$

$$\lim_{|y-y'| \rightarrow \infty} G(E, y, y') = 0, \quad (\text{E.42})$$

viene dada por [58]

$$G(E, y, y') = G_0(E, y, y') + \lambda \frac{G_0(E, y, 0)G_0(E, 0, y')}{1 - \lambda G_0(E, 0, 0)}, \quad (\text{E.43})$$

donde $G_0(E, y, y')$ es solución de (E.38) y (E.39).

Por otro lado, para el mecanismo DGS [1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mathcal{Q}^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} \delta(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (\text{E.44})$$

con soporte sobre un espaciotiempo 5-dimensional de Minkowski, el sector del propagador transverso al momentum de la componente 4-dimensional del propagador del campo de calibre viene dado por

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}^T = \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \right) G_1(p, y, y') \quad (\text{E.45})$$

donde G_1 es solución al problema de contorno

$$\left[-\frac{p^2}{\mathcal{Q}^2} - \left(-\frac{1}{\mathcal{Q}^2} \partial_y^2 + \frac{p^2}{e^2} \delta(y) \right) \right] G_1(p, y, y') = \delta(y - y') , \quad (\text{E.46})$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_1(p, y, y') = 0 , \quad (\text{E.47})$$

Ahora, nótese que (E.46), (E.47) es formalmente idéntico al problema planteado en (E.41), (E.42) donde es posible identificar

$$E = -\frac{p^2}{\mathcal{Q}^2} , \quad \mathbb{H}_0 = -\frac{1}{\mathcal{Q}^2} \partial_y^2 , \quad \lambda = \frac{p^2}{e^2} . \quad (\text{E.48})$$

En consecuencia, para encontrar la función de Green solución de (E.46), (E.47) se debe hallar la función de Green apropiada al problema de contorno siguiente

$$\left(-\frac{p^2}{\mathcal{Q}^2} + \frac{1}{\mathcal{Q}^2} \partial_y^2 \right) G_0(p, y, y') = \delta(y - y') . \quad (\text{E.49})$$

Para ello, considérese la transformada de Fourier de la anterior expresión

$$\tilde{G}_0(p, p_y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathcal{Q}^2}{p^2 + p_y^2} , \quad (\text{E.50})$$

cuya inversa viene dada por

$$G_0(p, y, y') = -\frac{\mathcal{Q}^2}{2} \frac{e^{-p|y-y'|}}{p} . \quad (\text{E.51})$$

Ahora, volviendo a (E.43) y sustituyendo resulta

$$G_1(p, y, y') = -\frac{\mathcal{Q}^2}{2p} e^{-p|y-y'|} + \frac{\mathcal{Q}^2}{2(p+p^*)} e^{-p|y|} e^{-p|y'|} \quad (\text{E.52})$$

y considerando la siguiente identidad

$$\frac{\mathcal{Q}^2}{2p} = \frac{e^2}{p(p+p^*)} + \frac{\mathcal{Q}^2}{2(p+p^*)} , \quad (\text{E.53})$$

donde $p^* = 2e^2/\mathcal{Q}^2$, se obtiene finalmente

$$G_1(p, y, y') = -\frac{e^2}{p(p+p^*)} e^{-p|y-y'|} - \frac{\mathcal{Q}^2}{2(p+p^*)} \left[e^{-p|y-y'|} - e^{-p|y|} e^{-p|y'|} \right] . \quad (\text{E.54})$$

E.3. Propagador para el mecanismo extendido DGS en el escenario RS

La generalización a paredes de dominio del mecanismo DGS [1] viene dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4Q^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} k^2(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{E.55})$$

donde $k(y)$ es el perfil del fermión que acopla al campo de calibre sobre una pared de dominio embebida en un espaciotiempo con tensor métrico

$$g_{ab} = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b . \quad (\text{E.56})$$

En este caso, la función de Green, del sector 4-dimensional del propagador transverso al momentum, es solución al problema de contorno

$$\left[\bar{p}^2 \left(1 + \frac{Q^2}{e^2} k^2(y) \right) - \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] \bar{G}_1(p, y, y') = -\delta(y - y') , \quad -\infty < y, y' < +\infty , \quad (\text{E.57})$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \bar{G}_1(p, y, y') = 0 , \quad (\text{E.58})$$

En los siguientes casos se considera que la pared es la brana RS, donde $a(y) = -\alpha|y|$.

- $k^2(y) = 0$: La ecuación diferencial se reduce

$$\left[\bar{p}^2 - \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] \bar{G}_1(p, y, y') = -\delta(y - y') , \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \bar{G}_1(p, y, y' \pm \infty) = 0 , \quad (\text{E.59})$$

Usando el cambio de variable sugerido en la sección previa²

$$dy = \frac{1}{\alpha\xi} d\xi \quad / \quad e^{a(y)} = \frac{1}{\alpha\xi} , \quad (\text{E.60})$$

resulta

$$\left[\partial_\xi \left(-\frac{1}{\alpha\xi} \partial_\xi \right) - \frac{\bar{p}^2}{\alpha\xi} \right] \bar{\bar{G}}_1(p, \xi, \xi') = -\delta(\xi - \xi') , \quad \alpha^{-1} < \xi, \xi' < +\infty , \quad (\text{E.61})$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \bar{\bar{G}}_1(p, \xi, \xi') = 0 , \quad \partial_\xi \bar{\bar{G}}_1(p, \xi, \xi')|_{\xi=\alpha^{-1}} = 0 \quad (\text{E.62})$$

donde se ha definido $\bar{\bar{G}}_1 \equiv \alpha\xi' \bar{G}_1$.

²La cual corresponde a la transformación

$$ds^2 = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \longrightarrow ds^2 = \frac{1}{(\alpha\xi)^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\xi^2) .$$

El problema homogéneo asociado es

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(-\frac{1}{\alpha\xi} \frac{d}{d\xi} \right) - \frac{\bar{p}^2}{\alpha\xi} \right] h(\xi) = 0, \quad \alpha^{-1} < \xi, \xi' < +\infty, \quad (\text{E.63})$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} h_2(\xi) = 0, \quad \frac{d}{d\xi} h_1(\xi) \Big|_{\xi=\alpha^{-1}} = 0. \quad (\text{E.64})$$

Redefiniendo $h(\xi) = \xi \psi(\xi)$ resulta

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) + \xi \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) - [(\bar{p}\xi)^2 + 1] \psi(\xi) = 0, \quad (\text{E.65})$$

la ecuación de Bessel modificada, con solución

$$\psi(\xi) = A I_1(\bar{p}\xi) + B K_1(\bar{p}\xi) \quad (\text{E.66})$$

donde A y B son las constantes de integración. En consecuencia

$$h_1(\xi) = A_1 \xi \left[I_1(\bar{p}\xi) + \frac{I_0(\bar{p}/\alpha)}{K_0(\bar{p}/\alpha)} K_1(\bar{p}\xi) \right], \quad h_2(\xi) = B_2 \xi K_1(\bar{p}\xi) \quad (\text{E.67})$$

y el Wronskiano $W(p, h_1, h_2, \xi) = -A_1 B_2 \xi$.

Finalmente

$$\bar{G}_1(p, y, y') = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha|y|} \left[\mathcal{F}(\bar{p}) K_1(e^{\alpha|y|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y'|} \bar{p}/\alpha) + I_1(e^{\alpha|y|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y'|} \bar{p}/\alpha) \right], \quad (\text{E.68})$$

donde $y_< = \min\{y, y'\}$, $y_> = \max\{y, y'\}$ y

$$\mathcal{F}(\bar{p}) = \frac{I_0(\bar{p}/\alpha)}{K_0(\bar{p}/\alpha)}. \quad (\text{E.69})$$

Se sigue que en $y = y' = 0$

$$\bar{G}_1(p, 0, 0) = -\frac{1}{\bar{p}} \frac{K_1(\bar{p}/\alpha)}{K_0(\bar{p}/\alpha)}. \quad (\text{E.70})$$

- $k^2(y) = \delta(y)$: En este caso

$$\left[\bar{p}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{Q}^2}{e^2} \delta(y) \right) - \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] \bar{G}_1(p, y, y') = -\delta(y - y'), \quad -\infty < y, y' < +\infty, \quad (\text{E.71})$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \bar{G}_1(p, y, y') = 0. \quad (\text{E.72})$$

Ya que G_1 es una función de Green de clase \mathcal{C}^0 se tiene

$$\bar{G}_1 = \Theta(-y) \bar{G}_1^-(p, y, y') + \Theta(y) \bar{G}_1^+(p, y, y'), \quad \bar{G}_1^-(p, 0, y') = \bar{G}_1^+(p, 0, y') \quad (\text{E.73})$$

y

$$\partial_y^2 \bar{G}_1 = [\partial_y \bar{G}_1^+(p, 0, y') - \partial_y \bar{G}_1^-(p, 0, y')] \delta(y) + \Theta(-y) \partial_y^2 \bar{G}_1^-(p, y, y') + \Theta(y) \partial_y^2 \bar{G}_1^+(p, y, y') . \quad (\text{E.74})$$

Por ende, el problema de contorno (E.71), (E.72) es equivalente a

$$[-\partial_y (e^a \partial_y) + \bar{p}^2] \bar{G}_1^+(p, y, y') = -\delta(y - y') , \quad y > 0 , \quad (\text{E.75})$$

$$[-\partial_y (e^a \partial_y) + \bar{p}^2] \bar{G}_1^-(p, y, y') = -\delta(y - y') , \quad y < 0 , \quad (\text{E.76})$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \bar{G}_1^\pm(p, y, y') = 0 , \quad \partial_y \bar{G}_1^+(p, y, y')|_{y=0} - \partial_y \bar{G}_1^-(p, y, y')|_{y=0} = \frac{\bar{p}^2}{p^*} \bar{G}_1(p, y, y')|_{y=0} . \quad (\text{E.77})$$

En virtud de la simetría Z_2 resolveremos para \bar{G}_1^+ y se hará uso de $\partial_y \bar{G}_1(0^-) = -\partial_y \bar{G}_1(0^+)$. Nótese, que el problema planteado por (E.75), (E.77) se asemeja al planteado en (E.59) para el caso $k^2(y) = 0$, salvo el salto en la derivada en la condición de contorno. Por lo tanto, procediendo de manera analoga se obtiene

$$\bar{G}_1^+(p, y, y') = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha|y|} \left[\mathcal{F}(\bar{p}) K_1(e^{\alpha|y|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y'|} \bar{p}/\alpha) + I_1(e^{\alpha|y|} \bar{p}/\alpha) K_1(e^{\alpha|y'|} \bar{p}/\alpha) \right] , \quad (\text{E.78})$$

donde $y_< = \min\{y, y'\}$, $y_> = \max\{y, y'\}$ y

$$\mathcal{F}(\bar{p}) = \frac{p^* I_0(\bar{p}/\alpha) - \bar{p} I_0(\bar{p}/\alpha)}{p^* K_0(\bar{p}/\alpha) + \bar{p} K_1(\bar{p}/\alpha)} . \quad (\text{E.79})$$

Por consiguiente, en $y = y' = 0$ el propagador

$$\bar{G}_1(p, 0, 0) = -\frac{1}{Q^2} \frac{e^2}{\bar{p} [\bar{p} + p^* K_0(\bar{p}/\alpha)/K_1(\bar{p}/\alpha)]} . \quad (\text{E.80})$$

Apéndice F

Fermiones sobre la Pared

Considérese la acción de Dirac para un fermion Ψ propagándose en el espacio cinco-dimensional pared de dominio asintóticamente AdS₅

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b, \quad g_{\mu\nu} = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{F.1})$$

acoplado al campo escalar ϕ

$$S_f = \int dx^4 dy \sqrt{-g} (\bar{\Psi} \Gamma^a \nabla_a \Psi - \lambda \bar{\Psi} \phi \Psi), \quad (\text{F.2})$$

donde $a = \mu, 4$ y $\mu = 0, \dots, 3$ son los índices de mundo cinco y cuatro-dimensional respectivamente, λ es la constante de acoplamiento de Yukawa entre el espinor y el campo escalar. Las Γ se definen de la siguiente manera

$$\Gamma^a = E_{\bar{a}}^a \Gamma^{\bar{a}} \equiv (E_{\bar{\mu}}^\mu \gamma^{\bar{\mu}}, -i\gamma_5) \quad / \quad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2 \mathbf{I} g^{ab} \quad (\text{F.3})$$

y se conocen como las matrices gamma en el espaciotiempo curvo, donde $\bar{a} = \bar{\mu}, \bar{5}$ y $\bar{\mu} = \bar{0}, \dots, \bar{3}$ son los índices de Lorentz cinco y cuatro-dimensional respectivamente. Los $\gamma^{\bar{\mu}}$ son los generadores del álgebra de Clifford cuatro-dimensional, $\{\gamma^{\bar{\mu}}, \gamma^{\bar{\nu}}\} = 2 \mathbf{I} \eta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ y $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Finalmente, los $E_{\bar{\mu}}^\mu = e^{-a(y)} \delta_{\bar{\mu}}^\mu$, $E_{\bar{5}}^5 = 1$ son los *vielbein* compatibles con (F.1).

Ahora, extremando la acción se tiene que el campo espinorial $\Psi(x, y)$ satisface la ecuación de Dirac en el *background* (F.1),

$$[i\Gamma^b \nabla_b - \lambda\phi(y)] \Psi(x, y) = \mathbf{0}, \quad (\text{F.4})$$

Explícitamente, se tiene que (F.4) se descompone de la siguiente manera

$$[i\Gamma^{\bar{a}} E_{\bar{a}}^b (\partial_b + \Omega_b) - \lambda\phi(y)] \Psi(x, y) = \mathbf{0}, \quad (\text{F.5})$$

$$\Omega_b = -\frac{1}{4} \omega_b^{\bar{a}\bar{c}} \Gamma_{\bar{a}\bar{c}} \quad , \quad \Gamma_{\bar{a}\bar{c}} = \frac{1}{2} [\Gamma_{\bar{a}}, \Gamma_{\bar{c}}], \quad (\text{F.6})$$

donde ω es la conexión espín del sistema definida por

$$\omega_{b\bar{a}}^{\bar{c}} = -E_{\bar{a}}^d (\partial_b E_d^{\bar{c}} - \Gamma_{bd}^c E_c^{\bar{c}}). \quad (\text{F.7})$$

Sustituyendo los *vielbein*

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2} a'(y) e^{a(y)} \Gamma_\mu \Gamma^4, \quad \Omega_4 = \mathbf{0}. \quad (\text{F.8})$$

En consecuencia, la ecuación de Dirac (F.5) se reduce a

$$[i e^{-a(y)} \Gamma^\mu \partial_\mu + i \Gamma^4 (\partial_y + 2a'(y)) - \lambda \phi(y)] \Psi(x, y) = 0. \quad (\text{F.9})$$

Ahora, considerando la descomposición quirral

$$\Psi(x, y) = \psi_-(x) k_-(y) + \psi_+(x) k_+(y), \quad (\text{F.10})$$

donde la notación (+), (−) corresponde a los modos *Left - Right* respectivamente, y asumiendo que ψ_\pm satisface la ecuación de Dirac cuatro-dimensional, $\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\pm(x) = 0$, se tiene

$$[\partial_y + 2a'(y) \pm \lambda \phi(y)] k_\mp(y) = 0, \quad (\text{F.11})$$

cuya solución viene dada por

$$k_\mp(y) = N \exp\left(-2a(y) \mp \lambda \int \phi(y) dy\right). \quad (\text{F.12})$$

A continuación, considérese una brana con simetría Z_2 centrada en $y = 0$, que interpola asintóticamente entre dos espaciotiempos AdS_5 con constante cosmológica Λ . Para $y \rightarrow \pm\infty$ el modo fermionico (F.12) se comporta como

$$k_\mp(y) \rightarrow e^{(\sqrt{|\Lambda|/6} \mp \lambda\varphi)|y|} \quad (\text{F.13})$$

donde $\phi(\pm\infty) = \pm\varphi$.

Así, una condición necesaria para el confinamiento de fermiones viene dada por

$$\lambda_- > \frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}}, \quad \lambda_+ < -\frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}}, \quad (\text{F.14})$$

para los modos (−) y (+) respectivamente. De esta manera recobramos un resultado bien conocido [24, 31]: dependiendo de la naturaleza del acoplamiento uno de los modos quirales es normalizable mientras que el otro no; es decir, la pared de dominio genera un rompimiento de simetría quirral topológico sobre las hipersuperficies cuatro-dimensionales.

Si la pared es una versión regularizada de RS, entonces en el límite de pared delgada el campo escalar desaparece, $\varphi \rightarrow 0$. En consecuencia, la constante de acoplamiento diverge en dicho límite y se sigue que los fermiones sobre una pared delgada no provienen de un acoplamiento tipo Yukawa [31].

A lo largo de este trabajo se considera un sólo modo quirral.

Apéndice G

Dos estrategias adicionales para tratar al mecanismo extendido DGS

La función de Green de la componente 4-dimensional del propagador de la teoría generalizada a paredes de dominio con tensor métrico

$$g_{ab} = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b , \quad (\text{G.1})$$

del mecanismo DGS

$$S = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4Q^2} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{4e^2} k^2(y) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^c(x, y) A_c \right] , \quad (\text{G.2})$$

viene dada por

$$\left[\bar{p}^2 \left(1 + \frac{Q^2}{e^2} k^2(y) \right) - \partial_y (e^{2a(y)} \partial_y) \right] G_1(p, y, y') = -Q^2 \delta(y - y') , \quad G_1(p, \pm\infty, y') = 0 . \quad (\text{G.3})$$

Encontrar solución al problema de contorno (G.3) sobre una pared de grosor finito en un espaciotiempo AdS₅ es una tarea no trivial. En este sentido, en principio fue posible centrar dicha búsqueda en dos direcciones. La primera, provee una solución aproximada en torno la pared a partir de las condiciones de borde [53]. Sin embargo, como se muestra a continuación, por contraste con una solución analítica conocida se obtiene que la aproximación dada por el método solo reproduce parcialmente el comportamiento del propagador.

La segunda estrategia, trata de curvar perturbativamente el espaciotiempo 5-dimensional de una pared de dominio plana [54]. No obstante, el método genera una pared de domino que asintóticamente tiende a un espaciotiempo AdS₅ ligeramente diferente del plano. En consecuencia, el propagador respectivo no se diferencia significativamente de su homólogo en la pared plana por lo que no es posible evaluar la contribución de la curvatura del *bulk* al propagador.

G.1. Método Boisseau, Forgács y Giacomini

Sea $u(y)$ solución al problema con condiciones de contorno

$$\mathbb{D}_y u(y) = f(y) , \quad y_0 < y < \infty , \quad (\text{G.4})$$

$$d_1 u(y)|_{y=y_0} + d_2 u'(y)|_{y=y_0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = 0, \quad (\text{G.5})$$

donde \mathbb{D} es un operador diferencial de segundo orden y las d_i son constantes. Ahora, supóngase que se está interesado en el comportamiento de la solución en el borde y_0 . Entonces, una propuesta para hallar $u(y_0)$ consiste en desarrollar la solución en una vecindad de y_0 . Así

$$u(y) = \sum_{i=0}^n u_i (y - y_0)^i, \quad (\text{G.6})$$

de tal manera que

$$u'(y) = \sum_{i=0}^n (i+1)u_{i+1} (y - y_0)^i, \quad u''(y) = \sum_{i=0}^n (i+2)(i+1)u_{i+2} (y - y_0)^i, \quad (\text{G.7})$$

donde n representa el orden de truncamiento. Sustituyendo en (G.4), (G.5) se logra identificar

$$\mathcal{F}_i(u_0, u_1, \dots, u_{n+2}) = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (\text{G.8})$$

$$d_1 u_0 + d_2 u_1 = 0, \quad (\text{G.9})$$

un sistema de $(n+2)$ ecuaciones con $(n+3)$ incógnitas. Nótese que $u_0 = u(y_0)$ es la cantidad buscada, la cual queda sin determinar por incompletitud del sistema en consistencia con el hecho de que sólo ha sido usado una de las condiciones de contorno (G.5). Que, dicho sea de paso, en principio no puede ser usada por que está definida en un punto que no pertenece a la vecindad de y_0 .

No obstante, en [53] Boisseau, Forgács y Giacomini (BFG) reportan un método que permite resolver el dilema anterior. Es decir, el método permite darle a la solución alrededor de $y = y_0$ información sobre su comportamiento asintótico y de esa manera permite determinar la constante de integración u_0 . Para obtener la ecuación que falta en (G.8) y así hacer compatible el número de ecuaciones con el de incógnitas, los autores proponen el uso del polinomio auxiliar de primer orden

$$u'(y)^N + \sum_{s=1}^N C_s u'(y)^{(N-s)} = 0, \quad (\text{G.10})$$

donde

$$C_s(y) = \sum_{j_s=0}^{m_s \leq 2s} C_{s j_s} u(y)^{j_s}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} C_N(y) = \sum_j C_{N j_N} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y)^{j_N} = 0, \quad (\text{G.11})$$

siendo N y m_s ordenes de truncamiento arbitrarios. El procedimiento reza de la siguiente manera: sustituyendo (G.7) en (G.10) se obtienen las $(n+1)$ ecuaciones

$$\mathcal{G}_i(u_0, \dots, u_{n+1}, C_{1 j_1}, \dots, C_{N j_N}) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad j_s = 0, \dots, m_s \leq 2s. \quad (\text{G.12})$$

Escogiendo N y m_s de tal manera que estén presentes en el sistema de ecuaciones $(n+1)$ coeficientes $C_{s j_s}$, resulta de (G.12) lo siguiente

$$C_{N j} = C_{N j}(u_0, \dots, u_{n+1}). \quad (\text{G.13})$$

e identificando en (G.11) tanto la expresión anterior como la condición de borde respectiva se llega a la ecuación

$$\mathcal{Y}(u_0, \dots, u_{n+1}) = 0. \quad (\text{G.14})$$

Esta expresión en conjunto con (G.8), (G.9) permite establecer consistentemente un sistema de ecuaciones con la misma cantidad de incógnitas, $(n+3)$, lo cual asegura la unicidad de la solución.

Sin embargo, dado que el polinomio auxiliar propuesto en (G.10), (G.11) es más empírico que axiomático [53] la misma no provee ni el grado de precisión en la aproximación ni las condiciones bajo las cuales es aplicable, por lo que las soluciones que provee carecen de veracidad rigurosa.

Para ilustrar esto, a continuación se presenta la solución analítica a (G.3) para un propagador vectorial en una pared de dominio plana, desarrollada en la sección 3.2.2, para luego compararla con la solución BFG al mismo problema.

G.1.1. Solución analítica

En un espaciotiempo de Minkowski cinco-dimensional una pared de dominio viene dada por

$$\phi(y) = \phi_0 \tanh(\alpha y/\delta), \quad (\text{G.15})$$

para un potencial de la forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\beta(\phi_0^2 - \phi^2)^2, \quad (\text{G.16})$$

donde $\phi_0 = \beta^{1/2}\alpha/\delta$. En este caso

$$k^2(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\delta} \frac{\Gamma(\lambda/\sqrt{\beta} + 1/2)}{\Gamma(\lambda/\sqrt{\beta})} \cosh(\alpha y/\delta)^{-2\lambda/\sqrt{\beta}}, \quad (\text{G.17})$$

donde λ es la constante de acoplamiento de Yukawa.

En particular para $\lambda = \sqrt{\beta}$, la función de Green en el origen viene dada por

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{\delta Q^2}{4\alpha} \frac{\Gamma[-(\mu + \nu)/2]\Gamma[(1 - \mu + \nu)/2]}{\Gamma[1 + (\nu - \mu)/2]\Gamma[(1 - \mu - \nu)/2]} \quad (\text{G.18})$$

y, por tanto, para

$$\sqrt{p^*\alpha/\delta} \gg p \gg p^* \quad (\text{G.19})$$

se reduce a

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{e^2}{p^2} + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) Q^2 \ln(2) + \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2. \quad (\text{G.20})$$

G.1.2. Solución BFG

Escogiendo $N = 2$ y $m_1 = 2 \leq 2$, $m_2 = 0 \leq 4$, lo cual implica desarrollar la solución hasta 3^{er} orden¹, se tiene que las dos soluciones homogéneas

$$u_1(0) = u_2(0) = 2A \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*}\right)^{-1} \frac{1}{p^2} \quad (\text{G.21})$$

¹Aumentando N y/o m_s , se obtienen expresiones más complejas y sin embargo se reducen a la misma expresión bajo el mismo espacio de parámetros.

y sus respectivas derivadas

$$u'_1(0) = -u'_2(0) = -2A \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^3 p^* \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right) \right]^{1/2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^3 p^* \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^2 p^2 \right]^{-1/2}. \quad (\text{G.22})$$

donde A es una constante de integración.

Considerando que la función de Green en el origen viene dada por

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{Q^2}{u'_2(0)/u_2(0) - u'_1(0)/u_1(0)} = -\frac{Q^2}{2u'_1(0)/u_1(0)} \quad (\text{G.23})$$

ya que estas soluciones cumplen $u_1(0) = u_2(0)$, y $u'_1(0) = -u'_2(0)$, resulta

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^{-3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^3 \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^2 p^* p^2 \right]^{1/2} \frac{e^2}{p^2}. \quad (\text{G.24})$$

Ahora, si se satisface

$$\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^3 \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^2 p^* p^2 \ll 1, \quad (\text{G.25})$$

entonces

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^{-3/2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^3 \left(1 + \frac{\alpha}{\delta p^*} \right)^2 p^* p^2 + \dots \right] \frac{e^2}{p^2}. \quad (\text{G.26})$$

Aún más, suponiendo que también $p^* \delta / \alpha \ll 1$ se tiene que (G.25) se reduce a

$$p \ll \sqrt{p^* \alpha / \delta} \quad (\text{G.27})$$

y (G.26) toma la siguiente forma

$$G_1(p, 0, 0) \sim \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{e^2}{p^2} + \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right) Q^2. \quad (\text{G.28})$$

La ecuación (G.28) es la versión aproximada de (G.20). Nótese que la desigualdad (G.27) está contenida en (G.19) mas no es la misma. Esto es, en este caso el método BFG solo provee la cota superior lo cual viene a ser una muestra *in situ* de lo limitado y poco confiable que resulta ser el método.

G.2. Solución perturbativa al acoplamiento Einstein-campo escalar

El sistema acoplado Einstein-campo escalar viene dado por

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab}, \quad (\text{G.29})$$

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi + V(\phi) \right] , \quad (\text{G.30})$$

$$\nabla_a \nabla^a \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 . \quad (\text{G.31})$$

Para un espaciotiempo con simetría plano-paralela estático

$$g_{ab} = e^{2a(y)} \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dy_a dy_b , \quad (\text{G.32})$$

el sistema (G.29), (G.30), (G.31) se reduce a

$$\phi'(y)^2 = -3 a''(y) , \quad V(\phi) + \Lambda = -\frac{3}{2} [4a'^2(y) + a''(y)] , \quad (\text{G.33})$$

donde la prima denota derivada respecto a y . Ahora, supóngase el potencial de autointeracción

$$V(\phi) = \frac{\beta}{2} (\phi_0^2 - \phi^2)^2 , \quad \phi_0 = \frac{\alpha}{\delta\sqrt{\beta}} . \quad (\text{G.34})$$

y considérese las variables adimensionales $\bar{y} = \alpha y / \delta$ y $\Phi = \phi / \phi_0$. Entonces, las ecuaciones del sistema se describen como

$$\epsilon \Phi'^2(\bar{y}) = -3a''(\bar{y}) , \quad (\text{G.35})$$

$$\epsilon [1 - \Phi^2(\bar{y})]^2 + \Lambda = -3 [4a'^2(\bar{y}) + a''(\bar{y})] , \quad (\text{G.36})$$

$$\Phi''(\bar{y}) + 4a'(\bar{y})\Phi'(\bar{y}) = 2 [\Phi^2(\bar{y}) - 1] \Phi(\bar{y}) , \quad (\text{G.37})$$

donde $\epsilon = \phi_0^2$ un parámetro adimensional que representa el grado de curvatura presente en el espaciotiempo [54]

$$R_{ab} = \epsilon \left[\partial_a \Phi(\bar{y}) \partial_b \Phi(\bar{y}) - g_{ab} (\Phi^2(\bar{y}) - 1)^2 \right] . \quad (\text{G.38})$$

Se sigue que, el límite de gravedad débil se define como aquella configuración de baja curvatura: $\epsilon \ll 1$. Aquella que se realiza en una vecindad de la pared de dominio plana

$$\Phi_0(\bar{y}) = \tanh(\bar{y}) , \quad a_0 = 0 , \quad \Lambda_0 = 0 . \quad (\text{G.39})$$

Por lo tanto, en este régimen es posible considerar a la solución pared de dominio como una perturbación provista por la curvatura de la solución plana. Esto es

$$\Phi(\bar{y}) = \Phi_0(\bar{y}) + \epsilon \Phi_1(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{G.40})$$

$$a(\bar{y}) = a_0 + \epsilon a_1(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{G.41})$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \epsilon \Lambda_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{G.42})$$

En consecuencia, a primer orden en ϵ las ecuaciones de campo lucen como

$$3a_1''(\bar{y}) = -\Phi_0'^2(\bar{y}) , \quad (\text{G.43})$$

$$3a_1''(\bar{y}) = - [1 - \Phi_0^2(\bar{y})]^2 - \Lambda_1 , \quad (\text{G.44})$$

$$\Phi_1''(\bar{y}) + 2 [1 - 3\Phi_0^2(\bar{y})] \Phi_1(\bar{y}) = -4a_1'(\bar{y})\Phi_0'(\bar{y}) , \quad \Phi_1(\pm\infty) = 0 . \quad (\text{G.45})$$

con solución dada por

$$\Phi(\bar{y}) = \tanh(\bar{y}) - \frac{2}{9}\epsilon \cosh^{-2}(\bar{y}) \left[\bar{y} + \frac{1}{3} \tanh(\bar{y}) \right] , \quad (\text{G.46})$$

$$a(\bar{y}) = -\frac{2}{9}\epsilon \left(\ln \cosh(\bar{y}) + \frac{1}{4} \tanh^2(\bar{y}) \right) , \quad a_1(0) = a'(0) = 0 , \quad (\text{G.47})$$

$$\Lambda_1 = 0 . \quad (\text{G.48})$$

La misma corresponde a una pared de dominio embebido en una variedad con una curvatura leve y que interpola entre dos espaciotiempos de Minkowski.

G.2.1. Fermiones a primer orden en el parametro ϵ

Considere fermiones sobre la pared, donde $\lambda = \sqrt{\beta}$. Así, la ecuación para el modo cero viene dada por

$$k'(\bar{y}) + [2a'(\bar{y}) + \Phi(\bar{y})] k(\bar{y}) = 0 , \quad (\text{G.49})$$

o equivalentemente

$$k^2 '(\bar{y}) + 2 [2a'(\bar{y}) + \Phi(\bar{y})] k^2(\bar{y}) = 0 . \quad (\text{G.50})$$

Desarrollando hasta primer orden en ϵ resulta

$$k^2(\bar{y}) = k_0^2(\bar{y}) + \epsilon k_1^2(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (\text{G.51})$$

tal que a orden cero corresponde al perfil del fermión en un espaciotiempo plano

$$k_0^2(\bar{y}) = \cosh^{-2}(\bar{y}) . \quad (\text{G.52})$$

Por tanto, de la ecuación diferencial para $k^2(\bar{y})$ resulta a primer orden

$$k_1^2 '(\bar{y}) + 2\Phi_0(\bar{y}) k_1^2(\bar{y}) + 2 [2a_1'(\bar{y}) + \Phi_1(\bar{y})] k_0^2(\bar{y}) = 0 , \quad k_1^2(0) = 0 . \quad (\text{G.53})$$

Integrando, se tiene

$$k^2(\bar{y}) = \cosh^{-2}(\bar{y}) + \frac{4}{27}\epsilon \cosh^{-2}(\bar{y}) (3 \ln \cosh \bar{y} + 3\bar{y} \tanh \bar{y} + 2 \tanh^2 \bar{y}) \quad (\text{G.54})$$

cuyo perfil es acampanado en $\epsilon \ll 1$.

G.2.2. Propagador a primer orden en el parametro ϵ

Solución homogénea

Bajo la reparametrización adimensional en $\bar{y} = \alpha y/\delta$ y $\Phi = \phi/\phi_0$ el problema homogéneo

$$u''(\bar{y}) + 2a'(\bar{y})u'(\bar{y}) - \left(\frac{\delta}{\alpha p} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{p_*} k^2(\bar{y}) \right] e^{-2a(\bar{y})} u(\bar{y}) = 0 , \quad u(\pm\infty) = 0 . \quad (\text{G.55})$$

Usando las ecuaciones (G.47), (G.54) y considerando el respectivo desarrollo

$$u(\bar{y}) = u_0(\bar{y}) + \epsilon u_1(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{G.56})$$

donde

$$u_0(\bar{y}) = P_n^m(\tanh \bar{y}), \quad n = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{p^2 \delta}{p_* \alpha}} \right), \quad m = -\frac{\delta}{\alpha} p. \quad (\text{G.57})$$

corresponde a la solución homogénea para una pared de dominio plana donde el factor *warp* y el perfil del fermión son dados por (G.39) y (G.52) respectivamente.

De la ecuación diferencial para $u(\bar{y})$ se tiene

$$u_1''(\bar{y}) - \left(\frac{\delta}{\alpha p} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{p_*} k_0^2(\bar{y}) \right] u_1(\bar{y}) = \left(\frac{\delta}{\alpha p} \right)^2 \left[\frac{2}{p_*} k_1^2(\bar{y}) - 2a_1(\bar{y}) \left(1 + \frac{2}{p_*} k_0^2(\bar{y}) \right) \right] u_0(\bar{y}) - 2a_1'(\bar{y}) u_0'(\bar{y}). \quad (\text{G.58})$$

Así, la solución general viene dada por

$$u_1(\bar{y}) = \mathcal{C}(\bar{y}) u_0(\bar{y}), \quad (\text{G.59})$$

$$\mathcal{C}(\bar{y}) = \int_{\bar{y}} d\xi u_0^{-2}(\xi) \int_{\xi} d\chi \left[\left(\frac{\delta}{\alpha p} \right)^2 \left[\frac{2}{p_*} k_1^2 - 2a_1 \left(1 + \frac{2}{p_*} k_0^2 \right) \right] u_0^2 - a_1' u_0'^2 \right] + C_1 \int_{\bar{y}} d\xi u_0^{-2}(\xi) + C_2. \quad (\text{G.60})$$

con C_1 y C_2 las constantes de integración y por consiguiente

$$u(\bar{y}) = [1 + \epsilon \mathcal{C}(\bar{y})] u_0(\bar{y}), \quad (\text{G.61})$$

Ahora, denotando dos soluciones homogéneas linealmente independientes que saifacen las condiciones de contorno $u(\pm\infty) = 0$ por $u_{\pm}(\bar{y})$ tales que $u_{\pm} = u(\pm\infty) = 0$; se sigue, que la función de Green en el origen viene dada por

$$G_1(p, 0, 0) = \frac{Q^2}{u_+'(0)/u_+(0) - u_-'(0)/u_-(0)} = -\frac{Q^2}{2u_+'(0)/u_+(0)} \quad (\text{G.62})$$

ya que estas soluciones cumplen $u_+(0) = u_-(0)$, y $u_+'(0) = -u_-'(0)$.

Función de Green

Desarrollando en ϵ a primer orden resulta

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{Q^2 u_0(0)}{2 u_0'(0)} \left[1 - \epsilon \frac{u_0(0)}{u_0'(0)} \mathcal{C}'(0) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{G.63})$$

Por otro lado, expandiendo el integrando de (G.60) en torno a cero

$$\mathcal{C}'(0) \simeq \frac{4^{\delta p/\alpha}}{\pi} \Gamma \left[\frac{3}{4} + \frac{\delta p}{2\alpha} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4 \frac{\delta p^2}{\alpha p_*}} \right]^2 \Gamma \left[\frac{3}{4} + \frac{\delta p}{2\alpha} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4 \frac{\delta p^2}{\alpha p_*}} \right]^2 C_1 \quad (\text{G.64})$$

y considerando la reducción de (G.59) para $\bar{y} \gg 1$ entonces

$$u_1(\bar{y}) \simeq -\frac{1}{9\Gamma[\delta p/\alpha]} \bar{y}^2 e^{-\delta p \bar{y}/\alpha} + \frac{\alpha}{2\delta p} \Gamma[\delta p/\alpha] e^{\delta p \bar{y}/\alpha} C_1 . \quad (\text{G.65})$$

En particular, evaluando la anterior expresión para $\bar{y} \rightarrow \infty$ resulta

$$u_1(\infty) = 0 \implies C_1 = 0 \implies \mathcal{C}'(0) = 0 . \quad (\text{G.66})$$

Por lo tanto, la función de Green (G.63) se reduce a la función de Green plana

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{Q^2 u_0(0)}{2 u'_0(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (\text{G.67})$$

En el límite de gravedad débil el sistema tiende a perder la información de la curvatura.

G.2.3. Comentarios

1. Para segundo orden en ϵ

$$\Phi(\bar{y}) = \Phi_0(\bar{y}) + \epsilon \Phi_1(\bar{y}) + \epsilon^2 \Phi_2(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) , \quad (\text{G.68})$$

$$a(\bar{y}) = a_0(\bar{y}) + \epsilon a_1(\bar{y}) + \epsilon^2 a_2(\bar{y}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) , \quad (\text{G.69})$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \epsilon \Lambda_1 + \epsilon^2 \Lambda_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \quad (\text{G.70})$$

se tiene

$$\Phi_2(\bar{y}) = \frac{2}{3645} \cosh^{-2}(\bar{y}) [99\bar{y} + 2(8 - 45\bar{y}^2) \tanh(\bar{y}) + [90z + 19 \tanh(\bar{y})] \cosh^{-2}(\bar{y})] , \quad (\text{G.71})$$

$$a_2(\bar{y}) = \frac{1}{1215} [13 + 16 \ln \cosh(\bar{y}) - 4 \cosh^{-2}(\bar{y}) - 9 \cosh^{-4}(\bar{y}) + 30 (2 + \cosh^{-2}(\bar{y})) \bar{y} \tanh(\bar{y})] , \quad (\text{G.72})$$

$$\Lambda_2 = -\frac{16}{27} , \quad (\text{G.73})$$

donde Φ_2 y a_2 satisfacen $\Phi_2(0) = \Phi_2(\pm\infty) = 0$ y $a_1(0) = a'(0) = 0$ respectivamente. La intención del comentario es hacer notar que a segundo orden en ϵ es necesario introducir una constante cosmológica para garantizar la consistencia del sistema.

2. Consideremos la expansión de la solución homogénea hasta orden n en $\epsilon \ll 1$

$$u(\bar{y}) = \sum_{j=0}^n \epsilon^j u_j(\bar{y}) , \quad u_j(\bar{y}) = u_0(\bar{y}) \mathcal{C}_j(\bar{y}) , \quad u_j(\infty) = 0 . \quad (\text{G.74})$$

Así, la función de Green viene dada por

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{Q^2 u_0(0)}{2 u'_0(0)} \left[1 - \sum_{j=1}^n \epsilon^j f(\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_j)_{z=0} \right] \quad (\text{G.75})$$

donde

$$\mathcal{C}'_j(0) \sim C_{1j} \quad (\text{G.76})$$

siendo C_{1j} una de las constantes de integración de la solución a la ecuación diferencial de u_j .

Adicionalmente ocurre

$$u_j(\bar{y} \gg 1) \sim C_{1j} e^{\delta p \bar{y} / \alpha} \quad (\text{G.77})$$

Por lo tanto, la condición de borde $u_j(\infty) = 0$ implica

$$C_{1j} = 0 \implies \mathcal{C}'_j(0) = 0 \implies f(\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_j)_{z=0} = 0 \quad (\text{G.78})$$

En consecuencia, la función de Green siempre se reduce a

$$G_1(p, 0, 0) = -\frac{Q^2 u_0(0)}{2 u'_0(0)}. \quad (\text{G.79})$$

Bibliografía

- [1] G.R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Mikhail A. Shifman. (Quasi)localized gauge field on a brane: Dissipating cosmic radiation to extra dimensions? *Phys.Lett.*, B497:271–280, 2001.
- [2] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys. Lett.*, B125:136–138, 1983.
- [3] K. Akama. An early proposal of 'brane world'. *Lect. Notes Phys.*, 176:267–271, 1982.
- [4] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.
- [5] Petter Callin and Finn Ravndal. Higher order corrections to the Newtonian potential in the Randall-Sundrum model. *Phys. Rev.*, D70:104009, 2004.
- [6] Gregory Gabadadze, Luca Grisa, and Yanwen Shang. Resonance in asymmetric warped geometry. *JHEP*, 08:033, 2006.
- [7] Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Freddy Ramirez. Breaking the Z_2 symmetry of the Randall-Sundrum scenario and the fate of the massive modes. 2010.
- [8] Robert M. Wald. General Relativity. Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p.
- [9] Iver H. Brevik, Kazuo Ghoroku, Sergei D. Odintsov, and Masanobu Yahiro. Localization of gravity on brane embedded in AdS(5) and dS(5). *Phys. Rev.*, D66:064016, 2002.
- [10] Kazuo Ghoroku, Akihiro Nakamura, and Masanobu Yahiro. Newton's law in de Sitter brane. *Phys. Lett.*, B571:223–228, 2003.
- [11] A. Kehagias and K. Tamvakis. Graviton localization and Newton law for a dS(4) brane in 5D bulk. *Class. Quant. Grav.*, 19:L185, 2002.
- [12] Masato Ito. Localized gravity on de Sitter brane in five-dimensions. *Europhys.Lett.*, 64:295–301, 2003.
- [13] Peter M. Garnavich et al. Supernova limits on the cosmic equation of state. *Astrophys.J.*, 509:74–79, 1998.
- [14] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, 1999.

-
- [15] Xiao-min Wang, Max Tegmark, and Matias Zaldarriaga. Is cosmology consistent? *Phys.Rev.*, D65:123001, 2002.
- [16] Li-Min Wang, R.R. Caldwell, J.P. Ostriker, and Paul J. Steinhardt. Cosmic concordance and quintessence. *Astrophys.J.*, 530:17–35, 2000.
- [17] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. THE EARLY UNIVERSE. REPRINTS. 1988.
- [18] Anzhong Wang. Thick de Sitter 3 branes, dynamic black holes and localization of gravity. *Phys.Rev.*, D66:024024, 2002.
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. Quantum mechanics. V1, 1987.
- [20] Martin Gremm. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett.*, B478:434–438, 2000.
- [21] Rommel Guerrero, Alejandra Melfo, and Nelson Pantoja. Self-gravitating domain walls and the thin-wall limit. *Phys. Rev.*, D65:125010, 2002.
- [22] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.
- [23] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Timothy J. Hollowood, and Yuri Shirman. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys.*, B581:309–338, 2000.
- [24] A. Kehagias and K. Tamvakis. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504:38–46, 2001.
- [25] A. Kehagias and K. Tamvakis. A self-tuning solution of the cosmological constant problem. *Mod. Phys. Lett.*, A17:1767–1774, 2002.
- [26] Shinpei Kobayashi, Kazuya Koyama, and Jiro Soda. Thick brane worlds and their stability. *Phys.Rev.*, D65:064014, 2002.
- [27] Antonio Campos. Critical phenomena of thick branes in warped space-times. *Phys.Rev.Lett.*, 88:141602, 2002.
- [28] Borut Bajc and Gregory Gabadadze. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de Sitter space. *Phys.Lett.*, B474:282–291, 2000.
- [29] Christophe Ringeval, Patrick Peter, and Jean-Philippe Uzan. Localization of massive fermions on the brane. *Phys. Rev.*, D65:044016, 2002.
- [30] Ratna Koley and Sayan Kar. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 22:753–768, 2005.
- [31] Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Jose David Tempo. Fermion localization on thick branes. *Phys. Rev.*, D73:044033, 2006.

-
- [32] Kazuo Ghoroku and Akihiro Nakamura. Massive vector trapping as a gauge boson on a brane. *Phys.Rev.*, D65:084017, 2002.
- [33] Ian I. Kogan, Stavros Mouslopoulos, Antonios Papazoglou, and Graham G. Ross. Multilocalization in multibrane worlds. *Nucl.Phys.*, B615:191–218, 2001.
- [34] Marcela S. Carena, Eduardo Ponton, Timothy M.P. Tait, and C.E.M Wagner. Opaque branes in warped backgrounds. *Phys.Rev.*, D67:096006, 2003.
- [35] Rommel Guerrero, R. Omar Rodriguez, and Rafael S. Torrealba. De Sitter and double asymmetric brane worlds. *Phys. Rev.*, D72:124012, 2005.
- [36] Guenter Goetz and Dirk Notzold. An exact solution for a thick domain wall in General Relativity. FERMILAB-PUB-89-235-A.
- [37] Robert P. Geroch and Jennie H. Traschen. Strings and Other Distributional Sources in General Relativity. *Phys. Rev.*, D36:1017, 1987.
- [38] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim.*, B44S10:1, 1966.
- [39] Milton Abramowitz and Irene Stegun. Handbook of mathematical functions. 1970.
- [40] C. V. Sukumar. Supersymmetric quantum mechanics and its applications. *AIP Conf. Proc.*, 04:166–235, 2005.
- [41] Brian Batell and Tony Gherghetta. Yang-Mills Localization in Warped Space. *Phys.Rev.*, D75:025022, 2007.
- [42] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba. The Stueckelberg field. *Int.J.Mod.Phys.*, A19:3265–3348, 2004.
- [43] Boris Kors and Pran Nath. Aspects of the Stueckelberg extension. *JHEP*, 0507:069, 2005.
- [44] Oscar Castillo-Felisola, Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Alba Ramirez. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004.
- [45] Eisbert R. and Resnick R. Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles. Wiley, New York (1985).
- [46] Inyong Cho and Alexander Vilenkin. Vacuum defects without a vacuum. *Phys.Rev.*, D59:021701, 1999.
- [47] D. Bazeia. Topological solitons in a vacuumless system. *Phys.Rev.*, D60:067705, 1999.
- [48] Martin Gremm. Thick domain walls and singular spaces. *Phys.Rev.*, D62:044017, 2000.
- [49] G. Poschl and E. Teller. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Z.Phys.*, 83:143–151, 1933.

-
- [50] Malgorzata Mochol, Marcin Plodzień, and Krzysztof Sacha. Dark soliton in disorder potential. *Phys. Rev.*, A85:023627, 2012.
- [51] John Lekner. Reflectionless eigenstates of the sech^2 potential. *Am. J. Phys.*, 75:1151, 2007.
- [52] S.L. Dubovsky and V.A. Rubakov. On models of gauge field localization on a brane. *Int.J.Mod.Phys.*, A16:4331–4350, 2001.
- [53] Bruno Boisseau, Peter Forgacs, and Hector Giacomini. An Analytical approximation scheme to two point boundary value problems of ordinary differential equations. *J.Phys.A*, A40:F215–F222, 2007.
- [54] Filipe Bonjour, Christos Charmousis, and Ruth Gregory. Thick selfgravitating plane symmetric domain walls. 1999.
- [55] Pierre Ramond. Field theory. A modern primer. *Front.Phys.*, 51:1–397, 1981.
- [56] A. Zee. Quantum field theory in a nutshell. 2003.
- [57] I. Stakgold. Green's functions and Boundary Value Problems. Wiley, New York (1979).
- [58] R.M. Cavalcanti. Exact Green's functions for delta function potentials and renormalization in quantum mechanics. *Rev.Bras.Ens.Fis.*, 21:336, 1999.