Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Posgrado

TEOREMA DE WEYL Y UNA DE SUS VARIANTES

Autor: Lcdo. Edgar Guédez

Tutor: Dr. Fernando Villafañe

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister Scientiarum,

Mención Matemáticas

BARQUISIMETO, 2012

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Posgrado

TEOREMA DE WEYL Y UNA DE SUS VARIANTES

AUTOR: Lcdo. Edgar Guédez

TUTOR: Dr. Fernando Villafañe

Barquisimeto 2012

Índice general

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudiarán como bien lo dice su título el Teorema de Weyl y una de sus variantes, para ser más explícitos el Teorema de a-Weyl. Si denotamos al conjunto de los operadores Weyl como $W(X)$, a su conjunto resolvente y su espectro los identificaremos usando las notaciones $\rho_w(T)$ y $\sigma_w(T)$ respectivamente.

En 1909, H Weyl [26] estudió los espectros de las perturbaciones de la forma $T+K$, donde K representa a un operador compacto y T es un operador hermitiano definido en un espacio de Hilbert H y demostró que λ está en dichos espectros, precisamente cuando no es un elemento del conjunto $\pi_{00}(T)$ formado por los puntos aislados del espectro tales que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Un resultado clásico nos asegura también que $\sigma_w(T)$ es igual a la intersección de los espectros $\sigma(T+K)$ ya mencionados y por ser el operador nulo compacto esta intersección está contenida en $\sigma(T)$. La otra pregunta interesante es ver cuáles elementos del espectro también definen operadores en $W(X)$. Utilizando lo probado por Weyl para conseguir respuestas tenemos que:

$$\sigma(T)\backslash\sigma_w(T) = \sigma(T)\backslash[\mathbb{C}\backslash\pi_{00}(T)] = \sigma(T)\cap\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T),$$

En resumen obtenemos que bajo estas hipótesis es válida la ecuación:

$$\sigma(T)\backslash\sigma_w(T) = \pi_{00}(T). \tag{1}$$

Al estudiar otros operadores acotados en un espacio de Banach no podemos asegurar que se mantengan como válidos los argumentos anteriores y junto con estos la ecuación (1). Por tal motivo cuando se consigue un operador que la hace cierta decimos que este satisface el Teorema de Weyl. Quien en primera instancia investigó la posible extensión de estos resultados a operadores y espacio mas generales fue Coburn, (ver [12]). A lo largo de este trabajo estudiaremos condiciones necesarias y suficientes que se han establecido para determinar si un operador dado cumple o no con esta definición.

División por capítulos
Capítulo 1:
Preliminares

Para profundizar en estos temas necesitaremos recordar algunos hechos y definiciones básicas. Para un operador acotado T en un espacio de Banach X definimos el ker o núcleo de T como el conjunto $\ker(T) := \{x \in X : T(x) = 0\}$ y la imagen o rango de T como el conjunto $T(X) := \{T(x) : x \in X\}$. Asociados a estos definimos los números nulidad de T denotado y definido como $\alpha(T) := dim(\ker(T))$ y la deficiencia de T dado por $\beta(T) := codim(T(X))$. Si bien $\alpha(T)$

o $\beta(T)$ son finitos se define el índice del operador correspondiente como $ind(T) := \alpha(T) - \beta(T)$. Un operador de Weyl es el que tiene índice nulo.

Es fácil ver que $\{0\} = \ker(T^0) \subseteq \ker(T^1) \subseteq \ker(T)^2 \ldots \subseteq$. Cuando existe un natural que hace cierta la igualdad entre los ker de dos de estos iterados sucesivos definimos el ascent de T como el menor natural $p := p(T)$ tal que $\ker(T^p) = \ker(T^{p+1})$ y en caso contrario diremos que este es infinito. Análogamente: $X = T^0(X) \supseteq T^1(X) \supseteq T^2(X) \ldots \supseteq$ y el descent de T es el menor $q := q(T)$ tal que $T^q(X) = T^{q+1}(X)$, si algún natural hace cierta la igualdad entre los rangos de estos iterados. En caso contrario tomaremos este valor igual a infinito.

Los números $\alpha(T), \beta(T), p(T)$ y $q(T)$, serán el motivo principal de nuestros estudios puesto que las clases de operadores que se definen e investigan se describen con base en la finitud de ellos. En este capítulo se presentan sin demostración, salvo en uno de los casos , los resultados útiles y necesarios para llegar a las conclusiones pertinentes. Entre los tipos de operadores que se definen están los Operadores de Fredholm que tienen $\alpha(T), \beta(T)$ menores que infinito y los de Browder que tienen a $p(T), q(T)$ menores que infinito. Como se puede deducir de su definición los operadores de Weyl cumplen que $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$. Es por eso que se tiene una relación tan estrecha entre estas tres clases de operadores, relaciones que son presentadas en los varios teoremas que se enuncian en este aparte. También se define lo que conocemos como la SINGLE VALUED EXTENSION PROPERTY , (o abreviadamente SVEP) introducida por Dunford en los inicios de la investigación de la teoría espectral local (ver [14], [15]), que permite enunciar condiciones necesarias y suficientes para que bien sea $p(T)$ o $q(T)$ sean finito. Dos conjuntos notables nos van a permitir caracterizar a la SVEP. Estos son el Core Analítico, $K(T)$ y la parte Quasi-nilpotente de un operador, $H_0(T)$. También son indispensables para lograr estos objetivos los operadores semi regulares , esencialmente semi regulares y Tipo Kato introducidos por su homónimo y estudiados con todo detalle por Aiena en [1]. Por último en este capítulo se presentarán los enunciados que establecerán las relaciones entre lo que vamos a conocer como la función resolvente de T, sus polos y los puntos aislados del espectro con la finitud del ascent y el descent del operador en estudio, ver [19].

Capítulo 2:
La SVEP, Operadores de Browder, de Weyl y sus Espectros

Dado un operador T se presta especial atención al estudio de las perturbaciones de la forma $T+S$ donde S es otro operador definido en los mismos espacios y muy particularmente a las que tienen la forma $\lambda I - T$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si estamos interesados en aplicaciones que satisfacen una propiedad P, el conjunto resolvente de T con respecto a esta propiedad es el formado por todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ que hacen que el operador $\lambda I - T$ tenga esa característica en cuestión. Es costumbre denotar a este conjunto como $\rho_P(T)$ mientras que a su complemento lo llamaremos el espectro de T con respecto a esa propiedad y lo denotaremos como $\sigma_P(T)$. En el caso en que sólo hablemos del resolvente y el espectro de T sin ninguna otra descripción. estaremos refiriéndonos al conjunto formado por todos los λ que hacen a $\lambda I - T$ biyectiva y su correspondiente complemento, usando para estos la notación $\rho(T)$ y $\sigma(T)$ respectivamente.

En el presente capítulo comenzaremos por estudiar los operadores que tienen la propiedad de ser Browder o Weyl y sus espectros $\sigma_b(T)$ y $\sigma_w(T)$. Se establecerán los resultados que nos den las relaciones entre los valores $\alpha(T), \beta(T), p(T), q(T)$ de un operador dado y su operador dual correspondiente.

Como se dijo anteriormente una forma clásica de determinar que un operador tiene ascent o descent finito en valiéndonos de la SVEP y por lo tanto nuestros esfuerzos irán destinados a presentar con el mayor detalle que nos dicte el sentido común las pruebas de los teoremas que nos den las caracterizaciones de las relaciones entre el ascent, el descent y la SVEP en un determinado punto. En aras de evitar cualquier confusión se aclara que gran parte de las pruebas son variantes de las presentadas por el Doctor Pietro Aiena en [1] y [2].

Capítulo 3
Teorema de Weyl.

Habiendo ya discutido los antecedentes históricos relacionados con este tema procedemos a estudiarlo en detalle. Recordemos que un operador T en un espacio de Banach X satisface el Teorema de Weyl si verifica la ecuación (1). También definiremos a los operadores que satisfacen el Teorema de Browder como los que hacen cierta la igualdad $\sigma(T) \backslash \sigma_b(T) = \sigma(T)\sigma_w(T)$. Las aplicaciones que satisfacen éste último teorema van a permitir establecer equivalencias para conocer cuando un operador satisface o no el Teorema de Weyl, de ahí la necesidad de incluirlas en este trabajo. Se introducirán ciertos subconjuntos de $L(X)$, en los cuales se puede asegurar que algunos de sus elementos, con ciertas características satisfacen el teorema de Weyl. Entre éstos estará $P_0(X)$ formado por todos los operadores en X que tienen la particularidad que para cualquier λ en $p_{00}(T)$, existe un p natural que hace que la parte quasinilpotente de $\lambda I - T$ y su *ker* coincidan. También nos valdremos del conjunto $\sigma_0(T)$ formado por todos los complejos λ que definen autovalores de multiplicidad finita y que son el centro de un disco donde cada μ en él, exceptuando al mismos λ, cumple que $\mu I - T$ es tipo Weyl y el $ker(\mu I - T)$ está incluido en el hiper rango del mismo operador. Al último conjunto que haremos referencia es el denotado como $\sigma_1(T)$ igual a la unión del espectro de Weyl con el espectro de Kato donde el segundo espectro está formado por todos los λ que hacen que $\lambda I - T$ no sea semi regular.

Capítulo 4:
Teorema de a Weyl.

Ahora tomaremos el problema original estudiado por H. Weyl, sustituyendo al espectro de T por el llamado espectro aproximado de T, denotado como $\sigma_a(T)$ y formado por los λ que hacen a $\lambda I - T$ no subacotado. También consideraremos en este caso al espectro aproximado de Weyl $\sigma_{aw}(T)$, formado por los complejos que hacen que $\lambda I - T$ no sea semi Weyl superior, es decir, que tiene índice mayor que cero o no son Semi Fredholm superiores. Bajo estas premisas resulta ser que $\sigma_{aw}(T)$, de manera análoga al caso inicial, es la intersección de los espectros aproximados de las perturbaciones de la forma $T+K$, donde K es compacto y nuevamente esta intersección está contenida en $\sigma_a(T)$. Es por eso que tiene sentido preguntarse cuales operadores van a satisfacer una ecuación que se asemeje a la ecuación (1), pero sustituyendo a $\sigma(T)$ por $\sigma_a(T)$ y a $\sigma_w(T)$ por $\sigma_{aw}(T)$ respectivamente. Explícitamente:

$$\sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T) = \pi_{00}^a(T). \tag{2}$$

donde π_{00}^a es el conjunto formado por todos los puntos aislados del espectro aproximado de T tales que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Cuando un operador definido en un espacio de Banach haga cierta la ecuación (2) diremos que satisface el teorema de a Weyl. Esta definición fue formulada explícitamente por V Rakočević, ver [23]. Al igual que en el estudio del teorema de Weyl será fundamental en nuestro desarrollo el estudio del Teorema de a Browder. Diremos que un operador T satisface éste teorema si $\sigma_{aw} = \sigma_{ub}$, donde el espectro del lado derecho está formado por los λ que hacen que $\lambda I - T$ no sea Browder superior y equivalentemente que éste operador no sea Fredholm o tenga ascent infinito.

En este capítulo se buscará ver en que casos se pueden generalizar los conjuntos y sus teoremas asociadas, presentados en el capítulo anterior, para construir condiciones necesarias y suficientes que nos permitan precisar cuando un operador dado satisface o no el teorema de a Weyl.

DEDICATORIA:

A mi vieja querida MAÍTA Y AL JESÚS DE LOS EVANGELIOS . Ambos cada día me han servido de ejemplo para querer ser un mejor ser humano.

AGRADECIMIENTOS:

Ante todo quiero agradecer a Dios, a quien lo primero que le pido cada día es que exista. Obviamente a mí querida madre Esther Lobo y a mis hermanos por el apoyo moral y sentimental que me han dado. A mi Tutor el Dr. Fernando Villafañe quien me aceptó como tesista en un momento difícil y me dio la oportunidad de culminar esta tarea. A la Dra. María Teresa Biondi quien inicialmente me convenció para volver a los estudios. Muy especialmente a Karmela por su ayuda constante, sin ella este trabajo habría sido cuesta arriba. Al grupo de, más que empleados, amigos, dentro de los que incluyo a Jennifer Medina, Mara Fabiani, Henry González y a Miyedis quien hizo de la oficina de postgrado un lugar más amigable. A mis excelentes compañeros del Departamento de Matemáticas. Ciertamente es un placer y un privilegio compartir con todos ustedes. Son un ejemplo de armonía y solidaridad. Dentro de este grupo hago mención especial a Dilcia Pérez, Gladys Torrealba, Erik Cáseres, Miguel Vivas y su combo, Víctor Carucí, Luis Enrique Moreno (alias Luigy), Andy, Juan Carlos Juárez (alias Chávez) y Ronald Gutiérrez. Debo también poner en un lugar predominante a Luz Elimar Marchán y a Clavel Quintana que han tomado como propias algunas tareas relacionados con la presentación de este proyecto. A José Mogollón que pasó de ser mi alumno a ser mi compañero de estudios. A mis amigos José Rafael Rodríguez y José Lugo que me han brindado un apoyo moral inconmensurable y por último a todos aquellos que en mi corazón tienen mi agradecimiento pero que por ser práctico, no podría nombrarlos uno por uno.
Un abrazo para todos.

Capítulo 1
Preliminares

En este capítulo se enumeran los conceptos, definiciones y resultados básicos que se requieren para el fin de nuestro trabajo. Entre los tópicos mas importantes se encuentran las teorías relacionadas con Operadores de Fredholm, el Core Analítico, La Single Valued Extensión Property (SVEP), Operadores Tipo Kato, la relación entre los operadores semi regulares con los operadores de Browder y la métrica de la brecha finalizando con una mirada a los puntos aislados del espectro y su conexión con la finitud del ascent y descent de un operador dado entre otros. Al estar dirigida esta presentación a personas con conocimientos fundamentales de Análisis Funcional algunos conceptos relacionados con esta área han sido omitidos asumiendo que quien lea estas líneas no necesita estas referencias.

1.1. Operadores de Fredholm

Sean X,Y : Espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Diremos que esta aplicación es acotada si existe $k \geq 0$ tal que :
$\|T(x)\| \leq k\|x\|,$ para cualquier $x \in X$ En el caso de existir dicha constante podemos definir

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$L(X,Y) = \{T : X \to Y/T \quad \text{es lineal y acotada}\}.$

Si $X = Y$ escribimos $L(X,X) = L(X)$.

I_x nos servirá para denotar al operador identidad y en el caso que no haya posibilidad de confusión solo lo denotaremos como I.
$\ker T = \{x \in X/T(x) = 0\}$ y $T(X) = \{T(x) \backslash x \in X\}$.

Operador dual

Definición 1.1.1. *Para* $T \in L(X,Y)$ *definimos el dual de* T*, denotado por* T^* *como sigue:*

$$T^* : Y^* \to X^*$$

y para cada $f \in Y^*$ *y cada* $x \in X$*,* $(T^* f)(x) = f(T(x))$.

El siguiente valor nos va a permitir conseguir un poderoso criterio para comprobar si un operador dado es de rango cerrado.

Definición 1.1.2. *Si* $T \in L(X,Y)$ *y* $T \neq 0$ *entonces su módulo minimal reducido es*

$$\gamma(T) = \operatorname*{ínf}_{x \notin \ker(T)} \frac{\|T(x)\|}{dist(x, \ker T)},$$

y en caso contrario $\gamma(0) = \infty$.

Teorema 1.1.1. *Si* $T \in L(X,Y)$*. Entonces,*

i) $\gamma(T) > 0 \Leftrightarrow T(X)$ *es cerrado.*

ii) $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.

Teorema 1.1.2. *Si* $T \in L(X)$ *entonces* $T(X)$ *es cerrado si y solamente si* $T^*(X^*)$ *es cerrado.*

En efecto, si $T(X)$ es cerrado, entonces $\gamma(T) > 0$; pero $0 < \gamma(T) = \gamma(T^*)$ y por lo tanto $T^*(X^*)$ es cerrado.

Aniquilador y pre-aniquilador: Con base en estos conjuntos se consigue probar algunos isomorfismos isométricos y relaciones duales muy útiles a nuestros objetivos.

Definición 1.1.3. *Sea* M *un subespacio de* X *un espacio de Banach. El aniquilador o anulador de* M *es el subespacio cerrado de* X^*.

$$M^{\perp} = \{f \in X^* / f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

El pre anulador o pre aniquilador de un subespacio W *de* X^**, es el subespacio vectorial cerrado de* X.

$$^{\perp}W = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall f \in W\}.$$

Teorema 1.1.3. *Si M es un sub espacio cerrado de un espacio de Banach X, entonces* $^{\perp}(M^{\perp}) = M$.

Teorema 1.1.4. *Para $T \in L(X)$ se cumplen las siguientes relaciones duales:*

$$\begin{array}{llll} i) & \ker T = ^{\perp} \overline{T^*(X^*)} & ii) & ^{\perp}\ker T^* = \overline{T(X)} \\ iii) & \overline{T(X)}^{\perp} = \ker T^* & iv) & \overline{T^*(X^*)} \subseteq \ker T^{\perp} \end{array}$$

la igualdad en la última inclusión se cumple cuando T tiene rango cerrado.

Teorema 1.1.5. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, entonces,*

i) M^* *es isométricamente isomorfo a* $X^*/M^{\perp}$.

ii) $\left(\dfrac{X}{M}\right)^*$ *es isométricamente isomorfo a* $M^{\perp}$.

De suma importancia y eje de muchos de nuestros estudios es también el conjunto de **operadores subacotados**.

Definición 1.1.4. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach . Diremos que T es subacotado si es inyectivo y de rango cerrado.*

Teorema 1.1.6. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. Entonces:*

i) T es sobreyectivo (respectivamente subacotado) si y solo si T^* es subacotado (respectivamente sobreyectivo).

ii) Si T es subacotado (respectivamente sobreyectivo) , entonces $\lambda I - T$ es subacotado (respectivamente sobreyectivo), para cualquier $|\lambda| < \gamma(T)$.

Ahora definimos los números que son el motivo de estudio de casi toda la teoría investigada en este campo. Nos referimos al **ascent, descent, nulidad y deficiencia de un operador lineal acotado**.

Definición 1.1.5. *Los números naturales Ascent y Descent de $T \in L(X)$, X un espacio de Banach a los cuales denotaremos por $p(T)$ y $q(T)$ respectivamente son los definidos según las siguientes fórmulas:*

$$p(T) = \begin{cases} \text{mín}\{n : \ker T^n = \ker T^{n+1}\} & si \quad \{n : \ker T^n = \ker T^{n+1}\} \neq \emptyset \\ \infty & si \quad \{n : \ker T^n = \ker T^{n+1}\} = \emptyset. \end{cases}$$

$$q(T) = \begin{cases} \text{mín}\{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} & si \quad \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} \neq \emptyset \\ \infty & si \quad \{n : T^n(X) = T^{n+1}(X)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Definición 1.1.6. *Para $T \in L(X)$, X un espacio de Banach definimos:*

i) La nulidad de T como $\alpha(T) := dim(\ker(T))$.

ii) La deficiencia de T como $\beta(T) := codim(T(X))$.

Teorema 1.1.7. *Seat $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces, $T(X)$ es cerrado si $\beta(T) < \infty$.*

Seguidamente definimos con base a la nulidad y deficiencia los **Operadores de Fredholm**.

Definición 1.1.7. *Para X un espacio de Banach definimos:*

$$\Phi_+(X) := \{T \in L(X)/\alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ es cerrado}\}.$$
$$\Phi_-(X) := \{T \in L(X)/\beta(T) < \infty\}.$$

$\Phi_+(X)$ denota la clase de los operadores semi-Fredholm superiores.

$\Phi_-(X)$ denota la clase de los operadores semi-Fredholm inferiores.

$\Phi(X) := \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$ la clase de operadores de Fredholm. $\Phi_\pm(X) := \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ la clase de operadores semi Fredholm.

El índice de un operador semi Fredholm es el número:

$$ind(T) := \alpha(T) - \beta(T).$$

También será importante trabajar con las proyecciones ya que estas nos permitirán definir lo que conoceremos como espacios complementados además de caracterizar y obtener resultados con respecto a cierto tipo de operadores.

Definición 1.1.8. *Si $X = F \oplus G$ sabemos que cada x en X puede ser escrito de forma única como $x = y + z$, donde $y \in F$ y $z \in G$. En tal caso:*

i) Definimos la proyección de X a lo largo (o paralela a G) sobre F como la transformación lineal $P : X \to X$, dada por $P(x) = P(y+z) = y$.

ii) Cuando resulte ser que esta proyección es continua diremos que F es complementado.

Con el siguiente teorema comenzaremos descubrir la relación entre los operadores de Fredholm y las proyecciones.

Teorema 1.1.8. *Los espacios finito dimensionales y espacios cerrados finitos codimensionales de cualquier espacio de Banach son complementados.*

Definición 1.1.9. *$T \in L(X,Y)$ se dice que es relativamente regular si existe un operador $S \in L(Y,X)$ tal que:*

$$T = TST \quad y \quad STS = S.$$

Teorema 1.1.9. *Un operador $T \in L(X,Y)$ es relativamente regular si y solo si* $\ker(T)$ $T(X)$ *son complementados.*

Teorema 1.1.10. *Todo operador de Fredholm $T \in \Phi(X,Y)$ es relativamente regular.*

A partir de acá se comienzan a establecer las principales relaciones entre el ascent, descent, la nulidad y la deficiencia de un operador lineal cualquiera. Para esto es indispensable el siguiente teorema:

Lema 1.1.1. *Sea T un operador lineal y X un espacio vectorial. Para cualquier natural positivo m dado las siguientes proposiciones son ciertas:*

i) $p(T) \leq m < \infty$ *si y solo si* $T^m(X) \cap \ker T^n = \{0\}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $q(T) \leq m < \infty$ *si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un subespacio vectorial $Y_n \subseteq \ker T^m$ tal que $X = Y_n \oplus T^n(X)$.*

Ya como consecuencia del lema anterior llegamos a uno de los resultados que más se utilizará en el desarrollo de esta teoría.

Teorema 1.1.11. *Si T es un operador lineal en un espacio vectorial X entonces:*

i) *si $p(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$;*

ii) *si $q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$;*

iii) *si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) = \alpha(T)$ (posiblemente infinitos);*

iv) *si $\beta(T) = \alpha(T) < \infty$ y bien sea $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $p(T) = q(T)$.*

Podemos decir que de alguna manera el siguiente enunciado nos garantiza la “ cerradura"de los operadores semi Fredhom y Fredholm.

Teorema 1.1.12. *Supongamos que X, Y y Z son espacios de Banach.*

i) *Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $S \in \Phi_-(Y,Z)$, entonces $ST \in \Phi_-(X,Z)$.*

ii) *Si* $T \in \Phi_+(X,Y)$ *y* $S \in \Phi_+(Y,Z)$, *entonces* $ST \in \Phi_+(X,Z)$.

iii) *Si* $T \in \Phi_(X,Y)$ *y* $S \in \Phi(Y,Z)$, *entonces* $ST \in \Phi_(X,Z)$.

Para terminar esta sección enunciamos teoremas para garantizar que $\Phi_-(X), \Phi_+(X), \Phi(X)$ son conjuntos abiertos en $L(X,Y)$ y también para mostrar algunas propiedades de ciertas perturbaciones de los operadores en estos conjuntos.

Teorema 1.1.13. *Supongamos que* $T \in L(X,Y)$. *Entonces se tiene:*

i) *Si* $T \in \Phi_+(X,Y)$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para cualquier* $S \in L(X,Y)$ *con* $\|S\| < \varepsilon$*:*

  a) $T + S \in \Phi_+(X,Y)$

  b) $\alpha(T+S) \leq \alpha(T)$

  c) $ind(T+S) = ind(T)$

ii) *Si* $T \in \Phi_-(X,Y)$, *existe* $\varepsilon > 0$, *tal que para cualquier* $S \in L(X,Y)$ *con* $\|S\| < \varepsilon$ *:*

  a) $T + S \in \Phi_-(X)$.

  b) $\beta(T+S) \leq \beta(T)$.

  c) $ind(T+S) = ind(T)$.

Corolario 1.1.1. *Los conjuntos* $\Phi_+(X,Y), \Phi_-(X,Y), \Phi(X,Y)$ *son subconjuntos abiertos en* $L(X,Y)$. *Además el índice es constante en cualquier componente conexa de* $\Phi_\pm(X,Y)$.

Teorema 1.1.14. *Supongamos que* $T \in \Phi_+(X)$, *entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que:*

$$\alpha(\lambda I - T) \leq \alpha(T), \quad \textit{para cualquier,} \quad |\lambda| < \varepsilon.$$

y $\alpha(\lambda I - T)$ *es constante para todo* $0 < |\lambda| < \varepsilon$.
Análogamente si $T \in \Phi_-(X)$, *entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que:*

$$\beta(\lambda I - T) \leq \beta(T), \textit{para cualquier,} \quad |\lambda| < \varepsilon.$$

y $\beta(\lambda I - T)$ *es constante para todo* $0 < |\lambda| < \varepsilon$.

Definición 1.1.10. *Para* $T \in L(X)$ *definimos:*

i) $N^\infty(T) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \ker T^k(X)$ *al que llamaremos hiper núcleo de* T.

ii) $T^\infty(T) = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k(X)$ *que llamaremos hiper rango de* T.

1.2. Core Analítico, Operadores Semi-regulares y Tipo Kato

Muchos de los resultados y caracterizaciones que se harán con base en la Single Valued Extensíon Property o abreviadamente SVEP están relacionados con el Core Analítico, los operadores semi-regulares y los tipo Kato. En esta sección presentamos las principales definiciones y propiedades de este conjunto y estos operadores.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial y T un operador en X .Definimos el Core algebraico de T como el subespacio M mas grande de X tal que $T(M) = M$. A este conjunto lo denotaremos como $C(T)$.*

Definición 1.2.2. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. El core analítico de T es el conjunto $K(T)$ formado por todos los $x \in X$ tales que existe una sucesión $\{u_n\} \subseteq X$ y $\delta > 0$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) $x = u_0$ *y* $Tu_{n+1} = u_n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}_+$.

ii) $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, entonces:*

i) $K(T)$ *es un subespacio vectorial de* X.

ii) $T(K(T)) = K(T)$.

Teorema 1.2.2. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$.*

i) Si F es un subespacio cerrado de X tal que $T(F) = F$, entonces $F \subseteq K(T)$.

ii) Si $C(T)$ es cerrado, entonces $C(T) = K(T)$.

Teorema 1.2.3. *Si $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces $K(T) = T^{\infty}(X)$ y $K(T)$ es cerrado.*

Definición 1.2.3. *Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice que es semi regular si es de rango cerrado y* $\ker(T) \subseteq T^{\infty}(X)$.

Definición 1.2.4. *Dado un operador $T \in L(X)$,X un espacio de Banach, la parte quasi-nilpotente de T, denotada por $H_0(T)$, está definida como:*

$$H_0(T) := \{x \in X / \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

Un operador $T \in L(X)$ se dice quasi-nilpotente si $\sigma(T) = \{0\}$.

Definición 1.2.5. *Un operador $T \in L(X)$ con X un espacio de Banach se dice que admite una descomposición generalizada tipo Kato abreviada como (GKD) si existe un par de subespacios vectoriales cerrados T invariantes (M,N) de X tales que $X = M \oplus N$, $T|M$ es semi regular y $T|N$ es quasi nilpotente.*

Recordemos ahora que un operador T se dice nilpotente si $T^n = 0$ a partir de algún $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2.6. *Si $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada tipo Kato $(M;N)$ diremos que:*

i) *T es un operador de tipo Kato de orden d si $(T|N)^d = 0$ para algún d en los naturales y además d es el mínimo valor en $\mathbb{N}$ que satisface esta condición.*

ii) *T es esencialmente semi regular si N es de dimensión finita.*

Teorema 1.2.4. *Si T es de tipo Kato, entonces T^* también los. Más aún si (M,N) es una GKD para T, $(N^{\perp},M^{\perp})$ lo es para T^*.*

Teorema 1.2.5. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada tipo Kato $(M;N)$, entonces:*
$T|M$ es sobreyectiva si y solo si $T^*|N^{\perp}$ es inyectiva.

Teorema 1.2.6. *Todo operador lineal acotado esencialmente semi regular es de tipo Kato.*

Teorema 1.2.7. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$.*

i) *T tiene GKD digamos (M,N) $\Rightarrow K(T|M) = K(T)$ y $K(T)$ es cerrado.*

ii) *Si además T es tipo kato $\Rightarrow K(T) = T^{\infty}(X)$.*

Ahora, al ser T tipo kato, $K(T|M) = K(T) = T^{\infty}(T)$.

Teorema 1.2.8. *Todo operador semi Fredholm en es esencialmente semi regular.*

Teorema 1.2.9. *Si $T \in L(X)$ es de tipo Kato entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda I - T$ es semi regular para cualquier $0 < |\lambda| < \varepsilon$.*

1.3. La Single valued Extension Property o SVEP

Acá comenzaremos por definir y delinear las relaciones entre la SVEP, los operadores semi regulares, el core analítico, la métrica de la brecha y los operadores de Browder.

Definición 1.3.1. *Se dice que T tiene la SVEP en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ si para cualquier vecindad U_{λ_0} de λ_0 la única función analítica.*

$f : U_{\lambda_0} \to X$ *que satisface la ecuación:*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0,$$

para cualquier λ *en* U_{λ_0}. *es la función nula.*

Diremos que T tiene la SVEP cuando T tenga la SVEP en cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

A diferencia de los otros resultados que se presentan sin prueba alguna en este capítulo daremos una pequeña demostración del siguiente teorema por lo útil y generalizado que será su uso a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.3.1. *Dado un operador $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, entonces:*
T tiene la SVEP en λ_0 si y solamente si $\lambda_0 I - T$ tiene la SVEP en cero.

Prueba: Supongamos que T tiene la SVEP en cero. Consideremos ahora al operador $\lambda_0 I - T$. Necesitamos probar que para cualquier vecindad U_0 de 0 se cumple que la única función analítica $g : U_0 \to X$ que satisface la ecuación:

$$(\mu I - (\lambda_0 I - T))g(\mu) = 0 \quad \text{Para cualquier} \quad \mu \in U_0, \quad \text{es la funcion nula.}$$

Sin perdida de generalidad supongamos que g esta definida en $U_0 = D(\varepsilon, 0)$ y satisface la ecuación en cuestión.

Con base en esto definamos $g_0(\mu) = g(-\mu) = -[-g(\lambda_0 - \mu + \lambda_0)]$. Ahora :

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu I - (\lambda_0 I - T))g_0(\mu), \\ &= ((\mu - \lambda_0)I + T)(-[-g(\lambda_0 - \mu + \lambda_0)]), \\ &= ((\lambda_0 - \mu)I - T)[-g((\lambda_0 - \mu) + \lambda_0)]. \end{aligned}$$

Si tomamos la vecindad $U_{\lambda_0} = D(\varepsilon, \lambda_0)$:

$$\begin{aligned} \mu \in U_0 &\Rightarrow |\mu| < \varepsilon, \\ &\Rightarrow |\lambda_0 - (\lambda_0 - \mu)| < \varepsilon, \\ &\Rightarrow \lambda_0 - \mu \in U_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Al hacer $f(\lambda_0 - \mu) = -g((\lambda_0 - \mu) + \lambda_0)$ tenemos que esta función es analítica, está definida en U_{λ_0} y,

$$((\lambda_0 - \mu)I - T)f(\lambda_0 - \mu) = 0 \quad \text{para cualquier } \lambda_0 - \mu \in U_{\lambda_0}.$$

Por hipótesis T tiene la SVEP en λ_0 y concluimos que:

$$0 = f(\lambda_0 - \mu) = -g((\lambda_0 - \mu) + \lambda_0) = -g(-\mu).$$

Ahora cuando $0 = -g(-\mu)$ también lo va a ser $g(u)$. Es decir, g se anula en U_0 y por lo tanto $\lambda_0 I - T$ tiene la SVEP en cero.

El recíproco se prueba de manera análoga. $\square$

Tenemos nuestro primer resultado donde se caracteriza la SVEP valiéndonos del core analítico.

Teorema 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *T tiene la SVEP en λ_0*

ii) $\ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = 0$

Teorema 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Si $p(T)$ o $q(T)$ son finitos, entonces $T|T^\infty(X)$ es sobreyectiva.*

Enunciemos uno de los teoremas más útiles e importantes en el contexto de nuestra investigación.

Teorema 1.3.4. *Supongamos que $T \in L(X)$ es semi-regular. Entonces,*

$\overline{H_o(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}$, *$K(T)$ es cerrado y $K(T) = T^\infty(X)$.*

Más aún, para operadores semi-regulares se tienen las siguientes equivalencias:

i) *T tiene la SVEP en cero, precisamente cuanto T es inyectiva o equivalentemente cuando es "sub-acotada".*

ii) T^* *tiene la SVEP en cero precisamente cuando* T *es sobreyectiva.*

Teorema 1.3.5. *Sea* $T \in L(X)$*,* X *un espacio de Banach y supongamos que verifica alguna de las siguientes condiciones:*

i) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$.

ii) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap K(T) = \{0\}$.

iii) $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$.

iv) $\ker T \cap T(X) = \{0\}$.

Entonces T *tiene la SVEP en* 0.

Teorema 1.3.6. *Sea* $T \in L(X)$*,* X *un espacio de Banach. Si* T *es quasi nilpotente entonces* $K(T) = \{o\}$.

Teorema 1.3.7. *Suponga que* $H_0(T) + K(T)$ *o* $\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X)$ *son densos con respecto a la norma de* X*. Entoces* T^* *tiene la SVEP en* 0.

La Métrica de la Brecha.

Antes de hablar de esta métrica precisaremos que un operador de Browder es aquel que es de Fredholm y además tiene ascent y descent finitos. La métrica de la brecha nos va a permitir establecer criterios necesarios y suficientes para determinar cuando un operador es de Browder.

Definición 1.3.2. *Sean* $M.N$ *dos subespacios cerrados de un espacio de Banach* X*, definimos:*

$$\delta(M,N) = \sup\{dist(u,N) : u \in M; \|u\| = 1\},$$

si $M \neq \{0\}$ *y* $\delta(M,N) = 0$ *en caso contrario.*

La brecha (Gap) entre M *y* N *es,*

$$\widehat{\delta}(M,N) = \text{máx}\{\delta(M,N), \delta(N,M)\}.$$

Teorema 1.3.8. *Sea* X *un espacio de Banach. La función bautizada como la brecha definida en el conjunto:*

$$C(X) := \{M \subseteq X/M \quad : \quad \textit{es lineal y cerrado}\},$$

es una métrica.

Definición 1.3.3. *Si X es un espacio de Banach diremos que $\{M_n\} \subset C(X)$ converge a $M \in C(X)$, si* $\widehat{\delta}(M_n, M) \to 0$*, cuando $n \to +\infty$.*

Propiedades importantes de la métrica de la brecha

Teorema 1.3.9. *Si X es un espacio de Banach:*

1. $\delta(M,N) = \delta(N^{\perp}, M^{\perp})$ *y en consecuencia* $\widehat{\delta}(M,N) = \widehat{\delta}(M^{\perp}, N^{\perp})$.
2. $0 \leq \delta(M,N) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \widehat{\delta}(M,N) \leq 1$.
3. $M_n \to M \Leftrightarrow M_n^{\perp} \to M^{\perp}$ *más aún* $\widehat{\delta}(M,N) < 1 \Rightarrow dim M = dim N$.
4. $\delta, (M,N) < 1 \Rightarrow dim M < dim N$.

Teorema 1.3.10. *Para cualquier operador acotado $T \in L(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema de Browder.*

ii) *La aplicación $\lambda \to \ker(\lambda I - T)$ no es continua en cada punto $\lambda \in \Delta(T)$ en la métrica de la brecha.*

iii) *La aplicación $\lambda \to \gamma(\lambda I - T)$ no es continua en cada punto $\lambda \in \Delta(T)$.*

iv) *La aplicación $\lambda \to (\lambda I - T)(X)$ no es continua en cada punto $\lambda \in \Delta(T)$ segun la métrica de la brecha.*

Teorema 1.3.11. *Para un operador acotado T en un espacio de Banach X y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *$\lambda_0 I - T$ es semi-regular.*

ii) *$\gamma(\lambda_0 I - T) > 0$ y la aplicación $\lambda \to \gamma(\lambda I - T)$ es contínua en λ_0 en la métrica de la brecha.*

iii) *$\gamma(\lambda_0 I - T) > 0$ y la aplicación $\lambda \to \ker(\lambda I - T)$ es contínua en λ_0 en la métrica de la brecha.*

iv) *$(\lambda_0 I - T)(X)$ es cerrado en una vecindad de λ_0 y la aplicación $\lambda \to (\lambda I - T)(X)$ contínua en λ_0 en la métrica de la brecha.*

1.4. Puntos Aislados del Espectro

Por último en esta sección procederemos a mostrar los resultados que nos van a permitir valernos de los puntos aislados del espectro de un operador y los polos de su función resolvente para determinar cuando el ascent y el descent de un operador son finitos.

Definición 1.4.1. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach complejo.el espectro de T se define como el conjunto:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \lambda I - T \quad \textit{no es biyectiva} \}.$$

También definimos el radio espectral de T como el número:

$$r(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 1.4.1. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. En tal caso:*

$$\sigma(T) \neq \emptyset \quad y \quad r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Más aún $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.4.2. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach.Entonces:*

$$\sigma(T) = \sigma(T^*).$$

Definición 1.4.2. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach.Definimos:*

i) El conjunto resolvente de T como:

$$\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T).$$

ii) La resolvente de (T) como la aplicación:

$$R(\lambda, T) : \lambda \in \rho(T) \to (\lambda I - T)^{-1}.$$

Definición 1.4.3. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach.Definimos:*

i) El espectro aproximado puntual de T como:

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \backslash \lambda I - T \quad \textit{no es subacotado}\}.$$

ii) El espectro sobreyectivo de T como :

$$\sigma_s(T) = \{\lambda \in \backslash\lambda I - T \quad \text{no es sobreyectivo}\}.$$

Teorema 1.4.3. *I $T \in L(X)$ entonces tanto $\sigma_s(T)$ como $\sigma_a(T)$ son subconjuntos compactos y no vacios de $\mathbb{C}$ y en consecuencia ambos contienen a la frontera de T , $\partial\sigma(T)$. Mas aún:*

$$\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*) \quad y \quad \sigma_s(T) = \sigma_a(T^*).$$

Definición 1.4.4. *Sea $f : \Delta \to X$, X un espacio de Banach complejo y Δ un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Diremos que f es localmente analítica si esta es diferenciable en cada punto de Δ, es decir si para cualquier punto $\lambda_0 \in \Delta$ existe $f'(\lambda_0) \in X$ tal que:*

$$\left\|\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f'(\lambda_0)\right\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad \lambda \to \lambda_0.$$

Si a todo lo anterior agregamos que Δ sea conexo diremos que f es analítica en este conjunto.

Teorema 1.4.4. *Para cualquier $T \in L(X)$ se tiene que su función resolvente $R(\lambda, T)$ es diferenciable en $\rho(T)$.*

Definición 1.4.5. *Para $T \in L(X)$.*

i) Denotaremos por $H(\sigma(T))$ al conjunto formado por todas las funciones de valores complejos que son localmente analíticas en algún abierto que contenga a $\sigma(T)$.

ii) Si $f \in H(\sigma(T))$ y $\Delta(f)$ representa al dominio de f, sea Γ un contorno cerrado en $\Delta(f)$ que envuelva a $\sigma(T)$. Esto es un sistema finito positivamente orientado $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ de curvas rectificables cerrado en $\Delta(f)\backslash\sigma(T)$ tal que $\sigma(T)$ está contenido en el interior de Γ y $\mathbb{C}\backslash\Delta(f)$ en el exterior de Γ. Bajo estas condiciones definimos en X al operador:

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

Definición 1.4.6. *Sea $T \in L(X)$,X un espacio de Banach.*

i) Diremos que un conjunto $\sigma \subseteq \mathbb{C}$ es espectral si σ y $\sigma(T)\backslash\sigma$ son cerrados.

ii) Dado un conjunto espectral σ consideremos $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ un cubrimiento abierto de $\sigma(T)$ tal que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ y $\sigma \subseteq \Delta_1$. Definamos la función h de manera tal que $h(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \Delta_1$ y $h(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \Delta_2$. En estas condiciones definimos:

$$P_\sigma = h(T).$$

Teorema 1.4.5. *Sea P_σ como en la definición anterior. Luego:* $P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$, $P_\sigma = P_\sigma^2$ *de donde se infiere que este operador es una proyección que en particular la llamaremos la proyección espectral asociada a* σ.

Teorema 1.4.6. *Sea $T \in L(X)$,X un espacio de Banach.Entonces: $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un polo de la función resolvente $R(\lambda, T)$ si y solo si $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Más aún: si $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T)$, entonces p es el orden del polo; todo polo $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un autovalor de T y si P_0 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$, entonces:*

$$P_0(X) = \ker(\lambda_0 I - T)^q,$$
$$\ker P_0 = (\lambda_0 I - T)^q(X).$$

Nota : En este caso $X = \ker(\lambda_0 I - T)^q \oplus (\lambda I - T)^q(X) = P_0(X) \oplus \ker P_0$.

Teorema 1.4.7. *Sea $T \in L(X)$,X un espacio de Banach.Si $\lambda_0 \in \sigma(T)$, entonces:*
$\lambda_0 I - T$ es un operador de Fredholm que tiene ascent y descent finitos si y solo si λ_0 es un punto aislado del espectro de T y su proyección espectral correspondiente es finito dimensional.

Teorema 1.4.8. *Sea $T \in L(X)$,X un espacio de Banach. Supongamos que $\lambda \in iso\sigma(T)$. Si P_0 es la proyección espectral asociada a $\{\lambda_0\}$ entonces:*

i) $P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T)$.

ii) $\ker(P_0) = K(\lambda_0 I - T)$.

En particular si λ_0 es un polo de la resolvente o equivalentemente

$$p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty,$$

entonces,

$$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T)^q.$$
$$\ker(P_0) = K(\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)^q(X).$$

Capítulo 2

La SVEP, Operadores de Browder, de Weyl y sus Espectros

En este capítulo se estudian los operadores de Browder, de Weyl y sus respectivos espectros. También se enuncian teoremas que nos dan condiciones suficientes y necesarias para que una aplicación tenga la SVEP en un determinado valor de $\lambda \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $\lambda I - T$ tengan su ascent o su descent finito, según sea el caso. A la SVEP se le dará una especial relevancia por su importancia en el desarrollo de este trabajo .Para más detalles ver la monografía de Laursen y Neumann,[20] o Aiena [1], y la versión local que se considera en este desarrollo que ha sido estudiada por varios autores , ver [7],[8],[9] y previamente por Finch [16]y Mbekhta [21].

2.1. Estudio de los Espectros de los Operadores de Browder y de Weyl

Comencemos por recordar algunas definiciones importantes. Denotaremos por $L(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Banach X, el cual constituye un álgebra con las operaciones usuales.

$$\alpha(T) := dim(\ker(T)).$$

$$\beta(T) := codim(T(X)).$$

$$\Phi_+(X) := \{T \in L(X) / \alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ es cerrado}\}$$
$$\Phi_-(X) := \{T \in L(X) / \beta(T) < \infty\}$$

$\Phi_+(X)$ denota la clase de los operadores semi-Fredholm superiores.

$\Phi_-(X)$ denota la clase de los operadores semi-Fredholm inferiores.

$\Phi(X) := \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$ la clase de operadores de Fredholm.

$\Phi_\pm(X) := \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ la clase de operadores semi Fredholm.

El índice de un operador semi Fredholm es el número:

$$ind(T) := \alpha(T) - \beta(T).$$

Si existe un número $p \in \mathbb{N}$ tal que $\ker T^p = \ker T^{p+1}$, al mínimo de estos números lo llamaremos el ascent de T y lo denotamos como $p(T)$. Análogamente, si existe $q \in \mathbb{N}$, tal que $T^q(X) = T^{q+1}(X)$ al mínimo de estos números lo llamaremos el descent de T, denotándolo como $q(T)$.

Procedamos a detallar la prueba nuestro primer teorema y que relaciona estos dos números.

Teorema 2.1.1. *[19] Si tanto $p(T)$ como $q(T)$ son finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

Prueba:

Hacemos $p = p(T) \quad ; \quad q = q(T)$.

Caso 1: Suponemos primero que $p \leq q$.

Luego,

$$T^q(X) \subseteq T^p(X).$$

Ahora si $q = 0$, entonces $T^0(X) = T^1(X)$, es decir, $X = T(X)$.

Como $X = T^q(X) \subseteq T^p(X) \subseteq X$, concluimos que $T^p(X) = X$.

Más aún, $T^{p+1}(X) = T^p(T(X)) = T^p(X)$, y por la definición de $q(T)$, obtenemos que $q \leq p$.

Supongamos ahora que $q > 0$.

Por la parte (ii) del lema 1.1.1 para $m = n = q$ existe Y_q subespacio del $\ker T^q$ tal que $X = Y_q \oplus T^q(X)$.

De lo anterior $X = \ker^q + T^q(X)$.

Dado cualquier elemento $y = T^p x \in T^p(X)$ tenemos que este puede ser escrito como

$$y = z + T^q(w).$$

donde $z \in \ker T^q \quad$ y $\quad T^q(w) \in T^q(X)$.

En consecuencia :

$$\begin{aligned} z &= y - T^q(w) \\ &= T^p(x) - T^q(w). \end{aligned}$$

como $T^q(X) \subseteq T^p(X)$ se obtiene que $z \in T^p(X)$, es decir:

$$z \in \ker T^q \cap T^p(X).$$

Por La parte (i) del Lema 1.1.1

$$\ker T^q \cap T^p(X) = \{0\}.$$

y pot lo tanto $z = 0$.

Al ser $y = z + T^q(w)$, entonces $y = T^q(w)$.

De donde $T^p(X) \subset T^q(X)$ y en consecuencia $T^p(X) = T^q(X)$.

Luego

$$T^q(X) \subseteq T^p(X) \subseteq T^{p+1}(X) \subseteq T^q(X).$$

Así

$$T^P(X) = T^{p+1}(X) = T^q(X),$$

y nuevamente, por definición,

$$p \geq q,$$

con lo cual obtenemos la igualdad deseada.

Caso 2: $q \leq p$.

Aquí

$$\ker T^q \subseteq \ker T^p.$$

Por la parte (ii) del Lema 1.1.1,

$$X = \ker T^q + T^p(X).$$

Tomamos $x \in \ker T^p$ así,

$$x = u + T^p v \quad \text{para algún} \quad u \in \ker T^q \text{y algún} \quad v \in X.$$

Además,

$$0 = T^p(x) = T^p(u) + T^{2p} v = 0 + T^{2p} v.$$

de lo anterior $v \in \ker T^{2p} = \ker T^p$, en consecuencia $T^p v = 0$ y $x = u \in \ker T^q$.

Nuevamente $\ker T^p = \ker T^q$ es decir $p \leq q$. $\square$.

Otra importante clase de operadores de la teoría de Fredholm son los operadores semi Browder superiores, definidos como:

$$B_+(X) := \{T \in \Phi_+(X);\, p(T) < \infty\},$$

los operadores semi-Browder inferiores

$$B_{-}(X) := \{T \in \Phi_{-}(X); q(T) < \infty\},$$

y los operadores de Browder,

$$B(X) := B_{-}(X) \cap B_{+}(X).$$

estos operadores aparecieron en 1988,ver [17] y estudiados por otros autores como por ejemplo en [24].

También definimos la clase de los operadores de Weyl como la de todos los operadores de Fredholm con índice igual a cero. A este conjunto lo denotaremos como $W(X)$.

Es fácil ver que todo operador de Browder es también un operador de Weyl.En efecto:

si $T \in B(X)$, entonces;

i) $\alpha(T) < \infty$ y $p(T) < \infty$.

ii) $\beta(T) < \infty$ y $q(T) < \infty$.

Por (i), (ii) y por el teorema 2.1.1 $p(T) = q(T) < \infty$, luego, por el teorema 1.1.11 esto nos asegura que $\alpha(T) = \beta(T)$ y en consecuencia, $ind(T) = 0$. Es decir T es un operador de weyl.

Ahora podemos fijar notaciones para algunas de estas categorías de conjuntos espectrales de operadores:

$$\sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \notin B_{+}(X)\}.$$

$$\sigma_{lb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \notin B_{-}(X)\}.$$

$$\sigma_{b}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \notin B(X)\}.$$

además definimos el espectro de Weyl como

$$\sigma_{w}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \text{ no es Weyl}\}.$$

También serán importantes en el desarrollo de este trabajo los siguientes conjuntos: $W_a(T) := \{T \in \Phi_{+}(X) / ind(T) \leq 0\}$ Conjunto de los operadores semi Weyl superiores.
$W_s(T) := \{T \in \Phi_{-}(X) / ind(T) \geq 0\}$ Conjunto de los operadores semi Weyl inferiores.
Sus espectros los denotaremos como $\sigma_{aw}(T)$ y $\sigma_{sw}(T)$ respectivamente.

Otro hecho importante que comprobaremos se enuncia en el siguiente teorema

Teorema 2.1.2. *para cualquier $T \in L(X), X$ un espacio de Banach $\sigma_w(T) = \sigma_w(T^*)$.*

Prueba Para esto probaremos que $W(X) = W(X^*)$.
Notemos primero que si T es un operador de Weyl, este tiene rango cerrado y junto con este, también lo tiene T^*.

Según el teorema 1.1.5, si M es un subespacio cerrado de un espacio de Banach, entonces M^* es isométricamente isomorfo a $X^*/M^\perp$.

Ahora $\ker T$ también es un subespacio cerrado de X luego:

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= dim \ker T = dim(kerT)^*,\\ &= dim(X^*/(\ker T)^\perp) = dim(X^*/T^*(X^*)),\\ &= codim(T^*(X^*)) = \beta(T^*).\end{aligned}$$

Por otra parte, valiéndonos del mismo teorema,

$$\begin{aligned}\beta(T) &= codim(T) = dim(X/T(X)) = dim(X/T(X))^*,\\ &= dimT(X)^\perp = dim(\ker T^*) = \alpha(T^*).\end{aligned}$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned}ind(T) &= \alpha(T) - \beta(T)\\ &= \beta(T^*) - \alpha(T^*)\\ &= -ind(T^*).\end{aligned}$$

Por todo lo anterior

$$T \in \Phi(X) \Leftrightarrow T^* \in \Phi(X^*).$$

$$ind(T) = 0 \Leftrightarrow ind(T^*) = 0.$$

por lo tanto

$$T \in W(X) \Leftrightarrow T^* \in W(X^*).$$

Ahora

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_w(T) &\Leftrightarrow \lambda I - T \notin W(X)\\ &\Leftrightarrow (\lambda I - T)^* \notin W(X)\\ &\Leftrightarrow \lambda I^* - T^* \notin W(X)\\ &\Leftrightarrow \lambda \in \sigma_w(T^*).\end{aligned}$$

$\square$

Escribiremos a continuación una secuencia de hechos que nos permitiran probar que

$$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*) \quad \text{y.}$$

$$\sigma_{lb}(T^*) = \sigma_{ub}(T).$$

Teorema 2.1.3. *Si $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces $p(T) = q(T^*)$ y $q(T) = p(T^*)$.*

Prueba:

Haremos $p = p(T) : \eta = p(T^*) : q = q(T) : \theta = q(T^*)$. Por el teorema 1.1.12 , si $T \in \Phi_{\pm}(X)$ entonces $T^n \in \Phi_{\pm}(X)$. Esto nos implica que $T^n(X)$ es cerrado para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por este mismo hecho $T^{n*}(X^*)$ es cerrado.

Por otra parte, $T \in \Phi_{+}(X)$ nos asegura que $T^* \in \Phi_{-}(X^*)$ y también $T^{*n} \in \Phi_{-}(X^*)$ de donde $T^{*n}(X^*)$ es cerrado y por lo tanto:

$$\ker T^{n*} = T^n(X)^{\perp} \quad \text{y}$$
$$\ker T^n = {}^{\perp}T^{n*}(X^*) = {}^{\perp}T^{*n}(X^*).$$

La última igualdad es cierta puesto que $T^{*n} = T^{n*}$.

Caso 1: $T \in \Phi_{+}(X)$.
Acá, $\alpha(T), \alpha(T^n)$ son finitos para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $T(X)$ es cerrado.

Caso 1.1: $p = p(T) < \infty$.
Así,

$$\ker T^p = \ker T^{p+1}$$
$$\alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) < \infty.$$

Pero $\beta(T^{*p}) = \beta(T^{p*}) = \alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) = \beta(T^{(p+1)*}) = \beta(T^{*(p+1)})$.
Es decir, $\beta(T^{*p}) = \beta(T^{*(p+1)}) < \infty$.
Además $T^{*(p+1)}(X^*) \subseteq T^{*p}(X^*)$.
En tal caso existe un subespacio vectorial Z de X^* tal que,

$$T^{*p}(X) = T^{*(p+1)}(X^*) \oplus Z.$$

y si $\widetilde{Y}$ es el complemento algebraico de $T^{*p}(X^*)$, entonces

$$\underbrace{X = T^{*(p+1)}(X^*) \oplus Z}_{T^{*p}(X)} \oplus \widetilde{Y}.$$

por lo tanto $Z \oplus \widetilde{Y}$ es un complemento algebraico para $T^{*(p+1)}(X^*)$.
Como $\widetilde{Y} \subset Z \oplus \widetilde{Y}$ y $dim\widetilde{Y} = dimZ \oplus \widetilde{Y} < \infty$, ocurre que

$$dim(\widetilde{Y}) = dim(Z) + dim(\widetilde{Y}),$$

es decir $dimZ = 0$ y, por lo tanto $T^{*p}(X^*) = T^{*(p+1)}(X^*)$ en tal caso

$$\theta = q(T^*) \leq p.$$

Si ahora suponemos que $\theta < p$, tenemos que

$$\begin{aligned} T^{*\theta}(X^*) &= T^{*(\theta+1)}(X^*), \\ T^{\theta*}(X^*) &= T^{(\theta+1)*}(X^*), \\ {}^{\perp}T^{\theta*}(X^*) &= {}^{\perp}T^{(\theta+1)*}(X^*), \\ \ker T^{\theta} &= \ker T^{\theta+1}. \end{aligned}$$

de donde $p \leq \theta$, cosa que contradice nuestra suposición.

Caso 1.2 $p = +\infty$.
En tal caso $\ker T^n$ está incluido propiamente en $\ker T^{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Es decir que $\alpha(T^n) < \alpha(T^{n+1})$ pero esto también nos asegura que

$$\beta(T^{*p}) < \beta(T^{*(p+1)}),$$

por lo cual

$$T^{*(p+1)}(X^*),$$

estará incluido siempre propiamente en

$$T^{*p}(X^*),$$

y por lo tanto $\theta = p = +\infty$.

Caso 2: $T \in \Phi_-(X)$. En este caso $\beta(T), \beta(T^n)$ son finitos y $T(X)$ es cerrado.

Caso 2.1: $q = q(T) < \infty$.
Ahora

$$\begin{aligned} T^q(X) &= T^{q+1}(X) \\ \beta(T^q) &= \beta(T^{(q+1)}) \\ \alpha(T^{*q}) &= \alpha(T^{*(q+1)}) < \infty. \end{aligned}$$

Como $\ker T^{*q} \subseteq \ker T^{*(q+1)}$ solo puede ocurrir que:

$$\ker T^{*q} = \ker T^{*(q+1)} \quad \text{y} \quad \eta = p(T^*) \leq q.$$

Otra vez suponemos que $\eta < q$.

Así

$$\ker T^{*\eta} = \ker T^{*(\eta+1)},$$
$$T^{\eta}(X)^{\perp} = T^{\eta+1}(X)^{\perp}.$$

Pero $T^{\eta}(X)$ y $T^{\eta+1}(X)$ son cerrados en X y por lo tanto son isométricamente isomorfos a $({}^{X}/_{T^{\eta}(X)})^{*}$ y $({}^{X}/_{T^{\eta+1}(X)})^{*}$ respectivamente de donde,

$$\beta(T^{\eta+1}) = \beta(T^{\eta}) < \infty.$$

Es decir $T^{\eta+1}(X) = T^{\eta}(X)$ y en consecuencia $q \leq \eta$.

Caso 2.2: $q = +\infty$.

Se demuestra la forma análoga al caso 1.2.

□

Corolario 2.1.1. *Sea cual sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach ,$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^{*})$.*

Prueba Primero veamos que

$T \in B_{+}(X)$ si y solo si $T^{*} \in B_{-}(X^{*})$

En efecto,

$$T \in B_{+}(X) \Leftrightarrow T \in \Phi_{+}(X) \quad y \quad p(T) < \infty.$$

Lo anterior implica que $T^{*} \in \Phi_{-}(X^{*}) \quad y \quad q(T^{*}) < \infty$ y esto es equivalente a decir que $T^{*} \in B_{-}(X)$. La implicación contraria se prueba de manera similar.

Y para culminar,

$\lambda \in \sigma_{lb}(T)$ si y solo si $\lambda I - T \notin B_{-}(X)$ si y solo si $\lambda I^{*} - T^{*} \notin B_{+}(X^{*})$ si y solo si $\lambda \in \sigma_{ub}(T^{*})$.

La ecuación $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^{*})$ se comprueba de forma análoga y comprobando que $T \in B_{-}(X)$ si y solo si $T^{*} \in B_{+}(X^{*})$ □

2.2. Caracterizaciones de la SVEP

Para cumplir con los objetivos de esta sección aparte del Core Analítico $K(T)$ y la parte quasi nilpotentente de un operador $H_0(T)$ ya definidos en los preliminares necesitamos las siguientes propiedades de este último conjunto.

Antes recordemos que para un operador $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, la parte quasi-nilpotente de T, denotada por $H_0(T)$, está definida como:

$$H_0(T) := \{x \in X / \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

Un operador $T \in L(X)$ se dice quasi-nilpotente si $\sigma(T) = 0$.

Teorema 2.2.1. *Sea X un Espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces:*

i) *$H_0(T)$ es un subespacio T-invariante de X.*

ii) *$Tx \in H_0(T)$ si y solo si $x \in H_0(T)$.*

iii) *$Ker(T^n) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq H_0(T) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

iv) *$Ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) = \{0\} \quad \forall \lambda \neq 0$.*

v) *T es quasi-nilpotente si y solo si $H_0(T) = X$.*

Prueba

i) Sea $y \in T(H_0(T))$ y sea x en $H_0(T)$ tal que $Tx = y$. Por la definición de dicho conjunto $\lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$ y $T^{n+1}x = T^n(Tx) = T^n y$. También debemos notar que:

$$\|T^{n+1}x\| \leq \|T\|\|T^n x\|$$
$$\|T^{n+1}x\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|T\|\|T^n x\|)^{\frac{1}{n}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n y\|^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty} (\|T\|\|T^n x\|)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

es decir que $y \in H_0(T)$.

ii) Es obvio que si $x \in H_0(T)$, entonces $Tx \in H_0(T)$ puesto que $H_0(T)$ es T invariante.

Tomemos x en X tal que $Tx \in H_0(T)$. En tal caso,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^{n+1}x\|^{1/n} = 0$$

Pero $\|T^{n+1}x\|^{\frac{1}{n+1}} = (\|T^{n+1}x\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}$. Además $\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{n}{n+1}} = a$ para cualquier a en $\mathbb{C}$.

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^{n+1}x\|^{1/n+1} = \lim_{n\to+\infty} (\|T^{n+1}x\|^{1/n})^{\frac{n}{n+1}} = 0.$$

Esto, finalmente prueba que $x \in H_0(T)$.

iii) La inclusión $KerT^n \subseteq \mathcal{N}^\infty(T)$ se obtiene por definición.

Ahora, si $x \in \mathcal{N}^\infty(T)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m x = 0$, esto implica que $T^k x = 0$ para cualquier $k \geq m$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$. Es decir, $x \in H_0(T)$.

iv) Sean $x \in \ker(\lambda I - T) \cap H_0(T)$ y $\lambda \neq 0$.

En estas condiciones sabemos que,

$$T^n x = \lambda^n x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0.$$

Combinando estos hechos

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \|\lambda^n x\|^{1/n} = |\lambda| \lim_{n\to+\infty} \|x\|^{1/n}.$$

Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x\|^{1/n} = 1$ y $\lambda = 0$ lo cual es una contradicción.

Ergo solo puede ocurrir que $x = 0$.

v) Por el teorema 1.4.1 aplicado a $L(X)$ y al T en cuestión, tenemos que

$$\begin{aligned} r(T) :&= \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}. \end{aligned}$$

Como T es quasi-nilpotente entonces $\sigma(T) = \{0\}$ de donde,

$$r(T) = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sea $x \in X - \{0\}$ en tal caso tenemos que,

$$\begin{gathered} \|T^n(x)\| \leq \|T^n\| \ \|x\| \\ \|T^n(x)\|^{1/n} \leq \|T^n\|^{1/n} \|x\|^{1/n} \\ \lim_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty} (\|T^n\| \ \|x\|)^{1/n}. \end{gathered}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x\|^{1/n} = 1$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{1/n} = 0.$$

Recíprocamente, si $H_0(T) = X$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{1/n} = 0$ sea cual sea el x en X.

Consideremos ahora la serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n(x)\|}{|\lambda|^{n+1}},$$

donde $\lambda \neq 0$. Apliquemos ahora el criterio de la raíz n-èsima

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\|T^n(x)\|}{|\lambda|^{n+1}}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\|T^n(x)\|^{1/n}}{(|\lambda|\,|\lambda|^n)^{1/n}} \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{1/n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda|^{1/n}} \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}$$

Luego S converge para cualquier $x \in X \quad$ y $\quad \lambda \neq 0$.

Definimos $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$.

Así,

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)(y) &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} - T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1} x}{\lambda^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T^n x}{\lambda^n} - \frac{T^{n+1} x}{\lambda^{n+1}}\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T^{n+1} x}{\lambda^{n+1}} - \frac{T^n x}{\lambda^n}\right).
\end{aligned}$$

Esta última serie es una serie telescópica. Luego:

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)(y) &= -\left(\lim_{n\to+\infty}^{\infty} \left(\frac{T^n x}{\lambda^n} - \frac{T^0 x}{\lambda^0}\right)\right), \\
&= \lim_{n\to+\infty}^{\infty} \left(x - \frac{T^n x}{\lambda^n}\right).
\end{aligned}$$

Al ser $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n x}{\lambda^{n+1}} = \dfrac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n x}{\lambda^n}$.

Tenemos que estas series son convergentes y $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T^n x}{\lambda^n} = 0$. Así $(\lambda I - T)(y) = x$.

Esto nos prueba la sobreyectividad de $\lambda I - T$. Para concluir tenemos que para $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}\{0\} &= ker(\lambda I - T) \cap H_0(T)\\ &= ker(\lambda I - T) \cap X\\ &= ker(\lambda I - T).\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que $\lambda I - T$ es inyectiva para cualquier $\lambda \neq 0$, es decir que $\lambda \neq 0$, implica que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Nuevamente, por el teorema ya mencionado en este inciso tenemos que $\sigma(T) \neq \emptyset$ y el único elemento que puede estar en este conjunto es el cero. □

Vamos ahora a enunciar y probar el primer resultado que servirá de base para conseguir caracterizaciones de la SVEP.

Teorema 2.2.2. *Para T en $L(X)$, X un espacio de Banach se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Si $H_0(\lambda_0 I - T)$ cerrado, entonces T tiene la SVEP en λ_0.

ii) Si $\sigma_a(T)$ no se acumula en λ_0 , entonces T tiene la SVEP en λ_0.

iii) Si $\sigma_s(T)$ no se acumula en λ_0 , entonces T^* tiene la SVEP en λ_0.

iv) Si $p(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces T tiene la SVEP en λ_0.

v) Si $q(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces T^* tiene la SVEP en λ_0.

Prueba:

i) Primero probaremos que si $H_0(\lambda_0 I - T)$ es cerrado entonces

$$H_0(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}.$$

Procedamos:

Sin pérdida de generalidad suponemos que $\lambda_0 = 0$ y Hacemos $\widehat{T} = T\big|H_0(T)$.

En tal caso $\widehat{T} : H_0(T) \to X$ es quasi-nilpotente.

Por el teorema 1.3.6 si $\widehat{T}$ es quasi-nilpotente entonces $K(\widehat{T}) = \{0\}$.

Se necesita ver que,

$$H_0(T) \cap K(T) = K(\widehat{T}) = \{0\}.$$

Ahora, si $x \in K(\widehat{T})$ entonces $x \in H_0(T)$, existen $\{x_n\} \subset H_0(T)$ y $\delta > 0$ tales que

$x_0 = x, \quad Tx_{n+1} = x_n, n \geq 0, \quad \|x_n\| \leq \delta^n \|x\|.$

Pero $H_0(T)$ está contenido en X y así $\{x_n\} \subset X$ es también una sucesión que satisface las condiciones para que $x \in K(T)$.

Luego, $x \in H_0(T) \cap K(T)$.

Por otra parte, al tomar $x \in K(T) \cap H_0(T)$ y utilizar lo probado en el teorema 2.2.1 en su inciso ii) que nos asegura que $Tu \in H_0$ si y solo si $u \in H_0(T)$, al aplicar esta propiedad a los elementos de la sucesión que nos garantizan que $x \in K(T)$, entonces la sucesión en cuestión, digamos $\{x_n\}$ también va a estar en $H_0(T)$.

Más explícitamente,

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & = & x & \in & H_0(T) \\ Tx_1 & = & x_0 & \in & H_0(T) \\ Tx_2 & = & x_1 & \in & H_0(T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Tx_{n+1} & = & x_n & \in & H_0(T), \end{array}$$

y esto es cierto para cada $n \geq 0$. En consecuencia, $x \in K(\widehat{T}) = \{0\}$. Ahora por el teorema 1.3.5 podemos concluir que T tiene la SVEP en 0.

ii) Supongamos que λ_0 no es un punto de acumulación de $\sigma_a(T)$,

Bajo estas condiciones existe una vecindad U de λ_0 donde ningún λ en U esta en el espectro aproximado de T.

Ahora, si $\lambda \in U$, entonces $\lambda I - T$ tiene que ser inyectiva.

Sea $f : V \to X$ una función analítica definida en otra vecindad arbitraria Vde λ_0; en la cual la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ se satisface para cualquier $\lambda \in V$.

Supongamos sin perdida de generalidad que $V \subseteq U$.

En este caso $f(\lambda) \in \ker(\lambda I - T) = 0$ y por ser $(\lambda I - T)$ inyectiva $f(\lambda) = 0$ con $\lambda \neq \lambda_0$.

Como f es analítica en V entonces f es continua en λ_0 de donde,

$$f(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda I - T)f(\lambda) = 0.$$

Todo esto nos asegura que $f \equiv 0$ en V y f tiene la SVEP en λ_0.

iii) Tomemos ahora λ_0 que no sea un punto de acumulación de $\sigma_s(T)$, Para cumplir nuestro propósito utilizaremos el teorema 1.1.6 que nos asegura que T es sobreyectivo si y solos si T^* es subacotado . En tal caso al no acumularse λ_0 en $\sigma_s(T)$, λ_0 tampoco se acumula en $\sigma_a(T^*)$ y podemos utilizar la parte ii) ya demostrada para concluir que T^* tiene la SVEP en λ_0.

iv) asumiendo que $p(\lambda_0 I - T) < \infty$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda = 0$.

Ahora si $p(T) = p < \infty$ se tiene que $kerT^p = \mathcal{N}^\infty(X)$. También tenemos por el lema 1.1.1 que si $p < \infty$ entonces para cualquier $m \geq p$ y en particular para nuestro p ;

$$T^m(X) \cap \ker T^p = \{0\}.$$

Pero $T^m(X) \subseteq T^\infty(X)$ de donde $T^\infty(X) \cap \mathcal{N}^\infty(T) = \{0\}$.

Nuevamente por el teorema 1.3.5, concluimos que T tiene la SVEP en cero.

v) Para $q(\lambda_0 I - T) < \infty$, nuevamente suponemos que $\lambda_0 = 0$.

Sea $q = q(T)$. Luego,

$$T^{2q}(X) = T^q(X).$$

Sea $x \in X$.En tal caso $T^q(x) \in T^q(X) = T^{2q}(X)$.

De lo anterior existe $w \in X$ tal que,

$$T^q(x) = T^{2q}(w) = T^q(T^q(w)).$$

Si hacemos $y = T^q(w) \in T^q(X)$ obtenemos la ecuación,

$$T^q(x) = T^q(y) \quad \text{con} \quad y \in T^q(X),$$

esto para cada $x \in X$, en consecuencia $T^q(x-y) = 0$ y así $x - y \in \ker T^q$ como $x = (x-y) + y$ concluimos que

$$X = \ker T^q + T^q(X).$$

Pero $\ker T^p \subseteq \mathcal{N}^\infty(T)$ y $T^q(X) = T^\infty(X)$ y por lo tanto,

$$KerT^p + T^q(X) \subseteq \mathcal{N}^\infty(X) + T^\infty(X) = X.$$

Como obviamente X es denso en X con respecto a su norma por el teorema 1.3.7, T^* tiene la SVEP en cero. □

También para nuestros fines necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 2.2.1. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada de tipo Kato (M,N). Entonces: Si T tiene la SVEP en 0, $T|M$ también tiene la SVEP en 0.*

Prueba: Primeramente recordemos que M es T invariante. Sea U_0 una vecindad de 0. Cosideremos $g : U_0 \to M$ analítica tal que $(\mu I - T\big|M)g(\mu) = 0$. Para cualquier μ en U_0.

Como M es un espacio cerrado de X, M también es de Banach.

Además $(T\big|M)(x) = T(x) = \quad \forall x \in M$.

Luego, para $f : U_0 \to X$ dada por $f(x) = g(x) \quad \forall u \in U_o$, tenemos que f es analítica y $(uI - T)f(u) = 0 \quad \forall u \in U_0$,

Como T tiene la SVEP en cero, $f \equiv 0$, en consecuencia $g \equiv 0$ de donde $T|M$ también tiene la SVEP en 0. $\square$

Lema 2.2.2. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada de tipo Kato (M,N). entonces:*

$$H_0(T) = H_0(T\big|M) \oplus H_0(T\big|N).$$

Prueba: Sea $x \in H_0(T\big|M) \oplus H_0(T\big|N)$. Así $x = v + w$ con $v \in H_0(T\big|M)$ y $w \in H_0(T\big|N)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} &= \lim_{n\to+\infty} \|T^n v + T^n w\|^{1/n} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} (\|T^n v\|) + \|T^n w\|)^{1/n} \qquad \leq \lim_{n\to+\infty} (\|T^n v\|^{1/n} + \lim_{n\to+\infty} \|T^n w\|^{1/n}. \end{aligned}$$

Como $v \in M, w \in N$. Al ser M y N subespacios cerrados T invariantes, $T^n \nu \in M$, $T^n w \in N$ para $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$(T\big|M)^n \nu = T^n \nu, (T\big|N)^n w = T^n w.$$

En tal caso,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n \nu\|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \|(T\big|M)^n \nu\|^{1/n} = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n w\|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \|(T\big|N)^n w\|^{1/n} = 0.$$

Por ende, $\lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$ y $x \in H_0(T)$.

Tomemos ahora $x \in H_0(T)$.

Como $X = M \oplus N$

$x = v + w$ con $v \in M, w \in N$.

Por otra parte, $T\big|N$ es quasi-nilpotente, $H_0(T\big|N) = N$ y en tal caso $w \in H_0(T\big|N)$.

Como $v = x - w$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \|T^n v\|^{1/n} &= \lim_{n\to+\infty} \|T^n x - T^n w\|^{1/n} \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} (\|T^n x\| + \|T^n w\|)^{1/n} \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{1/n} + \lim_{n\to+\infty} \|(T\big|N)^n w\|^{1/n}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir que $\nu \in H_0(T\big|M)$ y por lo tanto $x \in H_0(T\big|M) + H_0(T\big|N)$. Además, por definición de los espacios involucrados es obvio que $H_0(T\big|M) \cap H_0(T\big|N) = \{0\}$. □

Lema 2.2.3. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada de tipo Kato (M,N) .Si T tiene la SVEP en 0 , entonces $H_0(T) = N$.*

Prueba Por el lema 2,2,1 tenemos que $T|M$ tiene la SVEP en 0. Por nuestra hipótesis este operador también es semi regular en M. Ahora utilizando el teorema 1,3,4 concluimos que también va a ser inyectivo en este conjunto. Pero $T\big|M$ inyectiva y $T\big|M$ semi-regular, nos asegura por el teorema 1,3,4 que,

$$\overline{H_0(T\big|M)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T\big|M)}.$$

Por la inyectividad de $T\big|M$, $\ker(T\big|M)^n = \{0\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y en tal caso,

$$\overline{H_0(T\big|M)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T\big|M)} = \{0\}.$$

Por el lema 2,2,2 $H_0(T) = H_0(T\big|M) \oplus H_0(T\big|N)$.

Al ser $\overline{H_0(T\big|M)}$ la unión de $H_0(T\big|M)$ con el conjunto de sus puntos de acumulación, podemos concluir que $H_0(T\big|M) \subseteq \{0\}$ y por lo tanto $H_0(T\big|M) = \{0\}$ de donde:
$H_0(T) = \{0\} + H_0(T\big|N) = N$. □

Ahora si estamos en posición de escribir el primer teorema que va a caracterizar la SVEP.

Teorema 2.2.3. *Si $T \in L(X)$ es de tipo Kato en λ_0, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *T tiene la SVEP en λ_0;*

ii) *$p(\lambda_0 I - T) < \infty$;*

iii) λ_0 *no es un punto de acumulación de* $\sigma_a(T)$*;*

iv) $H_0(\lambda_0 I - T)$ *es cerrado.*

Si $\lambda_0 I - T \in \Phi_{\pm}(X)$ *entonces los enunciados desde i) hasta iv) son equivalentes a:*

v) $H_0(\lambda_0 I - T)$ *es finito dimensional.*

Si $\lambda_0 I - T$ *es semi-regular entonces los enunciados desde i) hasta iv) son equivalentes a:*

vi) $\lambda_0 I - T$ *es inyectiva.*

Prueba:

Ya hemos probado en el teorema 2.2.2 que $ii) \Rightarrow i), iii) \Rightarrow i), iv) \Rightarrow i)$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\lambda_0 = 0$.
$i) \Rightarrow ii)$ Sea (M,N) una G.K.D para T. Por el lema 2.2.3 si T tiene la SVEP en cero, entonces:

$$H_0(T) = N.$$

También se probó anteriormente que $\ker(T^n) \subseteq \mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq H_0(T) = N$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
Al ser T tipo kato existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(T|N)^k \equiv 0$, es decir que al tomar $x \in N$, $T^k x = 0$ y $x \in \ker T^k$.
Por lo tanto $H_0(T) = N \subset \ker T^k \subset \mathcal{N}^{\infty}(T)$.

En resumen

$$N \subset \ker T^k \subset \mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq N.$$

Así

$$\ker T^k = \mathcal{N}^{\infty}(T).$$

Y esto nos asegura que $p(T) < \infty$.
$i) \Rightarrow iv)$. Por el lema 2.2.3 $H_0(T) = N$ y al ser N cerrado obtenemos nuestro resultado de manera inmediata.
$i) \Rightarrow iii)$ Primero suponemos que T tiene la SVEP en cero.

Sea (M,N) una GKD para T.

Por el teorema 1,2,9 sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda I - T$ es semi regular para todo $0 < |\lambda| < \varepsilon$. Si hacemos $D_{\varepsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| < \varepsilon\}$, entonces para estos valores de λ: $\lambda \in (D_{\varepsilon} \backslash \{0\}) \cap \sigma_a(T)$ si y solamente si λ es un autovalor de T.

Comprobémoslo:

$\lambda \in (D_{\varepsilon} \backslash \{0\}) \cap \sigma_a(T)$ si y solo si $0 < |\lambda| < \varepsilon$ y $\lambda I - T$ no es inyectiva o $(\lambda I - T)(X)$ no es cerrado.

Como $\lambda I - T$ es semi regular $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado, por lo cual $\lambda I - T$ no debe ser inyectiva. En tal caso existe $x \neq 0$ tal que $(\lambda I - T)x = 0$ y por lo tanto $Tx = \lambda x$. Es decir λ es un autovalor de T.

Recíprocamente si λ es un autovalor de T existe $x \in X \backslash \{0\}$ tal que $(\lambda I - T)(x) = 0$ lo que nos garantiza que $\lambda I - T$ no es inyectiva. Así $\lambda \in \sigma_a(T)$.

También sabemos que si $x \in \ker(\lambda I - T), (\lambda \neq 0)$ entonces $T^n(x) = \lambda^n x$ i.e $T^n \dfrac{x}{\lambda^n} = x$ lo que quiere decir que $x \in T^n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Asi $\ker(\lambda I - T) \subset T^\infty(X)$.

En tal caso, al considerar $T\big|T^\infty(X)$ y para este $\lambda \neq 0$ dado al existir x en $\ker(\lambda I - T), x \neq 0$, podemos asegurar que $x \in T^\infty(X)$. Ahora al trabajar en $T\big|T^\infty(X)$ podemos también afirmar que este λ está en el espectro de este operador.

Ahora procediendo por reducción a lo absurdo supongamos que cero es un punto de acumulación de $\sigma_a(T)$. Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de autovalores distintos de cero, convergiendo a cero. Luego, esta sucesión de autovalores está en $\sigma(T\big|T^\infty(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Al ser $\sigma(T\big|T^\infty(X))$ un conjunto cerrado, $0 \in \sigma(T\big|T^\infty(X))$.

Pero T tiene la SVEP en cero y por los teoremas 1,3,4 y 1,3,2 $T\big|M$ es inyectiva y;

$$\begin{aligned}\{0\} &= \ker(T\big|M) \\ &= K(T) \cap \ker(T) \\ &= T^\infty(X) \cap \ker(T) \\ &= \ker(T\big|T^\infty(X)).\end{aligned}$$

Así $T\big|T^\infty(X)$ es inyectiva. Ya también hemos probado que al tener T la SVEP en 0, $p(T) < \infty$ y por el teorema 1.3.3 se gana que $T\big|T^\infty(X)$ también sea sobreyectiva. Es decir $T\big|T^\infty(X)$ sería biyectiva y $0 \notin \sigma(T\big|T^\infty(X))$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que o es un punto de acumulación de $\sigma_a(T)$.

Ahora si $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$, entonces $\lambda_0 I - T$ es esencialmente semi regular.

En tal caso N es finito dimensional y nuevamente por el lema 2.2.3 $N = H_0(\lambda_0 I - T)$.

Por otra parte usando la misma igualdad tenemos que $H_0(\lambda_0 I - T)$ es finito dimensional y en consecuencia cerrado. Esta es la condición iv) que a su vez es equivalente a todas las anteriores.

Supongamos que $\lambda_0 I - T$ es semi regular. En este caso utilizaremos el Teorema 1.3.4 que nos asegura que $\lambda_0 I - T$ es inyectiva si y solamente si $\lambda_0 I - T$ tiene la SVEP en λ_0.

Es decir que ser $\lambda_0 I - T$ inyectiva es equivalente a la condición i), con lo que concluye nuestra prueba.

□

Como de costumbre existe una versión dual de este resultado. Para enunciarla y demostrarla necesitaremos del siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una GKD (M,N). Entonces cuando T^* tiene la SVEP en cero , $K(T) = M$.*

Prueba:

Afirmación:

T^* tiene la SVEP en 0 si y solo si $T\big|M$ es sobreyectiva.

En efecto

Si (M,N) es una GKD para T , por el teorema 1.2.4 , $(N^{\perp},M^{\perp})$ es una GKD para T^*.
Como $T^*|N^{\perp}$ es semi regular por el teorema 1.3.4 $T^*|N^{\perp}$ tiene la SVEP en 0 si y solo si $(T^*)|N^{\perp}$ es inyectivo.

Por el teorema 1.2.5 $T|M$ es sobreyectivo.

Usando el teorema 1.2.7 tenemos que $K(T|M) = K(T)$. Además M es cerrado, invariante con respecto a T y al ser $T|M$ sobreyectivo $M = (T|M)(M) = T(M)$, ahora por el teorema 1.2.2, $M \subseteq K(T)$.

Obviamente $K(T) = K(T|M) \subseteq M$.

Así $M = K(T)$. □

Teorema 2.2.4. *Si $T \in L(X)$ es de tipo Kato en λ_0 entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T^* tiene la SVEP en λ_0.*

ii) *$q(\lambda I - T) < \infty$.*

iii) *λ_0 no es un punto de acumulación de $\sigma_s(T)$.*

Si $\lambda_0 I - T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces las condiciones desde i) hasta iii) son equivalentes a;

iv) $K(\lambda_0 I - T)$ es finito codimensional.

Si $\lambda_0 I - T$ es semi regular entonces las condiciones desde i) hasta iii) son equivalentes a:

v) $\lambda_0 I - T$ es sobreyectiva.

Prueba
Ya hemos probado en el teorema 2.2.2 que $ii) \Rightarrow i), iii) \Rightarrow i)$, Nuevamente sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_0 = 0$.

$i) \Rightarrow ii)$. Por hipótesis T es tipo Kato. Por el teorema 1.2.7 $K(T) = T^{\infty}(X)$.

Como T^* tiene la SVEP en cero, al ser T tipo Kato X admite una descomposición (GKD) digamos (M,N) y por el lema 2.2.4 tenemos que $K(T) = M$. Ahora;

$M = T^{\infty}(X) \subseteq T^n(X)$ para cualquier n. Pero al ser T tipo Kato podemos asegurar que $(T|N)^k \equiv 0$ para algún k. Luego para cualquier $n \geq k$ tenemos que,

$$\begin{aligned} T^n(X) &\subseteq T^k(X) \\ &= T^k(M) \oplus T^k(N) \\ &= T^k(M) \\ &\subseteq T^k(X). \end{aligned}$$

Lo anterior obviamente nos garantiza que $q(T) < \infty$.

$i) \Rightarrow iii)$ Acá nos valemos de la igualdad $\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*)$ y del teorema 2.2.3 para concluir que T^* tiene la SVEP en 0.

Supongamos ahora que $T \in \Phi_{\pm}(X)$, en tal caso $T^* \in \Phi_{\pm}(X)$ y ambos operadores son esencialmente semi-regulares.

Al suponer que i), ii) o iii) son ciertas en particular tenemos que T^* tiene la SVEP en cero. Bajo estas circunstancias por el lema 2.2.4, $K(T) = M$. También debemos recordar que $X = M \oplus N$ donde N es finito dimensional por ser T esencialmente semi regular. En fin de lo anterior $X = K(T) \oplus N$ lo que es suficiente para afirmar que $K(T)$ es finito codimensional. Con lo que queda probado que iv) es consecuencia de las condiciones anteriores.

Recíprocamente suponemos que $K(T)$ es finito codimensional. Otra vez al estar $T \in \Phi_{\pm}(X)$ por el teorema 1.2.3 $K(T) = T^{\infty}(X)$, pero $T^{\infty}(X) \subseteq T^k(X)$ sea cual sea este $k \in \mathbb{N}$ de donde $0 \leq \beta(T^k) \leq \beta(T^{\infty}) < \infty$ y esto nos asegura que $q(T) < \infty$ que es la condición ii) de nuestro teorema. Por último, si asumimos que T es semi regular, podemos usar el teorema 1.3.4 y obtenemos la equivalencia.

T^* tiene la SVEP en 0 si y solamente T es sobreyectiva. □

Continuando con nuestra lista de resultados también probaremos que:

Teorema 2.2.5. *Sea $T \in L(X)$, entonces;*

i) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{aw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$.

ii) $\sigma_{\ell b}(T) = \sigma_{sw}(T) \cup acc\sigma_s(T)$.

iii) $\sigma_b(T) = \sigma_w(T) \cup acc\sigma(T)$.

Prueba:

Comencemos por (i).

Probaremos que si $\lambda \notin \sigma_{uw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$.

Procedamos:

Si $\lambda \notin \sigma_{aw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$ entonces $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$ y $\lambda \notin acc\sigma_a(T)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma_{aw}(T) &\Rightarrow \lambda I - T \in W_a(T). \\ &\Rightarrow \lambda I - T \in \Phi_+(T). \\ \lambda \notin acc\sigma_a(T) &\Rightarrow \lambda \quad \text{no es punto de clausura de} \quad \sigma_a(T). \\ &\Rightarrow T \quad \text{tiene la SVEP en} \quad \lambda. \end{aligned}$$

Por el teorema 1,2,8 todo operador semi Fredholm es esencialmente semi regular y por el teorema 1,2,6, todo operador esencialmente semi regular es de tipo kato.

Ahora, si T tiene la SVEP en λ, obviamente $\lambda I - T$ tiene la SVEP en cero. En tal caso $\lambda I - T$ es tipo kato y tiene la SVEP en cero. Luego, por el Teorema 2.2.3 este último hecho es equivalente a que $p(\lambda I - T) < \infty$. Esto nos asegura entonces que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$.

Así obtenemos que $\sigma_{ub}(T) \subset acc\sigma(T) \cup \sigma_{uw}(T)$.

Ahora consideremos $\lambda \in \sigma_{aw}(T) \cup acc\sigma(T)$.

Notemos que :

$$\begin{aligned} T \in B_+(X) &\Rightarrow p(T) < \infty \\ &\Rightarrow \alpha(T) \leq \beta(T) \\ &\Rightarrow Ind(T) \leq 0 \\ &\Rightarrow T \in W_a(T). \end{aligned}$$

Basándonos en esto

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_{aw}(T) &\Rightarrow (\lambda I - T) \notin W_a(X)\\ &\Rightarrow (\lambda I - T) \notin B_+(X)\\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma_{ub}(T).\end{aligned}$$

$\sigma_{aw}(T) \subset \sigma_{ub}(T)$.

Si el caso es que $\lambda \in acc\sigma_a(T)$ tendríamos dos posibilidades. Una es que $\lambda \in \sigma_{aw}(T)$ y acá ya obtendríamos nuestro resultado.

Estudiemos que pasa cuando $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$. Acá $\lambda I - T \in W_+(T)$ y en consecuencia $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$ y es de tipo Kato.

Pero al estar λ en $acc\sigma_a(T)$, este debe ser un punto de acumulación de $\sigma_a(T)$ y esto de acuerdo al Teorema 2.2.3 nos asegura que $p(\lambda I - T) = +\infty$ lo cual es óbice para que $\lambda \in \sigma_{ub}(T)$.

(ii) $\lambda \notin \sigma_{sw}(T) \cup acc\sigma_s(T)$. Así $(\lambda I - T) \in W_s(X)$ y λ no es un punto de acumulación de $\sigma_s(T)$.

Ahora

$\lambda I - T \in \Phi_-(X)$ y por el teorema 2.2.4 $\lambda I^* - T^*$ tiene la SVEP en cero.

Pero si $\lambda I - T \in \Phi_-(X), \lambda I^* - T^* \in \Phi_+(X)$. Otra vez estamos en condiciones de afirmar que $p(\lambda I^* - T^*) < \infty$ y en tal caso

$$\lambda \notin \sigma_{ub}(T^*) = \sigma_{lb}(T).$$

Es decir, $\sigma_{lb}(T) \subset \sigma_{sw}(T) \cup acc\sigma_s(T)$.

Recíprocamente supongamos que

$$\lambda \in \sigma_{sw}(T) \cup acc\sigma_s(T).$$

Asumiremos primeramente que $\lambda \in \sigma_{sw}(T)$.

Así $\lambda I - T \notin W_a(X)$ y como $B_-(X) \subset W_a(X)$ tenemos que $\lambda I - T \notin B_-(X)$.

Por lo tanto $\lambda \in \sigma_{lb}(T)$.

Ahora consideremos el caso en que $\lambda \in acc\sigma_s(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{sw}(T)$.

Al no estar λ en $\sigma_{sw}(T)$ entonces $\lambda I - T \in W_a(X)$, por lo tanto $\lambda I - T \in \Phi_-(X)$ es de tipo Kato. Al ser λ un punto de acumulación de $\sigma_s(T)$, nuevamente por el teorema 2.2.4 $q(\lambda I - T) = +\infty$ y $\lambda \in \sigma_{lb}(T)$.

iii)Recordemos que $B(X) = B_-(X) \cap B_+(X)$.

En tal caso:

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_b(T) &\Leftrightarrow \lambda I - T \notin B(X)\\ &\Leftrightarrow \lambda I - T \notin B_-(X) \cap B_+(X)\\ &\Leftrightarrow \lambda \in \sigma_{lb}(T) \cup \sigma_{ub}(T).\end{aligned}$$

Es decir, $\sigma_b(T) = \sigma_{lb}(T) \cup \sigma_{ub}(T)$.
Análogamente tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}\sigma_w(T) &= \sigma_{sw}(T) \cup \sigma_{aw}(T)\\ \sigma(T) &= \sigma_a(T) \cup \sigma_s(T),\end{aligned}$$

de donde $acc\sigma(T) = acc\sigma_a(T) \cup acc\sigma_s(T)$.

En resumen:

$$\begin{aligned}\sigma_b(T) &= \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T),\\ &= \sigma_{aw}(T) \cup acc\sigma_a(T) \cup \sigma_{sw}(T) \cup acc\sigma_s(T),\\ &= \sigma_w(T) \cup acc\sigma(T).\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Weyl

En este capítulo desarrollamos en detalle las pruebas que se presentan en del pre print el artículo Weyl s theorem and Kato spectrum a publicarse en la revista Divulgaciones Matemáticas, volumen 15, número 27, 2007, pp 123 142.

3.1. Definiciones y Primeras Propiedades

Para $T \in L(X)$ denotaremos por:

$$\begin{aligned} p_{00}(T) &:= \sigma(T) \backslash \sigma_b(T). \\ &:= \{\lambda \in \sigma(T) / \lambda I - T \quad \text{es Browder}\}. \end{aligned}$$

Si hacemos *isoK* igual al conjunto de puntos aislados de $K \subset \mathbb{C}$, entonces

$$\pi_{00}(T) := \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Este último denotará al conjunto de autovalores aislados de multiplicidad mayor que cero del operador T.

Inmediatamente obtenemos la contención:

$$p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \quad \forall T \in L(X).$$

Notemos que esto es sencillo de verificar :

$\lambda \in p_{00}(T)$ implica que
$\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda I - T$ es Browder, Es decir:
$\lambda I - T$ no es invertible ,$\lambda I - T \in \Phi(X)$ y al ser Browder y tener ascent y descent finitos por el teorema 2.1.1, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$.. Como $\lambda I - T$ también es tipo Kato por los teoremas

2.2.3 y 2.2.4 λ no es un punto de acumulación de ni de $\sigma_a(T)$ ni de $\sigma_s(T)$ así podemos concluir que $\lambda \in iso\sigma(T)$.

Por el teorema 1.1.11 $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$.

Ahora, si $0 = \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T)$ entonces $\lambda I - T$ sería biyectiva y por lo tanto invertible, lo cual contradice que $\lambda \in \partial(T)$.

Así $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Definición 3.1.1. *Se dice que un operador $T \in L(X)$:*

i) satisface el Teorema de Weyl si:

$$\Delta(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

ii) satisface el Teorema de Browder si:

$$\Delta(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = p_{00}(T).$$

Lema 3.1.1. *Si T satisface el Teorema de Weyl, entonces T satisface el Teorema de Browder.*

Es decir, si

$$\Delta(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{00}(T),$$

entonces

$$\sigma(T) \backslash \sigma_W(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_b(T) = p_{00}(T).$$

Prueba:

Ya anteriormente habíamos comprobado que $p_{00}(T) \subset \pi_{00}(T)$, es decir que

$$\sigma(T) \backslash \sigma_b(T) \subset \sigma(T) \backslash \sigma_w(T).$$

Sea $\lambda \in \pi_{00} = \sigma(T) \backslash \sigma_w(T)$, ahora $\lambda \in iso\sigma(T), \lambda I - T \in W(X), \lambda I - T \in \Phi(X), \lambda I - T$ es tipo Kato.

Al ser este último operador tipo Kato y ser λ un punto aislado del espectro podemos concluir por los teoremas 2.2.3 y 2.2.4 que tanto $p(\lambda I - T)$, como como $q(\lambda I - T)$ son finitos. En consecuencia $\lambda \in p_{00}$.

Así $\pi_{00}(T) \subset p_{00}T$, y T satisface el Teorema de Browder.

□

Como se verá en la siguiente sección Los operadores de Browder serán sumamente útiles a la hora de caracterizar que operadores satisfacen el teorema de Weyl.

3.2. Caracterizaciones del Teorema de Weyl

Teorema 3.2.1. *([3],[5],[13])Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T satisface el Teorema de Weyl.*

ii) *T satisface el Teorema de Browder y $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.*

iii) *T tiene la SVEP en cada punto $\lambda \notin \sigma_w(T)$ y $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.*

iv) *T satisface el Teorema de Browder y es de tipo kato para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$.*

Prueba:
$i) \Rightarrow ii)$ Ya se probó en el lema 3.1.1 que si T satisface el teorema de Weyl, también satisface el teorema de Browder. En tal caso $p_{00}(T) = \Delta(T) = \pi_{00}$.

$ii) \Rightarrow i)$. Si T satisface el Teorema de Browder $\Delta(T) = p_{00}(T)$ y como $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$ obtenemos que $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$, de donde T satisface el Teorema de Weyl.

$iii) \Rightarrow ii)$ Tomemos ahora un $\lambda \in \sigma(T) \diagdown \sigma_w(T)$. Es decir que $\lambda I - T$ sea un operador de Weyl. Por hipótesis tenemos que T tiene la SVEP en λ. ($\lambda \notin \sigma_w(T)$).

Por el teorema 2.2.3 sabemos que $p(\lambda I - T) < \infty$ y también sabemos que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$.

Ahora, por el teorema 1.1.11 parte iv) concluimos que

$$p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty.$$

Por esto $\lambda I - T$ es Browder, de donde $\lambda \in \sigma(T) \diagdown \sigma_B(T) = p_{00}(T)$.

Además $B(T) \subset W(T) \Rightarrow \sigma_w(T) \subset \sigma_B(T)$,

$$\Rightarrow \sigma(T) \diagdown \sigma_B(T) \subseteq \sigma(T) \diagdown \sigma_w(T).$$
$$\Rightarrow P_{00}(T) \subseteq \Delta(T).$$

Así $\lambda I - T$ satisface el Teorema de Browder.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponemos ahora que T satisface el Teorema de Browder y $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

Sea $\lambda \notin \sigma_w(T)$, por este hecho $\lambda I - T$ es Weyl.

Caso 1: $\lambda \in \rho(T)$ y en tal caso T tiene la SVEP en λ.

Caso 2: $\lambda \in \sigma(T)$. Ahora $\lambda \in \Delta(T) = p_{00}(T)$. Así $\lambda I - T$ es de Browder y $p(\lambda I - T) < \infty$ con lo cual otra vez por el teorema 2.2.3 podemos asegurar que T tiene la SVEP en λ .

ii) $\Rightarrow$ *iv)* Tomemos $\lambda \in \pi_{00}(T) = P_{00}(T)$.

Por la igualdad anterior tenemos que $\lambda I - T$ está en $\Phi(X)$.

Ahora por el teorema 1.2.6 sabemos que $\lambda I - T$ debe ser esencialmente semi regular y por lo tanto de tipo kato.

iv) $\Rightarrow$ *ii)* Suponiendo que $\lambda I - T$ es de tipo Kato para cualquier $\lambda \in \pi_{00}$ sólo basta ver que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

Ya sabemos que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$.

Para la inclusión contraria tomemos $\lambda \in \pi_{00}(T)$. En tal caso $\lambda \in iso\sigma(T)$ y debe ocurrir que $\lambda \in iso\sigma_a(T)$ o $\lambda \in iso\sigma_s(T)$.

Como $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$, entonces $\lambda I - T$ no es inyectiva y $\lambda \in iso\sigma_a(T)$, luego por el teorema 2.2.3 $p(\lambda I - T) < \infty$.

Además por el teorema 1.1.11 parte ii) $0 < \alpha(\lambda I - T) \leq \beta(\lambda I - T)$.

Por otra parte, si $\lambda I - T$ fuese sobreyectiva, entonces $\beta(\lambda I - T) = 0$, lo cual genera una contradicción. Así $\lambda I - T$ tampoco es sobre de donde $\lambda \in iso\sigma_s(T)$.

Ahora valiéndonos del teorema 2.2.4 , $q(\lambda I - T) < \infty$ y $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T)$.

Es decir $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T)$ y $q(\lambda I - T) = p(\lambda I - T) < \infty$.

Así $\lambda I - T$ es Browder y $\lambda \in P_{00}(T)$. $\square$

Definición 3.2.1. $\boldsymbol{P}_0(X)$ *denotará la clase de todos los operadores* $T \in L(X)$ *tales que existe* $p := p(\lambda) \in \mathbb{N}$ *para el cual*

$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p \quad \textit{para todo} \quad \lambda \in \pi_{00}(T).$$

Para más detalles de la relación entre la última definición y el Teorema de Weyl ver [4], de hecho tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.2.2. $T \in \boldsymbol{P}_0(X)$ *si y solo si* $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$. *En particular, si* T *tiene la SVEP, entonces el Teorema de Weyl se cumple para* T *si y sólo si* $T \in \boldsymbol{P}_0(X)$.

Prueba

Suponemos que $T \in \boldsymbol{P}_0(X)$, como $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ solo nos falta comprobar la inclusión contraria.

Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Por hipótesis, para este λ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^p.$$

Al estar λ en $\pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in iso\sigma(T)$, y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Al ser λ un punto aislado del espectro podemos usar el teorema 1.4.8 en su parte i) que nos asegura que $P_0(X) = H_0(\lambda I - T)$, donde P_0 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda\}$.

Por ser $\alpha(\lambda I - T) < \infty$ en consecuencia $\alpha(\lambda I - T)^p < \infty$.

Como $P_0(X) = H_0(\lambda I - T^) = \ker(\lambda I - T)^p$ tenemos que P_0 es un operador finito dimensional. Este hecho aunado a que $\lambda \in iso\sigma(T) \subset \sigma(T)$, nos permtie aplicar el Teorema 1.4.7 y concluir que $\lambda I - T$ es un operador de Fredholm con ascent y descent finitos y en consecuencia $\lambda I - T$ es un operador de Browder y $\lambda \in p_{00}(T)$.

Suponemos ahora que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Así, al tomar $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}(T)$ sabemos que $\lambda \in iso\sigma(T)$,

$$p = p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty \quad \text{y}$$
$$\beta(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T) < \infty.$$

La finitud del ascent y descent citados nos aseguran por el teorema 1.4.6 que λ_0 es un polo de la resolvente de T. Más aún, si P_0 es la proyección espectral asociada a $\{\lambda_0\}$ entonces:

$$P_0(X) = \ker(\lambda_0 I - T)^p.$$

También estamos en condiciones de aplicar el teorema 1.2.2 que nos asegura que:

$$P_0(X) = H_0(\lambda_0 I - T).$$

De estas dos últimas igualdades es obvio que $T \in \mathbf{P}_0(X)$.

Por último si T tiene la SVEP, este la tiene en particular para cualquier $\lambda \notin \sigma_w(T)$.

Así, cuando $T \in \mathbf{P}_0(X), \pi_{00}(T) = P_{00}(T)$ y por el teorema 3.2.1 T satisface el Teorema de Weyl y recíprocamente si T satisface el Teorema de Weyl, por el mismo teorema $\pi_{00}(T) = P_{00}(T)$ y $T \in P_0(X)$. □

Para caracterizar a los operadores de Browder nos serán útiles los operadores que conoceremos como tipo Saphar

Definición 3.2.2. *Dado $T \in L(X), X$ un espacio de Banach , diremos que este es de tipo Saphar si es semi regular y relativamente regular.*
Al espectro de saphar lo denotaremos como $\sigma_{sa}(T)$. Para ampliar resultados con respecto a los operadores de Saphar ,ver [22]

Teorema 3.2.3. *[5] Para cualquier operador $T \in L(X)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) T *satisface el teorema de Browder.*

ii) $\Delta(T) \subseteq \sigma_k(T)$.

iii) $\Delta(T) \subseteq iso\sigma_k(T)$.

iv) $\Delta(T) \subseteq \sigma_{sa}(T)$.

v) $\Delta(T) \subseteq iso\sigma_{sa}(T)$.

Prueba:
Si asumimos como cierta la condición (iii) del teorema 1.3.10 vemos que la condición ii) del Teorema 1.3.11 no se cumple y por lo tanto $\lambda I - T$ no es semi regular.

Así las condiciones desde i) hasta iv) del Teorema 1.3.10 son equivalentes a decir que $\lambda I - T$ no es semi regular.

$i) \Rightarrow ii)$ Suponemos que T satisface el Teorema de Browder y esto es precisamente la condición i) del teorema 1.3.10, por el argumento anterior $\lambda I - T$ no es semi regular para cualquier $\lambda \in \Delta(T)$ y así $\lambda \in \sigma_k(T)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Al tomar $\lambda \in \Delta(T)$ este también va a estar en $\sigma_k(T)$. por lo tanto $\lambda I - t$ no es semi regular lo cual por el mismo argumento dado al inicio de la prueba nos dice que T satisface el teorema de Browder.

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponemos que $\Delta(T) \subseteq \sigma_k(T)$.

Ahora tomemos $\lambda \in \Delta(T)$. Al ser $\lambda I - T$ un operador de Weyl este también es un operador de Fredholm y en consecuencia, esencialmente semi regular, lo que implica a su vez, que es tipo Kato. Por la inclusión de la hipótesis $\lambda I - T$ no es semi regular. Además, al ser tipo kato, por el teorema 1.2.9, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\delta I - T$ es semi regular para todo $0 < |\delta| < \varepsilon$. Así $\lambda \in iso\sigma_k(T)$.

$iii) \Rightarrow ii)$ Bajo esta premisa $\Delta(T) \subseteq iso\sigma_k(T) \subseteq \sigma_k(T)$.

$ii) \Rightarrow iv)$ Basta ver que $\sigma_k(T) \subseteq \sigma_{sa}(T)$.

Pero esto es obvio puesto que $\lambda \in \sigma_{sa}(T)$ si y solo si $\lambda I - T$ no es semi regular o no es relativamente regular.

$iv) \Rightarrow ii)$ Suponemos ahora que $\Delta(T) \subseteq \sigma_{sa}(T)$.

Sea $\lambda \in \Delta(T)$, así $\lambda I - T \in W(X)$.

En tal caso $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$.

Aunado a esto $\lambda I - T$ no es invertible, lo cual nos asegura que tanto

$$0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty.$$

Ahora, por el teorema 1.1.8 al tener $\ker(\lambda I - T)$ dimensión finita resulta que la proyección de X sobre éste es continua y $\ker(\lambda I - T)$ es complementado. También tenemos que $(\lambda I - T)(X)$ es complementado puesto que este es cerrado y $\beta(\lambda I - T) < \infty$.

Ahora podemos asegurar por el Teorema 1.1.9 que $\lambda I - T$ es relativamente regular y como $\lambda \in \sigma_{sa}(T)$, solo puede ocurrir que $\lambda I - T$ no sea semi regular.

$v) \Rightarrow iv)$ $\Delta(T) \subseteq iso\sigma_{sa}(T) \subseteq \sigma_{sa}(T)$.

$iii) \Rightarrow v)$ Sea $\lambda_0 \in \Delta(T)$. En tal caso $\lambda_0 I - T \in W(X) \subset \Phi(X)$. Por el teorema 1.1.13 existen:

a) $\varepsilon_1 > 0$ tal que para cualquier $S \in L(X)$ con $\|S\| < \varepsilon_1$ se tiene que:

$$\lambda_0 I - T + S \in \Phi_+(X).$$

$$\alpha(\lambda_0 I - T + S) \leq \alpha(T).$$

$$ind(\lambda_0 I - T + S) = ind(\lambda_0 I - T).$$

b) $\varepsilon_2 > 0$, tal que para cualquier $S \in L(X)$ con $\|S\| < \varepsilon_2$ se tiene que:

$$\lambda_0 I - T + S \in \Phi_-(X).$$

$$\beta(\lambda_0 I - T + S) \leq \beta(\lambda_0 I - T).$$

$$ind(\lambda_0 I - T + S) = ind(\lambda_0 I - T).$$

Si tomamos ahora el $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon$ se tiene entonces que para cualquier $S \in L(X)$ tal que $\|S\| < \varepsilon$ se cumple:

$$\lambda I - T + S \in \Phi(X).$$

$$\alpha(\lambda_0 I - T + S) \leq \alpha(\lambda_0 I - T).$$

$$\beta(\lambda_0 I - T + S) \leq \beta(\lambda_0 I - T).$$

$$ind(\lambda_0 I - T + S) = ind(\lambda_0 I - T).$$

Ahora si consideramos un entorno de λ_0 precisamente de radio ε entonces para λ en ese entorno,

$$\|(\lambda - \lambda_0)I\| = |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \quad \text{y}.$$

$$\lambda_0 I - T + \lambda I - \lambda_0 I = \lambda I - T \in \Phi(X) \quad \text{y}.$$

$$ind(\lambda I - T) = ind(\lambda_0 I - T) = 0.$$

Al tener que $\lambda I - T \in \Phi(X)$, también tenemos por el teorema 1.1.10 que cualquiera de estos operadores es relativamente regular.

Como dato adicional $\lambda_0 \in iso\sigma_k(T)$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que en el mismo entorno de radio ε, $\lambda_0 I - T$ no es semi regular pero cuando $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $\lambda I - T$, si lo es, lo cual nos implica que $\lambda_0 \in iso\sigma_{sa}(T)$. □

Definición 3.2.3. *Definiremos y denotaremos por $\sigma_0(T)$ al conjunto de todos los λ en $\mathbb{C}$ tales que:*

i) $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

ii) Existe un disco abierto centrado en λ sin incluirlo, digamos D_λ de radio ε tal que para cualquier $\mu \in D_\lambda$:

$$\mu I - T \in W(X) \quad y \quad \ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^\infty.$$

Teorema 3.2.4. *Para un operador lineal $T \in L(X)$.T satisface el teorema de Weyl si y solamente si $\sigma_0(T) = p_{00}(T)$.*

Prueba:

Suponemos primero que T satisface el Teorema de Weyl. Es decir $\Delta(T) = \pi_{00}(T)$ Por el Teorema 3.2.1 $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

Ya probamos que,

$$\Delta(T) = \pi_{00}(T) \subseteq \sigma_0(T).$$

Comprobemos también que $\sigma_0(T) \subseteq \pi_{00}(T) = \Delta(T)$.

Probaremos que si $\lambda \notin p_{00}(T)$ entonces $\lambda \notin \sigma_0(T)$. Consideremos dos casos para cuando λ no esté en $p_{00}(T)$.

Caso 1: $\lambda \notin \sigma(T)$. En este caso $\lambda \in \rho(T)$. Es decir $\alpha(\lambda I - T) = 0$, por lo tanto $\lambda \notin \sigma_0(T)$.

Caso 2: $\lambda \in \sigma(T)$.

Por absurdo suponemos que $\lambda \in \sigma_0(T)$. Por definición de este conjunto existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\mu \in D(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\}$:

a) $\mu I - T \in W(X)$ y,

b) $\ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^{\infty}(X)$.

Ahora si $\mu \in \sigma(T)$, entonces $\mu \in \Delta(T) = p_{00}(T)$ de donde $\mu I - T$ también es un operador de Browder.

Si al contrario $\mu \in \rho(T)$, $\mu I - T$ es biyectivo. $p(\mu I - T) = q(\mu I - T) = 0$ y nuevamente $\mu I - T$ es un operador de Browder.

Por estar $\mu I - T$ en $W(X)$ y $\mu I - T \in \Phi(X)$ él es de tipo Kato.

Por ser Browder $p(\mu I - T) < \infty$ lo cual nos garantiza que $\mu I - T$ tiene la SVEP en μ (esto por el Teorema 2.2.3). También sabemos por la definición de $\sigma_0(T)$ que $\mu I - T$ es semi regular. Al valernos del Teorema 1.3.4. concluimos que $\mu I - T$ es inyectiva. Así $0 = \alpha(\mu I_T) = \beta(\mu I - T)$ por lo cual $\mu I - T$ es invertible.

Luego $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Pero esto nos asegura que $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Evidente contradicción. Así $\lambda \notin \sigma_0(T)$. Es decir $\sigma_0(T) \subseteq p_{00}(T)$.

Recíprocamente supongamos que $\sigma_0(T) = p_{00}(T)$.

Ya conocemos la cadena de inclusiones

$$p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \subseteq \sigma_0(T) = p_{00}(T).$$

De donde $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Aunado a lo anterior y observando el Teorema 3.2.1 nos podemos dar cuenta que si T a satisfacer el Teorema de Weyl simultáneamente va a satisfacer el Teorema de Browder o equivalentemente por el Teorema 3.2.3:

$$\Delta(T) \subseteq \sigma_k(T).$$

Sea $\lambda \in \Delta(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$.

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda \notin \sigma_k(T)$.

Ahora tenemos que $\lambda I - T$ es semi regular y que $\lambda I - T$ es un operador de Weyl.

Como $W(X)$ es un conjunto abierto en $L(X)$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ nos implique que $\mu I - T$ es Weyl.

Por otra parte $W(X) \subset \Phi(X)$ y por lo tanto $\lambda I - T$ es un operador tipo Kato. Por el teorema 1.2.9 podemos suponer que para el $\varepsilon > 0$ ya tomado; $\mu I - T$ es semi regular para cualquier $0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon$.
En resumen, $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$, esto debido a que $\lambda I - T$ no es biyectivo y $\lambda I - T \in W(X)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon$ se tiene que $\mu I - T$ es Weyl y semi regular y para concluir al ser $\mu I - T$ semi regular esto nos asegura que

$$\ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^{\infty}(X).$$

En conclusión, $\lambda \in \Delta(T) = p_{00}(T)$ por nuestra hipótesis.

De acá $\lambda I - T$ es un operador de Browder. En tal caso $p(\lambda I - T) < \infty$ lo cual asegura que T tiene la SVEP en λ y nuevamente por el Teorema 1.3.4, $\lambda I - T$ es inyectiva, de donde $\alpha(\lambda I - T) = 0$.

Esto es una contradicción, por lo tanto $\Delta(T) \subseteq \sigma_k(T)$y como queríamos probar T satisface el teorema de Weyl. $\square$

Teorema 3.2.5. *[11] Para un operador acotado $T \in L(X)$, el Teorema de Weyl se cumple si y sólo si*

$$\pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_w(T).$$

donde

$$\sigma_1(T) := \sigma_w(T) \cup \sigma_k(T),$$

y

$$\pi_{0f}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} / 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},$$

el cual en verdad es el conjunto formado por todos los autovalores de T con multiplicidad finita.

Prueba:
Suponemos primero que T satisface el Teorema de Weyl, es decir:

$$\Delta(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{oo}(T).$$

Como primer paso en nuestra prueba veremos que $\sigma_1(T) = \sigma(T)$.

Afirmación

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_w(T) \cup [\sigma(T) \backslash \sigma_w(T)], \\ &= \sigma_w(T) \cup \Delta(T). \end{aligned}$$

En efecto. Supongamos que $\lambda \notin \sigma_w(T) \cup \Delta(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_w(T) \quad$ y $\quad \lambda \notin \Delta(T)$, Así :

$$\lambda \notin \Delta(T) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(T) \quad \text{o} \quad \lambda \in \sigma_w(T).$$

Como ya sabemos que $\lambda \notin \sigma_w(T)$ solo nos queda la posibildad de que$\lambda \notin \sigma(T)$. luego

$$\sigma(T) \subseteq \sigma_w(T) \cup \Delta(T).$$

Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma_w(T) \cup \Delta(T)$.
Caso 1: $\lambda \in \Delta(T)$ y acá obviamente $\lambda \in \sigma(T)$.
Caso 2: $\lambda \in \sigma_w(T)$, lo cual nos implica que $\lambda I - T$ no es Weyl. De este último hecho se deduce fácilmente que el índice de este operador es distinto de cero, $\alpha(\lambda I - T) \neq \beta(\lambda I - T)$ y si alguno de estos dos números es igual a cero el otro no lo va a ser. Es decir que este operador es imposible que sea biyectivo. Nuevamente $\lambda \in \sigma(T)$ y como resultado:

$$\sigma_w(T) \cup \Delta(T) \subseteq \sigma(T).$$

Con esto queda probada nuestra afirmación.

Por los Teoremas 3.2.1 y 3.2.3 $\Delta(T) \subset \sigma_k(T)$.
Así

$$\sigma(T) \subseteq \sigma_w(T) \cup \sigma_k(T),$$

es decir

$$\sigma(T) \subseteq \sigma_1(T).$$

Por otra parte $\lambda \in \sigma_1(T)$ si y solo si $\lambda I - T$ no es un operador de Weyl o no es un operador semi-regular.

Caso 1: $\lambda I - T$ no es semi-regular. Las dos opciones que tenemos son:

a) $(\lambda I - T)(X)$ no es cerrado de donde $\beta(\lambda I - T)$ no es finito y $\lambda I - T$ no es sobreyectiva.

b) $\ker(\lambda I - T)$ no está contenido en $(\lambda I - T)^n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir que $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$ y $(\lambda I - T)$ no es biyectivo.

Caso 2: Cuando $\lambda I - T$ no es de Weyl tenemos dos posibilidades:

a) No es Fredholm y bien sea $\alpha(\lambda I - T)$ o $\beta(\lambda I - T)$ no es finito y en tal caso $\lambda I - T$ no es biyectiva.

b) $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y no es Weyl. En este caso $\alpha(\lambda I - T) \neq \beta(\lambda I - T)$ y nuevamente $\lambda I - T$ no es biyectiva.

En resumen, por lo casos anteriores $\lambda \in \sigma(T)$ y $\sigma_1(T) \subseteq \sigma(T)$.

Ya sabemos que $\sigma(T) = \sigma_1(T)$ de lo anterior tenemos entonces que

$$iso\sigma_1(T) \cap \pi_{0f}(T) = iso\sigma(T) \cap \pi_{0f}(T) = \pi_{00}(T) = \Delta(T).$$

Recíprocamente supongamos que

$$\pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T) = \Delta(T).$$

Bajo estas premisas $\pi_{oo}(T) \subseteq \Delta(T) = \pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T)$.

En efecto; tomamos $\lambda \in \pi_{oo}(T)$, luego $\lambda \in iso\sigma(T)$ y por lo tanto $\lambda \in \sigma(T)$.

Por otra parte, $\lambda \in \pi_{oo}(T)$ implica que existe $D(\lambda) = D(\varepsilon, \lambda) \backslash \{\lambda\}$ tal que $\mu I - T$ es biyectivo para cualquier $\mu \in D(\lambda)$, más aún estos operadores tambien van a ser de forma obvia operadores de Weyl y semi regulares.

De lo anterior, ni $\sigma_a(T)$, ni $\sigma_s(T)$ se acumulan en λ y por el teorema 2.2.2 T^* y T tienen la SVEP en λ.

Procediendo por reducción a lo absurdo supongamos que $\lambda \notin \sigma_1(T)$, con esto en mente deducimos que $\lambda I - T$ es Weyl y semi regular. Por el teorema 1.3.4 y por tener tanto T, como T^* la SVEP en λ obtenemos que $\lambda I - T$ es biyectivo hecho que es una absoluta contradicción con lo ya establecido. Ahora $\lambda \in iso\sigma_1(T)$ y $\alpha(\lambda I - T) > 0$, en consecuencia $\lambda \in \Delta(T) = \pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T)$.

Es decir $\pi_{oo}(T) \subseteq \Delta(T) = \pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T)$.

Para probar la inclusión contraria, sea $\lambda_0 \in \Delta(T)$.

Supongamos que $\lambda \notin \sigma_1(T)$. En tal caso $\lambda I - T$ es semi-regular y Weyl. Por ser Weyl, también va a ser Fredholm. Ahora por el Teorema 1.2.9 y por ser $W(X)$ un conjunto abierto podemos conseguir un $\varepsilon > 0$ tal que si $|\lambda_1 - \lambda| < \varepsilon$ entonces $\lambda_1 I - T$ va a ser semi-regular y Weyl. Es decir que:

$$|\lambda_1 - \lambda| < \varepsilon \Rightarrow \lambda_1 \notin \sigma_1(T).$$

Ahora, estos $\lambda_1 \notin \sigma(T)$ pues en caso contrario $\lambda_1 \in \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T)$ y en consecuencia $\lambda_1 \in \sigma_1(T)$, lo cual es una contradicción.

Con esto hemos probado en realidad que

$$\lambda \notin \sigma_1(T) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T) \quad i.e$$

$$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_1(T).$$

Ahora $\lambda_0 \in \Delta(T) = \pi_{0f}(T) \cap iso\sigma_1(T)$, así $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y $\lambda_0 \in iso\sigma_1(T)$. En este caso existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, entonces $\lambda \notin \sigma_1(T)$ y por lo tanto $\lambda \notin \sigma(T)$ Es decir que $\lambda_0 \in iso\sigma(T)$. Además, al ser $\Delta(T) = \sigma_{0f}(T)T \cap iso\sigma_1(T)$ obtenemos también que $0 < \alpha(\lambda_0 I - T) < \infty$.

Así $\lambda_0 \in \pi_{oo}(T)$.

Es decir $\pi_{oo}(T) = \Delta(T)$ y T satisface el Teorema de Weyl.

Capítulo 4

Teorema a-Weyl

Acá se desarrollan pruebas que generalizan el teorema de Weyl para el caso en que se trabaja con $\sigma_a(T)$ y $\sigma_{aw}(T)$ en lugar de $\sigma(T)$ y $\sigma_w(T)$, respectivamente.

4.1. Definiciones y Primeras Propiedades

Para $T \in L(X)$ es un espacio de Banach X definimos a:

$$\pi_{oo}^a(T) := \{\lambda \in iso\sigma_a(T); 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

$$p_{oo}^a(T) := \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T).$$

Afirmación: $p_{oo}^a(T) \subseteq \pi_{oo}^a(T)$. En efecto $\lambda \in p_{oo}^a(T)$ si y solo si $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda I - T \in B_+(X)$. Como $\lambda \in \sigma_a(T)$ tenemos $\lambda I - T$ no es inyectiva o $(\lambda I - T)(X)$ no es cerrado. Como este operador es semi Browder superior debe ser de rango cerrado, luego solo nos queda la opción de que $\lambda I - T$ no sea inyectiva y en consecuencia $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Como $\lambda I - T \in \Phi_+(X), q(\lambda I - T) < \infty$ y $\lambda I - T$ es tipo kato. Por el Teorema 2.2.3 $\sigma_a(T)$ no se acumula en λ y como $\lambda \in \sigma_a(T)$ concluimos que $\lambda \in iso\sigma_a(T)$.

Es decir que $\lambda \in \pi_{oo}^a(T)$.

Es espectro aproximado (o esencial) puntual de Weyl $\sigma_{aw}(T)$ es el complemento de los λ en $\mathbb{C}$ tales que:

(i) $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$.

(ii) $ind(\lambda I - T) \leq 0$.

En este caso es un hecho ya clásico y conocido que: $\sigma_{aw}(T) = \bigcap\limits_{k \in K(X)} \sigma_a(T+K)$., ver [23].

Análogamente, el espectro sobreyectivo de Weyl $\sigma_{ws}(T)$ es el complemento del conjunto de todos los λ tales que:

i) $\lambda I - T \in \Phi_{-}(X)$.

ii) $ind(T) \geq 0$.

Dualmente también se obtiene que:

$$\sigma_{sw}(T) = \bigcap_{k \in K(X)} \sigma_s(T+K).$$

Ver [23].

Definición 4.1.1. *Diremos que:*

i) $T \in L(X)$ satisface el Teorema de a-Weyl si

$$\Delta_a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T) = \pi^a_{oo}(T).$$

ii) satisface el Teorema de a-Browder si

$$\sigma_{aw}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

Ahora presentamos en el siguiente teorema estas importantes implicaciones:

Teorema 4.1.1. *Para $T \in L(X)$ se cumple:*

i) T satisface el Teorema de a-Weyl sólo si satisface el teorema de Weyl.

ii) T satisface el Teorema de a-Browder sólo si satisface el Teorema de a-Browder.

Prueba:

i) Supongamos que T satisface el Teorema de a-Weyl.

Para $\lambda \in \Delta(T)$, se cumple que $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda I - T$ es Weyl y por lo tanto $\lambda I - T \in \Phi(X)$. De lo anterior $\lambda \in \sigma(T)$, $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$ y en consecuencia $\lambda \in \sigma_a(T) \cap \sigma_s(T)$. Aunado a esto

$$\Phi(X) \subseteq \Phi_+(X),$$

$$ind(\lambda I - T) = 0,$$

en estas circunstancias podemos concluir que

$$\lambda \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T) = \pi^a_{oo}(T).$$

Esto último, por hipótesis.

Ahora podemos asegurar que $\lambda \in iso\sigma_a(T)$.

Es decir que $\sigma_a(T)$ no se acumula en λ. Así, por el teorema 2.2.3 $p(\lambda I - T) < \infty$ y como $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$, se tiene por el teorema 1.1.11 que $p(\lambda I - T) < \infty$. Ahora nos valemos el teorema 2.2.3 para ver que $\sigma_s(T)$ no se acumula en λ.

En resumen: $\lambda \in iso\sigma_s(T) \cap iso\sigma_a(T)$ y por lo tanto $\lambda \in iso\sigma(T)$.

Es decir $\lambda \in \pi_{oo}(T)$ y como queríamos probar

$\Delta(T) \subseteq \pi_{oo}(T)$.

Tomemos ahora $\lambda \in \pi_{oo}(T)$. Así, $\lambda \in iso\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Ya tenemos en este caso que $\lambda \in \sigma(T)$. Falta ver que $\lambda I - T$ es Weyl.

Al ser λ un punto aislado del espectro ni $\sigma_a(T)$, ni $\sigma_S(T)$ se acumulan en λ y tanto T^* como T tiene la SVEP en λ.

Más aún, como $0 < \alpha(\lambda I - T)$ podemos asegurar que $\lambda \in iso\sigma_a(T)$.

Así $\lambda \in \pi^a_{oo}(T) = \Delta_a(T)$ en tal caso , $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$ es de tipo Kato y por tener T^* y T la SVEP en λ por teorema 2.2.3, $p(\lambda I - T)$ y $q(\lambda I - T)$ son finitos de donde $\lambda I - T$ es Browder y en consecuencia también un operador de Weyl.

ii) Suponemos ahora que T satisface el teorema a Browder. Ciertamente:

Necesitamos probar que $\Delta(T) = p_{oo}(T)$.

$$\begin{aligned} \lambda \in p_{oo}(T) &\Rightarrow \lambda \in \sigma(T) \quad \text{y} \quad \lambda I - T \quad \text{es un operador de Browder.} \\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma(T) \quad \text{y} \quad \lambda I - T \quad \text{es un operador de Weyl.} \\ &\Rightarrow \lambda \in \Delta(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{oo}(T) \subseteq \Delta(T)$.

Tomamos $\lambda \in \Delta(T)$.

Ya tenemos que $\lambda \in \sigma(T)$. Nos falta ver que $\lambda I - T$ es un operador de Browder.

Como $\lambda I - T$ es un operador de Weyl, $\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$. Por hipótesis $\sigma_{aw}(T) = \sigma_{ub}(T)$.

Así, $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$. Ahora tenemos que $\lambda I - T \in B_+(X)$ y por lo tanto $p(\lambda I - T) < \infty$.

Es decir, $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$ y $p(\lambda I - T) < \infty$. Por el teorema 1.1.11 también $q(\lambda I - T) < \infty$ y en consecuencia $\lambda I - T$ es un operador de Browder.

□

Antes de continuar notemos algunos detalles:

1) T satisface el Teorema a-Browder si $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$, por lo razonado en la prueba del teorema 2.2.5:

$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$, $\sigma_{uw}(T) := \sigma_{uw}(T) \cup acc\sigma_a(T)$ y esto es equivalente a decir que

$$acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{uw}(T).$$

2) También tenemos que $\Delta_a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T)$ y al tomar λ en este conjunto:

$\lambda \in \sigma_a(T) \Leftrightarrow \lambda I - T$ no es inyectivo o $(\lambda I - T)(X)$ no es cerrado. Pero al estar $\lambda I - T$ en $W_+(X), (\lambda I - T)(X)$ es cerrado. Es decir que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ y en consecuencia tenemos la igualdad;

$$\Delta_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \in W_+(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\}.$$

3) $p^a_{oo}(T) \subseteq \Delta_a(T) \subseteq \sigma_a(T)$.

En efecto:

Si $\lambda \in p^a_{oo}(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda I - T \in B_+(X)$, Pero $B_+(X) \subseteq W_+(X)$.

Así $\lambda I - T \in W_+(X)$ y $\lambda \in \sigma_a(T)$, es decir $\lambda \in \Delta_a(T)$.

Lema 4.1.1. *$T \in L(X)$ satisface el teorema de a-Browder si y sólo si $p^a_{oo}(T) = \Delta_a(T)$. En particular, esto es cierto cuando $\Delta_a(T) = \emptyset$.*

Prueba:

Suponemos que T satisface el teorema de a-Browder. En tal caso

$$\sigma_{aw}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

Caso 1: $\Delta_a(T) = \emptyset$. Si suponemos que existe $\lambda \in p^a_{oo}(T)$, entonces

$$\lambda \notin \sigma_a(T),$$

y

$$\lambda I - T \in B_+(X).$$

En tal caso $\lambda I - T$ no es inyectivo $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$ y $p(\lambda I - T) < \infty$. Combinando estos hechos com el teorema 1.1.11 resulta que:

$$0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty,$$

y

$$\alpha(\lambda I - T) \leq \beta(\lambda I - T).$$

Es decir que $ind(\lambda I - T) \leq 0$ y en consecuencia $\lambda \in \Delta_a(T) = \emptyset$. Evidente contradicción.

Caso 2: $\Delta_a(T) \neq \emptyset$.

Sea $\lambda \in \Delta_a(T)$. Ahora $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$.

Como $\sigma_{aw}(T) = \sigma_{ub}(T)$ tenemos que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$. Es decir $\lambda \in p^a_{oo}(T)$. Luego $\Delta_a(T) \subseteq p^a_{oo}(T)$.

Pero en los detalles con respecto a estos conjuntos ya se argumentó suficientemente que

$$p^a_{oo}(T) \subseteq \Delta_a(T).$$

Así $p^a_{oo}(T) = \Delta_a(T)$.

Recíprocamente supongamos que $p^a_{oo}(T) = \Delta_a(T)$.
Necesitamos probar que $\sigma_{wa}(T) = \sigma_{ub}(T)$o equivalentemente que $\mathbb{C}\backslash\sigma_{wa}(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma_{ub}(T)$
Continuando $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{ub}(T)$ si y solo si $\lambda I - T \in B_+(X) \subseteq W_+(T)$.

Con lo que $\lambda I - T \in W_+(X)$ y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{aw}(T)$ y $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ub}(T) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_{aw}(T)$.

Tomemos ahora $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{aw}(T)$.

Consideremos dos casos:

Caso 1: $\lambda \in acc\sigma_a(T)$. Como $\sigma_a(T)$ es un conjunto cerrado: $\lambda \in \sigma_a(T)$ y acá $\lambda \in \Delta_a(T) = p^a_{oo}(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ub}(T)$.

Caso 2: $\lambda \notin accc\sigma_a(T)$, acá combinaremos este hecho con que $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$ y el teorema 2.2.5 en su inciso i) que nos garantiza que:

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{aw}(T) \cup acc\sigma_a(T),$$

esto nos asegura nuevamente que $\lambda \notin \sigma_{ub}(T)$ o equivalente $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_{ub}(T)$.

$\square$

Lema 4.1.2. *Si $T \in L(X)$ entonces: T satisface el teorema de a-Browder si y sólo si $\Delta_a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$.*

Prueba Comencemos por notar que, por el lema anterior, T satisface el Teorema a-Browder si y solamente si $\Delta_a(T) = p^a_{00}(T)$ y esto también va ser cierto si $\Delta_a(T) = \emptyset$. Ahora, cuando este conjunto es igual a vacío las inclusiones referidas y el teorema de a-Browder se cumplen de manera trivial. Debido a esto nos ocuparemos solo del caso en que $\Delta_a(T) \neq \emptyset$.

Supongamos que T satisface el Teorema a-Browder. como ya lo hicimos notar $p^a_{oo}(T) = \Delta_a(T)$ y así:

$$\Delta_a(T) = p^a_{oo}(T) \subseteq \pi^a_{oo}(T) \subseteq iso\sigma_a(T).$$

Recíprocamente, si $\Delta_a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$, entonces para $\lambda \in \Delta_a(T)$, $\sigma_a(T)$ no se acumula en λ. Es decir, que T va a a tener la SVEP en λ.

Como $\lambda I - T \in W_+(X)$, este es un operador tipo Kato, entonces podemos asegurar que $p(\lambda I - T) < \infty$. En resumen, $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda I - T \in B_+(X)$. Conclusión: $\lambda \in p^a_{oo}(T)$, $p^a_{oo}(T) \subseteq \Delta_a(T)$ y T satisface el Teorema de a-Browder. $\square$

Teorema 4.1.2. *Para $T \in L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema de a-Browder.*

ii) $\Delta_a(T) \subseteq \sigma_k(T)$.

iii) $\Delta_a(T) \subseteq iso\sigma_k(T)$.

Prueba

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos ahora que T satisface el teorema de a-Browder. por el lema 4.1.2:

$$\lambda_0 \in \Delta_a(T) \subseteq iso\sigma_a(T).$$

Así existe $D = D(\lambda_0, \varepsilon) \backslash \{\lambda_0\}$ tal que $\lambda_0 I - T$ no es inyectivo, $0 < \alpha(\lambda_0 I - T)$, $\lambda I - T$ es inyectivo y $\alpha(\lambda I - T) = 0 \quad \forall \lambda \in D$. Definimos la aplicación: $\lambda \mapsto \ker(\lambda I - T)$ y recordamos que en el conjunto de los subespacios cerrados de X tenemos definida la métrica de la brecha.

Ahora podemos considerar una sucesión no constante e infinita $\{\lambda_n\}$ en D tal que $\lambda_n \to \lambda_0$ en tal caso, si suponemos continuidad de esta aplicación, entonces:

$$\ker(\lambda_n I - T) \to \ker(\lambda_0 I - T) \neq \{0\}.$$

Pero como para cualquier $n \in \mathbb{N}, \ker(\lambda_n I - T) = \{0\}$, se obtiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} \ker(\lambda_n I - T) = \{0\},$$

y esto es una flagrante contradicción. En conclusión, la aplicación en cuestión no puede ser continua en λ_0 según la métrica de la brecha.

Ya sabemos que $\lambda \to \ker(\lambda I - T)$ no es continua en cada punto $\lambda_0 \in \Delta_a(T)$ según la métrica de la brecha. Este hecho junto con el teorema 1.3.11 nos asegura que para cualquiera de estos puntos $\lambda_0 I - T$ no va a ser semi-regular. Luego $\Delta_a(T) \subset \sigma_k(T)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Para probar que T satisface el teorema de a-Browder utilizaremos el lema anterior nuevamente y comprobaremos que $\Delta_a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$.

Si ahora suponemos que $\Delta_a(T) \subseteq \sigma_k(T)$ tenemos que para cualquier λ_0 en $\Delta_a(T), (\lambda_0 I - T)(X)$ es cerrado, por lo tanto el módulo minimal de $\lambda_0 I - T$ es mayor que cero , $\lambda_0 I - T$ no es semi regular y nuevamente, por el teorema 1.3.11, incisos i) y iii) concluimos que la aplicación $\lambda \mapsto \ker(\lambda I - T)$ no es continua en λ_0 según la métrica de la brecha.

Tomemos $\lambda_0 \in \Delta_a(T)$. Al ser $\lambda_0 I - T$ un operador Weyl superior, $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$.

Ahora por el teorema 1.1.14, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\alpha(\mu I + \lambda_0 I - T) \leq \alpha(\lambda_0 I - T) < \infty, |\mu| < \varepsilon,$$

y $\alpha(\mu I + (\lambda_0 I - T))$ es constante para $0 < |\mu| < \varepsilon$.

Luego, si $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, entonces $\alpha((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T)))$ es constante o equivalentemente, $\alpha(\lambda I - T)$ es constante para cualquier $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda_0) \backslash \{\lambda_0\}$.

Aparte de esto

$$\alpha((\lambda-\lambda_0)I+\lambda_0 I-T)\leq \alpha(\lambda_0 I-T)<\infty.$$

$$\alpha(\lambda I-T)\leq \alpha(\lambda_0 I-T)<\infty.$$

De donde $\lambda I-T\in\Phi_+(X)$ para los λ ya señalados.

Como $D(\varepsilon,\lambda_0)$ es un conjunto conexo, entonces por el corolario 1.1.1 tenemos que $\Phi_+(X)$ es abierto y el índice es constante en cada componente conexa de $\Phi_\pm(X)$.

así $ind(\lambda I-T)$ es constante en cualquier elemento de $D(\varepsilon,\lambda_0)$.

Es decir $ind(\lambda I-T)=ind(\lambda_0 I-T)$.

Por la discontinuidad de la aplicación : $\lambda\to\ker(\lambda I-T)$ en λ_0 :

$$0\leq \alpha(\lambda I-T)<\alpha(\lambda_0 I-T) \quad \text{esto para todo} \quad \lambda\in D(\varepsilon,\lambda_0)\backslash\{\lambda_0\}.$$

Afirmación: $\alpha(\lambda I-T)=0$ para cualquier $\lambda\in D(\varepsilon,\lambda_0)\backslash\{\lambda_0\}$.

En efecto, supongamos que $\alpha(\lambda_1 I-T)>0$ para algún $\lambda_1\in D(\varepsilon,\lambda_0)\backslash\{\lambda_0\}$.

Como $ind(\lambda_1 I-T)=ind(\lambda_0 I-T)\leq 0$.

Concluimos que $\lambda_1\in\Delta_a(T)$ y nuevamente no hay continuidad para este punto.

Ahora, si el único valor de λ en $D(\lambda_0,\varepsilon)\backslash\{\lambda_0\}$ que cumple con esta propiedad es λ_1, bastaría tomar un $\varepsilon_0<\varepsilon$ para obtener un disco donde $\alpha(\lambda I-T)=0<\alpha(\lambda_0 I-T)$.

Si esto no es cierto podemos tomar $\lambda_2\in D(\lambda_0,\varepsilon)\backslash\{\lambda_0,\lambda_1\}$ tal que

$$\alpha(\lambda_2 I-T)<\alpha(\lambda_1 I-T).$$

Pero lo anterior contradice que $\alpha(\lambda I-T)$ es constante en $D(\lambda_0,\varepsilon)\backslash\{\lambda_0\}$. Por lo tanto $\alpha(\lambda I-T)=0$ y $\lambda_0\in iso\sigma_a(T)$.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* $\Delta_a(T)\subseteq iso\sigma_k(T)\subseteq\sigma_k(T)$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Suponemos ahora que $\Delta_a(T)\subseteq\sigma_k(T)$.

Al tomar $\lambda_0\in\Delta_a(T)$ ya sabemos que $\lambda_0 I-T$ es tipo Kato por el teorema 1.2.9 existe $\varepsilon>0$ tal que $\lambda I-T$ es semi regular para $0<|\lambda|<\varepsilon$, pero $\lambda_0\in\sigma_k(T)$ y en consecuencia $\lambda_0\in iso\sigma_k(T)$. $\square$

Ya con los resultados anteriores podemos proceder a enunciar condiciones neceserias y suficientes para que un operador satisfaga el Teorema de a Weyl. A esto dedicaremos la sección final de este trabajo.

4.2. Caracterizaciones del Teorema de a-Weyl

Teorema 4.2.1. *([3],[6])Sea $T \in L(X)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema a-Weyl.*

ii) *T satisface el teorema a-Browder y $p^a_{oo}(T) = \pi^a_{oo}(T)$.*

iii) *T tiene la SVEP en cada punto $\lambda \notin \sigma_{wa}(T)$ y $p^a_{oo}(T) = \pi^a_{oo}$.*

iv) *T satisface el teorema a-Browder y $\lambda I - T$ es de rango cerrado para cualquier $\lambda \in \pi^a_{oo}(T)$.*

Prueba:

$(i) \Rightarrow ii)$ Ya sabemos que $p^a_{oo}(T) \subseteq \pi^a_{oo}(T)$. Nos falta comprobar que $\pi^a_{oo}(T) \subseteq p^a_{oo}(T)$.

$$\lambda_0 \in \pi^a_{oo}(T) \text{ si y sólo si } \lambda_0 \in iso\sigma_a(T) \quad \text{y} \quad 0 < (\lambda_0 I - T) < \infty.$$

En tal caso, $\lambda_0 \in \sigma_a(T)$. Falta verificar que $\lambda_0 I - T$ está en $B_+(X)$. Al estar λ_0 en $iso\sigma_a(T)$, tenemos que λ_0 no se acumula en $\sigma_a(T)$ y T tiene la SVEP en λ_0.

Como T satisface el teorema de a-Weyl, resulta que $\lambda_0 \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{wa}(T)$. Es decir $\lambda_0 I - T$ es Weyl superior, de donde $\lambda_0 I - T \in \Phi_+(X)$. Este último hecho nos asegura que $\lambda_0 I - T$ es tipo kato y al tener T la SVEP en λ_0 podemos garantizar por el teorema 2.2.3 que $p(\lambda_0 I - T) < \infty$. Luego, $\lambda_0 \in p^a_{oo}(T)$.

Por otra parte:

$$\pi^a_{oo}(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{wa}(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ub}(T) = p^a_{oo}(T),$$

es decir,

$$\sigma_a(T) \backslash \sigma_{wa}(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ub}(T).$$

Ahora tomamos $\lambda_0 \notin \sigma_{aw}(T)$.

En estas circunstancias $\lambda I-T\in W_a(T)$ y $\lambda I-T\in\Phi_+(X)$. Es decir, $\lambda_0 I-T$ es de rango cerrado y $\alpha(\lambda_0 I-T)<\infty$.

Si $0<\alpha(\lambda_0 I-T)<\infty$ entonces $\lambda_0\in\sigma_a(T)$ y al ser $\sigma_a(T)\backslash\sigma_{aw}(T)=\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ub}(T)$ obtendríamos que $\lambda_0\notin\sigma_{ub}(T)$.

Si, por otra parte $0<\alpha(\lambda_0 I-T)=0, \lambda I-T$ es inyectiva y $p(\lambda_0 I-T)=0$ y nuevamente $\lambda\notin\sigma_{ub}(T)$.

Así $\mathbb{C}\backslash\sigma_{aw}(T)\subseteq\mathbb{C}\backslash\sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{ub}(T)\subseteq\sigma_{aw}(T)$.

Tomamos $\lambda_0\notin\sigma_{ub}(T)$. Así $\lambda_0 I-T\in B_+(X)\subset W_+(X)$, luego $\lambda_0\notin\sigma_{aw}(T)$y ya tendríamos también que $\sigma_{aw}(T)\subseteq\sigma_{ub}(T)$, en resumen, $\sigma_{ub}(T)=\sigma_{aw}(T)$ y T satisface el teorema de a-Browder.

$(ii)\Rightarrow i)$ Ahora estamos suponiendo que T satisface el teorema de a-Browder y $p^a_{oo}(T)=\pi^a_{oo}(T)$ o dicho de otra manera:

$$\sigma_{aw}(T)=\sigma_{ub}(T) \quad \text{y} \quad p^a_{oo}(T)=\pi^a_{oo}(T).$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\Delta_a(T)=\sigma_a(T)\backslash\sigma_{aw}(T)=\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ub}(T)=p^a_{oo}(T)=\pi^a_{oo}(T).$$

$(ii)\Rightarrow iii)$ Sea $\lambda\notin\sigma_{wa}(T)$. En tal caso, por nuestra hipótesis $\lambda\notin\sigma_{ub}(T)$.

Así, $\lambda I-T\in\Phi_+(X)$ y $p(\lambda I-T)<\infty$.

Otra vez tenemos que $\lambda I-T$ es tipo kato en λ y por lo tanto T tiene la SVEP en λ.

$(iii)\Rightarrow ii)$ Ya sabemos que $B_+(X)\subseteq W_a(X)$ y por lo tanto $\sigma_{aw}(T)\subseteq\sigma_{ub}(T)$.

Nos faltaría comprobar que $\sigma_{ub}(T)\subseteq\sigma_{aw}(T)$.

Ahora, si $\lambda\notin\sigma_{aw}(T)$ tenemos que $\lambda I-T$ es tipo Kato y $\lambda I-T$ tiene la SVEP en λ. Otra vez, esto nos implica que $p(\lambda I-T)<\infty$. Así $\lambda I-T\in B_+(W)$ y $\lambda\notin\sigma_{ub}(T)$.

$(ii)\Rightarrow iv)$. Sea $\lambda\in\pi^a_{oo}(T)=p^a_{oo}(T)$.

En tal caso, $\lambda\in iso\sigma_a(T)$ y $\lambda\notin\sigma_{ub}(T)$; es decir, $\lambda I-T\in B_+(X)\subseteq\Phi_+(X)$ de donde obtenemos nuestro resultado.

$(iv)\Rightarrow ii)$. Ya sabemos que $p^a_{oo}(T)\subset\pi^a_{oo}(T)$.

Sea $\lambda\in\pi^a_{oo}(T)$. Así, $\lambda I-T$ es de rango cerrado , $0<\alpha(\lambda I-T)<\infty$ y $\lambda\in iso\sigma_a(T)\subseteq\sigma_a(T)$. En consecuencia T tiene la SVEP en λ y $p(\lambda I-T)<\infty$. De todo lo anterior $\lambda\in\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ub}(T)=p_{00}(T)$.

□

Definición 4.2.1. *Denotamos por $\sigma_2(T)$ al conjunto formado por todos los λ en $\mathbb{C}$ para los cuales: $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ y existe un disco con agujero $D(\lambda) = D(\lambda, \varepsilon)\backslash\{\lambda\}$ tal que $uI - T \in W_+(X)$ y $\ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^\infty(X)$ para cualquier $u \in D(\lambda)$.*

Teorema 4.2.2. *[10]Sea $T \in L(X)$ un operador acotado. Entonces: T satisface el teorema a-Weyl, si y sólo si, $\sigma_2(T) = p^a_{oo}(T)$.*

Prueba:

Suponemos que T satisface el teorema a-Weyl; es decir, que $\Delta_a(T) = \pi^a_{oo}(T)$, por el teorema 4.2.1 T también satisface el teorema a-Browder y $\pi^a_{oo}(T() = p^a_{oo}(T)$.

Ahora, cuando $\lambda \in p^a_{oo}(T)$ podemos asegurar que $\lambda \in iso\sigma_a(T)$ de donde existe un disco con agujero $D(\lambda) = D(\lambda, \varepsilon)\backslash\{\lambda\}$ tal que $\mu I - T$ es subacotado para todo $\mu \in D(\lambda)$. Pero esto a su vez nos asegura que $\mu I - T$ es inyectiva y de rango cerrado. En tal caso, para estos valores $\{0\} = \ker(\mu I - T) \subset (\mu I - T)^\infty(X)$.

Además, $\lambda \in \pi^a_{oo}(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como $\lambda I - T \in B_+(X)$ esto asegura $\lambda I - T \in W_+(X)$ y este conjunto es abierto, de donde, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\mu I - T \in W_+(X)$ sea cual sea μ en $D(\lambda)$.

Así, $\lambda \in \sigma_2(T)$. Falta probar que $\sigma_2(T) \subseteq p^a_{oo}(T)$.

Supongamos que $\lambda \notin p^a_{oo}(T)$.

Caso 1: $\lambda \notin \sigma_a(T)$.

En tal caso $\lambda I - T$ es inyectiva y $\alpha(\lambda I - T) = 0$.

Con lo cual aseguramos que

$$\lambda \notin \sigma_2(T).$$

Caso 2: $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Por reducción a lo absurdo suponemos que $\lambda \in \sigma_2(T)$.

Ahora podemos asegurar que existe un disco con agujero $D(\lambda) = D(\lambda, \varepsilon)\backslash\{\lambda\}$ tal que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ y para cualquier $\mu \in D(\lambda)$:

$$\mu I - T \in W_+(X),$$

$$\ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^\infty(X).$$

Veamos qué pasa con estos valores de μ.

Si $\mu \in \sigma_a(T)$, entonces $\mu \in \sigma_a(T)$ y $\mu I - T \in W_+(X)$.

Por lo tanto $\mu \in \Delta_a(T) = p^a_{oo}(T)$.

En estas circunstancias $\mu I - T \in B_+(X)$.

Si $\mu \notin \sigma_a(T)$. Ahora $\mu I - T$ resulta ser un operador inyectivo de rango cerrado, $p(\mu I - I) = 0$ y $\mu I - T \in B_+(X)$.

En ambas situaciones $\mu I - T$ resulta ser un operador semi Browder superior y tipo Kato. Todo esto aunado al Teorema 2.2.3 nos resulta en que T tiene la SVEP en μ, además por la definición de $\sigma_2(T), \mu I - T$ es semi regular.

Por el teorema 1.3.4, concluimos que $\mu I - T$ es inyectivo.

Por lo tanto $\lambda \in iso\sigma_a(T), 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

De donde $\lambda \in \pi^a_{oo}(T) = p^a_{oo}(T)$ y este es una contradicción que viene de suponer que $\lambda \in \sigma_2(T)$. En resumen $\sigma_2(T) \subseteq p^a_{00}(T)$ con lo que queda probada la igualdad deseada.

Recíprocamente supongamos que $\sigma_2(T) = p^a_{oo}(T)$.
Comprobamos primero que : $p^a_{oo}(T) = \pi^a_{oo}(T)$.

Ya se sabe que $p^a_{oo}(T) \subseteq \pi^a_{oo}(T)$.

Sea $\lambda \in \pi^a_{oo}(T)$. En tal caso $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Como $\lambda \in iso\sigma_a(T)$ si y solo si existe $D(\lambda) = D(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\}$ tal que $\mu I - T$ es sub-acotada para cualquier $\mu \in D(\lambda), \mu I - T$ es inyectivo y $\ker(\mu I - T) = \{0\}$. En consecuencia, $\ker(\mu I - T)$ está contenido en $(\mu I - T)^\infty(X)$. También tenemos que, por ser $\alpha(\mu I - T) = 0$ y $(\mu I - T)(X)$ cerrado, esto nos garantiza que $\mu I - T$ está en $W_a(T)$ para cualquiera de estos valores. Por lo tanto $\lambda \in \sigma_2(T) = p^a_{oo}(T)$.

Según el teorema 4.2.1 bastaría con verificar que T satisface el teorema de a-Browder para concluir nuestra prueba.

Para esto procederemos por reducción a lo absurdo y recordando que el teorema 4.1.2 nos dice que pedir que T satisfaga el teorema de a-Browder es equivalente a que

$$\Delta_a(T) \subseteq \sigma_k(T).$$

Nosotros supondremos que $\Delta_a(T) \nsubseteq \sigma_k(T)$. Es decir que existe

$$\lambda \in \Delta_a(T) \quad \text{y} \quad \lambda \notin \sigma_k(T).$$

Como $\lambda \in \Delta_a(T)$ ya es harto conocido que esto nos asegura que $\lambda I - T$ es tipo Kato. Al juntar esto con el hecho de que $\lambda I - T$ es semi-regular podemos asegurar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\mu| < \varepsilon$, implica que $\mu I - T$ se semi-regular y por lo tanto, $\ker(\mu I - T) \subseteq (\mu I - T)^{\infty}(X)$ para cualquier $|\mu| < \varepsilon$.

Por otra parte, al no estar λ en $\sigma_{aw}(T)$ tenemos que $\lambda I - T \in W_a(T)$ el cual también es un conjunto abierto en $L(X)$. En tal, caso sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para el mismo $\varepsilon < 0$, si $|u| < \varepsilon$, entonces $uI - T \in W_a(X)$.

También al estar $\lambda I - T$ en $\sigma_a(T)$ y $\lambda I - T \in W_a(X)$ podemos asegurar que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Todo lo anterior nos induce a concluir que $\lambda \in \sigma_2(T) = p^a_{oo}(T)$ y por lo tanto $\lambda I - T \in B_+(X)$ de donde $0 < p(\lambda I - T) < \infty$. Pero la finitud de este valor nos asegura que T va a tener la SVEP en λ y esto, en conjunción con que $\lambda I - T$ es semi regular, nos permite nuevamente aplicar el teorema 1.3.4 y concluir que $\lambda I - T$ debe ser inyectivo, ergo $0 = \alpha(\lambda I - T)$ lo cual es una evidente contradicción. Al final tenemos que $\Delta_a(T) \subseteq \sigma_k(T)$, T satisface el teorema de a-Browder y por lo tanto también el teorema de a-Weyl. □

Definición 4.2.2. *Para $T \in L(X)$ definimos el siguiente conjunto:*

$$\sigma_3(T) = \sigma_{wa}(T) \cup \sigma_k(T).$$

Teorema 4.2.3. *[11] Para $T \in L(X)$ se tiene: T satisface el teorema a-Weyl, si y sólo si,*

$$\pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T) = \Delta_a(T).$$

Prueba: Recordemos que

$$\pi_{of}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Suponemos primeramente que T satisface el teorema a-Weyl.

Afirmación 1:

$$\sigma_a(T) = \sigma_{aw}(T) \cup \Delta_a(T).$$

En efecto, si $\lambda \notin \sigma_{wa}(T) \cup \Delta_a(T)$ entonces $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$ y $\lambda \notin \Delta_a(T)$ pero $\lambda \notin \Delta_a(T)$ si $\lambda \notin \sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T)$ y en tal caso $\lambda \notin \sigma_a(T)$ o $\lambda \in \sigma_{aw}(T)$, obviamente en nuestro caso solo puede ocurrir que $\lambda \notin \sigma_a(T)$. Luego $\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{aw}(T) \cap \Delta_a(T)$.

Suponemos ahora que $\lambda \in \sigma_{aw}(T) \cup \Delta_a(T)$.

Caso 1: $\lambda \in \Delta_a(T)$. Acá $\lambda \in \sigma_a(T)$ por definición.

Caso 2: $\lambda \in \sigma_{aw}(T)$. En este caso, si $\lambda \notin \sigma_a(T), \lambda I - T$ es subacotado. Como tal $\lambda I - T \in \Phi_+(X), 0 = \alpha(\lambda I - T) \leq \beta(\lambda I - T)$ y por lo tanto $ind(\lambda I - T) \leq 0$ es decir $\lambda \notin \sigma_{aw}(T)$, hecho que nos genera una contradicción. Luego $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Con esto queda probada nuestra afirmación.

Afirmación 2 :

$$\sigma_a(T) = \sigma_3(T).$$

Verifiquémoslo. Por el teorema 4.2.1 al T satisfacer el teorema de a-Weyl también satisface el teorema de a-Browder y por el teorema 4.1.2 $\Delta_a(T) \subseteq \sigma_k(T)$. Con estas premisas:

$$\sigma_a(T) = \sigma_{aw}(T) \cup \Delta_a(T) \subseteq \sigma_{aw}(T) \cup \sigma_k(T) = \sigma_3(T).$$

De la cadena anterior:

$$\sigma_a(T) \subseteq \sigma_3(T).$$

Sea $\lambda \in \sigma_3(T) = \sigma_{aw}(T) \cup \sigma_k(T)$.

Caso 1: $\lambda \in \sigma_{aw}(T)$.

Acá $\lambda I - T$ no es Weyl superior. Ahora si $\lambda I - T$ no es Fredholm superior, automáticamente $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Si $\lambda I - T \in \phi_+(X)$ pero $\lambda I - T$ no es Weyl superior $\alpha(\lambda I - T) > \beta(\lambda I - T) \geq 0$.

Nuevamente $\lambda I - T$ no es inyectiva y $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Caso 2: $\lambda \in \sigma_k(T)$.

Una posibilidad es que $(\lambda I - T)(X)$ no sea cerrado, de donde $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Si la situación es que $\ker(\lambda I - T)$ no está contenido en $(\lambda I - T)^\infty(X)$, existe un $x \in \ker(\lambda I - T)$ tal que $x \notin (\lambda I - T)^\infty(X)$ por este hecho $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}, \lambda I - T$ no es inyectiva y $\lambda \in \sigma_a(T)$.

En cualquiera de los casos $\lambda \in \sigma_a(T)$ y ya podemos asegurar que

$$\sigma_3(T) = \sigma_a(T).$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T) &= \pi_{of}(T) \cap iso\sigma_a(T) \\
&= \pi^a_{oo}(T) \\
&= \Delta_a(T).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, suponemos que

$$\pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T) = \Delta_a(T).$$

Ahora tomamos $\lambda \in \pi^a_{oo}(T)$.

Por la definición de este conjunto $\lambda \in iso\sigma_a(T)$ y en consecuencia a $\sigma_a(T)$. Pero al estar λ en $iso\sigma_a(T)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\mu \in D_\lambda = D(\lambda, \varepsilon) \backslash \{\lambda\}$ entonces $\mu I - T$ va a ser subacotada.

Por esta propiedad $\mu I - T$ es de rango cerrado y $\ker(\mu I - T) = \{0\} \subset (\mu I - T)^\infty(X)$.

Es decir, que $\mu \notin \sigma_k(T)$ sea cual sea $\mu \in D_\lambda$.

Al ser $\mu I - T$ inyectiva

$$\alpha(\mu I - T) = 0 \leq \beta(\mu I - T) \quad \text{de donde} \quad \mu \notin \sigma_{aw}(T).$$

Supongamos ahora que $\lambda I - T$ es semi-regular. Como λ no se acumula en $\sigma_a(T)$, se concluye que T tiene la SVEP en λ y por el Teorema 1.3.4 $\lambda I - T$ es inyectiva. Esto conradice que $0 < \alpha(\lambda I - T)$. Luego $\lambda \in \sigma_k(T) \subseteq \sigma_3(T)$.

De todo lo anterior, λ es un punto aislado de $\sigma_3(T)$ y en consecuencia:

$$\lambda \in \pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T) = \Delta_a(T).$$

Así $\pi^a_{oo}(T) \subseteq \Delta_a(T)$. Tomemos ahora $\lambda_0 \in \Delta_a(T)$.

Probemos primero que: si $\lambda \notin \sigma_3(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_a(T)$.

Ahora, si $\lambda \notin \sigma_3(T)$, entonces $\lambda I - T$ es Weyl superior y semi-regular.

Como todo Weyl superior es tipo Kato y $W_a(X)$ es abierto en $L(X)$ al utilizar el teorema 1.2.9 podemos asegurar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_1 - \lambda| < \varepsilon \Rightarrow \lambda_1 I - T$ es Weyl superior y semi regular.

Es decir que $\lambda_1 \notin \sigma_3(T)$ sea cual sea $\lambda_1 \in D(\lambda, \varepsilon)$.

Ahora si, $\lambda_1 \in \sigma_a(T)$ este también estaría en $\Delta_a(T) = \pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T)$ lo cual contradice que $\lambda_i \notin \sigma_3(T)$.

Pero este razonamiento también vale para λ y en estas condiciones $\lambda \notin \sigma_a(T)$.

Ahora retomando el hecho de que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \Delta_a(T) &= \sigma_a(T) \backslash \sigma_{aw}(T), \\ &= \pi_{of}(T) \cap iso\sigma_3(T). \end{aligned}$$

Concluimos que $\lambda_0 \in iso\sigma_3(T)$ y $\lambda_0 \in \sigma_a(T)$. Nuevamente podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < |u - \lambda_0| < \delta &\Rightarrow u \notin \sigma_3(T), \\ &\Rightarrow u \notin \sigma_a(T). \end{aligned}$$

Es decir que $\lambda_0 \in iso\sigma_a(T)$. Pero $\lambda_0 \in \pi_{of}(T)$, de donde $0 < \alpha(\lambda_0 I - T) < \infty$ y por lo tanto $\lambda_0 \in \pi_{oo}(T)$. Ergo $\Delta_a(T) \subseteq \pi^a_{00}$, podemos concluir que estos conjuntos son iguales y T satisface el teorema de a-Weyl.

Bibliografía

[1] AIENA P., (2004). *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers.* Klumer Acad. Publishers.

[2] AIENA, P. (2007). *Semi-Fredholm Operators, Perturbation theory and localized SVEP.* Ediciones IVIC.

[3] AIENA P., (2005). *Clases of Operators Satistying a Weyl's teorem*, Studia Maths. **169**, 105-122.

[4] AIENA, P., M.T.BIONDI A., (2004) *Weyl's and Browder theorems though the quasi-nilpotent of an operator:.* To ppear in London Math Society Notes. Procedings of the V International Conference on Banach Spaces, Caceres.

[5] AIENA P., M.T. BIONDI A., (2005) *Browder's theorem and localized SVEP.* Mediterranean Journ. of Math. 2, 137-151.

[6] AIENA P., CARPINTERO, E. ROSAS, (2005) *Some characterization of operators satisfying a-Browder theorem,* J. Math. Anal. Appl. **311**, 530-544.

[7] AIENA P., COLASANTE M., (2002) *Operators which have a closed quasi-nilpotent part,* Proc. Amer. Math. Soc. **130**, (9).

[8] AIENA P., O. MONSALVE, (2000) *Operators which do not have the single valued extensión property.* J. Math. Anal. Appl. **250**,435-448.

[9] AIENA P., E. ROSAS, (2003) *The single valued extensión property at the points of the approsimate point spectrum,* J. Math Anal. Appl. **279**(1). To appear in J. Math. Anal. Appl.

[10] X. CAO,, M, GUO, B. MENG, (2003) *Weyl spectra and Weyl's theorem,* J. Math Anal. Appl. **288**,758-767.

[11] X. CAO, M. GUO, B. MENG (2003) *A note on Weyl's theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. **133**(10), 2977-2984.

[12] L.A. COBURN (1981) *Weyl's theorem for nonnormal operators,* Research Notes in Mathematics **51**.

[13] DUGGAL B.P., S.V. DJORDJECIV, C. KUBRUSKY. (2005) *Kato type operators and Weyl's theorem,* J. Math Anal. Appl. **309**, No. 2, 433-444.

[14] N. DUNFORD (1952) *Spectral theory I. Resolution of the identity,* Pacific J. Math **2**, 559-614.

[15] N. DUNFORD (1954) *Spectral operators,* Pacific J. Math. **4**, 321-354.

[16] J.K. FINCH (1975) *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific J. Math **58**, 61-69.

[17] R.E. HARTE (1988) *Invertibility and singularity for bounded kinear operators,* Wiley, New York. Clarendon Press, Oxford.

[18] Y. M. HAN, A. H. KIM (2004) *A note on *-paranormal operators,* Int. Eq. Oper. Theory **49**(10), 435-444.

[19] H. HEUSER (1982) *Functional Analysis,* Marcel Dekker, Nw York.

[20] K.B. LAURSEN, M. M. NEUMANN (2000) *Introduction to local spectral theory,*

[21] M. MBEKHTA (1990) *Sur la theorie spectrale locale et limite des nilpotents,* Proc. Amer. Math. Soc. **110**, 621-631.

[22] V. MüLLER (2003) *Spetral theory of linears operators. Operator Theory, Advances and Applications,* **139**, Birkäuser.

[23] V. RAKOčEVIć (1984) *On the essential aproximate point spectrum II,* Math. Vesnik **36**, 89-97.

[24] V. RAKOčEVIć (1996) *Semi-Browder operators and perturbations,* Studia Math. **122**, 131-137.

[25] P. VRBOVÁ (1973a) *On local spectral properties of operators in Banach spaces,* Czechoslovak Math. J. **23**(98), 483-92.

[26] H. WEYL (1909) *Uber beschrankte quadratiche Formen, deren Differenz vollsteig ist,* Rend. Circ. Mat. Palermo **27**, 373-392.