UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

NOTAS SOBRE (CON)SIMILARIDADES Y CONGRUENCIAS ENTRE A, A^T, $\overline{A}$ Y A^*

DAICY M. PÉREZ S.

Barquisimeto, 2012

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”

NOTAS SOBRE (CON)SIMILARIDADES Y CONGRUENCIAS ENTRE A, A^T, $\overline{A}$ Y A^*

Trabajo presentado para optar a la categoría de Asistente
en el Escalafón del Personal Docente y de Investigación

Por: DAICY M. PÉREZ S.

Barquisimeto, 2012

Dedico este trabajo a
mi esposo Ismael
y a mis amadas hijas
Andrea Estefanía y
Camila Alejandra

Índice general

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”

NOTAS SOBRE (CON)SIMILARIDADES Y CONGRUENCIAS ENTRE A, A^T, $\overline{A}$ Y A^*

Autora: Daicy M. Pérez S.

RESUMEN

En estas notas se desarrolla en extenso un artículo de J. Vermeer, “On(consimilarities) and congruences between A and A^*, A^T or $\overline{A}$”, ver [17]. Para una matriz A estudiamos la relación de ser similar (respectivamente consimilar, ^{T}congruente o *congruente) a una matriz simétrica, Hermitiana o real. Encontramos una clase de unificación para este problema, que llamaremos la proposición estándar. Tambíen se estudian la similaridad, consimilaridad, la ^{T}congruencia, la * congruencia entre una matriz, su transpuesta, su conjugada y su adjunta, además de la conexión entre estas relaciones y las respectivas relaciones con sus ^{T}cocuadrados y *cocuadrados, así como la correspondencia con matrices obtenidas de evaluaciones en polinomios, realizando de esta manera un estudio inicial hacia la clasificación de estos objetos en la teoría matricial.

Introducción

La Teoría sobre Matrices ha tenido recientemente un gran auge y vertiginoso desarrollo, luego de que en la década de los sesenta apareciesen los libros "Matrix Theory" de Felix Gantmacher, ver [7], e "Introduction to Matrix Analysis" de Richard Bellman, ver [3]. Las matrices han desempeñado un rol importante en diversas áreas de las matemáticas como: Análisis, Teoría de Grafos, Sistemas Dinámicos, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Juegos, Estadística y Probabilidad, Programación, Optimización entre otras.

La relación de similaridad corresponde a la representación matricial de una misma transformación lineal pero en diferentes bases, mientras que la relación de ^{T}congruencia corresponde a formas bilineales equivalentes. Las relaciones de similaridad, consimilaridad, ^{T}congruencia y *congruencias definen relaciones de equivalencias sobre $M_n(\mathbb{C})$, permitiendo particionar y clasificar $M_n(\mathbb{C})$ en clases de equivalencias. Una forma usual para identificar estas clases de equivalencias, es introduciendo una forma canónica para la correspondiente relación. Para la relación de similaridad es la conocida Forma Canónica de Jordan, una forma canónica para la ^{T}congruencia fue obtenida inicialmente por Turnbull y Aitken y presentada en su libro "An introduction to the Theory Canonical Matrix", ver [1], más tarde Horn y Sergeichuk en [10] obtuvierón la Forma Canónica ^{T}congruente y la Forma Canónica *congruentes que acá emplearemos basándose en un trabajo previo de Sergeichuk,[12]. En 1980, Gow en [5] usó la clasificación de formas bilineales dada por Riehm para demostrar que cualquier matriz cuadrada no singular sobre cualquier campo es ^{T}congruente a su transpuesta, más, aún Gow demuestra que la matriz de transformación puede ser elegida de manera que sea una involución. Independientemente Ballantine y Yip en 1982 demuestran en [1] el mismo resultado sin la hipótesis de no singularidad.

En [13] Taussky y Zassenhaus demuestran que toda matriz sobre cualquier campo es similar a su transpuesta vía una matriz simétrica y que toda matriz no singular de similaridad entre una matriz y su transpuesta es simétrica si y sólo si el polinomio minimal de la matriz coincide con su polinomio característico, es decir que la matriz es similar a una matriz companion, mientras que en [4] Dokovic e Ikramov demuestran usando de nuevo la clasificación dada por Riehm que toda matriz sobre cualquier campo es ^{T}congruente a su transpuesta, por último Horn y Sergeichuk en el 2002 demuestran en [9] que toda matriz sobre cualquier campo de característica diferente a dos es *congruente a su transpuesta y que la matriz de transformación puede ser elegida de manera que sea coninvolutoria.

En estas notas se desarrolla en extenso un artículo de J. Vermeer, "On(consimilarities) and congruences between A and A^{*}, A^{T} or $\overline{A}$", ver [17]. Para una matriz A, estudiamos la relación de ser similar (respectivamente consimilar, ^{T}congruente o *congruente) a una matriz simétrica, Hermitiana o real. Encontramos una clase de unificación para este problema, que llamaremos la proposición estándar. Tambíen se estudian la similaridad, consimilaridad, la ^{T}congruencia, la * congruencia entre una matriz, su transpuesta, su conjugada y su adjunta, además de la conexión entre estas relaciones y las respectivas relaciones con sus ^{T}cocuadrados y *cocuadrados, así como la correspondencia con matrices obtenidas de evaluaciones en polinomios, realizando de esta manera un estudio inicial hacia la clasificación de estos objetos en la teoría matricial.

El presente trabajo esta estructurado en seis capítulos,

- En el Capítulo 1 se definen las diversas relaciones de equivalencia que se estudiaran sobre el espacio de las matrices cuadradas: similaridad, consimilaridad, ^{T}congruencia y la *congruencia y se enuncian los teoremas principales. Es conocido que toda matriz cuadrada es similar a una matriz simétrica, sin embargo en la Proposición 1.0.3 se demuestra que la transformación de similaridad puede ser una matriz simétrica. Los Teoremas 1.0.4 y 1.0.5 son referentes a la similaridad, mientras que en los Teoremas 1.0.6, 1.0.7 y 1.0.8 se estudia la consimilaridad, los Teoremas 1.0.9 y 1.0.10 están dedicados a la ^{T}congruencia, por último en los Teoremas 1.0.11 y 1.0.12 se analiza la *congruencia.

- En el Capítulo 2, el cual no está presente en el artículo de Vermeer, se define la matriz companion de un polinomio la cual está asociada a la conmutatividad de matrices. Se introduce el concepto de matriz polinómica y se estudia su relación con la teoría de polinomios, se demuestra que la definición dada en el artículo de Veemer es equivalente con la defición clásica de matriz no derogatoria. Las matrices no derogatorias están fuertemente relacionadas con el estudio de caracterización de las transformaciones de similaridad, consimilaridad, ^{T}congruencias y *congruencias. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea no derogatoria y se demuestra que ella es invariante vía similaridad. Se introducen los concepto de matriz reversible y matriz de Toeplitz, se demuestran algunas propiedades de las matrices reversibles, que el conjunto de matrices de Toeplitz constituyen un espacio vectorial y que el producto de matrices Toeplitz trinagulares superior también es una matriz de Toeplitz triangular superior y además, si la primera entrada de dicha matriz es no nula entonces ella es no singular y su inversa también es una matriz de Toeplitz triangular superior.

- En el Capítulo 3 se estudia la relación de similaridad, respecto al artículo original de Vermeer se adicionan

  a) El Lema 3.1.1, en el cual se demuestra la Ecuación de Sylvester para el caso homogéneo.

  b) La Proposición 3.1.2, la cual caracteriza las matrices que conmutan con una matriz no derogatoria, como matrices que son evaluaciones de polinomios en dicha matriz no derogatoria.

  c) La Proposición 3.1.5, en la cual se demuestra que toda matriz es similar a una matriz simétrica.

  d) La Proposición 3.1.6, en donde se demuestra que toda matriz no singular es la "raíz cuadrada" de otra matriz la cual es una evaluación en un polinomio en la matriz no singular.

e) La Proposición 1.0.3 en la cual se demuestra que toda matriz es similar a una matriz simétrica vía una matriz simétrica.

f) El Lema 3.2.3, en el cual se caracterizan las matrices Hermitianas definidas positivamente como “raices cuadradas” de matrices Hermitianas.

g) La Proposición 3.2.5, en la cual se caracteriza que las matrices que son similares a su conjugada como las matrices que son similares a una matriz real.

- En el Capítulo 4 se estudia la relación de consimilaridad, respecto al artículo original de Vermeer se adicionan

  a) El Teorema 4.1.9, donde se caracteriza las matrices que están en $C^{\text{con}}(A, A)$ como evaluaciones en polinomios reales en $A\overline{A}$ siempre que $A\overline{A}$ sea no derogatoria y A no singular.

  b) La Proposición 4.3.1, en el cual se caracterizan las matrices A que son ^{T}congruentes a una matriz triangular superior vía una matriz unitaria como aquellas matrices tales que los autovalores de $A\overline{A}$ sean no negativos.

  c) El Corolario 4.3.2 (Factorización de Tagaki), el cual demuestra que toda matriz simétrica es ^{T}congruente a una matriz diagonal real vía una matriz unitaria.

  d) La demsotración de la Propsoición 4.3.3, la Cuarta Proposición Estándar.

  e) La demostración de la Proposición 4.4.1, la Quinta Proposición Estándar.

  f) La demostración de la Proposición 4.4.2, donde se caracteriza las matrices que están en $C^{\text{con}}(A, \overline{A})$ como el producto de evaluaciones en polinomios reales en $A\overline{A}$ por A, siempre que $A\overline{A}$ sea no derogatoria y A no singular.

  g) La demostración de la Proposición 4.4.3, donde para matrices cuyo producto por su conjugada sea no derogatorio se caracterizan las transformaciones de consimilaridad entre la matriz y su conjugada, su adjunta y su transpuesta, en los casos que la matriz sea simétrica o, Hermitiana y no singular.

- En el Capítulo 5 se estudia la relación de ^{T}congruencia, respecto al artículo original de Vermeer se adicionan

  a) La demostración de la Proposición 5.1.2, donde se caracterizan para matrices no singulares que ellas sean ^{T}congruentes através que sus ^{T}cocuadrados sean similares.

  b) La demostración de la Proposición 5.1.3, la Sexta Proposición Estándar.

  c) La demostración del Lema 5.3.2

  d) La demostración del Lema 5.3.3, donde se caracterizan las formas canónicas ^{T}congruentes, para matrices que sean ^{T}congruentes a su conjugada

  e) La demostración del Teorema 1.0.10

  f) Se desarrolla el Ejemplo 5.3.8

- En el Capítulo 6 se estudia la relación de *congruencia, respecto al artículo original de Vermeer se adicionan

  a) La demostración de la Proposición 6.0.2, donde se demuestra que dos matrices no singulares son *congruentes siempre que sus *cocuadrados sean similares.

  b) La demostración de la Proposición 6.0.3, la Séptima Proposición Estándar.

  c) La demostración del Lema 6.2.1, donde se demuestra que una matriz es * a su conjugada si y sólo si es * a su adjunta.

  d) La demostración del Lema 6.2.5

  e) La demostración del Lema 6.2.6, donde se caracterizan las transformaciones *congruentes involutivas entre una matriz y su adjunta como el producto entre una *conguencia involutiva particular entre la matriz y su adjunta por la evalución en un polinomio real del *cocuadrado de la matriz, siempre que el *cocuadrado sea no derogatorio.

Capítulo 1

Teoremas Principales

Todas las matrices se asumen que son complejas, a menos que se diga lo contrario.

Definición 1.0.1. *Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, p_A denotará su polinomio característico y mp_A denotará su polinomio minimal. La matriz A es no derogatoria si $p_A = mp_A$.*

Definición 1.0.2. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, diremos que A, B son:*

1. *Similares si existe una matriz no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = S^{-1}BS$. En este caso S (y S^{-1}) se dice que es una transformación de similaridad entre A y B.*

2. *Consimilares si existe una matriz no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $SA\overline{S^{-1}} = B$. En este caso S (y S^{-1}) se dice que es una transformación de consimilaridad entre A y B.*

3. *^{T}congruentes si existe una matriz no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^T = B$*

4. **congruentes si existe una matriz no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^* = B$*

Para una matriz A investigaremos la relación de ser similar (respectivamente consimilar, ^{T}congruente o *congruente) a una matriz simétrica, Hermitiana o real. Encontramos una clase de unificación para este problema, que llamaremos la proposición estándar. Muchos de estos resultados en esta proposición estándar en verdad son estándar, pero algunos apuntan a nuevos resultados, como:

Proposición 1.0.3. *Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es similar a una matriz simétrica vía una matriz simétrica.*

Tratamos de encontrar similaridades (consimilaridades, ^{T}congruencias, *congruencias) entre A y A^T, y entre A y $\overline{A}$. En todos estos casos conectamos estos problemas particulares a los resultados de la proposición estándar.
En particular, estamos interesados en similaridades Hermitianas entre A y A^*. Demostraremos los siguientes teoremas,

Teorema 1.0.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no derogatoria y asumamos que A y A^* son similares vía una matriz Hermitiana V. Supongamos que $S \in M_n(\mathbb{C})$ es tal que $SA = A^*S$. Entonces S es Hermitiana si y sólo si existe un polinomio real p de grado menor que n tal que $S = Vp(A)$*

Nuestro segundo objetivo principal es obtener resultados correspondiente al siguiente teorema de O. Taussky y H. Zassenhaus

Teorema 1.0.5. *[16] Sea $\mathbb{F}$ un campo y $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces:*

1. *Existe una matriz simétrica $X \in GL_n(\mathbb{F})$ tal que $XAX^{-1} = A^T$*

2. *Toda matriz $X \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $XA = A^TX$ es simétrica sii A es no derogatoria*

3. *Toda matriz $X \in GL_n(\mathbb{F})$ tal que $XAX^{-1} = A^T$ es simétrica sii A es no derogatoria*

Para consimilares obtenemos:

Teorema 1.0.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ entonces:*

1. *A es consimilar a una matriz Hermitiana vía una matriz simétrica*

2. *Existe una matriz simétrica de consimilaridad $V \in GL_n(\mathbb{C})$entre A y A^**

3. *Si $A\overline{A}$ es no derogatoria entonces todas las matrices $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $VA = A^*\overline{V}$ son simétricas.*

4. *Si A en no singular y cada matriz $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $VA = A^*\overline{V}$ es simétricas, entonces $A\overline{A}$ es no derogatoria*

Teorema 1.0.7. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *Existe una matriz Hermitiana $V \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $VA\overline{V^{-1}} = A^T$*
2. *Si A es no singular y $A\overline{A}$es no derogatoria, entonces toda matriz $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $VA = A^T\overline{V}$ es Hermitiana*

Teorema 1.0.8. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *A es consimilar a una matriz real vía una coninvolución*
2. *A es consimilar a $\overline{A}$ vía una coninvolución*

Para ^{T}congruencias se tiene:

Teorema 1.0.9. *([6],[8] o [2]) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *A es ^{T}congruente a A^T vía una involución*
2. *Si A es no singular y su *cocuadrado $A(A^{-1})^T$ es no derogatoria entonces toda matriz $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^T = A^T$ es una involución.*

Teorema 1.0.10. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es ^{T}congruente a una matriz real*
2. *A es ^{T}congruente a una matriz real vía una coninvolución*
3. *A y $\overline{A}$ son ^{T}congruente*
4. *A y $\overline{A}$ son ^{T}congruente vía una coninvolución*
5. *A y A^* son ^{T}congruente*
6. *A y A^* son ^{T}congruente vía una coninvolución*

7. *A es* ^{T}*congruente a una matriz Hermitiana*

8. *A es* ^{T}*congruente a una matriz Hermitiana vía una coninvolución*

Para *congruencias tenemos

Teorema 1.0.11. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. *A es* **congruente a una matriz simétrica vía una coninvolución*

2. *([12])A es* **congruente a* A^T *vía una coninvolución*

3. *Si A es no singular y su* **cocuadrado* $A(A^{-1})^*$ *es no derogatoria entonces toda matriz* $S \in GL_n(\mathbb{C})$ *tal que* $SAS^* = A^T$ *es una coninvolución.*

Teorema 1.0.12. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, las siguientes aserciones son equivalentes:*

1. *A es* **congruente a una matriz real*

2. *A es* **congruente a una matriz real vía una coninvolución*

3. *A y* $\overline{A}$ *son* **congruente*

4. *A y* $\overline{A}$ *son* **congruente vía una coninvolución*

5. *A y* A^* *son* **congruente*

6. *A y* A^* *son* **congruente vía una involución*

No sabemos si los resultados en los Teoremas 1.0.7(2), 1.0.9(2) y 1.0.11(3) pueden ser ampliados a "si y sólo si" (quizás únicamente en el caso no singular) como en el Teorema 1.0.5 y 1.0.6(3)

Capítulo 2

Preliminares

Teorema 2.0.1. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices con B no singular y $p(\lambda)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}$, entonces $p(B^{-1}AB) = B^{-1}p(A)B$*

Demostración. Si m es un entero positivo $(B^{-1}AB)^m = B^{-1}A^mB$, luego si $p(\lambda) = \sum_{m=1}^{k} a_m\lambda^m$ entonces

$$p(B^{-1}AB) = \sum_{m=1}^{k} a_m(B^{-1}AB)^m = \sum_{m=1}^{k} a_m B^{-1}A^m B = B^{-1}\left(\sum_{m=1}^{k} a_m A^m\right) B = B^{-1}p(A)B$$

□

Definición 2.0.2. *$A(\lambda)$ es una λ-matriz o matriz polinomial si cada coeficiente de $A(\lambda)$ es un polinomio en λ con coeficiente en algún campo $\mathbb{F}$, esto es, si el elemento (i,j) de $A(\lambda)$ tiene grado k entonces $a_{ij}(\lambda) = a_{ij}^{(k)}\lambda^k + a_{ij}^{(k-1)}\lambda^{k-1} + \cdots + a_{ij}^{(1)}\lambda + a_{ij}^{(0)}$ con $a_{ij}^{(t)} \in \mathbb{K}$ y $a_{ij}^{(k)} \neq 0$. Diremos que $A(\lambda)$ es de grado k , si $k = \text{máx}\{\text{grado } a_{ij}(\lambda) : i,j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. Si $A(\lambda)$ es de grado k, se define $A_r(r = 0,1,\ldots,k)$ como la λ-matriz tal que para cada (i,j) la entrada (i,j) de A_r es $a_{ij}^{(r)}$, así $A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda^1 + A_0$*

Ejemplo 2.0.3. *Sea $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-\lambda+2 \\ 2\lambda & \lambda^2-3\lambda-1 \end{bmatrix}$, $A(\lambda)$ es de grado 3.*

Sean $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, y $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, entonces:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & \lambda^3\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda & -\lambda\\ 2\lambda & -3\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\lambda^3+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\lambda^2+$$
$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=A_3\lambda^3+A_2\lambda^2+A_1\lambda+A_0$$

Definición 2.0.4. *Sea $A(\lambda)$ una λ-matriz de grado k, diremos que $A(\lambda)$ es regular si* $\det A_k \neq 0$

Sean $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ matrices de orden $n \times n$, entonces se pueden definir $A(\lambda)+B(\lambda)$ y $A(\lambda)B(\lambda)$ de manera usual.
Si grado $A(\lambda)=k$ y grado $B(\lambda)=m$, sea $l=\text{máx}\{k,m\}$, entonces $A(\lambda)=A_l\lambda^l+A_{l-1}\lambda^{l-1}+\cdots+A_1\lambda+A_0$ y $B(\lambda)=B_l\lambda^l+B_{l-1}\lambda^{l-1}+\cdots+B_1\lambda+B_0$, luego se tiene que:

1. $A(\lambda)+B(\lambda)=(A_l+B_l)\lambda^l+(A_{l-1}+B_{l-1})\lambda^{l-1}+\cdots+(A_1+B_1)\lambda+(A_0+B_0)$, de aquí que grado $(A(\lambda)+B(\lambda))\leq l$

2. $A(\lambda)B(\lambda)=A_kB_m\lambda^{k+m}+(A_kB_{m-1}+A_{k-1}B_m)\lambda^{k+m-1}+(A_kB_{m-2}+A_{k-1}B_{m-1}+A_{k-2}B_m)\lambda^{k+m-2}+\cdots+(A_2B_0+A_1B_1+A_0B_2)\lambda^2+(A_1B_0+A_0B_1)\lambda+A_0B_0$, luego grado $(A(\lambda)B(\lambda))\leq k+m$

Nótese que puede acontecer que $A_kB_m=0$ pero que $A_k\neq 0$ y $B_m\neq 0$, pero si $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son regulares entonces $\det A_k, \det B_m \neq 0$ luego $\det(A_kB_m)\neq 0$, así $A_kB_m\neq 0$ y por lo tanto $A(\lambda)B(\lambda)$ es regular y de grado $k+m$
Sean $A(\lambda), B(\lambda)$ $\lambda-$matrices y $B(\lambda)$ regular de grado m, diremos que $Q(\lambda)$ es un cociente derecho al dividir $A(\lambda)$ por $B(\lambda)$ si existe una matriz $R(\lambda)$ tal que $A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda)$ y $R(\lambda)=0$ ó grado $R(\lambda)<m$, $R(\lambda)$ recibe el nombre de un resto derecho; análogamente diremos que $\hat{Q}(\lambda)$ es un cociente izquierdo al dividir $A(\lambda)$ por $B(\lambda)$ si existe una matriz $\hat{R}(\lambda)$ tal que $A(\lambda)=\hat{Q}(\lambda)B(\lambda)+\hat{R}(\lambda)$ y $\hat{R}(\lambda)=0$ ó grado $\hat{R}(\lambda)<m$, $\hat{R}(\lambda)$ recibe el nombre de un resto izquierdo.
Si $R(\lambda)=0$ diremos que $A(\lambda)$ es divisible por la derecha por $B(\lambda)$ y que $Q(\lambda)$ es el divisor derecho de $A(\lambda)$ sobre la división por $B(\lambda)$; análogamente si $\hat{R}(\lambda)=0$ diremos que $A(\lambda)$

es divisible por la izquierda por $B(\lambda)$ y que $\hat{Q}(\lambda)$ es el divisor izquierdo de $A(\lambda)$ sobre la división por $B(\lambda)$.

Proposición 2.0.5. *Sean $A(\lambda), B(\lambda)$ $\lambda-$matrices de grado k y m respectivamente y $B(\lambda)$ regular. Entonces existe un cociente derecho y un resto derecho de la división de $A(\lambda)$ por $B(\lambda)$ (similarmente por la izquierda)*

Demostración.

a) Si $k < m$, tomamos $Q(\lambda) = 0$ y $R(\lambda) = A(\lambda)$

b) Si $k \geq m$, sabemos que $B(\lambda) = B_m\lambda^m + B_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$ con $\det B_m \neq 0$. Luego

$$\begin{aligned} A_kB_m^{-1}\lambda^{k-m}B(\lambda) &= A_kB_m^{-1}\lambda^{k-m}(B_m\lambda^m + B_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0) \\ &= A_k\lambda^k + A_kB_m^{-1}B_{m-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_kB_m^{-1}B_1\lambda^{k-(m-1)} + A_kB_m^{-1}B_0\lambda^{k-m} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0 \\ &= A_kB_m^{-1}\lambda^{k-m}B(\lambda) - A_kB_m^{-1}B_{m-1}\lambda^{k-1} - \cdots - A_kB_m^{-1}B_0\lambda^{k-m} \\ &\quad + A_{k-1}B_m^{-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0 \\ &= A_kB_m^{-1}\lambda^{k-m}B(\lambda) + A^{(1)}(\lambda) \end{aligned}$$

donde $A^{(1)}(\lambda) = -A_kB_m^{-1}B_{m-1}\lambda^{k-1} - \cdots - A_kB_m^{-1}B_0\lambda^{k-m} + A_{k-1}B_m^{-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$. Luego $A^{(1)}(\lambda)$ es una $\lambda-$matriz cuyo grado k_1 no excede a $k-1$. Si $k_1 \geq m$ se repite el proceso y se tendría que: $A^{(1)}(\lambda) = A_{k_1}^{(1)}B_m^{-1}\lambda^{k_1-m}B(\lambda) + A^{(2)}(\lambda)$, donde $A^{(2)}(\lambda)$ es una $\lambda-$matriz cuyo grado k_2 no excede a $k_1 - 1$.

Se continua con este proceso hasta obtener una $\lambda-$matriz $A^{(r)}(\lambda)$ de grado $k_r < m$ y $k_{r-1} \geq m$, de aquí: $A(\lambda) = (A_kB_m^{-1}\lambda^{k-m} + A^{(1)}(\lambda) + A^{(2)}(\lambda) + \cdots + A^{(r-1)}(\lambda))B(\lambda) + A^{(r)}(\lambda)$

$\square$

Proposición 2.0.6. *Sean $A(\lambda), B(\lambda)$ $\lambda-$matrices con $B(\lambda)$ regular. Entonces el cociente derecho, el cociente izquierdo, el resto derecho y el resto izquierdo al dividir $A(\lambda)$ por $B(\lambda)$ son únicos.*

Demostración. Sea m el grado de $B(\lambda)$, $B(\lambda) = B_m\lambda^m + \cdots + B_1(\lambda) + B_0$ con $\det B_m \neq 0$ y $Q_1(\lambda), Q_2(\lambda), R_1(\lambda)$,
$R_2(\lambda)$ $\lambda-$matrices tales que

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda) \text{ con } R_1(\lambda) = 0 \text{ ó grado } R_1(\lambda) < m$$
$$A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda) \text{ con } R_2(\lambda) = 0 \text{ ó grado } R_2(\lambda) < m$$

Luego $[Q_1(\lambda)-Q_2(\lambda)]B(\lambda) = R_2(\lambda)-R_1(\lambda)$. Si $Q_1(\lambda)-Q_2(\lambda) \neq 0$ entonces $Q_1(\lambda)-Q_2(\lambda) = C \neq 0$ o $Q_1(\lambda) - Q_2(\lambda) = C_s\lambda^s + C_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0$ con $s \geq 1$ y $C_s \neq 0$.
Si $Q_1(\lambda) - Q_2(\lambda) = C \neq 0$ entonces $CB_m \neq 0$, recordemos que B_m es no singular, y luego grado $R_2(\lambda) - R_1(\lambda) =$ grado $CB_m = m(\rightarrow\leftarrow)$
Si $Q_1(\lambda)-Q_2(\lambda) = C_s\lambda^s+C_{s-1}\lambda^{s-1}+\cdots+C_1\lambda+C_0$ entonces $C_sB_m \neq 0$, de nuevo dado que B_m es no singular, y luego grado $R_2(\lambda)-R_1(\lambda) =$ grado $[Q_1(\lambda)-Q_2(\lambda)]B(\lambda) = s+m > m(\rightarrow\leftarrow)$
Así $Q_1(\lambda) - Q_2(\lambda) = 0$ y por lo tanto $R_2(\lambda) - R_1(\lambda) = 0$ □

Sea $A(\lambda)$ una $\lambda-$matriz y B una matriz $n \times n$, se define el valor derecho $A(B)$ de $A(\lambda)$ en B por $A(B) = A_kB^k + A_{k-1}B^{k-1} + \cdots + A_1B + A_0$ y el valor izquierdo, $\hat{A}(B)$, de $A(\lambda)$ en B por $\hat{A}(B) = B^kA_k + B^{k-1}A_{k-1} + \cdots + BA_1 + A_0$

Teorema 2.0.7. *El resto derecho e izquierdo de una $\lambda-$matriz $A(\lambda)$ sobre $\lambda I_n - B$ son $A(B)$ y $\hat{A}(B)$ respectivamente.*

Demostración. Como $I_n\lambda^j - B^j = (I_n\lambda^{j-1} + B\lambda^{j-2} + \cdots + B^{j-2}\lambda + B^{j-1})(I_n\lambda - B)$, entonces

$I_n\lambda^j - B^j = \hat{C}_j(\lambda)(I_n\lambda - B)$ con $\hat{C}_j(\lambda) = I_n\lambda^{j-1} + B\lambda^{j-2} + \cdots + B^{j-2}\lambda + B^{j-1}$, así:

$$\begin{aligned}
A_j\lambda^j - A_jB^j = A_j\hat{C}_j(\lambda)(I_n\lambda - B) &\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} A_j\lambda^j - A_jB^j = \sum_{j=1}^{k} A_j\hat{C}_j(\lambda)(I_n\lambda - B)\\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} A_j\lambda^j - A_jB^j = \sum_{j=1}^{k} A_j\hat{C}_j(\lambda)(I_n\lambda - B)\\
&\Rightarrow A(\lambda) - A(B) = C(\lambda)(I_n\lambda - B),\ \ C(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} A_j\hat{C}_j(\lambda)\\
&\Rightarrow A(\lambda) = C(\lambda)(I_n\lambda - B) + A(B)
\end{aligned}$$

Nótese que $I_n\lambda - B$ es regular, luego por unicidad se tiene que el resto derecho de dividir $A(\lambda)$ por $I_n\lambda - B$ es $A(B)$ □

Corolario 2.0.8. *La $\lambda-$matriz $A(\lambda)$ es divisible por la derecha por $I_n\lambda - B$ con resto 0 sii $A(B) = 0$ (analogamente por la izquierda)*

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y $c(\lambda) = \det(I_n\lambda - A)$ el polinomio característico de A. Definamos $B(\lambda) = adj(I_n\lambda - A)$, de la definción de matriz adjunta se tiene que $B(\lambda)$ es una $\lambda-$matriz sobre $\mathbb{F}$ de orden n y grado $n-1$ tal que $(I_n\lambda - A)B(\lambda) = B(\lambda)(I_n\lambda - A) = c(\lambda)I_n$. Ahora $c(\lambda)I_n$ es una $\lambda-$matriz de grado n y la ecuación anterior implica que esta matriz es divisible por la derecha e izquierda por $I_n\lambda - A$ con resto 0. Así se tiene que:

Corolario 2.0.9 (Teorema de Cayley-Hamilton). *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ con polinomio característico $c(\lambda)$, entonces $c(A) = 0$*

Proposición 2.0.10. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $c_A(\lambda)$ es su polimonio característico, entonces λ es un autovalor de A si sólo si $\overline{\lambda}$ es un autovalor de $\overline{A}$*

Demostración. $c_{\overline{A}}(\lambda) = \det(\lambda I - \overline{A}) = \det(\overline{\overline{\lambda}I - A}) = \overline{\det(\overline{\lambda}I - A)} = \overline{c_A(\overline{\lambda})}$, luego $c_{\overline{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow c_A(\overline{\lambda}) = 0$. O también λ es un autovalor de $A \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n, Av = \lambda v \Leftrightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v} \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ es un autovalor de $\overline{A}$ □

Sea p un polinomio escalar con coeficiente en un campo $\mathbb{F}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y $c(\lambda) = \det(I_n\lambda - A)$ su polinomio característico, entonces existe un polinomio r nulo o de grado menor que n tal que $p(A) = r(A)$, en efecto: existen polinomios q, r con r nulo o de grado menor que n tal que $p(\lambda) = q(\lambda)c(\lambda) + r(\lambda)$. Luego $p(A) = q(A)c(A) + r(A) = q(A)0 + r(A) = r(A)$. Diremos que un polinomio escalar p es un polinomio aniquilador de A si $p(A) = 0$. El polinomio característico c de A es un polinomio aniquiladaor de A de grado n.

Un polinomio minimal de A es un polinomio mónico ψ tal que $\psi(A) = 0$ y grado ψ = mín{grado $p : p(A) = 0$ y grado $p > 0$}. La existencia de tal polinomio esta garantizada por el Principio del Buen Ordenamiento.

Teorema 2.0.11. *Si ψ es un polinomio minimal de A, entonces todo polinomio aniquilador de A es divisible por ψ.*

Demostración. Sea p un polinomio tal que $p(A) = 0$, existen polinomios q, r tales que $p(\lambda) = q(\lambda)\psi(\lambda) + r(\lambda)$ con r nulo o grado $r <$ grado ψ. Luego $0 = p(A) = q(A)\psi(A) + r(A) = q(A)0 + r(A) = r(A)$ y por la elección de ψ se tiene $r = 0$. Así $p(\lambda) = q(\lambda)\psi(\lambda)$. □

Teorema 2.0.12. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, entonces el polinomio minimal de A es único.*

Demostración. Sean ψ_1, ψ_2 polinomios minimales de A, por el teorema anterior existe un polinomio $q(\lambda)$ tal que $\psi_2(\lambda) = q(\lambda)\psi_1(\lambda)$. Dado que ambos son de grado mínimo, existe $c \in \mathbb{F}$ tal que $q(\lambda) = c$, y como ambos son mónicos se tiene que $c = 1$. Luego $\psi_1 = \psi_2$ □

Teorema 2.0.13. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ matrices similares, entonces el polinomio característico de A es igual al polinomio característico de B y el polinomio minimal de A es igual al polinomio minimal de B.*

Demostración. Sea $S \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ no singular tal que $A = S^{-1}BS$, entonces:

a) $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - S^{-1}BS) = \det(S^{-1}(\lambda I_n - B)S) = detS^{-1} \det(\lambda I_n - B) \det S = \det(\lambda I_n - B)$

b) Para todo polinomio $p(\lambda)$ se tiene que $p(A) = p(S^{-1}BS) = S^{-1}p(B)S$, y como S es no singular $p(A) = 0$ si y sólo si $p(B) = 0$

□

Definición 2.0.14. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, se define el espectro de A el cual denotaremos por $\sigma(A)$ como el conjunto $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \lambda es\ un\ autovalor\ de\ A\}$*

Corolario 2.0.15. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ matrices similares, entonces $\sigma(A) = \sigma(B)$*

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y $B(\lambda) = adj(I_n\lambda - A)$ la $\lambda-$matrix de grado $n-1$ y orden $n \times n$. Los n^2 elementos de $B(\lambda)$ son polinomios escalares en λ sobre $\mathbb{F}$. Sea $d_{n-1}(\lambda)$ el polinomio mónico que es un máximo común divisor de los n^2 elementos de $B(\lambda)$. Entonces existe una única $\lambda-$matriz $C(\lambda)$ tal que $B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)C(\lambda)$, tal $\lambda-$matriz recibe el nombre de la adjunta reducida. Ahora $(I_n\lambda - A)B(\lambda) = c(\lambda)I_n$, así $c(\lambda)I_n = d_{n-1}(\lambda)(I_n\lambda - A)C(\lambda)$. Luego $c(\lambda)$ es divisible sin resto por $d_{n-1}(\lambda)$, y dado que ambos c y d_{n-1} son mónicos, existirá un polinomio mónico $\psi^*(\lambda)$ tal que $c(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)\psi^\star(\lambda)$. Luego $\psi^\star(\lambda)I_n = (I_n\lambda - A)C(\lambda)$. Así, la $\lambda-$matriz $\psi^\star(\lambda)I_n$ es divisible por la izquierda por $(I_n\lambda - A)$ sin resto y por el Corolario 2.0.8 se tiene que $\psi^\star(A) = 0$, es decir, $\psi^\star(\lambda)$ es un polinomio aniquilador de A. Si $\psi(\lambda)$ es el polinomio minimal de A, entonces existe un polinomio mónico $\theta(\lambda)$ tal que $\psi^\star(\lambda) = \psi(\lambda)\theta(\lambda)$. Dado que $\psi(A) = 0$ se sigue de nuevo por el Corolario 2.0.8, que $\psi(\lambda)I_n$ es divisible por la izquierda por $I_n\lambda - A$ sin resto. Así, existe una matriz $C^+(\lambda)$ tal que $\psi(\lambda)I_n = (I_n\lambda - A)C^+(\lambda)$. Luego $\psi^*(\lambda)I_n = (I_n\lambda - A)C^+(\lambda)\theta(\lambda)$ y de la unicidad de los cocientes izquierdo, se tiene que $C(\lambda) = C^+(\lambda)\theta(\lambda)$. De aquí que $\theta(\lambda)$ es un divisor común de los elementos de $C(\lambda)$, esto contradicería que $d_{n-1}(\lambda)$ es el máximo común divisor de los elementos de $B(\lambda)$, a menos que existe $c \in \mathbb{F}$ tal que $\theta(\lambda) = c$. Por último como $\theta(\lambda)$ es mónico, se tiene que $\theta(\lambda) = 1$ y así se tiene que $\psi^*(\lambda) = \psi(\lambda)$
Hemos probado así el siguiente teorema

Teorema 2.0.16. *Sea $c(\lambda)$ el polinomio característico de una matriz A y $\psi(\lambda)$ su polinomio minimal. Si $d_{n-1}(\lambda)$ es el máximo común divisor de los elementos de $adj(I_n\lambda - A)$, entonces $c(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)\psi(\lambda)$.*

Sea $\psi(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ el polinomio minimal de la matriz A, entonces: $\psi(\lambda) - \psi(\mu) = (\lambda^m - \mu^m) + \alpha_{m-1}(\lambda^{m-1} - \mu^{m-1}) + \cdots \alpha_1(\lambda - \mu) = (\lambda - \mu)\psi(\lambda, \mu)$, para algún polinomio $\psi(\lambda, \mu)$. Así, $\psi(I_n\lambda) - \psi(A) = (I_n\lambda - A)\psi(I_n\lambda, A)$, y dado que $\psi(A) = 0$ y

$\psi(I_n\lambda) = \psi(\lambda)I_n$ se tiene que $\psi(\lambda)I_n = (I_n\lambda - A)\psi(I_n\lambda, A)$. Comparando esta última ecuación con la ecuación $\psi(\lambda)I_n = (I_n\lambda - A)C(\lambda)$ y usando la unicidad de los cocientes obtenida al dividir $\psi(\lambda)I_n$ por $I_n\lambda - A$, tenemos que $C(\lambda) = \psi(I_n\lambda, A)$.
Dada una matriz A y un polinomio cualquiera $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k$ entonces $Ap(A) = A\left(\sum_{k=1}^{m} a_k A^k\right)$ $= \sum_{k=1}^{m} a_k A^{k+1} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k A^k\right) = Ap(A)$. Sin embargo no necesariamente toda matriz que conmute con A es un polinomio en A, por ejemplo toda matriz conmuta con la identidad I_n, pero para cualquier polinomio $p(\lambda)$ se tiene que $p(I_n)$ es una matriz diagonal. El siguiente concepto, apunta en esta dirección, como veremos en lo capítulos posteriores.

Definición 2.0.17. *Sea $p(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ un polinomio escalar sobre $\mathbb{F}$, se define la matriz companión de $p(\lambda)$, la cual denotaremos por $MC(p)$, como la matriz de orden $m \times m$ dada por:*

$$MC(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{m-2} & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}$$

Lema 2.0.18. *Sea $p(\lambda)$ un polinomio mónico con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$. Entonces*

1. *El polinomio característico de $MC(p)$ es $p(\lambda)$*

2. *El polinomio minimal de $MC(p)$ es $p(\lambda)$*

Demostración.

1. $$I_m\lambda - MC(p) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1}+\lambda \end{bmatrix}$$

   Adiconando λ^j veces la columna $j+1$ a la primera columna para $j = 1, 2, \ldots, m-1$ y luego expandiendo por la primera columna, se tiene que:

$$\det(I_m\lambda - MC(p)) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1}+\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \alpha_0+\alpha_1\lambda & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1}+\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} + \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \lambda^{m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{m-2}\lambda^{m-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} + \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ p(\lambda) & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} + \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} p(\lambda) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} p(\lambda)(-1)^{m-1} = p(\lambda)$$

2. El cofactor del elemento en la posición $(m, 1)$ de $I_m\lambda - MC(p)$ es

$$(-1)^{m+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{m+1}(-1)^{m-1} = 1$$

   Esto implica que el máximo común divisor de las entradas de la $\lambda-$matriz $adj(I_n\lambda - MC(p))$ es 1, es decir, $d_{m-1}(\lambda) = 1$, luego por el Teorema 2.0.16, el polinomio minimal de la matriz companión $MC(p)$ es su polinomio minimal

□

Definición 2.0.19. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, diremos que A es no derogatoria si la multiplicidad geométrica de cada uno de sus autovalores es* 1

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y J la forma canónica de Jordan asociada a A, entonces:

1. El número de bloques de Jordan correspondiente a un valor propio λ de A, es igual a la multiplicidad geométrica de λ, la cual es la dimensión de $E(\lambda) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$

2. La suma de los ordenes de todos bloques de Jordan correspondiente a un valor propio λ de A, es igual a la multiplicidad algebraica de λ

3. El tamaño del bloque de Jordan más grande correspondiente a un valor propio λ de A, es igual a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio minimal de A

Teorema 2.0.20. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $c_A(\lambda)$ su polinomio característico y $\psi_A(\lambda)$ su polinomio minimal. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *A es no derogatoria*

2. *A es similar a la matriz companión de su polinomio característico $c_A(\lambda)$*

3. *$c_A(\lambda) = \psi_A(\lambda)$*

4. *Todo autovalor λ de A genera un único bloque de Jordan*

Demostración. De la primera observación anterior, se tiene que (1) es equivalente a (4), por otra parte si $c_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ y $\psi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, entonces:

$$\begin{aligned}
A \text{ es no derogatoria } &\Leftrightarrow \forall\lambda_i \in \sigma(A),\ \text{multiplicidad geométrica de } \lambda_i \text{ es } 1\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda_i \in \sigma(A),\ \text{el número de bloques de Jordan generado por } \lambda_i \text{ es } 1\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda_i \in \sigma(A),\ n_i = m_i\\
&\Leftrightarrow c_A(\lambda) = \psi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

Ahora si A es similar a la matriz companión B del polinomio característico $c_A(\lambda)$, entonces $c_A(\lambda) = c_B(\lambda)$ y $\psi_A(\lambda) = \psi_B(\lambda)$, pero $c_B(\lambda) = \psi_B(\lambda) = c_A(\lambda)$, luego $c_A(\lambda) = \psi_A(\lambda)$.

Por último, si A es no derogatoria y si J es la forma canónica de Jordan asociada a A entonces $J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$ y el orden de cada $J(\lambda_i)$ es igual a $n_i = m_i$. Ahora si B

es la matriz companión del polinomio característico $c_A(\lambda)$ de A, entonces $c_B(\lambda) = \psi_B(\lambda) = c_A(\lambda)$, luego B es no derogatoria y la forma canónica de Jordan definida por B es J; luego A es similar a B. □

Proposición 2.0.21. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ matrices similares, entonces A es no derogatoria si y sólo si B es no derogatoria*

Demostración. Sea $S \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz no singular tal que $A = S^{-1}BS$, luego $\sigma(A) = \sigma(B)$. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y definamos $E(\lambda, A) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$ y $E(\lambda, B) = \{v \in \mathbb{F}^n : Bv = \lambda v\}$, luego

$$v \in E(\lambda, A) \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow S^{-1}BSv = \lambda v \Leftrightarrow BSv = \lambda Sv \Leftrightarrow Sv \in E(\lambda, B)$$

Dado que S es no singular, se tiene que $E(\lambda, B) = SE(\lambda, A)$ y $L : E(\lambda, A) \to E(\lambda, B)$ dada por $L(v) = Sv$ $\forall v \in E(\lambda, A)$ es un isomorfismo lineal, así $\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, B)$ □

Definición 2.0.22. *Diremos que $R_n = [r_{kj}] \in M_n(\mathbb{C})$ es la matriz reversible de orden n si para todo $k, j \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$, $r_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } k + j = n + 1 \\ 0 \text{ si } k + j \neq n + 1 \end{cases}$*

Ejemplo 2.0.23. $R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Proposición 2.0.24. *La matriz reversal R_n es simétrica, no singular con $R_n^{-1} = R_n$*

Demostración. Sea $R_n^2 = [s_{kj}]$, entonces para todo $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$s_{kj} = \sum_{m=1}^{n} s_{km}s_{mj} = s_{k(n-k+1)}s_{(n-k+1)j} = \begin{cases} 1 \text{ si } n - k + 1 + j = n + 1 \\ 0 \text{ si } n - k + 1 + j \neq n + 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j \\ 0 \text{ si } k \neq j \end{cases}$$

De aquí $R_n^2 = I_n$. De la definición de matriz reversal se tiene que $r_{kj} = r_{jk}$ para todo j, k □

Proposición 2.0.25. *Sea $A = [a_{kj}] \in M_n(\mathbb{C})$, entonces*

1. $RA = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \end{bmatrix}$

2. $AR = \begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1(n-1)} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)n} & a_{(n-1)(n-1)} & \cdots & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)1} \\ a_{nn} & a_{n(n-1)} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{bmatrix}$

Demostración. Sean $RA = [b_{kj}]$ y $AR = [c_{kj}]$, luego para cada $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que

$$b_{kj} = \sum_{m=1}^{n} r_{km}a_{mj} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n+1-k}}^{n} r_{km}a_{mj} + r_{k(n+1-k)}a_{(n+1-k)j} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n+1-k}}^{n} 0 \cdot a_{mj} + 1 \cdot a_{(n+1-k)j} = a_{(n+1-k)j}$$

$$c_{kj} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}r_{mj} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n+1-j}}^{n} a_{km}r_{mj} + a_{k(n+1-j)}r_{(n+1-j)j} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n+1-j}}^{n} a_{km} \cdot 0 + a_{k(n+1-j)} \cdot 1 = a_{k(n+1-j)}$$

□

Definición 2.0.26. *Sea $A = [a_{kj}] \in M_n(\mathbb{C}$, diremos que A es una matriz de Toeplitz si existen escalares $a_{-(n-1)}, \cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{(n-1)}$ tales que $a_{kj} = a_{j-k}$. Es decir*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{(n-3)} & a_{(n-2)} & a_{(n-1)} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{(n-4)} & a_{(n-3)} & a_{(n-2)} \\ a_{-2} & a_1 & a_0 & \cdots & a_{(n-5)} & a_{(n-4)} & a_{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{-(n-3)} & a_{-(n-4)} & a_{-(n-5)} & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & a_{-(n-4)} & \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{-(n-1)} & a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Denotaremos por $T_n(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las matrices de Toeplitz de orden n

Ejemplo 2.0.27. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz de Toeplitz.*

Proposición 2.0.28. *El conjunto de las matrices de Toeplitz T_n es un espacio vectorial*

Demostración. La matriz nula de orden n, 0_n, es una matriz de Toeplitz. Sean $A = [a_{kj}]$ y $B = [b_{kj}]$ dos matrices de Toeplitz, entonces existen escalares $a_{-(n-1)}, \cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots,$ $a_{(n-1)}$ y $b_{-(n-1)}, \cdots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{(n-1)}$ tales que $a_{kj} = a_{j-k}$ y $b_{kj} = b_{j-k}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $C = \lambda A + B = [c_{kj}]$, entonces para k, j se tiene que $c_{kj} = \lambda a_{kj} + b_{kj} = \lambda a_{j-k} + b_{j-k}$. Luego $\lambda A + B$ es una matriz de Toeplitz. $\square$

Proposición 2.0.29. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dos matrices de Toeplitz triangulares superiores. Entonces*

1. *AB también es una matriz de Toeplitz triangular superior.*

2. *Si $a_{11} \neq 0$ entonces A es no singular y A^{-1} también es una matriz de Toeplitz triangular superior.*

Demostración. 1. Sea $AB = [p_{kj}]$ con $p_{kj} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} b_{mj}$, luego

a) Si $k < j$ entonces $p_{kj} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} b_{mj} = \sum_{m=1}^{k-1} 0 \cdot b_{mj} + \sum_{m=k+1}^{n} a_{km} b_{mj} = \sum_{m=k+1}^{n} a_{km} \cdot 0 = 0$

b) Si $k \geq j$ entonces

$$\begin{aligned} p_{kj} &= \sum_{m=1}^{n} a_{km} b_{mj} = \sum_{m=1}^{k-1} 0 \cdot b_{mj} + \sum_{m=k}^{n} a_{km} b_{mj} = \sum_{m=k}^{j} a_{km} b_{mj} + \sum_{m=j+1}^{n} a_{km} \cdot 0 \\ &= \sum_{m=k}^{j} a_{km} b_{mj} = \sum_{m=k}^{j} a_{m-k} b_{j-m} = \sum_{t=0}^{j-k} a_t b_{j-k-t} \\ &= \sum_{t=0}^{s} a_t b_{s-t} \end{aligned}$$

con $s = j - k$

Lo cual demuestra que AB es una matriz de Toeplitz triangular superior.

2. Dado que A es una matriz triangular superior con cada uno de los términos de su diagonal principal igual a a_0, entonces $\det A = a_0^n$, por lo que A es no singular si y sólo si $a_0 \neq 0$.

   Supongamos ahora que $a_0 \neq 0$ y sea $C = A^{-1}$. Si denotemos por $A_{(k})$ la k-ésima fila de A y por $C^{(j)}$ la j-ésima columna de C, entonces

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km} b_{mj} = A_{(k)} C^{(j)} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

   .

   Dado que $a_0 c_{nj} = A_{(n)} C^{(j)} = \delta_{nj}$ y $a_0 \neq 0$, se tiene que $c_{n1} = c_{n2} = \cdots = c_{n(n-1)} = 0$ y $c_{nn} = a_0^{-1}$ De lo anterior, se tiene que si $1 \leq j < n-1$ entonces $a_0 c_{(n-1)j} = A_{(n-1)} C^{(j)} = \delta_{(n-1)j} = 0$, es decir $c_{(n-1)j} = 0$ siempre que $1 \leq j < n-1$

   Ahora $1 = A_{(k)} C^{(k)} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} c_{mk} = \sum_{m=1}^{k-1} 0 \cdot c_{mk} + \sum_{m=k}^{n} a_{km} c_{mk} = a_{kk} c_{kk} + \sum_{m=k+1}^{n} a_{km} 0 = a_0 c_{kk}$, de aquí $c_{kk} = a_0^{-1}$

   Razonando como antes $0 = A_{(k)} C^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} c_{m(k+1)} = \sum_{m=1}^{k-1} 0 \cdot c_{m(k+1)} + \sum_{m=k}^{n} a_{km} c_{m(k+1)} = a_{kk} c_{k(k+1)} + a_{k(k+1)} c_{(k+1)(k+1)} + \sum_{m=k+2}^{n} a_{km} 0 = a_0 c_{k(k+1)} + a_1 a_0^{-1}$, de aquí $c_{k(k+1)} = -a_1 a_0^{-2}$

   De nuevo $0 = A_{(k)} C^{(k+2)} = \sum_{m=1}^{n} a_{km} c_{m(k+2)} = \sum_{m=1}^{k-1} 0 \cdot c_{m(k+1)} + \sum_{m=k}^{n} a_{km} c_{m(k+2)} = a_{kk} c_{k(k+2)} + a_{k(k+1)} c_{(k+1)(k+2)} + a_{k(k+2)} c_{(k+2)(k+2)} + \sum_{m=k+3}^{n} a_{km} 0 = a_0 c_{k(k+2)} - a_1 a_1 a_0^{-2} + a_2 a : 0^{-1}$, de aquí $c_{k(k+2)} = (a_1^2 a_0^{-2} - a_2 a_0^{-1}) a_0^{-1} = a_0^{-3} (a_1^2 - a_2 a_0$.

   Continuando recursivamente vemos que A^{-1} es una matriz de Toeplitz triangular superior.

$\square$

Capítulo 3

Sobre similaridades entre A y A^T, A^* o $\overline{A}$

3.1. Similaridades entre A y A^T

Lema 3.1.1. *Sean $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $B \in M_m(\mathbb{C})$ tales que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, entonces la única solución de la ecuación $AX - XB = 0_{n\times m}$ es $X = 0_{n\times m}$*

Demostración. Sea $X \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ tal que $AX = XB$, luego $A^kX = XB^k$ para todo entero no negativo k.
Sea $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} \lambda^k$, entonces $p(A)X = \left(\sum_{k=0}^{s} A^k\right) X = \sum_{k=0}^{s} A^kX = \sum_{k=0}^{s} XB^k = X\left(\sum_{k=0}^{s} B^k\right) = Xp(B)$
Sea $p_A(\lambda)$ el polinomio característico de A, entonces $p_A(A) = 0$, así que $Xp_A(B) = 0$. Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, se tiene que $p_A(\lambda) = \prod_{s=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$. Luego $p_A(B) = \prod_{s=1}^{k}(B - \lambda_i I)^{n_i}$ y como cada $\lambda_i \notin \sigma(B)$ entonces $B - \lambda_i I$ es no singular, por lo que $p_A(B)$ es no singular y por lo tanto $X = 0$ □

Proposición 3.1.2. *([10], Teorema 3.2.4.2) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que A es no derogatoria. Entonces $BA = AB$ si y sólo si existe un polinomio p tal que $B = p(A)$. El polinomio puede ser tomado de grado menor que n, en cuyo caso p es único.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Sea $p(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ y $B = p(A)$, entonces:

$$\begin{aligned} BA &= (a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0I)A \\ &= a_mA^{m+1} + a_mA^{m-1} + \cdots + a_1A^2 + a_0A \\ &= A(a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0I) = Ap(A) = AB \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sea J la forma canónica asociada a A, como A es no derogatoria entonces J es no derogatoria, además existe S no singular tal que $A = S^{-1}JS$. Luego $AB = BA \Rightarrow (S^{-1}JS)B = B(S^{-1}JS) \Rightarrow J(SBS^{-1}) = (SBS^{-1})J$.

Si se cumpliese la proposición para J, entonces existiría un polinomio $p(\lambda)$ tal que $SBS^{-1} = p(J)$, de aquí $B = S^{-1}p(J)S = p(S^{-1}JS) = p(A)$, por lo que basta demostrar la proposición para el caso de matrices de Jordan. Supongamos entonces que $BJ = JB$, y dado que J es no derogarotia entonces $J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los diferentes autovalores de J y $J_i = J(\lambda_i)$.

Si $B = [B_{ij}]$, particionada conforme a la patición inducida por J, entonces dado que $JB = BJ$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} J_1B_{11} & J_1B_{12} & \cdots & J_1B_{1k} \\ J_2B_{21} & J_2B_{22} & \cdots & J_2B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_kB_{k1} & J_kB_{k2} & \cdots & J_kB_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}J_1 & B_{12}J_2 & \cdots & B_{1k}J_k \\ B_{21}J_1 & B_{22}J_2 & \cdots & B_{2k}J_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{k1}J_1 & B_{k2}J_2 & \cdots & B_{kk}J_k \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \forall i, s\ \ J_iB_{is} = B_{is}J_s$, es decir $J_iB_{is} - B_{is}J_s = 0$

Si $i \neq s$, entonces $\sigma(J_i) \cap \sigma(J_s) = \{\lambda_i\} \cap \{\lambda_s\} = \emptyset$, por lo que $B_{is} = 0$ si $i \neq s$. Así

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix} \text{ donde } B_i = B_{ii}$$

Si $n_i \geq 2$, entonces $J_i = \lambda_i I + N_i$ con $N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Luego, $B_iJ_i = B_i(\lambda_i I + N_i) = \lambda_i B_i + B_iN_i$ y $J_iB_i = (\lambda_i I + N_i)B_i = \lambda_i B_i + N_iB_i$, por lo que $B_iN_i = N_iB_i$

Si $H, N \in M_m(\mathbb{C})$ con $H = [h_{ij}]$ y $N = [n_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, entonces

$HN = NH \Rightarrow \ \forall\, i, j \ \displaystyle\sum_{s=1}^{m} h_{is} n_{sj} = \sum_{s=1}^{m} n_{is} b_{sj}$

Ahora si $i < m$, $n_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = i+1 \\ 0 & \text{si } s \neq i+1 \end{cases}$ y si $j > 1$, $n_{sj} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = j-1 \\ 0 & \text{si } s \neq j-1 \end{cases}$.

Luego si $i < m$ y $j > 1$ se tiene que $h_{i(j-1)} = h_{(i+1)j}$ y la matriz H es una matriz de Toeplitz.

Si $i = m$ y $j > 1$ se tiene que $n_{ms} = 0$, por lo que $\displaystyle\sum_{s=1}^{m} h_{ms} n_{sj} = 0$ y de aquí $h_{m(j-1)} = 0$.

Luego $h_{m1} = h_{m2} = \cdots = h_{m(m-1)} = 0$

Si $j = 1$ y $i < m$ se tiene que $n_{s1} = 0$, por lo que $\displaystyle\sum_{s=1}^{m} n_{is} h_{s1} = 0$ y de aquí $h_{(i+1)1} = 0$.

Luego $h_{21} = h_{31} = \cdots = h_{m1} = 0$

$\therefore \ \ H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1(m-1)} & h_{1m} \\ 0 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1(m-2)} & h_{1(m-1)} \\ 0 & 0 & h_{11} & \cdots & h_{1(m-3)} & h_{1(m-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{11} \end{bmatrix}$ es una matriz de Toeplitz triangular superior

Así cada matriz $B_1, B_2, \ldots, B_k$ es una matriz de Toeplitz triangular superior.

Para cada $1 \leq i \leq k$ definamos

$$q_i(\lambda) = \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{k} (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

luego grado $q_i(\lambda) = n - n_i$. Ahora si $r \neq i$, $q_i(J_r) = 0$ ya que $(J_r - \lambda_r I)^{n_r} = (J(\lambda_r) - \lambda_r I)^{n_r} = J(0)^{n_r} = 0$, por otra parte para todo $s \neq i$ se tiene que $J_i - \lambda_s I = J(\lambda_i) - \lambda_s I =$

$J(\lambda_i - \lambda_s) = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_s & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i - \lambda_s & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i - \lambda_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i - \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i - \lambda_s \end{bmatrix}$ la cual es una matriz de Toeplitz triangular superior, así $\det(J_i - \lambda_s I) = \det J(\lambda_i - \lambda_s) = (\lambda_i - \lambda_s)^{n_i} \neq 0$, por lo que $q_i(J_i)$ es no singular. Además dado que el producto de matrices de Toeplitz triangulares superores es una matriz de Toeplitz triangular superior, se tiene que $q_i(J_i)$ es una matriz de Toeplitz triangular superior.

En vista que la inversa de una matriz de Toeplitz de nuevo es una matriz de Toeplitz trinagular superior, tenemos que $[q_i(J_i)]^{-1}B_i$ es una matriz de Toeplitz triangular superior.

Ahora como $J(\lambda_i) - \lambda_i I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, entonces $(J(\lambda_i) - \lambda_i I)^s$ es la matriz de Toeplitz anterior sólo que la diagonal de unos se desplaza $s+1$ diagonales por encima de la diagonal principal, de aquí que si $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1(n_i-1)} & h_{1n_i} \\ 0 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1(n_i-2)} & h_{1(n_i-1)} \\ 0 & 0 & h_{11} & \cdots & h_{1(n_i-3)} & h_{1(n_i-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{11} \end{bmatrix}$ es una matriz de Toeplitz triangular superior entonces $H = h_{11}(J_i - \lambda_i)^0 + h_{12}(J_i - \lambda_i)^1 + \cdots + h_{1n_i}(J_i - \lambda_i)^{n_i-1}$, por lo que H puede ser escrita como un polinomio en J_i, basta tomar $r_H(\lambda) = h_{11} + h_{12}(\lambda - \lambda_i) + h_{13}(\lambda - \lambda_i)^2 + \cdots + h_{1n_i}(\lambda - \lambda_i)^{n_i-1}$. Así existe un polinomio $r_i(\lambda)$ de grado a lo más $n_i - 1$ tal que $r_i(J_i) = [q_i(J_i)]^{-1}B_i$. Definamos $p_i(\lambda) = q_i(\lambda) r_i(\lambda)$, entonces el grado $p_i(\lambda) =$ grado $q_i(\lambda) +$ grado $r_i(\lambda) \leq (n - n_i) + (n_i - 1) = n - 1$, además $p_i(J_s) = q_i(J_s)\, r_i(J_s) = 0\, r_i(J_s) = 0$ si $s \neq i$ y $p_i(J_i) = q_i(J_i)\, r_i(J_i) = B_i$.

Por último tomemos $p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) + \cdots + p_k(\lambda)$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(J) =& p_1(J) + p_2(J) + \cdots + p_k(J) \\
=& \begin{bmatrix} p_1(J_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1(J_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_1(J_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1(J_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(J_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2(J_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_2(J_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_2(J_k) \end{bmatrix} \\
&+ \cdots + \begin{bmatrix} p_k(J_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_k(J_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_k(J_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_k(J_k) \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix} = B
\end{aligned}
$$

□

Comenzamos con nuestra primera “Primera Proposición Estándar”

Proposición 3.1.3. *Sea $\mathbb{F}$ un campo y $A \in M_n(\mathbb{F})$. Asumamos que cada matriz simétrica no singular $S \in M_n(\mathbb{F})$ puede ser escrita como $S = U^2$, donde $U \in M_n(\mathbb{F})$ es simétrica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es similar a una matriz simétrica*

2. *A es similar a una matriz simétrica vía una matriz simétrica*

3. *A es similar a A^T vía una matriz simétrica*

Demostración.

$1 \Rightarrow 3$ Existe $V \in M_n(\mathbb{F})$ tal que VAV^{-1} es simétrica, es decir: $VAV^{-1} = (VAV^{-1})^T = (V^T)^{-1}A^TV^T$. Obtenemos: $(V^TV)A(V^TV)^{-1} = A^T$ Así, V^TV es la matriz simétrica requerida.

$3 \Rightarrow 2$ Sea S una matriz simétrica no singular tal que $A = SA^TS^{-1}$. Existe una matriz simétrica U tal que $U^2 = S$ y como S es no singular U tambíen es no singular. Entonces

$$A = SA^TS^{-1} = U^2A^T(U^2)^{-1} = U(UA^TU^{-1})U^{-1}$$

de aquí $U^{-1}AU = UA^TU^{-1}$ y A es similiar a UA^TU^{-1} vía la matriz simétrica U. Por último $(UA^TU^{-1})^T = (U^{-1})^TAU^T = U^{-1}AU = UA^TU^{-1}$ y por lo tanto UA^TU^{-1} es simétrica.

$2 \Rightarrow 1$ Obvio

$\square$

Nota 3.1.4. *La demostraciones de todas las "Proposiciones Estándar" son idénticas. El principal problema es siempre la implicación* $(3) \Rightarrow (2)$*, en la cual un enunciado del tipo "cada $S \in M_n(\mathbb{C})$ de tipo P es el cuadrado de alguna matriz $U \in M_n(\mathbb{C})$ del tipo P" es requerido.*

Proposición 3.1.5. *([10], Teorema 4.4.9) Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es similar a una matriz simétrica*

Demostración.

Sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$ una matriz reversible, luego si $B^2 = [c_{ij}]$ entonces

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{h=1}^{k} b_{ih}b_{hj} = b_{i(k+1-i)}b_{(k+1-i)j} = b_{(k+1-i)j} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } (k+1-i)+j = k+1 \\ 0 & \text{si } (k+1-i)+j \neq k+1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

$\therefore\ B^2 = I_k$

Sea $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_k + iB)$, luego $S\overline{S} = \frac{1}{2}(I_k + iB)(I_k - iB) = \frac{1}{2}(I_k - i^2B^2) = \frac{1}{2}(I_k + I_k) = I_k$, por lo que S es simétrica y unitaria

Sea $k \geq 2$ y $J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$ la cual denotaremos por N, luego:

(a) $BN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $BNB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $NB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ahora

$$\begin{aligned} SNS^{-1} &= SN\overline{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_k + iB)N\frac{1}{\sqrt{2}}(I_k - iB) = \frac{1}{2}(I_k + iB)N(I_k - iB) \\ &= \frac{1}{2}(N - i^2BNB) + \frac{1}{2}(-iNB + iBN) = \frac{1}{2}(N + BNB) + \frac{i}{2}(BN - NB) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la cual es una matriz simétrica, así N es unitariamente similar a la matriz simétrica SNS^{-1}. Ahora un bloque de Jordan $J_k(\lambda)$ con $k \geq 2$ es de la forma $J_k(\lambda) = \lambda I_k + N$. Así,

$$SJ_k(\lambda)S^{-1} = S(\lambda I_k + N)S^{-1} = \lambda I_k + SNS^{-1}$$

la cual es una matriz simétrica, por lo que $J_k(\lambda)$ es unitariamente similar a la matriz simétrica $SJ_k(\lambda)S^{-1}$.

Dado que $J_1(\lambda)$ es simétrica y no singular, se tiene que todo bloque Jordan es unitariamente similar a una matriz simétrica. Luego, si $J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$ tomemos $S_{n_i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(I_{n_i} + iB) \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ si $n_i \geq 2$ y $S_1 = [1]$; sea $S = S_{n_1} \oplus S_{n_2} \oplus \cdots \oplus S_{n_k}$ entonces S es unitaria y

$$SJS^{-1} = SJ\overline{S} = (S_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1)\overline{S_{n_1}}) \oplus (S_{n_2}J_{n_2}(\lambda_2)\overline{S_{n_2}}) \oplus \cdots \oplus (S_{n_k}J_{n_k}(\lambda_2)\overline{S_{n_k}})$$

la cual es una suma directa de matrices simétricas y por lo tanto simétrica.

Así hemos demostrado que toda matriz de Jordan es unitariamente similar a una matriz simétrica via una matriz simétrica, y dado que toda matriz es similar a su forma canónica de Jordan se tiene que toda matriz es similar a una matriz simetrica. □

Proposición 3.1.6. *([11], Teorema 6.4.12.a) Para toda matriz $S \in M_n(\mathbb{C})$ no singular existe una matriz $U_n \in M(\mathbb{C})$ y un polinomio $p(\lambda)$ tal que $S = U^2$ y $U = p(S)$*

Proposicón 1.0.3 *Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es similar a una matriz simétrica vía una matriz simétrica*

Demostración. Sea $S \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no singular y simétrica, luego existe una matriz U tal que $S = U^2$ y un polinomio $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda^k$ con $U = p(S)$. Así

$$U^T = \left(\sum_{k=1}^{m} c_kS^k\right)^T = \sum_{k=1}^{m} c_k(S^k)^T = \sum_{k=1}^{m} c_k(S^T)^k = \sum_{k=1}^{m} c_kS^k = p(S) = U$$

luego U es simétrica.

Sea $A \in M_n\mathbb{C})$, entonces por el Teorema 3.1.5 A es similar a una matriz simétrica y, por la Proposición 3.1.3 se tiene que A es similar a una matriz simétrica vía una matriz simétrica. □

Finalmente observemos que en $\mathbb{C}$ como para toda matriz simétrica no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ existe una matriz simétrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $S = U^2$ y toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es similar tanto a una matriz simétrica (ver Teorema 3.1.5) como a una matriz simétrica via una matriz simétrica (ver proposición 1.0.3) implica no solo que toda matriz A es similar a A^T vía una matriz simétrica, sino también que cada una de las proposiciones de la Primera Proposición Estándar 3.1.3 son una tautología.

3.2. Similaridades entre A y $\overline{A}$ o A^*

Note que A y $\overline{A}$ (o A^*) no son necesariamente similares.

Definición 3.2.1. *Sea $E, J \in M_n(\mathbb{C})$, diremos que es involutiva (o una involución) si $E^{-1} = E$ y $J \in M_n(\mathbb{C})$ es coninvolutiva (o una coninvolución) si $J^{-1} = \overline{J}$.*

Lema 3.2.2.

1. *Para cada matriz no singular $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\overline{A^{-1}}A$ es coninvolutiva.*

2. *([11], Teorema 6.4.22) Si $E \in M_n(\mathbb{C})$ es coninvolutiva, entonces existe una coninvolución X en $M_n(\mathbb{C})$ tal que $X^2 = E$*

Demostración.

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(\overline{A^{-1}}A)^{-1} = A^{-1}\overline{A^{-1}}^{-1} = A^{-1}\overline{A} = \overline{\overline{A^{-1}}A}$

□

Lema 3.2.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, una matriz Hermitiana, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *A esta definida positivamente*

2. *Todos los autovalores de A son positivos*

3. *Existe una matriz B Hermitiana definida positiva tal que $A = B^2$*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existe $v \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $Av = \lambda v$. Por ser A Hermitiana λ es real. Luego $0 < \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$, de aquí λ es positivo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Existe una matrix unitaria U tal que $A = U^*\Lambda U$ con $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A. Luego para todo $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, se tiene que:

$$\langle v, Av \rangle = \langle v, U^*\Lambda U v \rangle = \langle Uv, \Lambda U v \rangle = \langle w, \Lambda w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{w_k} w_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|w_k\| > 0$$

donde $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = Uv$ es no nulo.

(1) $\Rightarrow$ (3) Como antes, existe una matrix unitaria U tal que $A = U^*\Lambda U$ con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A. Luego cada λ_i es positivo, sea β_i la única raíz cuadrada postiva de λ_i, es decir $\beta_i = \sqrt{\lambda_i}$, definamos $\Gamma = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ y $B = U^*\Gamma U$ entonces B es Hermitiana y cada uno de sus autovalores son positivos, luego B es una matriz definida positiva. Por último $B^2 = U^*\Gamma U U^*\Gamma U = U^*\Gamma^2 U = U^*\Lambda U = A$

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea B una matriz Hermitiana definida positiva tal que $A = B^2$, luego B es no singular (todos sus autovalores son no nulos). Sea $v \in \mathbb{C}^n$ no nulo, entonces

$$\langle v, Av\rangle = \left\langle v, B^2 v\right\rangle = \langle B^* v, Bv\rangle = \langle Bv, Bv\rangle > 0$$

□

Nuestra Segunda Proposición Estándar es,

Proposición 3.2.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$,*

1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *A es similar a una matriz real.*

   b) *A es similar a una matriz real vía una matriz coninvolutiva.*

   c) *A es similar a $\overline{A}$ vía una matriz coninvolutiva.*

2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *A es similar a una matriz Hermitiana.*

   b) *A es similar a una matriz Hermitiana vía una matriz Hermitiana definida positiva.*

   c) *A es similar a A^* vía una matriz Hermitiana definida positiva.*

Demostración.

1.

$(a) \Rightarrow (c)$ Existe $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^{-1} = R \in M_n(\mathbb{R})$. Luego, $SAS^{-1} = R = \overline{R} = \overline{S}\,\overline{A}\,\overline{S^{-1}}$ y podemos obtener $(\overline{S^{-1}}S)A(\overline{S^{-1}}S)^{-1} = \overline{A}$.

Sea $E = \overline{S^{-1}}S$, entonces $E^{-1} = S^{-1}\overline{S} = \overline{\overline{S^{-1}}S} = \overline{E}$. Así E es la matriz coninvolutiva requerida.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea $U \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz coninvolutiva tal que $UAU^{-1} = \overline{A}$. Sea $E \in M_n(\mathbb{C})$ coninvolutiva tal que $E^2 = U$. La identidad $E^2A(E^2)^{-1} = \overline{A}$ implica que $EAE^{-1} = E^{-1}\overline{A}E$, y entonces $\overline{EAE^{-1}} = \overline{EA\overline{E}} = \overline{E}\ \overline{A}\ E = E^{-1}\overline{A}\ E = EAE^{-1}$, luego EAE^{-1} es una matriz real y A es similar a esta vía la matriz coninvolutiva E

$(b) \Rightarrow (a)$ Es obvia

2.

$(a) \Rightarrow (c)$ Existe $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que VAV^{-1} es Hermitiana, es decir, $VAV^{-1} = (VAV^{-1})^* = (V^*)^{-1}A^*V^*$. Luego:

$$(V^*V)A(V^*V)^{-1} = A^*.$$

Además $\forall w \neq 0\ \langle w, V^*Vw\rangle = \langle Vw, Vw\rangle > 0$ ya que V es no singular, así V^*V es la matriz Hermitiana definida positivamente requerida.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea $H \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz Hermitiana definida positiva tal que $HAH^{-1} = A^*$. Existe una matriz $U \in M_n(\mathbb{C})$ Hermitiana definida positiva tal que $U^2 = H$, entonces: $HAH^{-1} = A^* \Rightarrow U^2A(U^2)^{-1} = A^* \Rightarrow UAU^{-1} = U^{-1}A^*U$. Luego $(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^*A^*U^* = (U^*)^{-1}A^*U^* = U^{-1}A^*U = UAU^{-1}$. Esta igualdad demuestra que UAU^{-1} es Hermitiana y que A es similar a esta vía la matriz Hermitiana definida positiva U

$(b) \Rightarrow (a)$ Es obvio.

$\square$

La estructura de las dos demostraciones de la Proposición 3.2.4 son completamente idéntica a la demostración de la Proposición 3.1.3

Proposición 3.2.5. *([10], Teorema 4.1.7.) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces A es similar a $\overline{A}$ si y sólo si A es similar a una matriz real*

Demostración.

($\Leftarrow$) Existe una matriz no singular $S \in M_n(\mathbb{C})$ y una matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = S^{-1}BS$ es una matriz real. Luego

$$\overline{A} = \overline{S^{-1}}\ \overline{B}\ \overline{S} = \overline{S^{-1}}B\overline{S} = \overline{S^{-1}}SS^{-1}BSS^{-1}\overline{S} = \overline{S^{-1}}S\ A\ S^{-1}\overline{S} = (\overline{S^{-1}}S)\ A\ (\overline{S^{-1}}S)^{-1}$$

De aquí A y $\overline{A}$ son similares

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que A y $\overline{A}$ son similares. Si denotamos por J_B la forma canónica de una matriz B, entonces de la similitud de A y $\overline{A}$ se tiene que $J_{\overline{A}} = J_A$. Dado que J_A y A son similares entonces existe una matriz no singular S tal que $J_A = S^{-1}AS$, luego $\overline{J_A} = (\overline{S})^{-1}\ \overline{A}\ \overline{S}$, y como $\overline{J_A}$ es una matriz de Jordan entonces $\overline{J_A} = J_{\overline{A}}$. Así se tiene que $\overline{J}_A = J_A$, lo cual implica que para cada bloque de Jordan $J_k(\lambda)$ en J_A se tenga que $\overline{J_k(\lambda)} = J_k(\overline{\lambda})$ también es un bloque de Jordan de J_A, esto no es significante si λ es real pero si para cuando λ fuese no real, esto es, si λ es un autovalor no real de A entonces $\overline{\lambda}$ también es un autovalor de A con la misma multiplicidad algebraica y los bloques de Jordan correspondiente a dichos autovalores deben ocurrir en pares coincidiendo sus respectivos ordenes. Luego, después de un reordenamiento de los bloques de Jordan no reales de A, se tiene que J_A es reordenada de manera que ella sea similar a una matriz por bloques donde los bloques reales de J_A son dejados intactos y los bloques para cada autovalor complejo no real λ sea la suma directa $J_k(\lambda) \oplus J_k(\overline{\lambda})$, es decir aparezcan de manera contigua. Esto es, el bloque

$$J_k(\lambda) \oplus J_k(\overline{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$$

de orden $2k$ estan en nuestra matriz similar a J_A. De nuevo reordenando filas y columnas, el bloque anterior es similar a

$$D_k(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(\lambda) & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D(\lambda) & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D(\lambda) \end{bmatrix}$$

donde $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ e I_2 es la identidad de orden 2

Sea $S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, luego $\det S = 2i$ por lo que S es no singular y $S^{-1} = \dfrac{1}{2i} \begin{bmatrix} -1 & i \\ -1 & -i \end{bmatrix}$.

Ahora si $\lambda = a + bi$, entonces

$$\begin{aligned}
SD(\lambda)S^{-1} &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & i \\ -1 & -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -ai-b & -ai-b \\ ai+bi & -a+bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & i \\ -1 & -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 2ai & 2bi \\ -2bi & 2ai \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así, si $C(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 \\ 0 & D(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} SD(\lambda) & S \\ 0 & SD(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} SD(\lambda)S^{-1} & I_2 \\ 0 & SD(\lambda)S^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 \\ 0 & C(a,b) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De aquí que cada bloque complejo $D_k(\lambda)$ de orden $2k$ es similar al bloque real

$$C_k(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(a,b) & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C(a,b) & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C(a,b) \end{bmatrix}$$

Concluimos de esta manera que A es similar a una matriz real.

$\square$

La Proposición 3.2.5 nos permite que la proposicíon "A es similar a $\overline{A}$" pueda ser adicionada a la Proposición 3.2.4(1). Pero la proposición "A es similar to A^*" no puede ser adicionada a la Proposición 3.2.4(2). De hecho, A y A^* pueden ser similares (vía una matriz Hermitiana) sin A ser similar a una matriz Hermitiana. Por ejemplo, sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real non-diagonalizable. Por el Teorema 1.0.5 existe una matriz real simétrica (de aquí Hermitiana) S tal que $SAS^{-1} = A^T = A^*$. Pero A no es similar a una matriz Hermitiana (ya que las matrices Hermitianas son similares a una matriz real diagonal).

Para completar, mencionamos los siguientes lema y proposición.

Lema 3.2.6. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices similares. Si A es similar a $\overline{A}$ (vía una coninvolución), entonces B es similar a $\overline{B}$ (vía una coninvolución).*

Demostración. Si $SAS^{-1} = B$ y $JAJ^{-1} = \overline{A}$, entonces

$$\overline{B} = \overline{S}\ \overline{A}\ \overline{S}^{-1} = \overline{S}\ JAJ^{-1}\ \overline{S}^{-1} = (\overline{S}\,JS^{-1})B(SJ^{-1}(\overline{S})^{-1}) = (\overline{S}\,JS^{-1})B(\overline{S}\,JS^{-1})^{-1}$$

Más aún si, J es coinvolutiva también lo es $\overline{S}\,JS^{-1}$ ya que $(\overline{S}\,JS^{-1})^{-1} = SJ^{-1}(\overline{S})^{-1} = S\,\overline{J}\,(\overline{S})^{-1} = \overline{\overline{S}\,JS^{-1}}$ □

Nuestra demostración de la siguiente proposición contiene nuevos argumentos para la equivalencia de las condiciones (4) y (5).

Proposición 3.2.7. *([10], página 172) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *A es similar a $\overline{A}$.*
2. *A es similar a $\overline{A}$ vía una matriz coninvolutiva.*
3. *A es similar a una matriz real.*
4. *A es similar a A^*.*
5. *A es similar a A^* vía una matriz Hermitiana.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $J \in M_n(\mathbb{C})$ la forma normal de Jordan de A, luego J es similar a A. Como A es similar a $\overline{A}$ implica que J es similar a $\overline{J}$ (ver Lema 3.2.6). Pero $\overline{J}$ es una forma normal de Jordan, de aquí si $J_k(\lambda)$ es un bloque de Jordan de A también $J_k(\overline{\lambda})$ lo es. Así J consiste de bloques de tipo $J_k(\lambda)(\lambda \in \mathbb{R})$, similares a $\overline{J_k(\lambda)} = J_k(\lambda)$ vía la involución real identidadI_k, y de bloques $J_k(\lambda) \oplus J_k(\overline{\lambda})(\lambda \notin \mathbb{R})$, similares a su conjugada vía la matriz reversible, la involución real (aquí considerada consistente de bloques $\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix}$), ya que

$$\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} O & I_k \\ I_k & O \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & J_k(\overline{\lambda}) \\ J_k(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I_k \\ I_k & O \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} J_k(\overline{\lambda}) & 0 \\ 0 & J_k(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{J_k(\lambda)} & 0 \\ 0 & J_k(\lambda) \end{bmatrix}$$
$$= \overline{\begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{J_k(\lambda)} \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\overline{\lambda}) \end{bmatrix}}$$

Luego J es similar a $\overline{J}$ por una de involución real (la suma directa de las involuciones obtenidas anteriormente) y el Lema 3.2.6 implica que A es similar a $\overline{A}$ vía una coinvolución.

(2) $\Rightarrow$ (1) Obvio

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Es la Proposición 3.2.5

Donateromos $A \equiv B$ si A es similar a B, la cual es una relación de equivalencia. Notemos que

$$A \equiv B \Rightarrow \exists V \in GL_n(\mathbb{C}),\, B = VAV^{-1} \Rightarrow \overline{B} = \overline{V}\,\overline{A}\,(\overline{V})^{-1} \Rightarrow \overline{B} \equiv \overline{A}$$

Dado que una matriz A y su transpuesta A^T son similares, entonces $\overline{A}$ y $\overline{A^T} = A^*$ son siempre similares, de esta observación se tienen las dos siguientes implicaciones.

(1) $\Rightarrow$ (4) Si A es similar a $\overline{A}$ entonces A es similar a A^*.

(4) $\Rightarrow$ (1) Si A es similar a A^* entonces A es similar a $\overline{A}$

(2) $\Rightarrow$ (5) Sea $E \in M_n(\mathbb{C})$ coninvolutoria tal que $EAE^{-1} = \overline{A}$. Sea $X \in M_n(\mathbb{C})$ conivolutoria tal que $X^2 = E$, entonces $X^{-1}\overline{A}X = XAX^{-1} = XA\overline{X} = \overline{\overline{X}\,\overline{A}X} = \overline{X^{-1}\,\overline{A}X}$. Esta identidad implica que $X^{-1}\overline{A}X \in M_n(\mathbb{R})$. Por el Teorema 1.0.5 existe una matriz real simétrica S tal que $S(X^{-1}\overline{A}X)S^{-1} = (X^{-1}\overline{A}X)^T = X^TA^*(X^T)^{-1}$. Se sigue que $S(XAX^{-1})S^{-1} = X^TA^*(X^T)^{-1}$ y de aquí $(X^T)^{-1}S(XAX^{-1})S^{-1}X^T = A^*$. Dado que X es coninvolutoria se tiene que $(X^*SX)A(X^*SX)^{-1} = A^*$. Dado que S es Hermitiana, también lo es X^*SX

(5) $\Rightarrow$ (4) Trivial

$\square$

No existe una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ para la cual la afimación "Si S es una similaridad entre A y $\overline{A}$ entonces S es coninvolutoria"sea cierta. En efecto, si S es una similaridad entre A y $\overline{A}$, también lo es $\alpha S(\alpha \in \mathbb{C})$. Pero αS no es necesariamente coninvolutoria. De esta misma manera notamos que no todas las similaridades entre A y A^* son Hermitianas. Si S es una similaridad entre A y A^*, también lo es αS. Pero si S es Hermitiana, αS no lo es, si $\alpha \notin \mathbb{R}$.

Definición 3.2.8. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, se define el espacio vectorial complejo*

$$C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : XA = AX\}$$

si además A es similar a A^*, se definen el espacio vectorial complejo

$$C(A, A^*) = \{S \in M_n(\mathbb{C}) : SA = A^*S\}$$

y el espacio vectorial real

$$H(A, A^*) = \{H \in M_n(\mathbb{C}) : HA = A^*H \ y \ H es\ Hermitiana\} \subseteq C(A, A^*)$$

$C(A,A^*)$ tiene la propiedad: "$S \in C(A,A^*)$ implica que $S^* \in C(A,A^*)$". De aquí que podemos definir una función $T : C(A,A^*) \longrightarrow H(A,A^*)$ por $T(S) = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S^*$. Como una función entre espacio vectoriales reales, T es lineal, sobreyectiva y $Kern(T) = \{X \in C(A,A^*) : X \text{ es antihermitiana}\} = iH(A,A^*)$. Ahora si $B \in H(A,A^*) \cap iH(A,^*) \Rightarrow \exists\, C \in H(A,A^*), B = iC \Rightarrow iB = -C \in H(A,A^*) \Rightarrow -iB = \bar{i}B^* = (iB)^* = iB \Rightarrow 2iB = 0 \Rightarrow B = O$, así $iH(A,A^*) \cap H(A,A^*) = \{0\}$. Dado que $\mathrm{Img}(T) = H(A,A^*)$ y $\dim_{\mathbb{R}} C(A,A^*) = \dim Kern_{\mathbb{R}}(T) + \dim_{\mathbb{R}} Img(T) = 2\dim_{\mathbb{R}} H(A,A^*)$, hemos demostrado la identidad $C(A,A^*) = H(A,A^*) \oplus iH(A,A^*)$ (como espacio vectorial real), y de aquí que la dimensión real de $C(A,A^*)$ es el doble de la dimension real de $H(A,A^*)$ por lo que la dimensión compleja de $C(A,A^*)$ es igual a la dimensión real de $H(A,A^*)$.

Proposición 3.2.9. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que A y A^* son similares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es no derogatoria*
2. $\dim_{\mathbb{C}} C(A,A^*) = n$
3. $\dim_{\mathbb{R}} H(A,A^*) = n$

Demostración. El Teorema 4.4.17 de [11] implica que A es no derogatoria si y sólo si $\dim_{\mathbb{C}} C(A) = n$. Como A y A^* son similares existe una matriz no singular S tal que $SAS^{-1} = A^*$. Luego, si $X \in M(\mathbb{C})$ se tiene que

$$X \in C(A) \Rightarrow AX = XA \Rightarrow SAX = SXA \Rightarrow A^*SX = SXA \Rightarrow SX \in C(A,A^*)$$

Por lo que podemos definir la transformación lineal $R : C(A) \longrightarrow C(A,A^*)$ dada por $R(X) = SX$ para todo X en $C(A)$. Como S es no singular se tiene que $Kern(R) = \{0\}$, además si $Y \in C(A,A^*)$ tomemos $X = S^{-1}Y$. Luego $AX = AS^{-1}Y = S^{-1}A^*Y = S^{-1}YA = XA$, así $X \in C(A)$ y además $R(X) = Y$. Concluimos que R es un isomorfismo lineal y por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}} C(A) = \dim_{\mathbb{C}} C(A,A^*)$ □

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es no derogatoria, entonces el Teorema 1.0.4 representa una caracterización de $H(A,A^*) \subset C(A,A^*)$.

Teorema 1.0.4 *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no derogatoria y asumamos que A y A^* son similares vía una matriz Hermitiana V. Supongamos que $S \in M_n(\mathbb{C})$ es tal que $SA = A^*S$. Entonces S es Hermitiana si y sólo si existe un polinomio real p de grado menor que n tal que $S = Vp(A)$*

Demostración.

Fijemos una matriz Hermitiana $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $VAV^{-1} = A^*$. Como en la demostración de la Proposición 3.2.9, definamos un isomorfismo $R : C(A, A^*) \to C(A)$ por $R(S) = V^{-1}S$. Sea $S \in C(A, A^*)$, dado que $V^{-1}S \in C(A)$ y como A es no derogatoria, concluimos de la Proposición 3.1.2 que existe un único polinomio p_1 de grado menor que n tal que $V^{-1}S = p_1(A)$.

Luego $V^{-1}S = p_1(A) \Rightarrow S = Vp_1(A) = Vp_1(A)V^{-1}V = p_1(VAV^{-1})V = p_1(A^*)V$. Usando la identidad $[p(A)]^* = \overline{p}(A^*)$ y $V^* = V$ obtenemos $S^* = [p_1(A^*)V]^* = V^*[p_1(A^*)]^* = V\ \overline{p_1}(A)$. Ahora S es Hermitiana $\Leftrightarrow S = S^* \Leftrightarrow V\ p_1(A) = V\ \overline{p_1}(A) \Leftrightarrow p_1(A) = \overline{p_1}(A) \Leftrightarrow (p_1 - \overline{p_1})(A) = 0$ y dado que A es no derogatoria el polinomio minimal de A es su polinomio característico por lo que el grado de $p_1 - \overline{p_1}$ es menor que el grado del polinomio minimal de A lo cual es equivalente a que $p_1 - \overline{p_1} = 0$, es decir, p_1 es un polinomio real. $\square$

Sean A una matriz no derogatoria tal que exista A y A^* son similares vía la matriz Hermitiana V con $A^* = VAV^{-1}$, concluimos con la siguientes observaciones:

a) Las similaridades Hermitianas entre A y A^* son las combinaciones reales no singulares de $V, VA, VA^2, \ldots,$
   VA^m. En efecto,
   Si H es una similaridad Hermitiana entre A y A^* entonces $A^* = HAH^{-1} \Rightarrow HA = A^*H$, luego existe un polinomio real $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k$ tal que $H = Vp(A) = a_0V + a_1VA + \cdots + a_kVA^k$, es decir H es una combinacion lineal real no singular de $V, VA, VA^2, \ldots, VA^m$.
   Reciprocamente si H es una combinación lineal real no singular de $V, VA, VA^2, \ldots, VA^m$, entonces $H = a_0V + a_1VA + \cdots + a_kVA^k = Vp(A)$ con $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k$ un polinomio real.
   Luego $HA = Vp(A)A = VAp(A) = A^*Vp(A) = A^*H$ por lo que H es Hermitiana y como

H es no singular se tiene que $A^* = HAH^{-1}$, por lo que H es una similaridad Hermitiana entre A y A^*. Una prueba directa que H es Hermitiana es: $H^* = \overline{p}(A^*)V^* = p(A^*)V = VV^{-1}p(A^*)V = Vp(V^{-1}A^*V) = Vp(A) = H$

b) Las similaridades entre A y A^* son las combinaciones no singulares de $V, VA, VA^2, \ldots, VA^m$.

En efecto,

Si S es una similaridad entre A y A^* entonces $SA = A^*S$, de aquí $S \in C(A, A^*) = H(A, A^*) \oplus iH(A, A^*)$. Así existen $H_1, H_2 \in H(A, A^*)$ tales que $S = H_1 + iH_2$. Luego para cada $k \in \{1, 2\}$ S_k es Hermitiana, no singular y $S_kA = A^*S_k$, por lo que existen polinomios reales $p_k(\lambda)$ tales que $S_k = Vp_k(A)$. Por lo tanto, $S = Vp_1(A) + iVp_2(A) = Vp(A)$ con $p(\lambda) = p_1(\lambda) + ip_2(\lambda)$.

Reciprocamente si S es una combinación no singular de $V, VA, VA^2, \ldots, VA^m$, entonces $S = a_0V + a_1VA + \cdots + a_kVA^k = Vp(A)$ con $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k$ un polinomio complejo. Dado que $p(\lambda) = p_(\lambda) + ip_2(\lambda)$ con $p_1(\lambda)$ y $p_2(\lambda)$ polinomios reales, definamos para cada $k \in \{1, 2\}$ $S_k = Vp_k(\lambda)$, luego $S_kA = Vp_k(A)A = VAp_k(A) = A^*Vp_k(A) = A^*S_k$. Así cada S_k es una matriz Hermitiana tal que $S_kA = A^*S$, por lo que $S_k \in H(A, A^*)$. Concluimos entonces que $S = S_1 + iS_2 \in H(A, A^*) \oplus iH(A, A^*) = C(A, A^*)$

Capítulo 4

Sobre consimilaridades entre A y A^T, A^*, o $\overline{A}$

4.1. Consimilaridades

Consimilaridades entre matrices es un fenómeno bien comprendido

Teorema 4.1.1. *([4] o [9])*

1. *$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son consimilares si y sólo si $A\overline{A}$ es similar a $B\overline{B}$, $rango(A) = rango(B)$, $rango(A\overline{A}) = rango(B\overline{B})$, $rango(A\overline{A}A) = rango(B\overline{B}B)$,etc, hasta productos alternante con n términos*

2. *Cada $A \in M_n(\mathbb{C})$ es consimilar a alguna matriz Hermitiana y a alguna matriz real*

Así existen matrices singulares $V, W \in M_n(\mathbb{C})$, una matriz Hermitiana $H \in M_n(\mathbb{C})$ y una matriz real $R \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $A = V R \overline{V^{-1}}$ y $A = W H \overline{W^{-1}}$. Luego

$$\overline{A} = \overline{V}\,\overline{R}\,V^{-1} = \overline{V}\,RV^{-1} = \overline{V}\,V^{-1}A\overline{V}\,V^{-1} = \overline{V}\,V^{-1}\,A\,\overline{V\overline{V^{-1}}} = \overline{V}\,V^{-1}\,A\,\overline{(\overline{V}\,V^{-1})^{-1}}$$

$$\begin{aligned} A^* &= (W^{-1})^T H W^* = (W^{-1})^T W^{-1} A\,\overline{W} W^* \\ &= (W^{-1})^T W^{-1} A\,\overline{W W^T} = (W^{-1})^T W^{-1} A\,\overline{((W^{-1})^T W^{-1})^{-1}} \end{aligned}$$

Se sigue que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es consimilar a $\overline{A}$ y A^*. De aquí $\overline{A}$ es consimilar a $(\overline{A})^* = A^T$, por lo que A también es consimilar a A^T (ver también [9]).

Definición 4.1.2. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ se definen el espacio vectorial real*

$$C^{con}(A, B) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : A\overline{X} = XB\}$$

y el espacio vectorial complejo

$$C(A\overline{A}, B\overline{B}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : A\overline{A}X = XB\overline{B}\}$$

Lema 4.1.3. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$*

1. $S \in C^{con}(A, B) \Longrightarrow S \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$

   Si B es no singular, entonces

2. *Si $S, iS \in C^{con}(A, B)$ entonces $S = 0$*
3. $S \in C^{con}(A, B) \Rightarrow A\overline{S}B^{-1} \in C^{con}(A, B)$
4. $S \in C(A\overline{A}, B\overline{B}) \Longrightarrow A\overline{S}B^{-1} \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$
5. *([1])* $S \in C(A\overline{A}, B\overline{B}) \Longrightarrow e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S \in C^{con}(A, B)$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$

Demostración.

1. Si $A\overline{S} = SB$ entonces $A\overline{A}S = A\,\overline{(A\overline{S})} = A\overline{SB} = (A\overline{S})\overline{B} = SB\overline{B}$
2. Si $S, iS \in C^{\mathrm{con}}(A, B)$ entonces $A\overline{S} = SB$ y $-A\overline{S} = SB$, luego $2SB = 0$ de aquí $S = 0$, ya que B es no singular
3. Si $A\overline{S} = SB$ entonces $A\;\overline{A\overline{S}\;B^{-1}} = A\overline{A}\,S\;\overline{B^{-1}} = A\overline{S}\;\overline{B}\;\overline{B^{-1}} = A\overline{S} = A\overline{S}\;B^{-1}B$
4. Si $A\overline{A}\;S = SB\overline{B}$ entonces

   $$A\overline{A}(A\overline{S}B^{-1}) = A\,\overline{A\overline{A}\,S}B^{-1} = A\;\overline{SB\overline{B}}\;B^{-1} = A\;\overline{S}\;\overline{B}\;B\,B^{-1} = A\;\overline{S}\;\overline{B} = (A\;\overline{S}\;B^{-1})\,B\overline{B}$$

5. Dado que $S, A\overline{S}B^{-1} \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$, se sigue que: $T = e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$ ya que $C(A\overline{A}, B\overline{B})$ es un espacio vectorial complejo. Ahora,

$$\begin{aligned} A\overline{T} &= A(\overline{e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S}) = e^{-i\theta}A\ \overline{A}S\overline{B^{-1}} + e^{i\theta}A\overline{S} \\ &= e^{-i\theta}SB\overline{B}\ \overline{B}^{-1} + e^{i\theta}A\overline{S} = e^{-i\theta}SB + e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1}B \\ &= (e^{-i\theta}S + e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1})B = TB \end{aligned}$$

y la conclusión se sigue

□

Proposición 4.1.4. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *([9]) Si A y B son consimilares, entonces $A\overline{A}$ es similar a $B\overline{B}$*
2. *([4],[9]) Si B es no singular y $A\overline{A}$ es similar a $B\overline{B}$, entonces A y B son consimilares*

Demostración.

1. Si $S^{-1}A\overline{S} = B$, entonces $\overline{B} = \overline{S^{-1}}\,\overline{A}\,S$ así $B\overline{B} = S^{-1}A\overline{S}\ \overline{S^{-1}}\,\overline{A}\,S = S^{-1}A\overline{A}\ S$
2. (De [1]). Sea S no singular tal que $S^{-1}A\overline{A}\ S = B\overline{B}$. Note que ambos A y B son no singulares. Del Lema 4.1.3 concluimos que $A(\overline{e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S}) = (e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S)B$ y por lo tanto, si θ se puede elegir tal que $e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S$ sea no singular, la conclusión se sigue. Pero $e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S$ es no singular si y sólo si $(e^{i\theta}A\overline{S}B^{-1} + e^{-i\theta}S)e^{-i\theta}S^{-1} = A\overline{S}B^{-1}S^{-1} + e^{-2i\theta}I$ es no singular
   Dado que $\sigma(A\overline{S}B^{-1}S^{-1})$ es finito, tomando $\theta \in \mathbb{C} - \sigma(A\overline{S}B^{-1}S^{-1})$ se tiene que $A\overline{S}B^{-1}S^{-1} + e^{-2i\theta}I$ es no singular.

□

Las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son consimilares, ya que si $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es tal que $SA = B\overline{S}$ entonces $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ de aqui $a = c = 0$ y S no sería invertible, pero $A\overline{A}$ y $B\overline{B}$ si son similares ya que $A\,\overline{A} = 0 = B\,\overline{B}$.

El Lema 4.1.3 demuestra que el espacio vectorial real $C^{\text{con}}(A,B)$ es un subconjunto del espacio vectorial complejo $C(AA, BB)$. Ellos tienen algunas cosas en común.

Proposición 4.1.5. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ consimilares y no singulares. Entonces la dimensión real de $C^{con}(A,B)$ es igual a la dimensión compleja de $C(A\overline{A}, B\overline{B})$.*

Demostración. Consideremos el espacio vectorial complejo $C(A\overline{A}, B\overline{B})$ como un espacio vectorial real. Del Lema 4.1.3 se tiene que para todo S en $C(A\overline{A}, B\overline{B})$, $A\overline{S}B^{-1} + S$ está en $C^{\text{con}}(A,B)$, luego podemos definir la función $T : C(A\overline{A}, B\overline{B}) \longrightarrow C^{\text{con}}(A,B)$ dada por $T(S) = \dfrac{1}{2}A\overline{S}B^{-1} + \dfrac{1}{2}S$. Como una función entre espacios vectoriales reales T es una transformación lineal. Note que si $S \in C^{\text{con}}(A,B)$, implica que $A\overline{S} = SB$, además del Lema 4.1.3 se tiene que $S \in\ C(A\overline{A}, B\,\overline{B})$ por lo que $T(S) = S$ y por lo tanto T es sobreyectiva. Notemos también que $\forall S \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$ $S \in Kern(T) \Leftrightarrow A\overline{S}B^{-1} + S = 0 \Leftrightarrow A\overline{S} = -SB \Leftrightarrow -iA\ \overline{S} = iSB \Leftrightarrow A\ \overline{iS} = (iS)B \Leftrightarrow iS \in C^{\text{con}}(A,B)$, de aquí $Kern(T) = iC^{\text{con}}(A,B)$. Dado que la transformación lineal real $L : Kern(T) \longrightarrow C^{\text{con}}(A,B)$ definida por $L(S) = iS$ es un isomorfismo lineal, se concluye que $\dim_{\mathbb{R}} Kern(T) = \dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B)$. Así $\dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B) = \dim_{\mathbb{R}} Rang(T) + \dim_{\mathbb{R}} Kern(T) = 2\dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B)$ y para las dimensiones complejas se tiene que $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, B\overline{B}) = \dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B)$. Por último, $W \in iC^{\text{con}}(A,B) \cap C^{\text{con}}(A,B) \Rightarrow \exists M \in C^{\text{con}}(A,B)\ W = iM \Rightarrow iW = -M \in C^{\text{con}}(A,B) \Rightarrow A\ \overline{W} = WB,\ A\ \overline{iW} = (iW)B \Rightarrow -iWB = -iA\ \overline{W} = A\ \overline{iW} = iWB \Rightarrow 2iWB = 0 \Rightarrow WB = 0 \Rightarrow W = 0$, ya que B es no singular, así se tiene que $iC^{\text{con}}(A,B) \cap C^{\text{con}}(A,B) = \{0\}$ y por lo tanto $C(A\overline{A}, B\overline{B}) = C^{\text{con}}(A,B) \oplus\ iC^{\text{con}}(A,B)$ □

Corolario 4.1.6. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices consimilares y no singulares. Entonces*

1. $C^{con}(A,B) \oplus iC^{con}(A,B) = C(A\overline{A}, B\overline{B})$

   en el sentido que para cada $S \in C(A\overline{A}, B\overline{B})$ existen únicos $S_1, T_1 \in C^{con}(A,B)$ tales que $S = S_1 + iT_1$

2. *Un subconjunto $T \subset C^{con}(A,B)$ es real-independiente en $C^{con}(A,B)$ si y sólo si T es complejo-independiente en $C(A\overline{A}, B\overline{B})$.*

Demostración.

1. Es en esencia la demostración de la Proposición 4.1.5

2. Esto es una consecuencia directa de (a)

□

Corolario 4.1.7.

a. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *no singular, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

   1. $A\overline{A}$ *es no derogatoria*

   2. $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}) = n$

   3. $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, A) = n$

   Si $A\overline{A}$ *es derogatoria, entonces* $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, A) > n$

b. *Si* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *son no singulares y consimilares, digamos* $V^{-1}A\overline{V} = B$, *entonces*

   4. $C^{con}(A, B) = \{SV : S \in C^{con}(A, A)\}$ *y* $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, B) = \dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, A)$

   5. *Si* $A\overline{A}$ *es derogatoria, entonces* $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, B) > n$

   Las siguientes afirmaciones son equivalentes

   6. $A\overline{A}$ *es no derogatoria*

   7. $B\overline{B}$ *es no derogatoria*

   8. $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, B\overline{B}) = n$

   9. $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, B) = n$

Demostración.

a. Notese que $C(A\overline{A}) = C(A\overline{A}, A\overline{A})$. La equivalencia de (1) y (2) es conocida (ver [11], Teorema 4.4.17(d)). La equivalencia de (2) y (3) fue probada en la proposición 4.1.5. Finalmente, [11], Teorema 4.4.17(d) implica que si $A\overline{A}$ es no derogatoria, entonces $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, A\overline{A}) > n$, y luego, $\dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A, A) > n$.

b. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son no singulares y consimilares, digamos $V^{-1}A\overline{V} = B$, entonces

4. $X \in C^{\text{con}}(A,B) \Leftrightarrow A\overline{X} = XB \Leftrightarrow A\overline{X} = XV^{-1}A\overline{V} \Leftrightarrow A\overline{XV^{-1}} = (XV^{-1})A \Leftrightarrow XV^{-1} \in C^{\text{con}}(A,A)$. Como V es no singular se sigue que $C^{\text{con}}(A,B) = \{SV : S \in C^{\text{con}}(A,A)\}$ y $\dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B) = \dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,A)$

5. Como V es no singular, de(4.) se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B) = \dim_{\mathbb{R}} C(A,A) > n$ si $A\overline{A}$ es derogatoria.

   Por último, como A y B son no singulares entonces $A\overline{A}$ y $B\overline{B}$ son no singulares. Además como $B\overline{B} = V^{-1}A\overline{V}\ \overline{V^{-1}}\,\overline{A}V = V^{-1}A\,\overline{A}\ V$ se sigue que

$$\begin{aligned} W \in C(A\overline{A}, B\overline{B}) &\Leftrightarrow WB\,\overline{B} = A\,\overline{A}\,W \Leftrightarrow WV^{-1}(A\,\overline{A})V = A\,\overline{A}\,W \\ &\Leftrightarrow WV^{-1}(A\,\overline{A}) = (A\,\overline{A})\,WV^{-1} \Leftrightarrow WV^{-1} \in C(A\,\overline{A}, A\,\overline{A}) \end{aligned}$$

   Así $C(A\overline{A}, B\overline{B}) = \{SV : S \in C(A\overline{A}, A\overline{A})\}$ y dado que V es no singular terminan siendo isomórficos, por lo que $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, B\overline{B}) = \dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, A\overline{A})$. Luego

$$\begin{array}{c} A\overline{A} \text{ es no derogatoria } \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,A) = n \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} C^{\text{con}}(A,B) = n \\ \Updownarrow \\ \dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}) = n \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, B\overline{B}) = n \Leftrightarrow B\overline{B} \text{ es no derogatoria} \end{array}$$

□

Ejemplo 4.1.8. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Entonces* $A\overline{A} = A^2 = A$ *es no derogatoria y singular. Sea* $S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$ *con* $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{C}$, *luego*

$$\begin{aligned} S \in C^{con}(A,A) \Leftrightarrow A\overline{S} = SA &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{s_1} & \overline{s_2} \\ \overline{s_3} & \overline{s_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{s_1} & \overline{s_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ s_3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_1 = \overline{s_1},\ s_2 = s_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow s_1 \in \mathbb{R},\ s_2 = s_3 = 0 \end{aligned}$$

Así $C^{con}(A,A) = \left\{ \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 + ir_3 \end{bmatrix} : r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$$S \in C(A, \overline{A}, A\overline{A}) \Leftrightarrow S \in C(A,A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ s_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_2 = s_3 = 0$$

y $C(A\overline{A}, A\overline{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbb{C} \right\}$. *Luego,* $\dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A,A) = 3$ *y* $\dim_{\mathbb{C}} C(A\overline{A}, A\overline{A}) = 2$.

Por lo que la no singularidad de A en la Proposición 4.1.5, Corolario 4.1.6 y Corolario 4.1.7 es esencial.

Si $A\overline{A}$ es no derogatoria, entonces la Proposición 3.1.2 presenta la siguiente descripción de $C(A\overline{A}, A\overline{A})$, $C(A\overline{A}, A\overline{A}) = \{S : \exists p \in \mathbb{C}[\lambda]$ polinomio complejo y $S = p(A\overline{A})\}$

Obtenemos la siguiente descripción de $C^{\text{con}}(A,A)$

Teorema 4.1.9. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ no singular y supongamos que $A\overline{A}$ es no derogatoria. Si $S \in M_n(\mathbb{C})$ entonces $S \in C^{con}(A,A)$ si y sólo si existe un polinomio real p tal que $S = p(A\overline{A})$*

Demostración. Note que $S = A\overline{A} \in C^{\text{con}}(A,A)$, y también $(A\overline{A})^k$ (para todo k) ya que $A\ \overline{(A\ \overline{A})^k} = A(\overline{A}\ A)^k = (A\ \overline{A})^k A$, de aquí que $p(A\overline{A}) \in C^{\text{con}}(A,A)$, para todo polinomio real p.

Si $A\ \overline{S} = SA$ entonces $S(A\,\overline{A}) = (SA)\ \overline{A} = A\ \overline{S}\ \overline{A} = A\ \overline{SA} = A\ \overline{A\ \overline{S}} = A\ \overline{A}\ S$ luego se tiene que $S \in C(A\,\overline{A}, A\,\overline{A})$ y dado que $A\overline{A}$ es no derogatoria, sabemos que $S = p(A\overline{A})$ para algún polinomio de grado estrictamente menor que el grado del polinomio minimal de $A\overline{A}$ (Proposición 3.1.2)

Escribimos $p(t) = \alpha_o + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$, donde $k <$ grado $mp_{A\overline{A}}$. Por una parte:

$$SA = (\alpha_o I + \alpha_1(A\ \overline{A}) + \cdots + \alpha_k(A\ \overline{A})^k)A = \alpha_o A + \alpha_1(A\ \overline{A})A + \cdots + \alpha_k(A\ \overline{A})^k A$$
$$= \alpha_o A + \alpha_1 A(\overline{A}\ A) + \cdots + \alpha_k A(\overline{A}\ A)^k = A(\alpha_0 I + \alpha_1(\overline{A}A) + \cdots + \alpha_k(\overline{A}A)^k)$$

Por otra parte: $SA = A\overline{S} = A(\overline{\alpha_0}I + \overline{\alpha_1}(\overline{A}A) + \cdots + \overline{\alpha_k}(\overline{A}A)^k)$

De aquí $0 = SA - A\overline{S} = A[(\alpha_0 - \overline{\alpha_0})I + (\alpha_1 - \overline{\alpha_1})(\overline{A}A) + \cdots + (\alpha_k - \overline{\alpha_k})(\overline{A}A)^k]$

y como A es no singular, obtenemos: $(\alpha_0 - \overline{\alpha_0})I + (\alpha_1 - \overline{\alpha_1})(\overline{A}A) + \cdots + (\alpha_k - \overline{\alpha_k})(\overline{A}\ A)^k = 0$

Pero $k <$ grado $mp_{A\overline{A}}$ y luego: $\alpha_i - \overline{\alpha_i} = 0 (i = 1, 2, \ldots, k)$, así p es un polinomio real $\square$

Nota 4.1.10. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $S = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Entonces* $S \in C^{con}(A.A)$, *pero no existe un polinomio real tal que* $S = p(A\overline{A})$. *Así que la no singularidad de* A *en el Teorema 4.1.9 es necesaria.*

Corolario 4.1.11. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *una matriz no singular tal que* $A\overline{A}$ *es no derogatoria y* $\overline{A}A = A\overline{A}$. *Si* $B \in M_n(\mathbb{C})$ *es consimilar a* A *vía una consimilaridad real entonces todas las consimilaridades entre* A *y* B *son reales (y de aquí similaridades)*

Demostración. Sean $U, W \in M_n(\mathbb{C})$ dos consimilaridades de A y B, luego $UA\overline{U^{-1}} = B = WA\overline{W^{-1}}$ entonces $(W^{-1}U)A = A(\overline{W^{-1}U})$ y obtenemos que $W^{-1}U = p(A\overline{A})$, para algún polinomio real p. Así $U = Wp(A\overline{A})$ y dado que $A\overline{A} \in M_n(\mathbb{R})$ concluimos que $U \in M_n(\mathbb{R})$ si y sólo si $W \in M_n(\mathbb{R})$ $\square$

4.2. Consimilaridades entre A y A^*

Nuestra Tercera Proposición Estándar es,

Proposición 4.2.1. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Entonces:*

1. *A es consimilar a una matriz Hermitiana*
2. *A es consimilar a una matriz Hermitiana vía una matriz simétrica*
3. *A es consimilar a A^* vía una matriz simétrica*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea V no singular tal que B=$V^{-1}A\overline{V}$ sea Hermitiana. Luego $A = VB\overline{V^{-1}}$, así

$$A^* = (V^{-1})^T B^* V^* = (V^{-1})^T BV^* = (V^{-1})^T V^{-1} A\overline{V} V^* = (VV^T)^{-1} A\overline{VV^T}$$

y VV^T es simétrica

(3) $\Rightarrow$ (2) Sea V simétrica y no singular tal que $A = VA^* \ \overline{V^{-1}}$. Existe W simétrica tal que $W^2 = V$, luego $A = VA^*\overline{V^{-1}} = W^2A^*\overline{(W^2)^{-1}} = W[WA^*\overline{W^{-1}}]\overline{W^{-1}}$. Dado que $W^{-1}A\overline{W} = WA^*\overline{W^{-1}}$ se tiene que $(WA^*\overline{W^{-1}})^* = W^{-1}A\overline{W} = WA^*\overline{W^{-1}}$, por lo tanto $WA^*\overline{W^{-1}}$ es Hermitiana.

(2) $\Rightarrow$ (1) Es obvio

Del Teorema 4.1.1, se tiene que la aseveración (1) es cierta. $\square$

Concluimos que la las consimilaridades naturales entre A y A^* son las simétricas. Podemos ahora demostrar el Teorema 1.0.6.

Teorema 1.0.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$.*

1. *A es consimilar a una matriz Hermitiana vía una matriz simétrica*
2. *Existe una consimilaridad simétrica $V \in GL_n(\mathbb{C})$ entre A y A^**
3. *Si $A\overline{A}$ es no derogaroria entonces todas las matrices $V \in C^{con}(A, A^*)$ son simétricas*
4. *Si A en no singular y toda matriz $V \in C^{con}(A, A^*)$ es simétrica, entonces $A\overline{A}$ es no derogatoria*

Demostración.

1. Por la Proposición 4.2.1, toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es consimilar a una matriz Hermitiana vía una matriz simétrica.

2. Por la Proposición 4.2.1, toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es consimilar a A^* vía una matriz simétrica.

3. Note que $A\overline{V} = VA^*$ implica que $(A\ \overline{A})\ V = A\ \overline{A\ \overline{V}} = A\ \overline{VA^*} = A\ \overline{V}\ A^T = VA^*A^T = V(A\ \overline{A})^T$, dado que $A\overline{A}$ es no derogatoria el Teorema 1.0.5 implica que V es simétrica.

4. Supongamos ahora que toda matriz $V \in C^{\text{con}}(A, A^*)$ es simétrica, dado que

$$C(A\ \overline{A}, (A\ \overline{A})^T) = C(A\ \overline{A}, (A^*\ A^T)) = C(A\ \overline{A}, (A^*\ \overline{A^*})) = C^{\text{con}}(A, A^*) \oplus i\, C^{\text{con}}(A, A^*)$$

ver el Corolario 4.1.6 ya que A es no singular. De lo anterior y de que toda las matrices en $C^{\text{con}}(A, A^*)$ son simétricas concluimos que toda matriz en $C(A\ \overline{A}, (A\ \overline{A})^T)$ es simétrica. El Teorema 1.0.5 implica ahora que $A\ \overline{A}$ es no derogatoria.

□

4.3. Consimilaridades entre A y A^T

Proposición 4.3.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, existe una matriz unitaria $U \in M_n(\mathbb{C})$ y una matriz triangular superior $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = U\Delta U^T$ si y sólo si todos los autovalores de $A\overline{A}$ son no negativos*

Demostración.

(⇒) Si $A = U\Delta U^T$ con U unitaria y Δ una matriz triangular superior, entonces $A\ \overline{A} = U\Delta U^T \overline{U}\ \overline{\Delta}\ U^* = U\Delta\ \overline{\Delta}\ U^*$, luego $A\ \overline{A}$ es unitariamente similar a $\Delta\ \overline{\Delta}$. Como Δ es una matriz triangular superior entonces $\Delta\ \overline{\Delta}$ es una matriz triangular cuya diagonal principal tiene entradas dadas por $\delta_{ii}\overline{\delta_{ii}} = |\delta_{ii}| \geq 0$, pero los autovalores de una matriz triangular es exactamente su diagonal principal

(⇐) Supongamos que todos los autovalores de $A\overline{A}$ son no negativos y sea x un vector propio de $A\ \overline{A}$, entonces existe $\lambda \geq 0$ tal que $A\ \overline{A}x = \lambda x$.

Si $A\overline{x}, x$ fuesen dependientes entonces existiría $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $A\overline{x} = \mu x$. Luego

$$\lambda x = A\ \overline{A}x = A\ \overline{A\overline{x}} = A\overline{\mu x} = \overline{\mu}A\overline{x} = \overline{\mu}\ \mu x = |\mu|^2 x$$

así $|\mu|^2 = \lambda$

Si $A\overline{x}, x$ fuesen independientes, para todo $\mu \in \mathbb{C}$ se tiene que $w_1 = A\overline{x} + \mu x$ es no nulo. Elijamos μ tal que $|\mu|^2 = \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} A\overline{w}_1 &= A\,\overline{A\overline{x} + \mu x} = A(\overline{A}\,x + \overline{\mu}\,\overline{x}) = A\,\overline{A}\,x + \overline{\mu}\,A\,\overline{x} \\ &= \lambda x + \overline{\mu}\,A\overline{x} = \overline{\mu}\,\mu x + \overline{\mu}\,A\,\overline{x} = \overline{\mu}(\mu x + A\,\overline{x}) \\ &= \overline{\mu}\,w_1 \end{aligned}$$

Hemos demostrados que en cualquiera de los casos, existe un vector no nulo w y μ en los complejos tales que $A\overline{w} = \mu w$ y $|\mu|^2 = \lambda$. Sea $z = \dfrac{w}{|w|}$, luego $|z| = 1$ y $A\overline{z} = \mu z$. Ahora para todo β en $\mathbb{R}$, se tiene que $A(\overline{e^{i\beta}z}) = A(e^{-i\beta}\overline{z}) = e^{-i\beta}A\overline{z} = e^{-i\beta}\mu\, z = (e^{-2i\beta}\mu)(e^{i\beta}z)$, notese que $e^{i\beta}z$ es unitario y como $|(e^{-2i\beta}\mu)^2| = |e^{-4i\beta}\mu^2| = |\mu^2| = \lambda$ podemos elegir β tal que $e^{-2i\beta}\mu = \sqrt{\lambda} \geq 0$. Sea $\sigma = e^{-2i\beta}\mu$ y $v = e^{i\beta}z$, entonces v es unitario y $A\overline{v} = \sigma v$. Construyamos una base ortonormal $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ y sea V_1 la matriz unitaria que tiene a estos vectores como columnas. La primera columna de la matriz $\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1}$ tiene entrada i dada por

$$[\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1}]_{i1} = v_i^* A\overline{v} = v_i^* \sigma v = \sigma v_i^* v = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

De aquí podemos particionar la matriz $\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1}$ de la forma $\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1} = \begin{bmatrix} \sigma & h \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ con $h \in \mathbb{C}^{n-1}, A_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Así,

$$(\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1})\,\overline{(\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1})} = V_1^* A\,\overline{A}\,V_1 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma\,\overline{h} + h\,\overline{A_2} \\ 0 & A_2\,\overline{A_2} \end{bmatrix}$$

Luego los autovalores de $A\,\overline{A}$ son σ^2 y los autovalores de $A_2\,\overline{A}_2$, por lo que los autovalores de $A_2\,\overline{A}_2$ serán todos no negativos. Repitiendo este proceso de reducción con A_2 y sucesivamente $n-1$ veces, se tiene que:

$$\overline{V_{n-1}}^T\,\overline{V_{n-2}}^T \ldots \overline{V_2}^T\overline{V_1}^T A\,\overline{V_1}\,\overline{V_2} \ldots \overline{V_{n-2}}\,\overline{V_{n-1}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Sea Δ la matriz triangular superior dada por $\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$ con entradas no negativas en la diagonal principal σ_i y tomemos $U = V_1 V_2 \cdots V_{n-1}$ la cual es unitaria, entonces se tiene que $A = U\Delta U^T$.

□

Corolario 4.3.2. *(Factorizacion de Tagaki) Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es simétrica, entonces existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal real $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ con cada $\sigma_i \geq 0$ tal que $A = U\Sigma U^T$*

Demostración. Como A es simétrica, entonces $A^* = \overline{A^T} = \overline{A}$. Si λ es autovalor de matriz Hermitiana AA^* y v es un$\lambda-$autovalor de AA^*, entonces $0 \leq \langle A^*v, A^*v\rangle = \langle AA^*v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$, por lo que cada autovalor de $A\overline{A} = AA^*$ es no negativo. Por el Teorema 4.3.1 existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior $\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$ con cada $\sigma_i \geq 0$ y tal que $A = U\Delta U^T$.

Ahora $U\Delta U^T = A = A^T = U\Delta^T U^T$, y como U es no singular se sigue que $\Delta = \Delta^T$. De aquí $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, definiendo $\Sigma = \Delta$ se concluye la prueba. □

Nuestra Cuarta Proposición Estándar es,

Proposición 4.3.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *A es consimilar a una matriz simétrica*
2. *A es consimilar a una matriz simétrica vía una matriz Hermitiana definida positiva*
3. *A es consimilar a A^T vía una matriz Hermitiana definida positiva*
4. *A es consimilar a una matriz diagonal*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (3) Existe una matriz simétrica S y V no singular tal que $A = VS\overline{V^{-1}}$, luego

$$A^T = (V^*)^{-1}SV^T = (V^*)^{-1}V^{-1}A\overline{V}\ V^T = (VV^*)^{-1}A\ \overline{VV^*}$$

La matriz de consimilaridad VV^* es Hermitiana

(3) $\Rightarrow$ (2) Existe una matriz Hermitiana no singular definida positiva tal que $A = HA^T\ \overline{H^{-1}}$. Sea U una matriz Hermitiana no singular definida positiva tal que $H = U^2$, luego $A = U^2A^T\ \overline{(U^2)^{-1}} = U(UA^T\overline{U^{-1}})\ \overline{U^{-1}}$. Así A es consimilar a la matriz $UA^T\overline{U^{-1}}$ vía la matriz Hermitiana no singular definida positiva U, sólo resta ver que $UA^T\overline{U^{-1}}$ sea simétrica, en efecto $(UA^T\overline{U^{-1}})^T = (U^*)^{-1}A\ U^T = U^{-1}A\ \overline{U} = UA^T\overline{U^{-1}}$

(2) $\Rightarrow$ (1) Es obvio

(1) $\Rightarrow$ (4) Sea S una matriz simétrica tal que A es consimilar a S. Por el Corolario 4.3.2, existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal Σ tal que $S = U\Sigma U^T$, luego $S = U\Sigma\overline{U^{-1}}$ por lo que S es consimilar a Σ. Así A es consimilar a la matriz diagonal Σ

(4) $\Rightarrow$ (1) Es obvio

$\square$

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ fuese consimilar a una matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, entonces existiría una matriz no singular V tal que $A = V\Lambda\overline{V^{-1}}$. Luego $A\ \overline{A} = V\Lambda\overline{V^{-1}}\ \overline{V}\ \overline{\Lambda}V^{-1} = V\Lambda\ \overline{\Lambda}V^{-1} = V\Sigma V^{-1}$, con $\Sigma = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$, por lo que $A\overline{A}$ será una matriz diagonalizable. Así no todas las matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ son consimilares a una matriz diagonal y por ende, no todas las matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ son consimilares a una matriz simétrica. Pero A y A^T son siempre consimilares y de la proposición previa uno podría sospechar el tipo de las consimilaridades naturales entre A y A^T. Podemos ahora probar el Teorema 1.0.7

Teorema 1.0.7. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$.*

1. *Existe una matriz no singular Hermitiana $V \in C^{con}(A, A^T)$*

2. *Si A es no singular y $A\overline{A}$ es no derogatoria, entonces toda $U \in C^{con}(A, A^T)$ es Hermitiana*

Demostración.

1. Construiremos una matriz Hermitiana $V \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $V^{-1}A\overline{V} = A^T$. Por el Teorema 4.1.1 existe una matriz $S \in M_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $S^{-1}A\overline{S} = R \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz real. Ahora existe una matriz simétrica $T \in M_n(\mathbb{R})$ con $T^{-1}RT = R^T$, ver el Teorema 1.0.5. Así

$$T^{-1}S^{-1}A\overline{S}T = T^{-1}RT = R^T = (S^{-1}A\overline{S})^T = S^*A^T(S^T)^{-1}$$

Obtenemos: $((S^*)^{-1}T^{-1}S^{-1})\,A\,(\overline{S}\;TS^T) = A^T$ y por lo tanto como T es una matriz real se tiene que

$$A^T = (STS^*)^{-1}\,A\,(\overline{S}\,\overline{T}\,S^T) = (ST\,S^*)^{-1}\,A\,\overline{(STS^*)} = V^{-1}A\,\overline{V}$$

con $V = STS^*$, claramente V es la matriz Hermitiana no singular requerida.

2. Ahora, asumamos que A es no singular y $A\overline{A}$ es no derogatoria. Sea V una matriz Hermitiana tal que $V^{-1}A\overline{V} = A^T$. Notemos que $V^{-1}(A\,\overline{A})\;V = A^T\;\overline{V^{-1}}\;\overline{A}\;V = A^T\;\overline{V^{-1}A\overline{V}} = A^T\;\overline{A^T} = (\overline{A}A)^T$

Sea $U \in C^{\text{con}}(A, A^T)$, luego $A\;\overline{U} = UA^T$. Dado que

$$A\;\overline{(UV^{-1})} = A\;\overline{U}\;\overline{V^{-1}} = UA^T\overline{V^{-1}} = (UV^{-1})A$$

se tiene que $UV^{-1} \in C^{\text{con}}(A, A)$, así por la proposición 4.1.9 se tiene que $UV^{-1} = p(A\overline{A})$ para algún polinomio real p, así, $U = p(A\overline{A})V$. Luego, $U = p(A\overline{A})V = VV^{-1}p(A\overline{A})V = Vp(V^{-1}A\overline{A}V) = Vp((\overline{A}A)^T)$ Como p es un polinomio real nosotros obtenemos $\overline{p(A\overline{A})} = p(\overline{A}A)$ y luego $U^* = (p(A\overline{A})V)^* = V^*\;\overline{p(A\overline{A})}^T = V(p(\overline{A}\;A))^T = Vp((\overline{A}A)^T) = U$ y concluimos que U es Hermitiana

$\square$

Nota 4.3.4. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices no singulares y consimilares. Dado que, $C(A\,\overline{A}, A^T\,\overline{A^T})$ $= C(A\overline{A}, (A\overline{A})^*)$, $C(A, A^*) = H(A, A^*) \oplus iH(A, A^*)$ y $C(A\,\overline{A}, B\,\overline{B}) = C^{con}(A, B) \oplus iC^{con}(A, B)$. Tomando $B = A^T$ la cual es no singular si A es no singular y como A, A^T son consimilares se tiene que:*

$$\dim_{\mathbb{R}} H(A\,\overline{A}, (A\,\overline{A})^*) = \dim_{\mathbb{C}}(A\,\overline{A}, (A\,\overline{A})^*) = \dim_{\mathbb{C}} C(A\,\overline{A}, A^T\,\overline{A^T}) = \dim_{\mathbb{R}} C^{con}(A, A^T)$$

Teorema 4.3.5. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no singular. Si $A\overline{A}$ es no derogatoria entonces:*

$$C^{con}(A, A^T) = H(A\overline{A}, (A\overline{A})^*))$$

Demostración. El Teorema 1.0.7 implica que $C^{\text{con}}(A, A^T) \subseteq H(A\overline{A}, (A\overline{A})^*)$ y dado que ambos espacios vectoriales reales son $n - dimensional$, la conclusión se sigue. $\square$

Ejemplo 4.3.6. *Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, luego $A\,\overline{A} = AA = I_2$. Así A es no singular pero derogatoria. Recordemos que $(A\,\overline{A})^* = A^T\,\overline{A^T}$. Ahora, si $S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$ con $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{C}$ entonces*

$$S \in C^{con}(A, A^T) \Leftrightarrow A\overline{S} = SA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{s_1} & \overline{s_2} \\ \overline{s_3} & \overline{s_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{s_1} & \overline{s_2} \\ -\overline{s_3} & -\overline{s_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_3 & -s_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overline{s_1} = s_1, \overline{s_2} = -s_2, -\overline{s_3} = s_3, \overline{s_4} = s_4$$

$$\Leftrightarrow s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad Re(s_2) = Re(s_3) = 0$$

De aquí tenemos que,

1. *$C^{con}(A, A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & ib \\ ic & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ tiene dimensión 4*

2. *$\{S \in C^{con}(A, A^T) : S$ es Hermitiana$\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & ib \\ -ib & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ tiene dimensión 3*

3. $C(A\overline{A}, A^T\overline{A^T}) = M_4(\mathbb{C})$ *tiene dimensión real 8*

4. $H(A\overline{A}, A^T\overline{A^T}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ *tiene dimensión 4*

Por lo que,

a. $C^{\text{con}}(A, A^T)$ no está contenido en $H(A\overline{A}, (A\,\overline{A})^*)$ y $H(A\overline{A}, (A\,\overline{A})^*)$ no está contenido en $C^{\text{con}}(A, A^T)$

b. Existen matrices no hermitianas en $C^{\text{con}}(A, A^T)$

Concluimos así que la condición $A\,\overline{A}$ es no derogatoria es esencial en el Teorema . Otra razón de porque los ejemplos reales pueden ser interesantes es la siguiente:

Lema 4.3.7. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz no singular y supongamos que $A\overline{A} = A^2$ es no derogatoria. Entonces todas las consimilaridades entre A y A^T son reales y simétricas.*

Demostración. Dado que $A^T = A^*$ la condición sobre A implica por los teoremas 1.0.6 y 1.0.7 que cualquier $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $U^{-1}A\overline{U} = A^T = A^*$ es ambas simétrica y Hermitiana, así que esta es real y simétrica. □

4.4. Consimilaridades entre A y $\overline{A}$

Nuestra Quinta Proposición Estándar es,

Proposición 4.4.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces*

1. *A es consimilar a una matriz real*

2. *A es consimilar a una matriz real vía una matriz coninvolutoria*

3. *A es consimilar a $\overline{A}$ vía una matriz coninvolutoria*

4. *A es consimilar a $\overline{A}$*

Note que la proposición estándar anterior contiene el Teorema 1.0.8

Demostración.

(1) ⇒ (3) Sea $V \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no singular y $R \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $A = VR\overline{V^{-1}}$. Luego,

$$\overline{A} = \overline{V}\,RV^{-1} = \overline{V}\,V^{-1}A\overline{V}\,V^{-1} = (\overline{V}\,V^{-1})A\,\overline{V\,\overline{V^{-1}}} = (\overline{V}\,V^{-1})A\,\overline{(\overline{V}\,V^{-1})^{-1}}$$

Además $(\overline{V}\,V^{-1})^{-1} = V\,\overline{V}^{-1} = \overline{\overline{V}\,V^{-1}}$

(3) ⇒ (2) Sea V una matriz coninvolutoria tal que $A = V\,\overline{A}\,\overline{V^{-1}}$. Existe una matriz coninvolutoria W tal que $V = W^2$. Luego, $A = V\,\overline{A}\,V = W^2\,\overline{A}\,W^2 = W(W\,\overline{A}\,W)W$. Así A es consimilar a $W\,\overline{A}\,W$ vía la matriz coninvolutoria W, sólo resta demostrar que $W\,\overline{A}\,W$ es una matriz real. En efecto,

$$\overline{W\,\overline{A}\,W} = \overline{W}\,A\,\overline{W} = W^{-1}\,A\,W^{-1} = W\,\overline{A}\,W$$

(2) ⇒ (1) Es obvio

El Teorema 4.1.1 afirma que (1) es una tautología, luego se concluye que (1), (2) y (3) son ciertas y de la nota del Teorema 4.1.1 se tiene que A siempre es consimilar a $\overline{A}$.

□

Así consimilaridades coninvolutorias entre A y $\overline{A}$ siempre existen. Sin embargo, no existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ con la propiedad que todas las consimilaridades entre A y $\overline{A}$ son coninvolutoria. En efecto, si S en una consimilaridad entre A y $\overline{A}$, también lo es αS ($\alpha \in \mathbb{R}$). Pero S es coninvolutoria no implica que αS sea coninvolutoria, a menos que $\alpha = \pm 1$-
Note que $A \in C^{\text{con}}(A, \overline{A})$, de aquí tenemos la siguiente descripción de $C^{\text{con}}(A, \overline{A})$, para $A \in M_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $A\overline{A}$ es no derogatoria.

Proposición 4.4.2. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $A\overline{A}$ es no derogatoria. Entonces $S \in C^{con}(A, \overline{A})$ si y sólo si $S = p(A\overline{A})A$ para algún polinomio real p.*

Demostración. Sea $S \in M_n(\mathbb{C})$ y denotemos por $P_{\mathbb{R}}(\lambda)$ el espacio vectorial real de todos los polinomios de coeficientes reales, del Teorema 4.1.9 se tiene que,

$$S \in C^{\text{con}}(A, \overline{A}) \Leftrightarrow A\,\overline{S} = S\,\overline{A} \Leftrightarrow A\,\overline{SA^{-1}} = S \Leftrightarrow A\,\overline{SA^{-1}} = SA^{-1}A \Leftrightarrow SA^{-1} \in C^{\text{con}}(A, A)$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in P_{\mathbb{R}}(\lambda), SA^{-1} = p(A\,\overline{A}) \Leftrightarrow \exists p \in P_{\mathbb{R}}(\lambda), S = p(A\,\overline{A})A$$

$\square$

Proposición 4.4.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A\overline{A}$ es no derogatoria.*

1. *Si A es simétrica entonces toda $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $U\,A\,\overline{U^{-1}} = \overline{A}(= A^*)$ son simétricas*

2. *Si A es no singular y Hermitiana entonces toda $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $U\,A\,\overline{U^{-1}} = \overline{A}(= A^T)$ son Hermitianas*

Demostración.

1. Sea $U \in M_n(\mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
U\,A\,\overline{U^{-1}} = \overline{A} \Rightarrow U \in C^{\mathrm{con}}(A,\overline{A}) &\Rightarrow U = p(A\,\overline{A})A, \text{ para algún polinomio } p \text{ real}\\
&\Rightarrow U^T = A^T[p(A\,\overline{A})]^T = Ap((A\,\overline{A})^T) = Ap(\overline{A}\,A) = p(A\overline{A})A = U\\
&\Rightarrow U \text{ es simétrica}
\end{aligned}
$$

ya que si $p(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \lambda^k$ entonces

$$
\begin{aligned}
Ap(\overline{A}\,A) &= A\left(\sum_{k=1}^{m} a_k(\overline{A}\,A)^k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k A(\overline{A}\,A)^k\\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k(A\,\overline{A})^k A = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k(A\,\overline{A})^k\right) A\\
&= p(A\,\overline{A})A
\end{aligned}
$$

2. Sea $U \in M_n(\mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
U\,A\,\overline{U^{-1}} = \overline{A} \Rightarrow U \in C^{\mathrm{con}}(A,\overline{A}) \Rightarrow U = p(A\,\overline{A})A&\\
\Rightarrow U^* = A^*\,[p(A\,\overline{A})]^* = A\,\overline{p}((A\,\overline{A})^*) = A\,\overline{p}(\overline{A^*}\,A^*) = A\,\overline{p}(\overline{A}\,A) = \overline{p}(A\,\overline{A})A = U&\\
\Rightarrow U \text{ es simétrica}&
\end{aligned}
$$

$\square$

Corolario 4.4.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A\overline{A}$ es no derogatoria.*

1. *Si A es simétrica entonces toda matriz coninvolutoria $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $UA\overline{U^{-1}} = \overline{A}$ son simétricas y unitarias.*

2. *Si A es no singular y Hermitiana entonces toda matriz coninvolutoria $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $UA\overline{U^{-1}} = \overline{A}$ son Hermitianas y ortogonales.*

Demostración. Esto es un corolario de la Proposición 3.18 y del hecho que una coninvolución simétrica U es unitaria (dado que $U^{-1} = \overline{U} = U^*$), respectivamente, una coninvolución Hermitiana U es ortogonal (dado que $U^{-1} = \overline{U} = U^T$). □

4.5. Sobre la historia de estos resultados sobre consimilaridad

Los Teoremas 1.0.6 y 1.0.7 fueron demostrados por Bevis, Hall y Hartwin en [5] como corolarios de un resultado más general, su demostración fue absolutamente técnica mientras que las demostraciónes presentadas por Vermee en [17] son de un nivel más elemental. Más aún, todos los resultados de la sección 3 in [5] son de hechos corolarios de los Teoremas 1.0.6 y 1.0.7

Corolario 4.5.1. *[5] Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$.*

1. *Para la ecuación $A\overline{X} - XA^T = C$ las siguientes son equivalentes*

   a) *$C^T = -C$ y la ecuación es consistente*

   b) *La ecuación tiene una (no singular) solución Hermitiana*

2. *Si más aún A es no singular y $A\overline{A}$ es no derogatoria entonces $C^T = -C$ y $A\overline{X} - XA^T = C$ es consistente implican que todas las soluciones de esta ecuación son Hermitianas .*

Demostración.

1. Notemos primero que:

$$\begin{aligned} A\overline{X} - XA^T = C &\Leftrightarrow (A\overline{X} - XA^T)^T = C^T \\ &\Leftrightarrow X^*A^T - AX^T = C^T \\ &\Leftrightarrow AX^T - X^*A^T = -C^T \\ &\Leftrightarrow A\overline{X^*} - X^*A^T = -C^T \end{aligned}$$

Así $C^T = -C$ es equivalente a exigir que si X es una solución entonces X^* es también una solución

(a)$\Rightarrow$ (b) Sea X una solución de la ecuación $A\overline{X} - XA^T = C$. La identidad $C^T = -C$ implica que X^* es también una solución, y así $S = (X + X^*)/2$ es una solución Hermitiana. Del Teorema 1.0.7 existe una matriz V no singular y Hermitiana tal que $A^T = V^{-1}A\overline{V}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y definamos $W = S - \alpha V$, luego,

$$\begin{aligned} A\overline{W} - WA^T &= A\overline{S - \alpha V} - (S - \alpha V)A^T \\ &= A\overline{S} - SA^T - \overline{\alpha}A\overline{V} + \alpha VA^T \\ &= C - \overline{\alpha}A\overline{V} + \alpha VA^T \\ &= C - \alpha VA^T + \alpha VA^T \\ &= C \end{aligned}$$

Luego W es una solución Hermitiana de la ecuación. Sea $p(\alpha) = \det W = \det(S - \alpha V)$ y tomemos $\beta \in \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{C}, p(\alpha) = 0\}$, así $W = S - \beta V$ es una solución Hermitiana no singular.

(b)$\Rightarrow$ (a) Sea B una solución Hermitiana de $A\overline{X} - XA^T = C$, como B es Hermitiana se tiene que $B^T = \overline{B}$. Luego

$$\begin{aligned} C^T &= (A\overline{B} - BA^T)^T \\ &= B^*\, A^T - AB^T \\ &= B\, A^T - AB^T \\ &= -(A\, B^T - B\, A^T) \\ &= -(A\, \overline{B} - B\, A^T) \\ &= -C \end{aligned}$$

2. Sea X una solución de la ecuación $A\overline{X} - XA^T = C$, dado que $C^T = -C$ se tiene que X^* también es una solución de dicha ecuación, luego $A\overline{X^*} - X^*A^T = C$. Así

$$0 = A(\overline{X} - \overline{X^*}) - (X - X^*)A^T = A(\overline{X} - \overline{X^*}) - \overline{(\overline{X} - \overline{X^*})}A^T$$

Como A es no singular y $A\overline{A}$ es no derogatoria, del Teorema 1.0.7 se tiene que $\overline{X} - \overline{X}^*$ es Hermitiana, pero $\overline{X} - \overline{X}^*$ es antihermitiana, luego $\overline{X} - \overline{X}^* = 0$, es decir $\overline{X} = \overline{X}^*$ y de aquí $X = X^*$.

□

Corolario 4.5.2. *[5] Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *Para la ecuación $A\overline{X} + XA^T = C$ las siguientes son equivalentes*

   a) *$C^T = -C$ y la ecuación es consistente*

   b) *La ecuación tiene una (no singular) solución antihermitiana*

2. *Si más aún $A\overline{A}$ es no singular y no derogatoria entonces $C^T = -C$ y $A\overline{X} + XA^T = C$ es consistente implican que todas las soluciones de esta ecuación son antihermitianas.*

Demostración. Sea $X \in M_n(\mathbb{C})$, $Y = iX$ y $B = -iC$, entonces

$$A\overline{X} + XA^T = C \Leftrightarrow -iA\overline{X} - iXA^T = -iC \Leftrightarrow A\overline{(iX)} - (iX)A^T = -iC \Leftrightarrow AY - YA^T = B$$

Por otro lado, tenemos que

$$B^T = -B \Leftrightarrow (-iC)^T = iC \Leftrightarrow -iC^T = iC \Leftrightarrow C^T = -C$$

Y es Hemitiana $\Leftrightarrow Y^* = Y \Leftrightarrow (iX)^* = iX \Leftrightarrow -iX^* = iX \Leftrightarrow X^* = -X \Leftrightarrow$ es antihermitiana

La demostración se sigue inmediatamente a partir de Corolorario 4.5.1 □

Similarmente, las otras declaraciones in sección 3 de [5] sobre las ecuaciones del tipo $A\overline{X} \pm XA^* = C$ son corolarios directos del Teorema 1.0.6

Capítulo 5

Sobre ^{T}congruencias entre A y A^{T}, A^{*} o $\overline{A}$

5.1. ^{T}congruencias

En [13] una forma canónica para ^{T}congruencia fue descubierta, la también llamada ^{T}congruencia forma canónica de una matriz. Existen tres tipos de matrices canónicas ^{T}congruencia: $J_n(\lambda)$ para una $n \times n$ bloque de Jordan con autovalor λ. $H_{2n}(\mu)$ para la matriz bloque $2n \times 2n$ $H_{2n}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ J_n(\mu) & 0 \end{bmatrix}$ y Γ_n para la matriz $n \times n$

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & & (-1)^{n+1} \\ & & & & \nearrow & (-1)^{n} \\ & & & -1 & \nearrow & \\ & & 1 & 1 & & \\ & -1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 5.1.1. *[13] Una matriz compleja cuadrada es ^{T}congruente a una suma directa de matrices canónicas $J_k(0), \Gamma_n$ y $H_{2n}(\mu)$, donde $0 \neq \mu \neq (-1)^{n+1}$ (y μ puede ser remplazado por μ^{-1}). Esta ^{T}congruencia forma canónica es única determinada por permutaciones de los* *sumandos.*

En [13] la siguiente notación fue introducida:

$$(A^{-1})^T = A^{-T}$$

y $A^{-T}A$ (o algunas veces AA^{-T}) es llamada el ^{T}cocuadrado de A.

Proposición 5.1.2. *[13] Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices no singulares. Entonces A, B son ^{T}congruentes si y sólo si sus ^{T}cocuadrados $A^{-T}A$ y $B^{-T}B$ son similares*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que A, B son ^{T}congruentes, entonces existe una matriz no singular S tal que $A = SBS^T$.
Luego $A = SBS^T \Rightarrow A^{-1} = S^{-T}B^{-1}S^{-1} \Rightarrow A^{-T} = S^{-T}B^{-T}S^{-1}$. De aquí

$$A^{-T}A = (S^{-T}B^{-T}S^{-1})(SBS^T) = S^{-T}B^{-T}BS^T = (S^T)^{-1}B^{-T}BS^T$$

así $A^{-T}A$ y $B^{-T}B$ son similares

($\Leftarrow$) Reciprocamente, supongamos ahora que $A^{-T}A$ y $B^{-T}B$ son similares vía S. Luego

$$A^{-T}A = S^{-1}B^{-T}BS = (S^{-1}B^{-T}S^{-T})(S^TBS) = C^{-T}C$$

donde $C = S^TBS$, por lo que C es no singular y ^{T}congruente a B.
Demostremos que C es ^{T}congruente a A. Sea $M = CA^{-1}$, de aquí $M = CA^{-1} = C^TA^{-T} = (A^{-1}C)^T$ y así $M^T = A^{-1}C$. Luego, $C = MA = AM^T$, por lo que $\forall k \geq 1$ $M^kA = A(M^T)^k$. En efecto, si $k \geq 1$ es tal que $M^kA = A(M^T)^k$ entonces $M^{k+1}A = MM^kA = MA(M^T)^k = AM^T(M^T)^k = A(M^T)^{k+1}$. Así si $q(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda^k$ es cualquier polinomio entonces

$$\begin{aligned} q(M)A = \left(\sum_{k=1}^{m} c_kM^k\right)A = \sum_{k=1}^{m} c_kM^kA = \sum_{k=1}^{m} c_kA(M^T)k \\ = A\left(\sum_{k=1}^{m} c_k(M^k)^T\right) = A\left(\sum_{k=1}^{m} c_k(M^k)\right)^T = A(q(M))^T \end{aligned}$$

Como M es no singular, el Teorema 6.4.12 en [11], garantiza que M tiene una al menos una raíz cuadrada la cual es un polinomio en M, es decir, existe un polimomio $p(\lambda)$ tal que $(p(M))^2 = M$ y de aquí $p(M)$ es no singular y $p(M)A = A(p(M))^T$. Por último, $C = MA = p(M)^2A = p(M)p(M)A = p(M)A(p(M))^T$, teniendose así que C es ^{T}congruente a A.

$\square$

Nuestra Sexta Proposición Estándar es,

Proposición 5.1.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

   a) *A es ^{T}congruente a una matriz Hermitiana*

   b) *A es ^{T}congruente a una matriz Hermitiana vía una matriz coninvolutoria*

   c) *A es ^{T}congruente a A^* vía una matriz coninvolutoria*

2. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

   a) *A es ^{T}congruente a una matriz real*

   b) *A es ^{T}congruente a una matriz real vía una matriz coninvolutoria*

   c) *A es ^{T}congruente a $\overline{A}$ vía una matriz coninvolutoria*

3. *A es ^{T}congruente a una matriz simétrica si y sólo si A es simétrica*

Demostración.

1.

$(a) \Longrightarrow (c)$ Sean $S \in GL_n(\mathbb{C})$ yH una matriz Hermitiana tal que $SAS^T = H$. Entonces $SAS^T = H = H^* = \overline{S}\, A^*\, S^*$. Así, $\overline{S}^{-1} SAS^T S^{*-1} = A^* \Rightarrow (\overline{S^{-1}}\, S)A(\overline{S^{-1}}\, S)^T = A^*$. Ahora $(\overline{S^{-1}}\, S)^{-1} = S^{-1}\,\overline{S} = \overline{S^{-1}}\; S$, es decir A y A^* son ^{T}congruentes vía la coninvolución $\overline{S^{-1}}\; S$.

$(c) \Longrightarrow (b)$ Sea $J \in M_n(\mathbb{C})$ una coninvolución tal que $A = JA^*J^T$. Por el Lema 3.2.2, existe una coninvolución $X \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $X^2 = J$. Entonces $A = JA^*J^T = X^2A^*(X^2)^T = X(XA^*X^T)X^T$. Esta identidad implica que A es ^{T}congruente a XA^*X^T vía la coninvolución X. Por último, $(XA^*X^T)^* = \overline{X}\,AX^* = X^{-1}\,AX^{-T} = XA^*X^T$, por lo que XA^*X^T es una matriz Hermitiana.

$(b) \Longrightarrow (a)$ es obvio.

2.

$(a) \Longrightarrow (c)$ Sea $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^T = R \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $SAS^T = R = \overline{R} = \overline{S}\,\overline{A}\,\overline{S}^T$. Así, $\overline{S}^{-1}\,SAS^T\,\overline{S^{-T}} = \overline{A} \Longrightarrow (\overline{S}^{-1}\,S)A(S^T\,\overline{S^{-T}}) = \overline{A} \Rightarrow (\overline{S}^{-1}\,S)A(\overline{S}^{-1}\,S)^T = \overline{A}$, es decir A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes vía la coninvolución $\overline{S}^{-1}S$.

$(c) \Longrightarrow (b)$ Sea $J \in M_n(\mathbb{C})$ una coninvolución tal que $A = J\,\overline{A}\,J^T$. Por el Lema 3.2.2 existe una coninvolución $X \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $X^2 = J$. Entonces $A = J\,\overline{A}\,J^T = X^2\,\overline{A}\,(X^2)^T = X(X\,\overline{A}\,X^T)X^T$. Esta identidad implica que A es ^{T}congruente a $X\,\overline{A}\,X^T$ vía la coninvolución X. por último $\overline{X\,\overline{A}\,X^T} = \overline{X}\,A\,X^{-T} = X^{-1}AX^{-T} = X\,\overline{A}\,X^T$, por lo que $X\,\overline{A}\,X^T \in M_n(\mathbb{R})$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Es trivial

3.

$(\Rightarrow)$ Sea S una matriz no singular y B una matriz simétrica tales que $A = SBS^T$. Luego $A^T = SB^TS^T = SBS^T = A$, así A es una matriz simétrica.

$(\Leftarrow)$ Si A es simétrica, entonces $A = I_n\,A\,I_n^T$ por lo que A es ^{T}congruente a la matriz simétrica A vía la matriz identidad I_n

$\square$

5.2. ^{T}congruencias entre A y A^T

Aunque A es ^{T}congruente a una matriz simétrica si y sólo si A es simétrica, A y A^T son siempre ^{T}congruente. De hecho:

Teorema 5.2.1. *([6],[8] o [2]) Sea $\mathbb{F}$ un campo y $A \in M_n(\mathbb{F})$. Entonces A y A^T son ^{T}congruente vía una involución $J \in M_n(\mathbb{F})$.*

Podemos ahora presentar una prueba del Teorema 1.0.9

Teorema 1.0.9. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$.*

1. *([6],[8] o [2]) A es ^{T} congruente a A^T vía una involución*

2. *Si A es no singular y su ^{T}cocuadrado AA^{-T} es no derogatoria entonces tada matriz $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^T = A^T$ es una involución.*

Demostración.

1. El Teorema 5.2.1 implica la existencia de una involución J tal que $JAJ^T = A^T$

2. Sea S una matriz no singular tal que $SAS^T = A^T$, luego $A = (A^T)^T = SA^TS^T$. Así, $A^{-1} = S^{-T}A^{-T}S^{-1}$ y de aquí $SAA^{-T}S^{-1} = (SAS^T)(S^{-T}A^{-T}S^{-1}) = A^TA^{-1}$. Ahora $SAA^{-T}S^{-1} = A^TA^{-1} \Rightarrow A^{-1}SAA^{-T}S^{-1} = A^{-1}A^TA^{-1} \Rightarrow A^{-1}SAA^{-T}S^{-1}A = A^{-1}A^T \Rightarrow (A^{-1}S)AA^{-T}(A^{-1}S)^{-1} = (AA^{-T})^T$, por lo que $A^{-1}S$ es una similaridad entre AA^{-T} y $(AA^{-T})^T$ y como AA^{-T} es no derogatoria, se sigue del Teorema 1.0.5, que AS^{-1} es simétrica. Luego

$$A^{-1}S^{-1} = S^TA^{-T} = (A^{-1}S)^T = A^{-1}S$$

por lo que $S^{-1} = S$.

$\square$

5.3. ^{T}congruencias entre A y A^* y ^{T}congruencias entre A y $\overline{A}$

La lista en [13] de formas canónicas ^{T}congruencias nos conlleva a la conclusión que A y A^*, respectivamente A y $\overline{A}$, no son ^{T}congruentes.

Ejemplo 5.3.1. *La forma canonica ^{T}congruente $H_2(2i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$ no es ^{T}congruente a $\overline{H_2(2i)} = H_2(-2i)$, dado que esta es una forma canonica ^{T}congruente diferente. El ^{T}cocuadrado de $H_2(2i)$ es*

$$H_2(2i)^{-T}H_2(2i) = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix}$$

y el ^{T}cocuadrado de $H_2(2i)^* = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$$

las cuales no son similares. Así $H_2(2i)$ no es ^{T}congruente a $H_2(2i)^*$.
Sea $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, note que $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I_2$ por lo que S una involucíon simétrica, ahora

$$SH_2(2i)S^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}^T = H_2(2i)^T$$

De aquí $H_2(2i)$ es ^{T}congruente a su transpuesta vía la involución S.

Lema 5.3.2. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices ^{T}congruentes.*

1. *Si A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes entonces B y $\overline{B}$ también lo son*

2. *Si A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes vía una coninvolución entonces B y $\overline{B}$ también lo son*

3. *Si A y A^* son ^{T}congruentes entonces B y B^* también lo son*

4. *Si A y A^* son ^{T}congruentes vía una coninvolución entonces B y B^* también lo son*

Demostración. Sea S una matriz no singular tal que $B = SAS^T$, luego

1. Sea W una matriz no singular tal que $\overline{A} = WAW^T$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \overline{S}\,\overline{A}\,\overline{S^T} = \overline{S}\,WAW^T\,\overline{S^T} = (\overline{S}\,W)A(\overline{S}\,W)^T \\ &= (\overline{S}\,W)S^{-1}BS^{-T}(\overline{S}\,W)^T = (\overline{S}\,WS^{-1})B(\overline{S}\,WS^{-1})^T\end{aligned}$$

2. Sea W una matriz coninvolutiva tal que $\overline{A} = WAW^T$, luego $\overline{B} = (\overline{S}\,WS^{-1})B(\overline{S}\,WS^{-1})^T$. Ahora $(\overline{S}\,WS^{-1})^{-1} = SW^{-1}\overline{S^{-1}} = S\,\overline{W}\,\overline{S^{-1}} = \overline{\overline{S}\,WS^{-1}}$

3. Sea W una matriz no singular tal que $A^* = WAW^T$, entonces

$$\begin{aligned}B^* &= \overline{S}\,A^*\,S^* = \overline{S}\,WAW^T\,S^* = (\overline{S}\,W)A(\overline{S}\,W)^T \\ &= (\overline{S}\,W)S^{-1}BS^{-T}(\overline{S}\,W)^T = (\overline{S}\,WS^{-1})B(\overline{S}\,WS^{-1})^T\end{aligned}$$

4. Sea W una matriz coninvolutiva tal que $A^* = WAW^T$, luego $B^* = (\overline{S}\,WS^{-1})B(\overline{S}\,WS^{-1})^T$ y $\overline{S}\,WS^{-1}$ es un matriz coninvolutiva

$\square$

Lema 5.3.3. *Sean $A \in M_n(\mathbb{C})$, Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes*

2. *La forma canónica ^{T}congruente de A es una suma directa de bloques únicamente de los siguientes cinco tipos*

a*)* $J_k(0)$

b*)* Γ_k

c*)* $H_{2k}(\mu)$ *con* $\mu \in \mathbb{R}, |\mu| > 1$

d*)* $H_{2k}(\mu)$ *con* $\mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1, \mu \neq (-1)^k$ *(*μ *puede ser reemplazado por* $1/\mu = \overline{\mu}$*)*

e*)* $H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu})$ *con* $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\mu| > 1$

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2) De acuerdo al Lema 5.3.2 tenemos que verificar esta equivalencia sólo para matrices en forma canónica ^{T}congruencia. Por el Teorema 5.1.1 la foma canónica ^{T}congruente de A es una suma directa de matrices canónicas $J_k(0), \Gamma_n$ y $H_{2n}(\mu)$, donde $0 \neq \mu \neq (-1)^{n+1}$ (y μ puede ser remplazado por μ^{-1}), esta ^{T}congruencia forma canónica es única salvo por permutaciones de los sumandos, por lo que podemos asumir que A es una suma directa de bloques de la forma anterior. Ahora si $({}^T J)_A$ es la forma canónica ^{T}congruente de A, dado que λ es un autovalor de A si y sólo si $\overline{\lambda}$ es un autovalor de $\overline{A}$, se tiene que $({}^T J)_{\overline{A}} = \overline{({}^T J)_A}$.

Note que los bloques $J_k(0), \Gamma_k, H_{2k}(\mu)(\mu \in \mathbb{R}, |\mu| > 1)$ y $H_{2k}((-1)^{k+1})$ de A son reales. Si $H_{2k}(\mu)$ con $\mu \in \mathbb{C}$ y $|\mu| > 1$ aparece en la forma canónica ^{T}congruente A, como

$$\overline{H_{2k}(\mu)} = \overline{\begin{bmatrix} O & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} O & I_k \\ \overline{J_k(\mu)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I_k \\ J_k(\overline{\mu}) & 0 \end{bmatrix} = H_{2k}(\overline{\mu})$$

Ahora si denotamos por F_B la forma canónica ^{T}congruente de una matriz B, entonces existe una matriz no singular V tal que $F_B = VBV^T$, luego $\overline{F_B} = \overline{V}\,\overline{B}\,\overline{V}^T$ y como $\overline{F_B}$ es una forma canónica ^{T}congruente ya que

a. $\overline{J_k(0)} = J_k(0)$ si $J_k(0)$ aparece en la forma canónica ^{T}congruente de B

b. $\overline{\Gamma_m} = \Gamma_m$ si Γ_m aparece en la forma canónica ^{T}congruente de B

c. $\overline{H_{2k}(\xi)} = H_{2k}(\bar{\xi})$ si $H_{2k}(\xi)$ aparece en la forma canónica ^{T}congruente de B con $0 \neq \xi \neq (-1)^{k+1}$

entonces $F_{\overline{B}} = \overline{F_B}$.

Dado que A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes, entonces $F_A = F_{\overline{A}} = \overline{F_A}$, luego $H_{2k}(\overline{\mu})$ también esta en la forma canónica ^{T}congruente A (ya que estas formas canónicas básicas son de diferentes tipos básicos). Así $H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu})$ con $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\mu| > 1$ esta en la forma canónica ^{T}congruente A. Sin embargo, si $|\mu| = 1$ este argumento es incorrecto, ya que $H_{2k}(\mu)$ tiene igual tipo básico que $H_{2k}(\mu^{-1}) = H_{2k}(\overline{\mu}) = \overline{H_{2k}(\mu)}$. Por último si $H_{2k}(\mu)$ con $\mu \in \mathbb{C}$ y $|\mu| < 1$ aparece en la forma canónica ^{T}congruente A, este bloque es del mismo tipo básico que $H(\mu^{-1})$ pero $|\mu^{-1}| > 1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Llega a ser trivial usando la observación final previa

$\square$

Proposición 5.3.4. *([14], Lema 2.3)([15], Teorema 7) Considere el bloque de Jordan $J_n(\mu)$, $|\mu| = 1$ y $\mu \neq \pm 1$. Entonces existe una matriz de Toeplitz $C \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $(C^*)^{-1}C = J_n(\mu)$*

Podemos ahora presenta una prueba del Teorema 1.0.10

Teorema 1.0.10. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es ^{T}congruente a una matriz real
2. A es ^{T}congruente a una matriz real vía una coninvolución
3. A y $\overline{A}$ son ^{T}congruente
4. A y $\overline{A}$ son ^{T}congruente vía una coninvolución
5. A y A^* son ^{T}congruente
6. A y A^* son ^{T}congruente vía una coninvolución
7. A es ^{T}congruente a una matriz Hermitiana
8. A es ^{T}congruente a una matriz Hermitiana vía una coninvolución

Demostración. Note que una vez que tengamos establecidos las equivalencia de $(3),(4),(5)$ y (6), las equivalencias de las otras afirmaciones en el Teorema 1.0.10, se siguen de la Proposicón 5.1.3

$(3)\Leftrightarrow(5)$ Dado que para toda matriz $B\in M_n(\mathbb{C})$ B es ^{T}congruente a B^T, ver Teorema 5.2.1, se tiene que A es ^{T}congruente a A^T y $\overline{A}$ es ^{T}congruente a A^*. Luego, del Lema 5.3.2,

$$\begin{aligned} A \text{ es } {}^{T}\text{congruente a } \overline{A} &\Leftrightarrow A^T \text{ es } {}^{T}\text{congruente a } \overline{A^T}\\ &\Leftrightarrow A^T \text{ es } {}^{T}\text{congruente a } A^*\\ &\Leftrightarrow A \text{ es } {}^{T}\text{congruente a } A^* \end{aligned}$$

$(3)\Rightarrow(4)$ Asumamos primero que A es una suma directa de bloques ^{T}canónicos descritos en $(a),\ldots,(e)$ en el Lema 5.3.3.

Notemos que los bloques ^{T}canónicos del tipo (a), (b), (c) y del tipo (d) con $\mu\in\mathbb{R}$ son reales. La involución real I (la identidad), tiene la propiedad $IBI^T=\overline{B}$, para todos estos bloques.

Sea $H_{2k}(\mu), |\mu|=1$ y $\mu\neq\pm1$ una forma canónica del tipo (d). Usando la Proposición 5.3.4 encontramos una matriz Toeplitz $C\in M_n(\mathbb{C})$ tal que $(C^*)^{-1}C=J_n(\mu)$ y consideramos:

$$S=\begin{bmatrix} 0 & C^* \\ C^{-T} & 0 \end{bmatrix}$$

S es una coninvolución, dado que $S\overline{S}=\begin{bmatrix} 0 & C^* \\ C^{-T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C^T \\ {C^*}^{-1} & 0 \end{bmatrix}=I$

Más aún,

$$\begin{aligned} SH_{2k}(\mu)S^T &= \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ C^{-T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ \overline{C} & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & C^*J_k(\mu)C^{-1} \\ C^{-T}\overline{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C^*J_k(\mu)C^{-1} \\ \overline{{C^*}^{-1}C} & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ \overline{J_k(\mu)} & 0 \end{bmatrix} = \overline{H_{2k}(\mu)} \end{aligned}$$

Si un ^{T}bloque canónico tipo (e)(es decir, $H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu})$ con $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\mu| > 1$) aparece en la suma directa, entonces

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \\ I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix}$$

es una involución real (y por lo tanto una coninvolución) tal que

$$\begin{aligned} S(H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu}))S^T &= \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{2k}(\mu) & 0 \\ 0 & H_{2k}(\overline{\mu}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & H_{2k}(\overline{\mu}) \\ H_{2k}(\mu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{2k}(\overline{\mu}) & 0 \\ 0 & H_{2k}(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{H_{2k}(\mu)} & 0 \\ 0 & \overline{H_{2k}(\overline{\mu})} \end{bmatrix} \\ &= \overline{\begin{bmatrix} H_{2k}(\mu) & 0 \\ 0 & H_{2k}(\overline{\mu}) \end{bmatrix}} = \overline{H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu})} \end{aligned}$$

Si $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{k-1} \oplus A_k$ y $H = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k-1} \oplus S_k$, donde cada A_i es un ^{T}bloque de A como y cada S_i es una coinvolución tal que $S_i A_i S_i^T = \overline{A_i}$, entonces

$$\begin{aligned} HAH^T &= (S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k-1} \oplus S_k)(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{k-1} \oplus A_k) \\ &\quad (S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k-1} \oplus S_k)^T \\ &= (S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k-1} \oplus S_k)(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{k-1} \oplus A_k) \\ &\quad (S_1^T \oplus S_2^T \oplus \cdots \oplus S_{k-1}^T \oplus S_k^T) \\ &= (S_1 A_1 S_1^T) \oplus (S_2 A_2 S_2^T) \oplus \cdots \oplus (S_{k-1} A_{k-1} S_{k-1}^T) \oplus (S_k A_k S_k^T) \\ &= \overline{A_1} \oplus \overline{A_2} \oplus \cdots \oplus \overline{A_{k-1}} \oplus \overline{A_k} \\ &= \overline{A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{k-1} \oplus A_k} \\ &= \overline{A} \end{aligned}$$

Ahora sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes. Sea ^TJ_A la forma canonica ^{T}congruente de A, luego A y ^TJ_A son ^{T}congruentes, luego por el Lema 5.3.2 ^TJ_A y $\overline{^TJ_A}$ son ^{T}congruentes, de aquí que ^TJ_A y $\overline{^TJ_A}$ son ^{T}congruentes vía una coninvolución, y de nuevo por el Lema 5.3.2 se tiene que A y $\overline{A}$ son ^{T}congruentes vía una conivolución.

(4) $\Rightarrow$ (3) Trivial

De la Proposción 5.1.3 se tiene que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4), por lo que hemos demostrado hasta el momemonto que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5)

(5) $\Rightarrow$ (6) Asumamos que A es ^{T}congruente a A^*. Luego A es ^{T}congruente a una matriz real vía una coninvolución, es decir existe $R \in M_n(\mathbb{R})$ y $J \in M_n(\mathbb{C})$ coninvolutiva tal que $JAJ^T = R \in M_n(\mathbb{R})$. Por el Teorema 5.2.1, R es ^{T}conguente a R^T vía una involución real, luego existe una involución real $S \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $SRS^T = R^T$. De aquí,

$$SJAJ^TS^T = S(JAJ^T)S^T = SRS^T = R^T = R^* = \overline{J}A^*J^* = J^{-1}\,A^*\,J^{-T}$$

Así, $(JSJ)A(J^TS^T(J^T) = A^*$, es decir $(JSJ)A(JSJ)^T = A^*$. Hemos demostrado que A es ^{T}congruente a A^* vía JSJ, sólo nos resta demostrar que JSJ es una coninvolución. En efecto,

$$(JSJ)^{-1} = J^{-1}S^{-1}J^{-1} = \overline{J}\,S\,\overline{J} = \overline{J}\,\overline{S}\,\overline{J} = \overline{(JSJ)}$$

(6) $\Rightarrow$ (5) Es trivial

La Proposición 5.1.3 demuestra que $(6), (7)$ y (8) son equivalentes.

□

El resto de esta sección esta desarrollada a la pregunta: "Asumamos que A y $A*$ son ^{T}congruentes. Bajo que condiciones son todas las ^{T}congruencias entre A y A^* coninvolutorias?" Uno podría esperar que esta condición sea:"Si AA^{-T} es no derogaoria". Este no es el caso, como veremos.

Lema 5.3.5. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz no singular.*

1. *Si p es un polinomio y definimos G por $G = p(AA^{-T})$, entonces $GAG^T = A$ es equivalente a $p(AA^{-T})p((AA^{-T})^{-1}) = I_n$.*
   Más aún, si AA^{-T} es no derogatoria entonces:

2. *Si $G \in M_n(\mathbb{C})$ es no singular y $GAG^T = A$, entonces existe un único polinomio de grado menor n, tal que $G = p(AA^{-T})$*

Demostración.

1. Sea p un polinomio y definamos $G = p(AA^{-T})$. Luego,

$$\begin{aligned} GAG^T = A &\Longleftrightarrow p(AA^{-T})A(p(AA^{-T}))^T = A \Longleftrightarrow p(AA^{-T})Ap(AA^{-T})^T) = A \\ &\Longleftrightarrow p(AA^{-T})Ap(A^{-1}A^{-T}) = A \Longleftrightarrow p(AA^{-T})Ap(A^{-1}A^{-T})A^{-1}A = A \\ &\Longleftrightarrow p(AA^{-T})p(AA^{-1}A^TA^{-1})A = A \Longleftrightarrow p(AA^{-T})p(A^TA^{-1}) = I_n \\ &\Longleftrightarrow p(AA^{-T})p((AA^{-T})^{-1}) = I_n \end{aligned}$$

2. Sea G una matriz no singular tal que $GAG^T = A$, luego $A^{-T} = (GAG^T)^{-T} = G^{-T}A^{-T}G^{-1}$. Así $GAA^{-T}G^{-1} = (GAG^T)(G^{-T}A^{-T}G^{-1}) = AA^{-T}$, por lo que $GAA^{-T} = AA^{-T}G$ y dado que AA^{-T} es no derogatoria se tiene de la Proposición 3.1.2 que existe un único polinomio de grado menor que n tal que $G = p(AA^{-T})$.

□

El Lema 5.3.5 nos provee de muchas ^{T}congruencias entre A y A, por ejemplo $G = \pm(AA^{-T})^k(k \in \mathbb{N})$, tomando $p(\lambda) = \lambda^k$, y dado que G^{-1} es una ^{T}congruencia si G lo es, se tiene que $G = \pm(AA^{-T})^k(k \in \mathbb{Z})$ son ^{T}congruencias entre A y A.
Observemos ahora que si $SAS^T = A^*$ entonces, dado que A es no singular, $SAS^T = A^*$ y que el determinante de un producto es el producto de los deteminante se tiene que S es no singular. Además

$$\begin{aligned} SAA^{-T}S^{-1} &= SAS^TS^{-T}A^{-T}S^{-1} = (SAS^T)(SAS^T)^{-T} \\ &= A^*(A^*)^{-T} = A^*(\overline{A})^{-1} = \overline{A}(\overline{A})^{-1}A^*(\overline{A})^{-1} \\ &= \overline{A}[AA^{-T}]^*(\overline{A})^{-1} \end{aligned}$$

Así,

$$((\overline{A})^{-1}S)[AA^{-T}]((\overline{A})^{-1}S)^{-1} = [AA^{-T}]^*$$

Lema 5.3.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ no-singular y asumamos que $SAS^T = A^*$. Entonces S es coninvolutoria si y sólo si $(\overline{A})^{-1}S$ es Hermitiana.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\overline{A})^{-1}S \text{ es Hermitiana} &\Longleftrightarrow ((\overline{A})^{-1}S)^* = (\overline{A})^{-1}S \Longleftrightarrow S^*A^{-T} = (\overline{A})^{-1}S \\
&\Longleftrightarrow S^* = (\overline{A})^{-1}SA^T \Longleftrightarrow \overline{S} = AS^T(A^*)^{-1} \\
&\Longleftrightarrow \overline{S} = S^{-1}SAS^T(A^*)^{-1} \Longleftrightarrow \overline{S} = S^{-1}A^*(A^*)^{-1} \\
&\Longleftrightarrow \overline{S} = S^{-1}
\end{aligned}$$

□

Proposición 5.3.7. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que AA^{-T} es no derogatoria. Sea J una ^{T}congruencia coninvolutiva entre A y A^*. Las siguientes aseveraciones son equivalentes.*

1. *Todas las ^{T}congruencias entre A y A^* son coninvolutoria*
2. *Cualquier $G \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $GAG^T = A$ puede ser escrita como $G = p(AA^{-T})$, donde p es un polinomio real de grado menor que n*

Demostración. Sea J una coninvolución tal que $JAJ^T = A^*$, del Lema 5.3.6 se tiene que $(\overline{A})^{-1}J$ es Hermitiana y de la observación anterior al Lema 5.3.6 se tiene que

$$((\overline{A})^{-1}J)[AA^{-T}]((\overline{A})^{-1}J)^{-1} = [AA^{-T}]^*$$

es decir $(\overline{A})^{-1}J$ es una similaridad Hermitiana entre $[AA^{-T}]$ y $[AA^{-T}]^*$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sea $G \in M_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $GAG^T = A$. Tomemos $S = JG$, como $SAS^T = JGAG^TJ^T = JAJ^T = A^*$, entonces S es una ^{T}conguencia entre A y A^* y de aquí coninvolutiva, luego del Lema 5.3.6 se tiene que $(\overline{A})^{-1}S$ es Hermitiana. De la observación anterior al Lema 5.3.6 se tiene que S induce una similaridad Hermitiana

$$((\overline{A})^{-1}S)[AA^{-T}]((\overline{A})^{-1}S)^{-1} = [AA^{-T}]^*$$

Así $((\overline{A})^{-1}S)[AA^{-T}] = [AA^{-T}]^*((\overline{A})^{-1}S)$ y dado que AA^{-T} es no derogatoria, del Teorema 1.0.4 podemos concluir que $(\overline{A})^{-1}S = (\overline{A})^{-1}Jp(AA^{-T})$ para algún polinomio real p de grado menor que n, por lo que $S = Jp(AA^{-T})$. Por último $G = J^{-1}S = p(AA^{-T})$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $S \in M_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $SAS^T = A^*$. Tomemos $G = \overline{J}S$, G es no singular y como $GAG^T = \overline{J}\,SAS^T J^* = \overline{J}\,A^*J^* = (JAJ^T)^* = (A^*)^* = A$ entonces $G = p(AA^{-T})$ para algún polinomio real de grado menor que n. Luego $p(AA^{-T}) = G = \overline{J}\,S = J^{-1}S$ y de aquí $S = Jp(AA^{-T})$, así $A^{-1}S = (A^{-1}J)p(AA^{-T})$. Dado que $SAS^T = A^*$ se tiene como anteriormente que

$$((\overline{A})^{-1}S)[AA^{-T}] = [AA^{-T}]^*((\overline{A})^{-1}S)$$

luego del Teorma 1.0.4 se concluye que $A^{-1}S$ es Hermitiana y del Lema 5.3.6 se desprende que S es una coninvolución.

□

La Proposición 5.3.7 nos permite construir un ejemplo $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que A y A^* son ^{T}congruentes, AA^{-T} es no derogatoria, pero A y A^* admiten ^{T}conguencias que no son coninvolutiva.

Ejemplo 5.3.8. *Definamos* $A_1 = H_4(2i), A_2 = H_4(-2i)$ *y consideremos* $A = A_1 \oplus A_2 = H_4(2i) \oplus H_4(-2i) \in M_8(\mathbb{C})$.

Sean $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$, $J_k = J_2(\lambda_k)$ *con* $k \in \{1,2\}$, *luego* $A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ J_k & 0 \end{bmatrix}$,

$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & J_k^{-1} \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ *y* $A_k^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ J_k^{-T} & 0 \end{bmatrix}$, *de aquí*

$$A_kA_k^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ J_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ J_k^{-T} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_k^{-T} & 0 \\ 0 & J_k \end{bmatrix}$$

$$AA^{-T} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-T} & 0 \\ 0 & A_2^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1^{-T} & 0 \\ 0 & A_2A_2^{T} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} J_1^{-T} & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_2^{-T} & \\ & & & J_2 \end{bmatrix} = J_1^{-T} \oplus J_1 \oplus J_2^{-T} \oplus J_2$$

Ahora para cada $k \in \{1,2\}$ $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$, *así*

$$J_k^{-1} = \frac{1}{\lambda_k^2}\begin{bmatrix} \lambda_k & -1 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad y \quad J_k^{-T} = \frac{1}{\lambda_k^2}\begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ -1 & \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k^{-2}\begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ -1 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Sea $W_k = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_k^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, *entonces* $W_k^{-1} = \frac{1}{\lambda_k^2}\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_k^{-2}\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *luego*

$$W_kJ_k^{-T}W_k^{-1} = \lambda_k^{-2}\lambda_k^{-2}\begin{bmatrix} 0 & \lambda_k^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ -1 & \lambda_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_k^{-2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda_k^{-4}\begin{bmatrix} -\lambda_k^2 & \lambda_k^3 \\ -\lambda_k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_k^{-4}\begin{bmatrix} \lambda_k^3 & \lambda_k^4 \\ 0 & \lambda_k^3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_k^{-1} & 1 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{bmatrix} = J_2(\lambda_k^{-1})$$

Definamos $W = W_1 \oplus I_2 \oplus W_2 \oplus I_2$, W *es no singular con* $W^{-1} = W_1^{-1} \oplus I_2 \oplus W_2^{-1} \oplus I_2$, *así* AA^{-T} *es similar a*

$$W(AA^{-T})W^{-1} = \begin{bmatrix} J_2(\lambda_1^{-1}) & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_2(\lambda_2^{-1}) & \\ & & & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2(-i/2) & & & \\ & J_2(2i) & & \\ & & J_2(i/2) & \\ & & & J_2(-2i) \end{bmatrix}$$

Luego AA^{-T} *tiene cuatro autovalores* $\pm 2i, \pm i/2$, *y tiene cuatro bloques de Jordan* 2×2 *con diferentes valores propios. Esto implica que* AA^{-T} *es no derogatoria. Consideremos la matriz* *reversible R_8 de orden 8×8; R_8 es una matriz real simétrica con $R_8^2 = I_8$, por lo que es una coninvolución real. Si R_4 es la matriz reversible de orden 4×4, entonces $R_8 = R_4 \oplus R_4$. Luego,*

$$\begin{aligned}
R_8AR_8 &= \begin{bmatrix} 0 & R_4 \\ R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_4 \\ R_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_4A_2 \\ R_4A_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_4 \\ R_4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_4A_2R_4 & 0 \\ 0 & R_4A_1R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_4A_2R_4)^T & 0 \\ 0 & (R_4A_1R_4)^T \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} (R_4A_2R_4)^* & 0 \\ 0 & (R_4A_1R_4)^* \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} R_4^*A_2^*R_4^* & 0 \\ 0 & R_4^*A_1^*R_4^* \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} R_4A_2^*R_4 & 0 \\ 0 & R_4A_1^*R_4 \end{bmatrix}^*
\end{aligned}$$

Si R_2 es la matriz reversal de orden 2×2, entonces para cada $k \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
R_4A_k^*R_4 &= \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & J_k^* \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_2J_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & R_2^2 \\ R_2J_k^*R_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ R_2J_k^*R_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pero $J_k^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_k} & 0 \\ 1 & \overline{\lambda_k} \end{bmatrix}$*, de aquí*

$$\begin{aligned}
R_2J_k^*R_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\lambda_k} & 0 \\ 1 & \overline{\lambda_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{\lambda_k} \\ \overline{\lambda_k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{\lambda_k} & 1 \\ 0 & \overline{\lambda_k} \end{bmatrix} = J_2(\overline{\lambda_k}) = J_2(-\lambda_k) = J_{s+1}
\end{aligned}$$

con $s \equiv k$(mod 2). Esto demuestra que $R_2J_1^*R_2 = J_2$, $R_2J_2^*R_2 = J_1$, $R_4A_1^*R_4 = A_2$ y $R_4A_2^*R_4 = A_1$. Luego,

$$R_8AR_8 = \begin{bmatrix} R_4A_2^*R_4 & 0 \\ 0 & R_4A_1^*R_4 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^* = A^*$$

así hemos demostrado que $R_8AR_8^T = A^*$, es decir A es ^{T}congruente a A^* vía la coninvolución real R_8.

Ahora definamos $H = A_1A_1^{-T} \oplus (A_2A_2^{-T})^2 = \begin{bmatrix} A_1A_1^{-T} & 0 \\ 0 & (A_2A_2^{-T})^2 \end{bmatrix}$, $H_1 = A_1A_1^{-T}$ *y* $H_2 = A_2A_2^{-T}$. *Luego,*

$$HAH^T = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T & 0 \\ 0 & (H_2^2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1A_1H_T & 0 \\ 0 & H_2^2A_2(H_2^2)^T \end{bmatrix}$$

Ahora,

a)

$$\begin{aligned} H_1A_1H_1^T &= (A_1A_1^{-T})A_1(A_1A_1^{-T})^T = (A_1A_1^{-T})A_1(A_1^{-1}A_1^T) \\ &= (A_1A_1^{-T})(A_1A_1^{-1})A_1^T = (A_1A_1^{-T})A_1^T = A_1 \end{aligned}$$

b) $H_2A_2H_2^T = A_2\, A_2^{-T}\, A_2\, A_2^{-T}\, A_2\, A_2^{-1}\, A^T\, A_2^{-1}\, A^T = A_2$

Así,

$$HAH^T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = A$$

Si $S = R_8H$ *entonces,* $SAS^T = R_8HAH^TR_8^T = R_8(HAH^T)R_8 = R_8AR_8 = A^*$, *por lo que* A *es* ^{T}*congruente a* A^* *vía* S. *Sin embargo no existe un polinomio real* $p(\lambda)$ *tal que* $H = p(AA^{-T})$, *en efecto si existiese un polinomio real* $p(\lambda)$ *tal que* $H = p(AA^{-T})$ *entonces,* $\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2^2 \end{bmatrix} = H = p(AA^{-T}) = \begin{bmatrix} p(H_1) & 0 \\ 0 & p(H_2) \end{bmatrix}$ *y por lo tanto* $p(H_1) = H_1$ *y* $p(H_2) = H_2^2$. *Ahora si* $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k$ *entonces*

a) *Si* β *es un autovalor de* H *y* v *es un autovector de* H *entonces* $p(H)v = \left(\sum_{k=1}^{m} a_kH^k\right)v = \sum_{k=1}^{m} a_kH^kv = \sum_{k=1}^{m} a_k\beta^kv = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\beta^k\right)v = p(\beta)v$. *Así, si* β *es un autovalor de* H *entonces* $p(\beta)$ *es un autovalor de* $p(H)$

b) $\overline{p(\lambda)} = \overline{\sum_{k=1}^{m} a_k\lambda^k} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_k}\overline{\lambda}^k = \sum_{k=1}^{m} a_k\overline{\lambda}^k = p(\overline{\lambda})$

Luego, como $-2i$ es un autovalor de H_2 entonces $p(-2i)$ es un autovalor de $p(H_2) = H_2^2$. Ahora $H_2^2 = \begin{bmatrix} (J_2^{-T})^2 & 0 \\ 0 & J_2^2 \end{bmatrix}$, pero $J_2^2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$ por lo que J_2^2 tiene un único autovalor con multiplicidad algebraica 2 y el cual vale -4, mientras que $J_2^{-2T} = \frac{1}{\lambda_2^4}\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ -1 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ -1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2^4}\begin{bmatrix} \lambda_2^2 & -2\lambda \\ -1 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2^{-2} & -2\lambda^{-4} \\ -1 & \lambda_2^{-2} \end{bmatrix}$ por lo que J_2^{-2T} tiene un único autovalor con multiplicidad algebraica 2 y el cual vale $\left(\frac{1}{-2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}$. De acá concluimos que $p(-2i)$ es un número real, pero $p(2i) = p\left(\overline{-2i}\right) = \overline{p(-2i)} = p(-2i)$. Por otra parte, como $2i$ es un autovalor de H_1 entonces $p(2i)$ es un autovalor de $p(H_1) = H_1$ cuyos únicos autovalores son $2i$ y $-\frac{i}{2}$, ambos imaginarios puro, lo cual contradice que $p(2i)$ era un número real.

Así no existe un polinomio real $p(\lambda)$ tal que $H = p(AA^{-T})$, luego de la Proposición 5.3.7 se tiene que S no es coninvolutoria.

De la misma manera, podemos demostrar que:

Corolario 5.3.9. *Si $A = H_{2k}(\mu) \oplus H_{2k}(\overline{\mu})$ con $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\mu| > 1$, entonces AA^{-T} es no derogatoria, pero existen ^{T}congruencias entre A y A^* que no son coninvolutorias.*

¿Cuáles $A \in M_n(\mathbb{C})$ tienen la propiedad que AA^{-T} es no derogatoria?.

Recordemos que B es no derogatoria si y sólo si bloques de Jordan diferentes en la forma normal de Jordan de B pertenecen a autovalores diferentes de B. Note que

1. $J_k(0)$ no es invertible

2. El ^{T}cocuadrado de Γ_l es no derogatoria, dado que $\Gamma_l\Gamma_l^{-T}$ es similar a $J_l((-1)^{l+1})$ (ver [13])

3. El ^{T}cocuadrado de $H_{2k}(\mu)$ con $\mu \in \mathbb{R}, |\mu| \geq 1, \mu \neq (-1)^{k+1}$ es similar a $J_k(\mu) \oplus J_k(\frac{1}{u})$ (ver [13]), así esta es no derogatoria si y sólo si $\mu \neq (-1)^{k+1}$

Concluimos que AA^{-T} es no derogatoria si y sólo si los bloques canónicos perteneciente a la forma canónica ^{T}congruente de AA^{-T} contienen

1. a lo más un bloque del tipo Γ_l y l es impar

2. a lo más un bloques del tipo Γ_l y l es par

3. para cada μ tal que $|\mu| > 1$ a lo más un bloque del tipo $H_{2k}(\mu)$

4. para cada μ tal que $|\mu| = 1$ con $\mu \notin \mathbb{R}$, a lo más un bloque del tipo $H_{2k}(\mu)$ (o $H_{2k}(\overline{\mu})$) (y así ningún bloque del tipo $H_{2k}((-1)^k)$

Capítulo 6

Sobre *congruencia entre A y A^T, A^*, o $\overline{A}$

En [13] una forma canónica para *congruencia fue descubierta, la llamada forma canónica *congruencia de una matriz. Existen tres tipos de matrices canónicas *congruencia: de nuevo $J_n(\lambda)$ para un $n \times n$ bloque de Jordan con autovalor λ, $H_{2n}(\mu)$ para los bloques matriciales de orden $2n \times 2n$ $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ J_n(\mu) & 0 \end{bmatrix}$ y Δ_n para la matriz $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & i \\ & & \nearrow & \nearrow & \\ & 1 & i & & \\ 1 & i & & & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.0.1. *[13] Una matriz compleja cuadrada es *congruente a una suma directa de matrices canónicas, $J_k(0)$, $\lambda\Delta_n$ con $|\lambda| = 1$ y $H_{2n}(\mu)$ con $|\mu| > 1$. Esta forma canónica *conguencia es única salvo permutaciones de los sumandos.*

La pregunta es si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son *congruentes puede ser manejada de la misma manera como las ^{T}congruencia. En [13] la notación $(A^{-1})^* = A^{-*}$ fue introducida y $A^{-*}A$ (o alguna veces AA^{-*}) fue llamada el *cocuadrado de A. La pregunta si matrices no singulares $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son ^{T}congruentes esta parcialmente determinada por el siguiente resultado.

Proposición 6.0.2. *[13] Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ no singulares. Si A, B son *congruentes entonces sus *cocuadrados $A^{-*}A$ y $B^{-*}B$ son simliares (pero no reciprocamente)*

Demostración. Sea J una *congruencia entre A y B, es decir $A = JBJ^*$. Luego $A^* = JB^*J^*$, de aquí $A^{-*} = J^{-*}B^{-*}J^{-1} = J^{-*}B^{-*}J^{-1}$. Así

$$A^{-*}A = J^{-*}B^{-*}J^{-1}JBJ^* = J^{-*}B^{-*}BJ^* = (J^*)^{-1}B^{-*}BJ^*$$

□

Nuestra Séptima Proposición Estándar es,

Proposición 6.0.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$*

1. *Las siguientes aseveraciones son equivalentes*

   a) *A es *congruente a una matriz simétrica*

   b) *A es *congruente a una matriz simétrica vía una matriz coninvolutoria*

   c) *A es *congruente a A^T vía una matriz coninvolutoria*

2. *Las siguientes aseveraciones son equivalentes*

   a) *A es *congruente a una matriz real*

   b) *A es *congruente a una matriz real vía una matriz coninvolutoria*

   c) *A es *congruente a $\overline{A}$ vía una matriz coninvolutoria*

3. *A es *congruente a una matriz Hermitiana si y sólo si A es Hermitiana*

Demostración.

1.

(a)$\Rightarrow$ (c) Existe una matriz V no singular tal que $B = VAV^*$ es simétrica. Luego,

$$VAV^* = B = B^T = (V^*)^T A^T V^T = \overline{V}\, A^T V^T$$

de aquí

$$A = (V^{-1}\overline{V})A^T(V^T V^{-*}) = (V^{-1}\overline{V})A^T(V^{-1}\overline{V})^*$$

Por último $(V^{-1}\overline{V})^{-1} = (\overline{V})^{-1}V = \overline{V^{-1}\overline{V}}$

(c)$\Rightarrow$ (b) Existe una matriz V no singular y coninvolutoria tal que $A = VA^TV^*$. Por el Lema 3.2.2, existe una matriz X coninvolutiva tal que $X^2 = V$ y por lo tanto X es no singular, además $X^* = (\overline{X})^T = (X^{-1})^T = X^{-T}$. Luego,

$$A = X^2 A^T (X^2)^* = X(XA^TX^*)X^* = X(XA^TX^*)X^{-T}$$

de aquí $X^{-1}AX^T = XA^TX^*$. Ahora $(XA^TX^*)^T = \overline{X}\,AX^T = X^{-1}AX^T = XA^TX^*$. Así A es *congruente a la matriz simétrica XA^TX^* vía la coininvolución X

(b)$\Rightarrow$ (a) Es obvio.

2.

(a)$\Rightarrow$ (c) Existe una matriz V no singular tal que $B = VAV^*$ es una matriz real, luego $VAV^* = B = \overline{B} = \overline{V}\,\overline{A}\,V^T$. De aquí

$$A = V^{-1}\overline{V}\,\overline{A}\,V^T\,V^{-*} = V^{-1}\overline{V}\,\overline{A}\,V^T\,(\overline{V})^{-T} = (V^{-1}\overline{V})\,\overline{A}\,(V^{-1}\overline{V})^*$$

Así A es *congruente a $\overline{A}$ vía la coninvolución $V^{-1}\,\overline{V}$

(c)$\Rightarrow$ (b) Existe una matriz V no singular y coninvolutoria tal que $A = V\,\overline{A}\,V^*$. Por el Lema 3.2.2, existe una matriz X coninvolutiva tal que $X^2 = V$ y por lo tanto X es no singular, además $X^* = (\overline{X})^T = (X^{-1})^T = X^{-T}$. Luego,

$$A = X^2\,\overline{A}\,(X^2)^* = X(X\,\overline{A}\,X^*)X^* = X(X\,\overline{A}\,X^*)X^{-T}$$

de aquí $X^{-1}AX^T = X\,\overline{A}X^*$. Ahora $\overline{(X\,\overline{A}\,X^*)} = \overline{X}\,A\,X^T = X^{-1}AX^T = X\,\overline{A}X^*$. Así A es *congruente a la matriz real $X\overline{A}\,X^*$ vía la coninvolución X

(b)$\Rightarrow$ (a) Es obvio

3. Observemos primeramente que si A es una matriz Hermitiana, entonces A es *congruente a consigo misma vía la identidad. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \exists V \in M_n(\mathbb{C}),\ \text{no singular } VAV^* \text{ es Hermitiana} &\Leftrightarrow (VAV^*)^* = VAV^* \\ &\Leftrightarrow VA^*V^* = VAV^* \\ &\Leftrightarrow A^* = A \\ &\Leftrightarrow A \text{ es Hermitiana} \end{aligned}$$

□

6.1. *congruencias entre A y A^T

Teorema 6.1.1. *([12]) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces A y A^T son *congruentes vía una matriz coninvolutoria $J \in M_n(\mathbb{C})$*

Este resultado implica que la declaración "A es *congruente a A^T" podría ser adicionada a la lista de la primera parte de la Proposición Estándar 6.0.3, y también implica que las declaraciones en estas listas no son sólo equivalencias. Cada una de las aserciones son ciertas. Notemos que hemos obtenido las primeras dos declaraciones del Teorema 1.0.11.

Teorema 1.0.11. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$.*

1. *A es *congruente a una matriz simétrica vía una coninvolución*

2. *A es *congruente a A^T vía una coninvolución*

3. *Si A es no singular y su *cocuadrado AA^{-*} es no derogatoria entonces toda $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^* = A^T$ son coninvoluciones*

Demostración. Los enunciados (1) y (2) se obtienen del Teorema 6.1.1 y de la Proposición 6.0.3

Ahora, sea $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $SAS^* = A^T$. Entonces $\overline{A} = (A^T)^* = (SAS^*)^* = SA^*S^*$, luego $\overline{A^{-1}} = (SA^*S^*)^{-1} = S^{-*}\,A^{-*}\,S^{-1}$ y por lo tanto $A^T\,\overline{A^{-1}} = SAA^{-*}\,S^{-1}$. Dado que

$$A^T\,\overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}}A^T\,\overline{A^{-1}} = \overline{A}\,[\overline{A^{-1}}\,A^T]\,\overline{A^{-1}} = \overline{A}[AA^{-*}]^T\,\overline{A^{-1}}$$

obtenemos $\overline{A}[AA^{-*}]^T\,\overline{A^{-1}} = SAA^{-*}\,S^{-1}$, y de aquí

$$(\overline{A^{-1}}S)[AA^{-*}](\overline{A^{-1}}S)^{-1} = [AA^{-*}]^T$$

Dado que AA^{-*} es no derogatoria, del Teorema 1.0.5 se tiene que $\overline{A^{-1}}S$ es simétrica y luego, $A^{-1}\overline{S}$ es simétrica. Así $A^{-1}\overline{S} = (A^{-1}\overline{S})^T = S^*\,A^{-T}$, por lo que $\overline{S} = AS^*\,A^{-T}$. De aca se tiene que,

$$\overline{S} = AS^*\,A^{-T} = S^{-1}SAS^*\,A^{-T} = S^{-1}A^TA^{-T} = S^{-1}$$

$\square$

6.2. *congruencias entre A y A^* y *congruencias entre A y $\overline{A}$

El Teorema 6.1.1 implica el siguiente lema

Lema 6.2.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ entonces, A es *congruente a $\overline{A}$ si y sólo si A es *congruente a A^**

Demostración. Del Teorema 6.1.1 existe una matriz W no singular tal que $A = WA^TW^*$

(⇒) Supongamos que A es *congruente a $\overline{A}$, luego existe una matriz V no singular tal que $A = V\overline{A}\,V^*$, así $A^T = \overline{V}\,A^*V^T$. Luego,

$$A = WA^TW^* = W\,\overline{V}\,A^*\,V^TW^* = (W\,\overline{V})\,A^*\,(W\overline{V})^*$$

(⇐) Supongamos que A es *congruente a A^*, luego existe una matriz V no singular tal que $A = V A^*\,V^*$, así $A^T = \overline{V}\,\overline{A}\,V^T$. Luego,

$$A = WA^TW^* = W\,\overline{V}\,\overline{A}\,V^TW^* = (W\,\overline{V})\,\overline{A}\,(W\overline{V})^*$$

$\square$

De la Proposición 6.0.2 se tiene que tanto A y A^* como A y $\overline{A}$ no son necesariamente *congruentes

Ejemplo 6.2.2. *De nuevo consideremos* $H_2(2i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$. $H_2(2i)$ *no es* **congruente a* $\overline{H_2(2i)} = H_2(-2i)$, *dado que el* **cocuadrado de* $H_2(2i)$ *es*

$$\begin{aligned} H_2(2i)^{-*}\, H_2(2i) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = \frac{-i}{2} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y **cocuadrado de* $\overline{H_2(2i)} = H_2(-2i)$ *es*

$$\begin{aligned} (\overline{H_2(2i)})^{-*}\, \overline{H_2(2i)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

los cuales no son similares.

*Ahora la *cocuadrado de* $H_2(2i)^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *es*

$$
\begin{aligned}
(H_2(2i)^*)^{-*}\ H_2(2i)^* &= \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

*la cual no es similar a la *cocuadrado de* $H_2(2i)$*, es decir,* $H_2(2i)$ *no es *congruente a* $H_2(2i)^*$.
Sea S *la matriz reversible involutiva* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$*, entonces*

$$
\begin{aligned}
SH_2(2i)S^* &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

De nuevo se tiene que $H_2(2i)$ *es *congruente a su transpuesta vía la matriz reversible* S

La proxima pregunta que discutiremos es si la declaración "A es *congruente a $\overline{A}$" puede ser adicionada a las equivalencias en la Proposición 6.0.3 parte (2). Primero notemos que:

Lema 6.2.3. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *y supongamos que* A, B *son *congruentes. Entonces,*

1. *Si* A *es *congruente a* $\overline{A}$*, entonces* B *es *congruente a* $\overline{B}$

2. *Si* A *es *congruente a* $\overline{A}$ *vía una matriz coninvolutoria, entonces* B *es *congruente a* $\overline{B}$ *vía una matriz coninvolutoria.*

3. *Si A es *congruente a A^*, entonces B es *congruente a B^**

4. *Si A es *congruente a A^* vía una involución, entonces B es *congruente a B^* vía una involución.*

Demostración. Dado que A y B son *congruentes, existe una matriz S no singular tal que $B = SAS^*$. Ahora

(1),(2) Si A es *congruente a $\overline{A}$, existira una matriz no singular J tal que $\overline{A} = JAJ^*$. Luego,

$$\overline{B} = \overline{S}\,\overline{A}S^T = \overline{S}\,JAJ^*S^T = \overline{S}\,JS^{-1}BS^{-*}J^*S^T = (\overline{S}\,JS^{-1})B(\overline{S}\,JS^{-1})^*$$

Si J fuese una conivolución entonces, $(\overline{S}\,JS^{-1})^{-1} = SJ^{-1}\overline{S^{-1}} = S\overline{J}\;\overline{S^{-1}} = \overline{\overline{S}\,JS^{-1}}$

(3),(4) Si A es *congruente a A^*, existira una matriz no singular J tal que $A^* = JAJ^*$. Luego,

$$B^* = SA^*S^* = SJAJ^*S^* = SJS^{-1}BS^{-*}J^*S^* = (SJS^{-1})B(SJS^{-1})^*$$

Si J fuese una involución entonces, $(SJS^{-1})^{-1} = SJ^{-1}S^{-1} = SJS^{-1}$

□

¿Qué significa para la forma canónica *congruencia el hecho que A y $\overline{A}$ (o A^*) sean *congruentes?

1. Las matrices $J_k(0)$ y $H_{2m}(\mu)(|\mu| > 1), \mu \in \mathbb{R})$ son reales, luego ellas son *congruentes vía la identidad a sus conjugadas y ^{T}congruentes a sus transpuestas vía una involución real, esto es, *congruente a su transpuesta conjugada vía una involución real.

2. $\pm\Delta_l$ es *congruente a $\pm\overline{\Delta_l} = \pm\Delta_l^*$ vía $S = diag(1, -1, 1, 1, \dots)$, una involución real

3. Si $\lambda \notin \mathbb{R}$ y $|\lambda| = 1$ entonces $\lambda\Delta_l$ y $\overline{\lambda\Delta_l}$ no son *congruentes. Esto se sigue de la observación que $\overline{\lambda\Delta_l} = \overline{\lambda}\Delta_l$ es *congruente a $\overline{\lambda}\Delta_l$ por (2), la cual no es *congruente a $\lambda\Delta_l$, siendo de diferentes tipos de formas canonicas *congruencia. Y por lo tanto, $\lambda\Delta_l$ y $(\lambda\Delta_l)^*$ no son *congruentes.

4. $H_{2m}(\mu)(|\mu| > 1, \mu \notin \mathbb{R})$ no es *congruente a su conjugada, dado que $\overline{H_{2m}(\mu)} = H_{2m}(\overline{\mu})$ es de tipo de forma canonica *congruencia diferente. Luego, $H_{2m}(\mu)$ y $H_{2m}(\mu)^*$ no son *congruente

Concluimos

Corolario 6.2.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Las siguientes aserciones son equivalentes*

1. *A es *congruente a $\overline{A}$ (o A^*)*
2. *A es *congruente a una suma directa de matrices de los siguientes tipos*
   a) $J_k(0)$
   b) Δ_l *o* $-\Delta_l$
   c) $H_{2m}(\mu)(|\mu| > 1, \mu \in \mathbb{R})$
   d) $H_{2m}(\mu) \oplus H_{2m}(\overline{\mu})(|\mu| > 1, \mu \notin \mathbb{R})$
   e) $\lambda\Delta_l \oplus \overline{\lambda}\Delta_l(|\lambda| = 1, \lambda \notin \mathbb{R})$

Notemos que el tipo (e) usa la *congruencia de $\overline{\lambda\Delta_l}$ y $\overline{\lambda}\Delta_l$

Probaremos ahora el Teorema 1.0.12.

Teorema 1.0.12. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, las siguientes aserciones son equivalentes:*

1. *A es *congruente a una matriz real*
2. *A es *congruente a una matriz real vía una coninvolución*
3. *A y $\overline{A}$ son *congruente*
4. *A y $\overline{A}$ son *congruente vía una coninvolución*
5. *A y A^* son *congruente*
6. *A y A^* son *congruente vía una involución*

Demostración. Observemos que una vez que tengamos establecido las equivalencias de (3),(4),(5) y (6), la Proposición 6.0.3, implica las equivalencias del resto de las aserciones del Teorema 1.0.12

(3) $\Leftrightarrow$ (5) Es el Lema 6.2.1

(3) $\Rightarrow$ (4) Por el Corolario 6.2.4 obtenemos que si A y $\overline{A}$ (o A^*) son *congruentes, la forma canónica *congruencia de A sería una suma directa de matrices de los cinco tipos descritos en el Corolorio 6.2.4. Por el Lema 6.2.3 es suficiente demostrar que cada uno de estos tipos es *congruente a su conjugada vía una coninvolución, respectivamente, son *congruentes a sus transpuestas conjugadas vía una involución.

Ya vimos, en 5.3.3 que los tres primeros tipos son *congruentes con su conjugada vía una coninvolución, respectivamente, son *congruentes con sus transpuestas conjugadas vía una involución real.

En la demostración del Teorema 1.0.10 parte (2), demostramos que el cuarto tipo, $H_{2m}(\mu) \oplus H_{2m}(\overline{\mu})$, es ^{T}congruente a su conjugada (respectivamente, transpuesta conjugada) vía una involución real, por lo tanto ellos son*congruentes vía una involución real.

Finalmente, el quinto tipo: $\lambda\Delta_l \oplus \overline{\lambda}\Delta_l, (|\lambda| = 1, \lambda \notin \mathbb{R})$ es *congruente a su conjugada (respectivamente a su transpuesta conjugada) vía la involución real $J = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\Rightarrow$ (3) Es obvio

(5) $\Rightarrow$ (4) Si A y A^* son *congruente, entonces A y $\overline{A}$ son *congruente (por (3)), luego A y $\overline{A}$ son *congruente vía una coninvolución (por (4))

(5) $\Rightarrow$ (6) Si A es *congruente a A^* entonces A y $\overline{A}$ son *congruente vía una coninvolución (por (4)), luego por la Proposición 6.0.3 se tiene que A es *conguente a una matriz real vía una conivolución. Así existe una matriz $R \in M_n(\mathbb{R})$ y una coninvolución J tales que $JAJ^* = R$. Luego, por el Teorema 5.2.1 existe una involución real S tal que

$SRS^T = R^T$. De aquí,

$$SJAJ^*S^T = SRS^T = R^T = R^* = JA^*J^*$$

y por lo tanto $A^* = (J^{-1}SJ)A(J^*S^TJ^{-*}) = (J^{-1}SJ)A(J^{-1}\overline{S}J)^* = (J^{-1}SJ)A(J^{-1}SJ)^*$, dado que $S \in M_n(\mathbb{R})$. Por último, como $(J^{-1}SJ)^{-1} = J^{-1}S^{-1}J = J^{-1}SJ$, se tiene que $J^{-1}SJ$ es una involución

(6) $\Rightarrow$ (5) Es obvio

De la Proposición 6.0.3 se tiene que (1), (2) y (4) son equivalentes

□

De la misma manera como en la Sección 5.3 sobre ^{T}congruencias, podemos demostrar que toda *conguencia $SAS^* = A^*$ induce una similaridad

$$(A^{-*}S)AA^{-*}(A^{-*}S)^{-1} = (AA^{-*})^*$$

En efecto,

$$\begin{aligned} S(AA^{-*})S^{-1} &= SAS^*S^{-*}A^{-*}S^{-1} \\ &= (SAS^*)(SAS^*)^{-*} \\ &= A^*(A^*)^{-*} \\ &= A^*A^{-1} \\ &= A^*A^{-1}A^*A^{-*} \\ &= A^*(AA^{-*})^*A^{-*} \end{aligned}$$

luego $A^{-*}S(AA^{-*})S^{-1}A^* = (AA^{-*})^*$ y de aquí $(A^{-*}S)AA^{-*}(A^{-*}S)^{-1} = (AA^{-*})^*$

Lema 6.2.5. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que A y A^* son *congruentes. Las siguientes aserciones son equivalentes para cualquier S no singular tal que $SAS^* = A^*$*

1. *S es una *congruencia involutoria entre A y A^**

2. *$A^{-*}S$ es una similaridad hermitiana entre AA^{-*} y $(AA^{-*})^*$*

Demostración.

$$\begin{aligned} A^{-*}S \text{ es hermitiana} &\Leftrightarrow (A^{-*}S)^* = A^{-*}S \Leftrightarrow S^*A^{-1} = A^{-*}S \\ &\Leftrightarrow S^* = A^{-*}SA = A^{-*}SAS^*S^{-*} \Leftrightarrow S^* = A^{-*}A^*S^{-*} \Leftrightarrow S^* = S^{-*} \\ &\Leftrightarrow S = S^{-1} \end{aligned}$$

□

De aquí, obtenemos las siguientes equivalencias

Lema 6.2.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que AA^{-*} es no derogatoria. Supongamos que J es una *congruencia involutoria entre A y A^*. Para cualquier *congruencia S tal que $SAS^* = A^*$ las siguientes aserciones son equivalentes*

1. *S es involutoria*

2. *$S = Jp(AA^{-*})$, donde p es un polinomio real*

Demostración.

Dado J es una *congruencia involutiva entre A y A^{-*} se tiene que $A^{-*}J$ es una similaridad Hermitiana entre AA^{-*} y $(AA^{-*})^*$ (ver Lema 6.2.5).
Sea S una matriz no singular tal que $SAS^* = A^*$, luego $(A^{-*}S)AA^{-*}(A^{-*}S)^{-1} = (AA^{-*})^*$
Como AA^{-*} es no derogatira, del Teorema 1.0.4 se tiene que,

$$A^{-*}S \text{ es Hermitiana} \Leftrightarrow \text{ Existe un polinomio real } p \text{ de grado menor que } n, A^{-*}S = A^{-*}Jp(AA^*)$$

Por último dado que, A^{-*} es no singular y que $A^{-*}S$ es Hermitiana $\Leftrightarrow$ S es una involución, se tiene que

$$S \text{ es una involución } \Leftrightarrow \text{ Existe un polinomio real } p \text{ de grado menor que } n, S = Jp(AA^*)$$

□

Finalmente mencionamos que no existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ con la propiedad que toda *congruencia entre A y A^* sean involuciones. De hecho, si $JAJ^* = A^*$ es una *congruencia entre A y A^*, también lo es αJ siempre que $|\alpha| = 1$. Pero αJ no es necesariamente una involución, tomemos $\alpha \in \{\mathbb{C} : |\alpha| = 1, \alpha \neq \pm 1\}$

Bibliografía

[1] Aitken A. and Turnbull H. *An Introduction to the Theory of Canonical Matrix*. Blackie Sons Limited, 1932.

[2] Ballantine C. and Yip E. Congruence and conjunctivity of matrices to their adjoints. *Linear Algebra Appl*, 41:33–72, 1982.

[3] Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1960.

[4] Bevis J., Hall F., and Hartwig R. Consimilaraties and the Matrix Equation $A\overline{X} - XB = C$. In *Current Trends in Matrix Theory*, pages 51–64. Elsevier Science Ltd., 1987.

[5] Bevis J., Hall F., and Hartwig R. The Matrix Equation $A\overline{X} - XB = C$ and Its Special Cases. *SIAM J. Matrix Anal. and Appl.*, 9:348–359, 1988.

[6] Doković D. and Ikramov K. A square matrix is congruent to its transpose. *J. Algebra*, 257:97–105, 2002.

[7] Gantmacher F. *Matrix Theory*. AMS Chelsea, 1959.

[8] Gow R. The equivalence of an invertible matrix to its transpose. *Linear Multilinear Algebra*, 8:329–336, 1980.

[9] Hong H. and Horn R. A canonical form for matrices under consimilarity. *Linear Algebra Appl*, 102:143–168, 1988.

[10] Horn R. and Johnson C. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.

[11] Horn R. and Johnson C. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1991.

[12] Horn R. and Sergeichuk V. Congruence of a square matrix and its transpose. *Linear Algebra Appl*, 389:347–353, 2002.

[13] Horn R. and Sergeichuk V. Canonical forms for complex matrix congruence and *congruence. *Linear Algebra Appl*, 416:1010–1932, 2006.

[14] Horn R. and Sergeichuk V. Canonical matrices of bilinear and sesquilinear forms. *Linear Algebra Appl*, 428:193–223, 2008.

[15] Sergeichuk V. Classification problems for systems of forms and linear mappings. *Math. USS-Izv*, 31:481–501, 1988.

[16] Taussky O. and Zassenhaus H. On the similarity transformation between a matrix and its transpose. *Pacif J. Math.*, 9:893–896, 1959.

[17] Vermeer J. On (Con)Similarities and congruences between A y A^*, A^T or $\overline{A}$. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 17:258–283, 2008.