Φ-VARIACIÓN ACOTADA EN EL SENTIDO DE RIESZ PARA FUNCIONES DE n-VARIABLES

Jurancy Josefina Ereú

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2012

Φ-VARIACIÓN ACOTADA EN EL SENTIDO DE RIESZ PARA FUNCIONES DE n-VARIABLES

Por

Jurancy Josefina Ereú

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Asociado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2012

Agradecimiento

Primeramente agradezco a Dios Padre Celestial dador de la vida, por haberme dado la gracia, fuerzas y luz para la realización de este trabajo.

A mi madre, ser especial que Dios me ha dado, la cual ha estado siempre conmigo dándome su amor, consejo y apoyo incondicional. Dios te bendiga mamá.

A mis amigos Liliana, Lucy, Miguel y Mireya, que han estado a mi lado en todo momento, ayudándome, animándome y brindándome su incondicional amistad, GRACIAS AMIGOS son de gran bendición en mi vida.

Al Dr. José Giménez, tutor de mis estudios doctorales, por su amistad, apoyo incondicional y sus invaluables aportes académicos para la realización de este trabajo.

A todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en la realización de este trabajo.

A todos muchas gracias, que Dios les bendiga.

Resumen

Usando las técnicas clásicas de Hardy-Vitali, en este trabajo se introduce la clase de funciones de varias variables con Φ-variación acotada en el sentido de Riesz. Presentamos algunas de las principales propiedades de ésta clase; entre ellas, mostramos que esta clase es un espacio normado. Demostramos además que si el operador de composición (Nemitskij) envía un subconjunto del espacio de Φ-variación acotada, en el sentido de Riesz, dentro de otro espacio del mismo tipo, y si este es uniformemente continuo, entonces la función generadora del operador es una función afín en la variable funcional.

Introducción

El interés generado por la noción de funciones de variación acotada en el sentido de Jordan en [15], ha conducido a algunas generalizaciones del concepto, principalmente dirigidas a la búsqueda de una clase más amplia de funciones cuyos elementos tengan series de Fourier puntualmente convergente. Como en el caso clásico, estas generalizaciones han encontrado muchas aplicaciones en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales e integrales (véase, [5]).

Durante los años (1905-1906), desde el punto de vista espacial, E. G. Vitali ([30]) y G. H. Hardy ([13]), extienden la noción de variación acotada a funciones definidas sobre el plano. Existen otras formas de extender al plano la noción de variación acotada, entre las cuales tenemos las de: Fréchet, Hardy-Krause, Arzelà, Pierpont, Tonelli, Hahn. *C.R. Adams* y *J.A. Clarkson* (ver en [11] y [12]) demuestran algunas propiedades importantes de las clases de funciones con variación acotada en estos sentidos y las relaciones entre ellas, las cuales han permitido otros trabajos referente a la noción de variación de Hardy-Vitali. En el año 2002, *V.V. Chistyakov* (ver en [7]) retomó el estudio de esta clase de funciones, demostrando un teorema de representación para la clase de funciones definidas en un rectángulo y con variación acotada en el sentido de Hardy–Vitali, además que es posible dotar a esta clase de funciones de una estructura de Álgebra de Banach. En el 2009, W. Aziz en [2] introduce la noción de φ–variación acotada en el sentido de Riesz para el caso de funciones definidas en un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ a valores reales y generalizan resultado de Chistyakov. Para el año 2010 M. Bracamonte, J. Giménez y N. Merentes en [4] presentan la noción dada por Aziz pero a funciones con valores en un semigrupo métrico.

Basados en [2] y [4], en este trabajo extendemos la noción de de función de acotada Φ-variación en el sentido de Riesz, para funciones de varias variables reales que toman valores en un espacio vectorial métrico, dándole a este espacio de funciones una estructura de espacio normado.

En problemas de control, relacionados con la existencia y/o expansión de soluciones de ecuaciones funcionales, integrales o diferenciales, aparece naturalmente el denominado operador de Composición (no lineal) o Nemytskij. Las ecuaciones que modelan dichos problemas pueden expresarse como una ecuación de la forma

$$Tf = g$$

con T un operador no lineal actuando sobre un cierto espacio de funciones.

El operador T adopta en muchas ocaciones la forma

$$T = I + k \circ F,$$

donde I es el operador identidad, k algún operador lineal y F el operador de Composición (no lineal) o Nemytskij, generado por una función h.

Al estudiar dichos problemas es necesario, en primer lugar, constatar el buen comportamiento del operador de Nemytskij en el espacio donde se plantea la ecuación en cuestión.

Este operador de composición (no lineal) juega un papel central en varios campos matemáticos, por ejemplo, en la teoría de las ecuaciones integrales no lineales y ha sido estudiado a fondo. Quizás el problema más importante sobre la teoría de los operadores de composición, es establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen que este operador asigna un espacio de función dada en sí mismo. Estas condiciones se denominan condiciones de actuación (por ejemplo, dimensionalidad (no lineal), continuidad, las condiciones locales o globales de Lipschitz, etc.). Referimos al lector al célebre libro [1], por J. Appell y P. P. Zabrejko, en el cual se exponen los hechos básicos y resultados relativos a los operadores de composición.

En este trabajo se da el siguiente resultado basado en el trabajo [18] sobre operadores de composición: si el operador de composición (Nemitskij) envía un subconjunto del espacio de Φ-variación acotada, en el sentido de Riesz, dentro de otro espacio del mismo tipo, y si este es uniformemente continuo, entonces la función generadora del operador es una función afín en la variable funcional.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas nociones de variación acotada las cuales fueron dando lugar a la noción de funciones de variación acotada en el sentido de Riesz sobre intervalos de la recta y sobre rectángulos en $\mathbb{R}^2$, así como algunos resultados básicos de esta noción central del trabajo.

1.1. Variación acotada en una variable

1.1.1. En el sentido de Jordan

En el año 1881, *C. Jordan* introduce en [15] el concepto de **función de variación acotada en un intervalo** $[a,\, b]$, como aquellas funciones $u : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, tales que el número

$$V(u,\, [a,\, b]) := \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{m} \mid u(t_i) - u(t_{i-1}) \mid,$$

es finito, donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a,\, b]$.

Esta clase de funciones se denota por $BV[a,\, b]$ y la misma posee una estructura de álgebra (ver [17]) y de espacio normado con la norma

$$\|u\|_{BV[a,\,b]} = \|u\|_{BV} := |u(a)| + V(u, [a,\, b]), \quad u \in BV([a,\, b]).$$

Además el espacio $BV[a,\, b]$ es completo con esta norma y un álgebra de Banach, hecho demostrado en [23].

1.1.2. En el sentido de Wiener

En 1924, *N. Wiener* en [31], introduce la clase de funciones reales de una variable real de **p-variación acotada**, como aquellas funciones

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que el número

$$V^{\mathrm{W}}(f, [a, b]) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones ξ de $[a, b]$ que tienen la forma $\xi :\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$.

1.1.3. En el sentido de Young

L. C. Young, en el año 1937 (ver [28]), generaliza la noción dada por Wiener al caso de funciones de φ**-variación acotada** en el intervalo $[a, b]$, en donde φ es una φ-función la cual se define a continuación.

Una φ*-función*, [8], es una función $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua, convexa, estrictamente creciente que satisface

- $\Phi(0) = 0$,
- $\Phi(t) > 0$ para $t > 0$,
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$,

Una propiedad importante de las φ funciones es la condición, llamada por algunos autores, condición ∞_1: Se dice que la φ-función Φ satisface la condición ∞_1 si $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = \infty$.

Cualquier φ-función es estrictamente creciente y su inversa es continua. Además las funciones $t \longmapsto \dfrac{\Phi(t)}{t}$ y $t \longmapsto t\Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ son no decrecientes para $t > 0$. (Ver [6]).

Una φ-función Φ satisface la condición Δ_2, cerca de infinito, si existen constantes $K > 0$ y $x_0 > 0$ de tal forma que

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x) \quad \text{para todo} \quad x \geq x_0. \tag{1.1.1}$$

L. C. Young, (ver [28]), definie la clase de las funciones que tienen φ–**variación acotada en el sentido de Wiener**, en el intervalo $[a,\ b]$, como aquellas funciones $u :\ [a,\ b] \to \mathbb{R}$, tales que el número

$$V_{\varphi}^{\mathrm{W}}(u) = V_{\varphi}^{\mathrm{W}}(u,\ [a,\ b]) := \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{m} \varphi\Big(\ |\ u(t_i) - u(t_{i-1})\ |\ \Big),$$

es finito, donde φ es una φ–función y el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\Pi :\ a = t_0 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a,\ b]$.

La clase de las funciones $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ que tienen φ–variación finita en el sentido de Wiener en el intervalo $[a, b]$, se denota por $V_\varphi^{\mathrm{W}}[a, b]$. Esta clase de funciones no es necesariamente un espacio vectorial ya que, *J. Musielak* y *W. Orlicz* en [25] demustran el siguiente resultado:

Teorema 1.1.1 ([25])**.** *$V_\varphi^{W}[a, b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ verifica la llamada condición Δ_2.*

1.1.4. En el Sentido de Riesz

Otra clase de variaciones introducidas en el contexto del análisis funcional fue definida por *F. Riesz* en 1910, (ver [27]), de la manera siguiente: sean $1 < p < \infty$ y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que u tiene **p–variación acotada en el intervalo $[a, b]$ en el sentido de Riesz** si el número

$$V_p^R(u) = V_p^R(u; [a, b]) := \sup_\pi \sum_{j=1}^{m} \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}} \tag{1.1.2}$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a, b]$.

El número $V_p^R(u; [a, b])$ se denomina **p–variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a, b]$**. Esta clase de funciones es un espacio vectorial el cual es denotado por $RV_p[a, b]$.

Este espacio posee una estructura de álgebra y también es un espacio de Banach (ver [27]) con la norma

$$\|u\|_p^R := |u(a)| + \left(V_p^R(u)\right)^{1/p}, \quad u \in RV_p[a, b].$$

En 1910 *F. Riesz*(ver [27]) obtuvo la siguiente caracterización del espacio $RV_p[a, b]$.

Lema 1.1.2 (Lema de Representación de Riesz [27])**.** *Sea $1 < p < \infty$. Entonces $u \in RV_p[a, b]$ si y sólo si $u \in AC[a, b]$ y $u' \in L_p[a, b]$. Además*

$$V_p^R(u; [a, b]) = \int_a^b |u'(t)|^p dt = \|u'\|_{L_p[a, b]}^p.$$

Comentarios

1.- En el caso $p = 1$, el Lema de Riesz no es válido ya que existen funciones de variación acotada ($RV_1[a,\, b] = BV[a,\, b]$) que no son continuas, menos aún, absolutamente continua. Sin embargo, *Varberg* [29] demostró que, si $u \in AC[a,\, b]$, entonces

$$V(u; [a,\, b]) = \int_a^b |u'(t)|dt. \tag{1.1.3}$$

2.- El concepto de p–variación puede generalizarse para funciones $u : [a,\, b] \to \mathbf{X}$, donde $\mathbf{X}$ es un espacio métrico o normado, cambiando en la expresión (1.1.2) el numerador por $d(u(t_i), u(t_{i-1}))$ o $\|u(t_i) - u(t_{i-1})\|$ según sea el caso. Aunque el Lema de Representación de Riesz no se habia podido generalizar, es conocido lo siguiente: *si* $\mathbf{X}$ *es un espacio de Banach, tal que toda función* $u : [a,\, b] \to \mathbf{X}$ *que tiene variación acotada, posee derivada c.s. en* $[a, b]$*, entonces para* $u \in RV_p([a,\, b]; \mathbf{X})$ *se tiene que* $u' \in L_p[a,\, b]$ *y*

$$V_p^R(u; [a,\, b]) = \int_a^b \|u'(t)\|^p dt.$$

3.- En todo caso, se demuestra en [23], para $1 \leq q \leq p < \infty$ que

$$Lip([a, b]; \mathbf{X}) \subseteq RV_p([a, b]; \mathbf{X}) \subseteq RV_q([a, b]; \mathbf{X}) \subseteq AC([a, b]; \mathbf{X}) \subseteq BV([a, b]; \mathbf{X}).$$

1.1.5. φ–variación acotada en el sentido de Riesz

La noción de p–variación acotada presentada por Riesz fue generalizada en 1953 por *Medvedev* (ver [24]), definiendo una función $u : [a,\, b] \to \mathbf{X}$ tiene **φ–variación acotada en el intervalo $[a,\, b]$ en el sentido de Riesz**, si el número

$$V_\varphi^R(u) = V_\varphi^R(u; [a,\, b]) := \sup_\pi \sum_{i=1}^m \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \tag{1.1.4}$$

es finito, donde φ es una φ–función y el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a,\, b]$. El número $V_\varphi^R(u; [a,\, b])$ se denomina φ–variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a,\, b]$ y la clase de estas funciones es denotada por $V_\varphi^R[a,\, b]$.

La clase $V_\varphi^R[a,\, b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ satisface la condición Δ_2.

La clase $V_\varphi^R[a,\, b]$ es un conjunto simétrico y convexo, luego el espacio generado por esta clase es

$$\left\langle V_\varphi^R[a,\, b]\right\rangle = \left\{u:\ [a,\, b]\to\mathbb{R}\Big/\ \exists\lambda>0;\ V_\varphi^R(\lambda u)<\infty\right\},$$

y es denotado por $RV_\varphi[a,\, b]$ y lo denominaremos espacio de las funciones de φ–variación acotada en el sentido de Riesz.

El subconjunto Λ de $RV_\varphi[a,\, b]$ definido por:

$$\Lambda = \left\{u:\ [a,\, b]\to\mathbb{R}\Big/\ V_\varphi^R(u)<1\right\}$$

es convexo, absorbente y balanceado; y así, el funcional de Minkowski asociado a esta clase es una seminorma. Por tanto, $RV_\varphi[a,\, b]$ tiene estructura de espacio de Banach (ver [26]) con la norma

$$\|u\|_\varphi^R := |u(a)| + \inf\left\{\varepsilon>0:\ V_\varphi^R(u/\varepsilon)\le 1\right\},\quad u\in RV_\varphi[a,\, b].$$

Además se tiene las siguientes estimaciones

1. $V_\varphi^R\Big(u/\|u\|_\varphi^R\Big)\le 1$, si $\|u\|_\varphi^R\neq 0$.

2. $c>\|u\|_\varphi^R$ si y sólo si $V_\varphi^R\Big(u/c\Big)\le 1$.

En 1987, *L. Maligranda* y *W. Orlicz* en [17] demuestran que:

Si φ es una φ–función, entonces $V_\varphi^R[a,\, b]\subseteq BV[a,\, b]$ y $V_\varphi^R[a,\, b]=BV[a,\, b]$ si, y sólo si, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\varphi(t)}{t}<\infty$.

1.2. Variación acotada en dos variables

Entre 1904-06 *G. Vitali* y *G. Hardy* (ver [13, 30]) extienden el concepto funciones de variación acotada introducido por *Jordan* para funciones definidas en un rectángulo $I_b^a=[a_1,\, b_1]\times[a_2,\, b_2]\subset\mathbb{R}^2$

Consideremos las siguientes notaciones las cuales están en los trabajos [11, 12, 13, 30] y la usaremos en este trabajo

- sean $\xi=\left\{t_i\right\}_{i=0}^m$ y $\eta=\left\{s_j\right\}_{j=0}^n$ particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$, es decir,

$$\begin{aligned}\xi &:\quad a_1=t_o<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=b_1\\ \eta &:\quad a_2=s_o<s_1<\cdots<s_{n-1}<s_n=b_2\end{aligned}$$

- Para $x_2 \in [a_2, b_2]$ fijo, sea $u(\cdot, x_2)(t) = u(t, x_2)$ para todo $t \in [a_1, b_1]$.
- $$\Delta_{10}u(t_i, s_j) = u(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j)$$

$$\Delta_{01}u(t_i, s_j) = u(t_i, s_j) - u(t_i, s_{j-1})$$

$$\Delta_{11}u(t_i, s_j) = u(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1})$$

Utilizando las notaciones anteriores se puede establecer la siguiente definición:

Definición 1.2.1 ([11]). a) Sea $u: I_a^b \to \mathbb{R}$ una función. Se define la **variación en el sentido de Jordan** de u en $[a_1, b_1] \times \{x_2\}$ por

$$V_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, x_2)) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \left|\Delta_{10}u(t_i, x_2)\right|$$

donde el supremo es tomado sobre todo el conjunto de las particiones ξ del intervalo $[a_1, b_1]$.

b) De manera similar para $x_1 \in [a_1,\, b_1]$ fijo se define la **variación en el sentido de Jordan** de u en $\{x_1\} \times [a_2, b_2]$, por

$$V_{[a_2,b_2]}(u(x_1, \cdot)) := \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{n} \left|\Delta_{01}u(x_1, s_j)\right|$$

donde el supremo es tomado sobre todo el conjunto de las particiones η del intervalo $[a_2, b_2]$.

c) Se define la **variación de Hardy-Vitali** (de dos dimensiones) de $u: I_a^b \to \mathbb{R}$, por

$$V_{I_a^b}(u) := \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|\Delta_{11}u(t_i, s_j)\right|$$

donde el supremo es tomado sobre el conjunto de todas las particiones (ξ, η) de $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

d) La **variación total acotada** de u, se define como

$$\begin{aligned} TV(u) = TV(u, I_a^b) &:= V_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, a_2)) + V_{[a_2,b_2]}(u(a_1, \cdot)) + V_{I_a^b}(u) \\ &= V_{[a_1,b_1]}(u) + V_{[a_2,b_2]}(u) + V_{I_a^b}(u). \end{aligned}$$

e) Se dice que la función $u:\ I_a^b \to \mathbb{R}$ tiene **variación total acotada** si

$$TV(u) = V_{[a_1,b_1]}(u) + V_{[a_2,b_2]}(u) + V_{I_a^b}(u) < \infty.$$

La clase de las funciones de variación total finita, es denotada $BV(I_a^b)$, es decir

$$BV(I_a^b) = BV(I_a^b,\mathbb{R}) = \Big\{u : I_a^b \to \mathbb{R} \mid TV(u) < \infty\Big\}.$$

Chistyakov en [7] demuestra que $BV(I_a^b,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach y además es un álgebra de Banach, con respecto a la norma $\|f\| = |f(a)| + TV(f, I_a^b)$, para toda $f \in BV(I_a^b,\mathbb{R})$ y que $\|fg\| \leq 4\|f\|\cdot\|g\|,\ \ f,g \in BV(I_a^b,\mathbb{R})$.

1.2.1. ϕ–variación acotada en el sentido de Riesz para funciones $u:\ I_a^b \to \mathbb{R}$.

En varios trabajos ([19, 20, 21, 22]) han desarrollado la teoría de las funciones de φ–variación acotada en el sentido de Riesz, para funciones $u:\ [a,b] \to \mathbb{R}$. Presentamos ahora basados en el trabajo [2] la teoría de las funciones de φ–variación acotada en el sentido de Riesz para las funciones $u:\ I_a^b \to \mathbb{R}$.

A partir de la definición de la φ–variación de Riesz dada en (1.1.4) se introduce la noción de φ–variación acotada en el sentido de Riesz para funciones u definidas en el rectángulo $I_a^b \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.2 ([2])**.** Sea $u:\ I_a^b \to \mathbb{R}$ una función decimos que

a.- La φ–**Variación en el sentido de Riesz** de la función $u(\cdot,x_2)$ en $[a_1,\, b_1] \times \{x_2\}$ es definida por:

$$V^R_{\varphi,[a_1,\,b_1]}(u(\cdot,x_2)) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \varphi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{|t_i - t_{i-1}|}\right]|t_i - t_{i-1}| \tag{1.2.1}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto todas las particiones ξ del intervalo $[a_1,\, b_1]$.

b.- De manera similar, sí $x_1 \in [a_1,\, b_1]$ fijo, para la función $u(x_1,\cdot) :\ \{x_1\} \times [a_2,\, b_2] \to \mathbb{R}$ se define la φ–**Variación en el sentido de Riesz** por:

$$V^R_{\varphi,[a_2,\,b_2]}(u(x_1,\cdot)) := \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{n} \varphi\left[\frac{|\Delta_{01}u(x_1,s_j)|}{|s_j - s_{j-1}|}\right]|s_j - s_{j-1}| \tag{1.2.2}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones η del intervalo $[a_2,\, b_2]$.

c.- La φ**–Variación bidimensional en el sentido de Riesz** es:

$$V_{\varphi}^{R}(u) := \sup_{\xi,\eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{|\Delta t_i||\Delta s_j|}\right] \cdot |\Delta t_i||\Delta s_j| \tag{1.2.3}$$

donde el supremo se conidera sobre el conjunto de todas las particiones (ξ,η) del rectángulo $I_a^b \subset \mathbb{R}^2$.

d.- La φ**–Variación Total Acotada en el sentido de Riesz** de u, denotada $TV_{\varphi}^{R}(u)$, se define como:

$$TV_{\varphi}^{R}(u) := V_{\varphi,[a_1,b_1]}^{R}(u(\cdot,a_2)) + V_{\varphi,[a_2,b_2]}^{R}(u(a_1,\cdot)) + V_{\varphi}^{R}(u). \tag{1.2.4}$$

e.- La **clase de todas las funciones** $u : I_a^b \to \mathbb{R}$ **que tienen** φ**–variación total acotada en el sentido de Riesz**, se denota por $V_{\varphi}^{R}(I_a^b)$; esto es,

$$V_{\varphi}^{R}(I_a^b) = V_{\varphi}^{R}(I_a^b, \mathbb{R}) := \{u : I_a^b \to \mathbb{R} / \quad TV_{\varphi}^{R}(u) < \infty\}. \tag{1.2.5}$$

Presentamos algunas propiedades de la clase de funciones de φ–variación acotada en el sentido de Riesz definida en un rectángulo I_a^b de $\mathbb{R}^2$ demostradas en [2].

Proposición 1 ([2])**.** *Sean φ una φ–función y $u : I_a^b \to \mathbb{R}$, entonces:*

a.- $TV_{\varphi}^{R}(u) \geq 0$; *para toda función* $u \in V_{\varphi}^{R}(I_a^b)$.

b.- La función $TV_{\varphi}^{R}(\cdot) : V_{\varphi}^{R} \to \mathbb{R}$ *es par; es decir,* $TV_{\varphi}^{R}(u) = TV_{\varphi}^{R}(-u)$.

c.- Si $u \in V_{\varphi}^{R}(I_a^b)$*, entonces* u *es acotada en* I_a^b.

d.- $TV_{\varphi}^{R}(u) = 0$ *si y sólo si* $u =$ *constante.*

e.- φ *es convexa si y sólo si* $TV_{\varphi}^{R}(\cdot)$ *es convexa.*

f.- $V_{\varphi}^{R}(I_a^b) \subset BV(I_a^b)$.

g.- Si $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\varphi(t)}{t}$ *es finito, entonces* $V_{\varphi}^{R}(I_a^b) = BV(I_a^b)$.

Proposición 2 ([2])**.** *Sea $u : I_a^b \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:*

i.– $|\Delta_{10}u(t_i,y)| \leq L_1|\Delta t_i|$.

ii.– $|\Delta_{01}u(x,s_j)| \leq L_2|\Delta s_j|$ *y*

iii.– $|\Delta_{11}u(t_i,s_j)| \leq L_3|\Delta t_i||\Delta s_j|$.

Entonces $u \in BV_{\varphi}^{R}(I_a^b)$.

Capítulo 2

Variación en n variables

En este capítulo presentamos una generalización del concepto de funciones de Φ variación acotada, en el sentido de Riesz para funciones de varias variables con valores en un semigrupo métrico. Esto generaliza trabajos realizados en [2] y en [4], en los cuales, los autores presentan la noción de funciones de Φ variación acotada, en el sentido de Riesz, definidas sobre rectángulos en el plano con valores en $\mathbb{R}$ y en un semigrup métrico, respectivamente.

2.1. Notaciones y definiciones básicas

En esta sección presentamos la definición y aspectos básicos de la noción de n-dimensional Φ-variación para funciones definidas sobre rectángulos de $\mathbb{R}^n$ que toma valores en un *semigrupo métrico* (ver [9]).

Definición 2.1.1. Un *semigrupo métrico* es una estructura $(M, d, +)$ donde $(M, +)$ es un semigrupo abeliano y d es una métrica invariante por traslación sobre M.

En particular, la desigualdad triangular implica que para todo $u, v, p, q \in M$,

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq d(p,q) + d(u+p, v+q), \quad \text{and} \\ d(u+p, v+q) &\leq d(u,v) + d(p,q). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

En este trabajo usaremos la siguientes notaciones: $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}_0$) denota el conjunto de todos los enteros positivos (resp. enteros no negativos) y un punto típico de $\mathbb{R}^n$ es denotado como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) := (x_i)_{i=1}^n$; pero, los vectores unitarios canónicos de $\mathbb{R}^n$ son denotados por $\mathbf{e_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; esto es, $\mathbf{e_j} := (e_r^{(j)})_{r=1}^n$ donde, $e_r^j := \begin{cases} 0 & \text{if } r \neq j \\ 1 & \text{if } r = j. \end{cases}$.

La n-upla cero $(0, 0, \dots, 0)$ se denotará por $\mathbf{0}$, y por $\mathbf{1}$ la n-upla $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, con $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, es una n-upla de enteros no negativos entonces llamaremos a α un *multi-índice*.

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ usaremos la notación $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ para decir que $a_i < b_i$ para cada $i = 1, ..., n$ y de manera similar diremos para $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} > \mathbf{b}$. Si $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, el conjunto $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ será llamado un *n-dimensional intervalo cerrado*. El volumen euclideano de un n-dimensional intervalo cerrado se denotará por $Vol\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; esto es, $Vol\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Además, para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ usaremos las notaciones

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \qquad \text{y} \qquad \alpha\mathbf{x} := (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n).$$

Denotaremo por $\mathcal{N}$ al conjunto de todas las funciones $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continuas, convexas y estrictamente crecientes tales que $\Phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = +\infty$, llamadas anteriormente φ-funciones.

$\mathcal{N}_\infty$ es el conjunto de todas las funciones $\Phi \in \mathcal{N}$, para la cual la condición Orlicz (también llamada condición ∞_1) se sigue: $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty$.

Definamos ahora dos mportntes conjuntos.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &:= \{\theta \in \mathbb{N}_0^n : \theta \leq \mathbf{1} \text{ y } |\theta| \text{ es par } \} \\ \mathcal{O}(n) &:= \{\theta \in \mathbb{N}_0^n : \theta \leq \mathbf{1} \text{ y } |\theta| \text{ es impar } \}. \end{aligned}$$

Observe que estos conjuntos están relacionados de manera uno a uno; de hecho, si $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathcal{E}(n)$ entonces definimos $\widetilde{\theta} := (1 - \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \mathcal{O}(n)$, y esta operación es claramente invertible.

En lo que sigue M se supondrá un semigrupo métrico y $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un n-dimensional intervalo cerrado.

2.2. Funciones de Φ-*variación acotada*

Definición 2.2.1 ([10, 11, 30]). Dada una función $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to M$, Definimos la *n-dimensional diferencia de Vitali* de f sobre un n-dimensional intervalo $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, por

$$\Delta_n(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) := d\left(\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}), \sum_{\theta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) \right). \qquad (2.2.1)$$

Esta diferencia es también llamada *diferencia mixta* y es usalmente asociada a los nombres de Vitali, Lebesgue, Hardy, Krause, Fréchet y De la Vallée Poussin ([10, 11, 14]).

Ahora, para definir la Φ-variation de una funciones $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to M$, consideramos particiones tipo *malla* de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; esto es, particiones de la forma

$$\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times ... \times \xi_n \quad \text{con} \quad \xi_i := \{t_j^{(i)}\}_{j=0}^{k_i}, \ \ i = 1, \dots, n. \tag{2.2.2}$$

donde, $\{k_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{N}$ y para cada i, ξ_i es una partición de $[a_i, b_i]$. El conjunto de todas las particiones tipo malla de un intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ será denotado por $\pi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Un punto en una partición tipo red ξ es llamado un *nodo* y este es de la forma

$$\mathbf{t}_\alpha := (t_{\alpha_1}^{(1)}, t_{\alpha_2}^{(2)}, t_{\alpha_3}^{(3)}, ..., t_{\alpha_n}^{(n)})$$

donde $\mathbf{0} \leq \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \leq \kappa$, con $\kappa := (k_i)_{i=1}^n$.

En aras de la simplicidad en la notación, simplemente escribiremos $\xi = \{\mathbf{t}_\alpha\}$, para hacer referencia a todos los nodos que forman una partición determinada ξ.

Una celda de un n-dimensional intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ es un n-dimensional subintervalo de la forma $[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]$, para $\mathbf{0} < \alpha \leq \kappa$.

Note que

$$\mathbf{t_0} = (t_0^{(1)}, t_0^{(2)}, ..., t_0^{(n)}) = (a_1, a_2, ..., a_n) \quad \text{y} \quad \mathbf{t}_\kappa = (t_{k_1}^{(1)}, t_{k_2}^{(2)}, ..., t_{k_n}^{(n)}) = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Definición 2.2.2. Sea $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to M$ y $\Phi \in \mathcal{N}$. La Φ- *variación, en el sentido de Vitali-Riesz* de f es definida como

$$\rho_\Phi^n(f, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \ := \sup_{\xi \in \pi[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \rho_\Phi^n(f, [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \xi), \tag{2.2.3}$$

donde

$$\rho_\Phi^n(f, [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \xi) \ := \sum_{1 \leq \alpha \leq \kappa} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]\right)}{Vol\left[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha\right]}\right) Vol\left[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha\right].$$

El objetivo es definir la Φ-*variación en el sentido Vitali-Hardy-Riesz* de f, para lo cual se hace necesario definir la variación de una función con una o más variables fija, para ello, como en [10], se define el truncamiento de un punto, de un intervalo y de una función.

El *truncamiento de un punto* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por un multi-índice $\mathbf{0} \neq \eta \leq \mathbf{1}$, se denotará por $\mathbf{x}\lfloor\eta$, se define como la $|\eta|$-upla conformada sólo por los x_i donde $\alpha_i = 1$, es decir, $\mathbf{x}\lfloor\eta = (x_i : i \in \{1, 2, ..., n\}, \eta_i = 1)$. Por ejemplo, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ y $\eta = (0, 1, 1, 0, 1)$ entonces $\mathbf{x}\lfloor\eta = (x_2, x_3, x_5)$

Además, el *truncamiento de un intervalo* n-dimensional $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ por un multi-índice $\mathbf{0}\neq\eta\leq\mathbf{1}$ como $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta := [\mathbf{a}\lfloor\eta,\mathbf{b}\lfloor\eta]$. Es claro que $\mathbf{x}\lfloor\mathbf{1}=\mathbf{x}$ y $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\mathbf{1}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Además, para la función $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to M$ y un punto $\mathbf{z}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, se define la *función truncada* por η, con base $\mathbf{z}$, por

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{z}}_{\eta} \ &: \ [\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta\to M \\ & \quad f^{\mathbf{z}}_{\eta}(\mathbf{x}\lfloor\eta) = f(\eta\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\eta)\mathbf{z}) \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Note que $f^{\mathbf{z}}_{\eta}$ depende sólo de las $|\eta|$ variables x_i para los cuales $\eta_i=1$.

Observación 2.2.3. *Dada la función $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to X$ y el multi-índice $\eta\neq\mathbf{0}$ se tiene que la diferencia $|\eta|$-dimensional del tipo Vitali definido en* (2.2.1)*, para $f^{\mathbf{a}}_{\eta}$ es dada por*

$$\begin{aligned} &\Delta_{|\eta|}(f^{\mathbf{a}}_{\eta},[\mathbf{x},\mathbf{y}]) \\ := \ & d\left(\sum_{\substack{\theta\in\mathcal{E}(n)\\ \theta\leq\eta}} f\left(\eta(\theta\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})+(\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}\right), \sum_{\substack{\theta\in\mathcal{O}(n)\\ \theta\leq\eta}} f(\eta(\theta\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})+(\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a})\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4. *Si $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ y $\eta=(1,0,0,1)$, tendremos*

$$f^{\mathbf{z}}_{\eta}(\mathbf{x}\lfloor\eta) \ = \ f^{\mathbf{z}}_{\eta}(x_1,x_4)=f(x_1,z_2,z_3,x_4),$$

para $(x_1,x_4)\in[a_1,b_1]\times[a_4,b_4]$.

Definición 2.2.5. Sean $\Phi\in\mathcal{N}$ y $(M,d,+,\cdot)$ un semigrupo métrico. Una función $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to M$ es de *acotada* Φ-*variación*, en el sentido de Vitali-Hardy-Riesz, si la total Φ-variación

$$TRV_{\Phi}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) := \sum_{\mathbf{0}\neq\eta\leq\mathbf{1}} \rho^{|\eta|}_{\Phi}(f^{\mathbf{a}}_{\eta},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta), \tag{2.2.4}$$

es finita. El conjunto de todas las funciones f que satisface que $TRV_{\Phi}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])<+\infty$ se denotará por $RV^{n}_{\Phi}([\mathbf{a},\mathbf{b}];M)$.

Teorema 2.2.6. $TRV_{\Phi}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0$ *si y sólo si f es constante.*

Demostración. Supongamos que $TRV_{\Phi}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0$ y consideramos $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, los cuales determinan, para cada $1\leq i\leq n$, las particiones $\xi_i:=\{a_i,x_i,b_i\}$. Dado que $TRV_{\Phi}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0$ se tiene que $\Delta_{|\eta|}(f^{\mathbf{a}}_{\eta},[t_{\alpha-\mathbf{1}},t_{\alpha}])=0$ para cada $\mathbf{1}\leq\alpha\leq\mathbf{2}$ y cada $\mathbf{0}\neq\eta\leq\mathbf{1}$.

En consecuencia, si $\eta = \mathbf{e}_i$ y $\alpha = \mathbf{1}$ se tendrá que

$$0 = d\left(f(\eta\mathbf{t_1} + (\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}), f(\mathbf{a})\right).$$

Ahora bien, como esto es válido para cada $\eta = \mathbf{e}_i$,

$$f(\eta\mathbf{t_1} + (\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}) = f(a_1, ..., x_i, a_{i+1}, ..., a_n) = f(\mathbf{a}), \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.2.5}$$

Haciendo uso de (2.2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} f(\eta\mathbf{t_1} + (\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{e}_j\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\mathbf{e}_j)a) + f(\mathbf{e}_i\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\mathbf{e}_i)a) \\ f(\eta\mathbf{t_1} + (\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Esto significa que

$$f(\eta\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\eta)\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}). \tag{2.2.7}$$

Supongamos que (2.2.7) se cumple para cualquier multi-índice η, $\mathbf{0} < \eta \leq \mathbf{1}$, con k componentes no nulas. Luego, si consideremos λ un multi-índice, tal que $\mathbf{0} < \lambda \leq \mathbf{1}$, con $k+1$ componentes no nulas y $\Delta_{|\lambda|}(f_{\lambda}^{\mathbf{a}}, [t_{\alpha-\mathbf{1}}, t_{\alpha}]) = 0$ para cada $\mathbf{1} \leq \alpha \leq \mathbf{2}$, entonces

$$\sum_{\substack{\theta\in\mathcal{E}(n)\\ \theta\leq\lambda}} f\left(\lambda(\theta\mathbf{t_0} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t_1}) + (\mathbf{1}-\lambda)\mathbf{a}\right) = \sum_{\substack{\theta\in\mathcal{O}(n)\\ \theta\leq\lambda}} f(\lambda(\theta\mathbf{t_0} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t_1}) + (\mathbf{1}-\lambda)\mathbf{a}). \tag{2.2.8}$$

Note que si $\theta \neq \mathbf{0}$ entonces $\lambda(\theta\mathbf{t_0}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t_1})+(\mathbf{1}-\lambda)\mathbf{a}$ tiene a lo más k componentes iguales a $\mathbf{x}$ y sus componentes restantes iguales a $\mathbf{a}$, en ese caso, (2.2.7) nos garantiza que $f(\lambda(\theta\mathbf{t_0} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t_1}) + (\mathbf{1}-\lambda)\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$. Luego, dado que los conjuntos $\mathcal{E}(n)$ y $\mathcal{O}(n)$ tienen la misma cantidad de elementos, se sigue de la igualdad (2.2.8) que $f\left(\lambda\mathbf{t_1} + (\mathbf{1}-\lambda)\mathbf{a}\right) = f(\mathbf{a})$.

□

2.3. El espacio normado $BRV_{\Phi}^{n}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$

Hasta ahora, nuestra elección de semigrupo métrico como conjuntos de llegada, para funciones definidas adecuadamente en $\mathbb{R}^n$, basta para definir la noción de Φ-variación n-dimensional; Sin embargo, ya que estudiaremos más adelante el operador de superposición entre espacios vectoriales, en la que se desea la presencia de esta noción de variación, será necesario solicitar una estructura adicional en el conjunto de destino M y la estructura que consideraremos es que M sea un espacio métrico vectorial, la cual definimos como sigue.

Definición 2.3.1. Por un espacio métrico vectorial (`MVS`) entenderemos un espacio vectorial topológico $(\mathcal{M},\tau)$ en el cual la topología τ es inducida por la métrica d que satisface las siguietes condiciones:

1. d es una métrica invariante por traslación.
2. $d(\alpha a,\alpha b)\leq|\alpha|\,d(a,b)$ para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$ y $a,b\in\mathcal{M}$.

Note que, en particular, cualquier `MVS` es un semigrupo métrico. En lo que sigue $\mathcal{M}$ se supondrá un `MVS` y $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ un n-dimensional intervalo cerrado.

Observación 2.3.2. *De 2.1.1 se sigue fácilmente que dado dos funciones $f,g:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}$, un multi-índice $\eta\neq\mathbf{0}$ y un n-dimensional intervalo $[\mathbf{x},\mathbf{y}]\subset[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, entonces la $|\eta|$-dimensional diferencia de Vitali (c.f.* (2.2.1)*) de la función truncada $(f+g)^{\mathbf{a}}_\eta$ $(=f^{\mathbf{a}}_\eta+g^{\mathbf{a}}_\eta)$ satissface la desigualdad*

$$\Delta_{|\eta|}\left((f+g)^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right)\quad\leq\quad\Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right)+\Delta_{|\eta|}\left(g^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right). \tag{2.3.1}$$

Observación 2.3.3. *Note que en el caso en que $\mathcal{M}$ sea un espacio normado, podemos reemplazar (2.2.1) por*

$$\Delta_n(f,[\mathbf{x},\mathbf{y}]):=\left\|\sum_{\theta\leq 1}(-1)^{|\theta|}\,f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})\right\|. \tag{2.3.2}$$

Ejemplo 2.3.4. *Sea $f:[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\to\mathcal{C}_0$ definida por*

$$f(\mathbf{x}):=\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}x_i}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Sea $\xi=\xi_1\times\xi_2\times\xi_3$, donde $\xi_i:=\{t^{(i)}_1,t^{(i)}_2,...,t^{(i)}_{k_i}\}$, $i=1,2,3$. Entonces, para los multi-índices e_i, con $i=1,2,...,n$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\theta\leq\mathbf{e}_i}(-1)^{|\theta|}\,f(\mathbf{e}_i(\theta\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_\alpha)+(\mathbf{1}-\mathbf{e}_i)\mathbf{0})\right\|_\infty &= \|\,f(\mathbf{e}_i t_\alpha)-f(\mathbf{e}_i\,t_{\alpha-\mathbf{1}})\|_\infty\\ &= \left\|\left(\frac{t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le\alpha\le\kappa}\Phi\left(\frac{\Delta_1\left(f^0_{e_i},[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor e_i\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor e_i}\right)Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor e_i\\
=&\sum_{1\le\alpha\le\kappa}\Phi\left(\frac{\left\|\left(\frac{t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty}{t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}}}\right)(t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}})\\
=&\sum_{1\le\alpha\le\kappa}\Phi\left(\frac{(t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}})\left\|\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty}{t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}}}\right)(t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}})\\
=&\sum_{1\le\alpha\le\kappa}\Phi(1)\,(t^{(i)}_{\alpha_i}-t^{(i)}_{\alpha_{i-1}})=\Phi(1).
\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Por lo tanto, para cada $i=1,2,3$ tendremos que

$$\rho^1_\Phi(f^0_{e_i},[\mathbf{a},\mathbf{b}]):=\Phi(1).$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{\theta\le\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}(-1)^{|\theta|}\,f((\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)(\theta\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_\alpha)+(\mathbf{1}-(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2))\mathbf{0})\right\|_\infty\\
=&\left\|\left(\frac{t^{(1)}_{\alpha_1}-t^{(2)}_{\alpha_2}}{n}\right)-\left(\frac{t^{(1)}_{\alpha_1-1}-t^{(2)}_{\alpha_2}}{n}\right)-\left(\frac{t^{(1)}_{\alpha_1}-t^{(2)}_{\alpha_2-1}}{n}\right)+\left(\frac{t^{(1)}_{\alpha_1-1}-t^{(2)}_{\alpha_2-1}}{n}\right)\right\|=0,
\end{aligned}$$

en cuyo caso

$$\rho^2_\Phi(f^0_{(1,10)},[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0.$$

De forma similar se puede verificar que $\rho^2_\Phi(f^0_{e_1+e_2+e_3},[\mathbf{a},\mathbf{b}])=\rho^2_\Phi(f^0_{e_i+e_j},[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0$, donde $i,j=1,2,3$ con $i\neq j$.

En consecuencia, de (2.2.4) se tiene que $TRV_\Phi(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])=3\Phi(1)$.

Teorema 2.3.5. *Sean $\Phi_1,\Phi_2\in\mathcal{N}$, tales que $\Phi_1(x)\le K\Phi_2(x)$ para todo x y alguna constante K, entonces $RV^n_{\Phi_2}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})\subseteq RV^n_{\Phi_1}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $f\in RV^n_{\Phi_2}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$, entonces para toda partición $\xi\in\pi([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ se tiene que

$$\Phi_1\left(\frac{\Delta_n\,(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha])}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]}\right)Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\quad\le\quad K\Phi_2\left(\frac{\Delta_n\,(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha])}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]}\right)Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha],$$

por lo tanto,

$$\rho_{\Phi_1}^{n}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi) \le K\,\rho_{\Phi_2}^{n}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi).$$

Dado que esta desigualdad es válida para toda partición ξ de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ y todo n se tiene $TRV_{\Phi_1}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) \le K\,TRV_{\Phi_2}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])$, así dado que el lado derecho de la desigualdad es finita se obtiene que $f \in RV_{\Phi_1}^{n}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$. $\square$

Lema 2.3.6. *Sean $f \in RV_{\Phi}^{n}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$ una función, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos puntos tales que $x_k = y_k$ para un $0 \le k \le n$, entonces*

$$\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) = \sum_{\eta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})$$

Demostración. Sean f, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ como en la hipótesis. Si $\theta = (\theta_1,\theta_2,...,\theta_n) \in \mathcal{E}(n)$ se tiene que $\widetilde{\theta} = (\theta_1,\theta_2,...,1-\theta_k,...,\theta_n) \in \mathcal{O}(n)$, luego, $(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})$ tiene las mismas componentes que $(\widetilde{\theta}\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\widetilde{\theta})\mathbf{y})$ ya que en la k-ésima componente

$$\widetilde{\theta}_k\,x_k + (1-\widetilde{\theta}_k)y_k = (1-\theta_k)\,x_k + \theta_k y_k = (1-\theta_k)\,y_k + \theta_k x_k.$$

En consecuencia, obtendremos que

$$\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) \;=\; \sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\widetilde{\theta}\,\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\widetilde{\theta})\mathbf{y}) = \sum_{\theta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\mathbf{x} + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}).$$

$\square$

Lema 2.3.7. *Sea $\mathcal{M}$ un* `MVS`. *Consideremos el intervalo $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ un intervalo cerrado n-dimensional y $t^{(j)} \in [x_j,y_j]$ para algún $1 \le j \le n$.*

Entonces

$$\Delta_n(f,[\mathbf{x},\mathbf{y}]) \le \Delta_n(f,[\mathbf{x},\widetilde{y}]) + \Delta_n(f,[\widetilde{x},\mathbf{y}]),$$

donde $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$ con $\widetilde{x}_i = x_i$ si $i \ne j$ y $\widetilde{x}_j = t^{(j)}$, $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1,...,\widetilde{y}_n)$ con $\widetilde{y}_i = y_i$ si $i \ne j$ y $\widetilde{y}_j = t^{(j)}$.

Demostración. Hagamos, $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$ donde $\widetilde{x}_i = x_i$ si $i \ne j$ y $\widetilde{x}_j = t^{(j)}$, y de forma similar, $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1,...,\widetilde{y}_n)$ donde $\widetilde{y}_i = y_i$ si $i \ne j$ y $\widetilde{y}_j = t^{(j)}$.

Note que el intervalo $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ es dividido en dos intervalos, a saber $[\mathbf{x},\widetilde{y}]$ y $[\widetilde{x},\mathbf{y}]$ y en virtud del lema 2.3.6 tendremos que

$$\begin{aligned}
& \Delta_n(f,[\mathbf{x},\mathbf{y}]) \\
:= \; & d\left(\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + \sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y}),\right. \\
& \left.\qquad \sum_{\eta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + \sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})\right) \\
= \; & d\left(\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})],\right. \\
& \left.\qquad \sum_{\eta\in\mathcal{O}(n)} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})]\right) \\
= \; & d\left(\sum_{\substack{\theta\in\mathcal{E}(n)\\ \theta_j=1}} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})\right. \\
& +f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})] + \sum_{\substack{\theta\in\mathcal{E}(n)\\ \theta_j=0}} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})], \\
& \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{O}(n)\\ \theta_j=1}} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) \\
& \left. + f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})] + \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{O}(n)\\ \theta_j=0}} [f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}) + f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y})]\right) \\
= \; & d\left(\sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y}) + \sum_{\theta\in\mathcal{E}(n)} f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y}),\right. \\
& \left. \sum_{\theta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\mathbf{x}+(\mathbf{1}-\theta)\widetilde{y}) + \sum_{\theta\in\mathcal{O}(n)} f(\theta\,\widetilde{x}+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{y})\right) \\
\leq \; & \Delta_n(f,[\mathbf{x},\widetilde{y}]) + \Delta_n(f,[\widetilde{x},\mathbf{y}]).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.8. *Sea $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}$ una función, entonces*

$$\rho_{\Phi}^{n}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi_1\times\ldots\times\{\xi_z\cup\{t^{(z)}\}\}\times\ldots\times\xi_n) \geq \rho_{\Phi}^{n}\left(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right).$$

para toda partición ξ de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Demostración. Sea $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ un intervalo n-dimensional y consideremos la partición $\xi = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$ donde $\xi_i = \{a_i = t_0^{(i)}, t_2^{(i)}, ..., t_{k_i}^{(i)} = b_i\}$. Si $z \in \{1, ..., n\}$ y consideramos $t^{(z)}$ de manera que

$$t_0^{(z)} < t_1^{(z)} < ... < t_{r-1}^{(z)} < t^{(z)} < t_r^{(z)} < ... < t_{k_j}^{(z)},$$

Hacemos entonces $\varrho = \prod_{i=1}^{n} \varrho_i$ con $\varrho_i = \{a_i = s_0^{(i)}, s_2^{(i)}, ..., s_{\widehat{k}_i}^{(i)} = b_i\}$, donde

$$s_j^{(i)} = t_j^{(i)}, \text{ para } i \neq z \quad \text{y} \quad \begin{cases} s_i^{(z)} = t_i^{(z)} & \text{si} \quad 0 \leq i \leq r-1 \\ s_r^{(z)} = t^{(z)} & \\ s_i^{(z)} = t_{i-1}^{(z)} & \text{si} \quad i \geq r+1. \end{cases}$$

Note entonces que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \widehat{\kappa} \\ \alpha_z < r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]}\right)[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha] \\ = & \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \kappa \\ \alpha_z < r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \widehat{\kappa} \\ \alpha_z > r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]}\right)[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha] \\ = & \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \kappa \\ \alpha_z > r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]. \end{aligned}$$

Resulta,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq \alpha \leq \widehat{\kappa}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]}\right)[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha] \\ & - \sum_{1 \leq \alpha \leq \kappa} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha] \\ = & \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \widehat{\kappa} \\ \alpha_z = r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha] \\ & - \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \kappa \\ \alpha_z = r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{t}_\alpha] \\ & + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq \widehat{\kappa} \\ \alpha_z = r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f, [\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}}, \mathbf{s}_\alpha], \end{aligned}$$

Hacemos uso del lema 2.3.7 tendremos que, para $\widetilde{t}_{\alpha}^{i}=t_{\alpha}^{i}$ si $i\neq z$ y $\widetilde{t}_{\alpha}^{z}=t^{z}$.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
& - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}] \\
& + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
\geq\ & \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
& - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{(\alpha-1)},\mathbf{t}_{\alpha}]}+\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}] \\
& + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
=\ & \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
& - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\frac{Vol\,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\right. \\
& \left.+\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]}\frac{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}] \\
& + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
\geq\ & \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}] \\
& - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r}} \frac{Vol\,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\widetilde{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}] \\
& -\frac{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}]}\Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\widetilde{t}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_{\alpha}] \\
& + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]\right)}{Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]}\right) Vol\,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_{\alpha}]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right]}\right) Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right] \\
&\quad - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right]}\right) Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right] \\
&\quad - \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\kappa\\ \alpha_z=r}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right]\right)}{Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right]}\right) Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right] \\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}\\ \alpha_z=r+1}} \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha]\right)}{Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right]}\right) Vol\left[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual se garantiza que

$$\sum_{1\leq\alpha\leq\widehat{\kappa}} \Phi\left(\Delta_n\left(f,[\mathbf{s}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{s}_\alpha]\right)\right) - \sum_{1\leq\alpha\leq\kappa} \Phi\left(\Delta_n\left(f,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\right)\right) \geq 0,$$

para cada partición $\xi = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$. Por lo tanto,

$$\rho_{\Phi}^{n}\left(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi_1\times\ldots\times\xi_z\cup\{t^{(z)}\}\times\ldots\times\xi_n\right) \geq \rho_{\Phi}^{n}\left(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right).$$

□

Corolario 2.3.9. *Sean $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}$, ξ y δ dos particiones tipo malla de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, de manera que $\xi\subseteq\delta$ Entonces*

$$\rho_{\Phi}^{n}(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi) \leq \rho_{\Phi}^{n}\left(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\delta\right).$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de forma recursiva una cantidad finita de veces. □

Lema 2.3.10. *El funcional $TRV_{\Phi}(\cdot,[\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es convexo.*

Demostración. El lema es consecuencia de (2.3.1) y del hecho que Φ es una función convexa y estrictaente creciente. □

Teorema 2.3.11. *La clase $RV_{\Phi}^{n}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$ es simétrica y convexa.*

Demostración. Que $RV_{\Phi}^{n}([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$ es simétrica es consecuencia de la propiedad (2) de la definición 2.3.1 (ya que $d(-a,-b)\leq d(a,b)$), mientras que la convexidad se sigue del Lema 2.3.10. □

Como una consecuenca del Teorema 2.3.11, el espacio vectorial generado por $RV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$ es el conjunto

$$\{f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}\ :\ \lambda f\in RV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})\ \text{ para algún}\,\lambda>0\},$$

la cual llamaremos el *espacio de funciones de* Φ*-variación acotada en el sentido de Riesz* y se denotará como $BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$.

Lema 2.3.12. *El conjunto*

$$\Lambda:=\{f\ \in\ BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})\ \ /\ \ TRV_\Phi(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\le 1\}$$

es un subconjunto convexo, balanceado y absorbente de $BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$*.*

Demostración. Para probar convexidad supongamos que $f,g\in\Lambda$ y sean α,β números reales no negativos tales que $\alpha+\beta=1$. Entonces $TRV_\Phi(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\le 1$, $TRV_\Phi(g,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\le 1$ y por Lema 2.3.10

$$\begin{aligned} TRV_\Phi(\alpha f+\beta g,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) &\le \alpha TRV_\Phi(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])+\beta TRV_\Phi(g,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\\ &\le \alpha+\beta=1. \end{aligned}$$

Así, Λ es un conjunto convexo.

Por otro lado, de la definición 2.2.2 se sigue fácilmente que si $f_0\equiv 0$ entonces $TRV_\Phi(f_0,[\mathbf{a},\mathbf{b}])=0$, así $f_0\in\Lambda$ y por tanto, en virtud de la convexidad de Λ ya probada, Λ es balanceado. Finalmente, el hecho de que Λ es absoebente se sigue de la propiedad (2) de la definición 2.3.1 y la convexidad de Φ. $\square$

En virtud de 2.3.12, el *funcional de Minkowski* de Λ

$$p_{\Lambda}(f):=\text{ínf}\left\{t>0:TRV_\Phi\left(\frac{f}{t},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right)\le 1\right\},$$

define una seminorma sobre $BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$, y por tanto

$$\|f\|:=\|f\|_{BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})}:=d(f(\mathbf{a}),0)+p_{\Lambda}(f) \tag{2.3.4}$$

define una norma sobre $BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$.

Lema 2.3.13. *Sea* $f\in BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$*,*

(i) Si $\|f\|\ne 0$ *entonces* $TRV_\Phi(f/\|f\|,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\le 1$*;*

(ii) si $0\ne\|f\|\le 1$ *entonces* $TRV_\Phi(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}])\le\|f\|$*.*

Demostración. (i) De la definición 2.3.4 tenemos que $p_{_\Lambda}(f) \leq \|f\|$.

Si $p_{_\Lambda}(f) < \|f\|$ entonce existe $\xi \in \Lambda$ tal que $p_{_\Lambda}(f) < \xi \leq \|f\|$ y $TRV_\Phi\left(\frac{f}{\xi},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right) \leq 1$. Por ser Λ absorbente se tiene que $\frac{f}{\|f\|} \in \Lambda$.

Si $p_{_\Lambda}(f) = \|f\|$, entonces existe una sucesión $t_n \in \Lambda$ tal que

$$t_n \to \|f\| \quad \text{and} \quad TRV_\Phi\left(\frac{f}{t_n},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right) \leq 1.$$

Se sigue por continuidad de la métrica que

$$TRV_\Phi\left(\frac{f}{\|f\|},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right) \leq 1.$$

(ii) se cumple por (i) y por la convexidad de $TRV_\Phi(\cdot,[\mathbf{a},\mathbf{b}])$. $\square$

Los siguiente dos lemas se siguen de manera sencilla de la definición y de las propiedades de una φ-función (c.f. [3]).

Lema 2.3.14. *Sean Φ una φ-función y $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}$. Entonces, para cualquier multi-índice $\mathbf{0}\neq\eta<\mathbf{1}$, las siguientes desigualdades se cumplen*

$$\Delta_{|\eta|}(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta) \leq \Phi^{-1}\left(\frac{\rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\right) Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta.$$

Demostración. Consideremos $\xi=\xi_1\times\ldots\times\xi_n$ donde $\xi_i := \{a_i,x_i,y_i,b_i\}$. Luego, para cada multi-índice η tendremos que

$$\begin{aligned}
\rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta) &\geq \rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta,\xi)\\
&= \sum_{1\leq\alpha\leq 3}\Phi\left(\frac{\Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor\eta\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor\eta}\right) Vol\,[\mathbf{t}_{\alpha-\mathbf{1}},\mathbf{t}_\alpha]\lfloor\eta\\
&\geq \Phi\left(\frac{\Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta\right)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\right) Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta) &\geq \Phi\left(\frac{\Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta\right)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\right) Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta\\
\Phi^{-1}\left(\frac{\rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\right) &\geq \frac{\Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta\right)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\\
\Phi^{-1}\left(\frac{\rho^{|\eta|}_\Phi(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta)}{Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta}\right) Vol\,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta &\geq \Delta_{|\eta|}\left(f^{\mathbf{a}}_\eta,[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lfloor\eta\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.3.15. *Supongamos que* $\{\zeta_i\}_{i=1}^{n}$ *and* $\{p_i\}_{i=1}^{n}$, $n\in\mathbb{N}$, *son dos sucesiones de números reales tales que* $\zeta_i\geq 0$ *y* $p_i>0$, *para todo* $1\leq i\leq n$. *Entonces, para cualquier función convexa* $\Phi\in\mathbb{R}^{(0,\infty)}$,

$$\Phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\Phi\left(\frac{\zeta_i}{p_i}\right).$$

Demostración. En efecto, si ponemos $k:=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$ entonces

$$\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i}{k}\right)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i}{k}\right)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\left(\frac{\zeta_i}{p_i}\right)}{k}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{k}\Phi\left(\frac{\zeta_i}{p_i}\right),$$

como se deseaba demostrar.

$\square$

Como una consecuencia del lema anterior se obtiene la siguiente desigualdad.

Teorema 2.3.16. *Sean* Φ *una* φ*-función,* $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathcal{M}$ *y* $\mathbf{J}_1,\ldots,\mathbf{J}_m$ *una colección finita de n-dimensional subintervalos de* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *que no se sobreponen. Entonces, para cada multi-índice* $\mathbf{0}\neq\eta\leq\mathbf{1}$,

$$\sum_{i=1}^{m}\Delta_{|\eta|}(f_{\eta}^{\mathbf{a}}(\mathbf{J}_i)\lfloor\eta)\quad\leq\quad\Phi^{-1}\left(\frac{\rho_{\Phi}^{|\eta|}(f_{\eta}^{\mathbf{a}},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta)}{\sum\limits_{i=1}^{m}Vol\,\mathbf{J}_i\lfloor\eta}\right)\sum_{i=1}^{m}Vol\,\mathbf{J}_i\lfloor\eta. \tag{2.3.5}$$

Demostración. Sea $\eta\leq 1$ un multi-índice no nulo. Dado que $\mathbf{J}_1,\ldots,\mathbf{J}_m$, donde $\mathbf{J}_j:=\prod\limits_{i=1}^{n}[t_i^{(j)},s_i^{(j)}]$ para $j=1,\ldots,m$ son subintervalos de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, que no se sobreponen, podemos obtener una partición que los contenga, en cuyo caso, es inmediata la desigualdad

$$\Phi\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\Delta_{|\eta|}(f_{\eta}^{\mathbf{a}}(\mathbf{J}_j))}{\sum\limits_{j=1}^{m}Vol\,\mathbf{J}_j\lfloor\eta}\right)\sum_{j=1}^{m}Vol\,\mathbf{J}_j\lfloor\eta\quad\leq\quad\rho_{\Phi}^{|\eta|}(f_{\eta}^{\mathbf{a}},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\lfloor\eta),$$

y haciendo uso de la monotonía de Φ se obtiene (2.3.5).

$\square$

Observación 2.3.17. *Si Φ es cualquier φ-función entonces*

$$\lim_{r\to 0^+} r\Phi^{-1}(c/r) = 0 \text{ para todo } c \in [0,+\infty). \tag{2.3.6}$$

2.4. El Operador de Composición uniformemente continuo

En esta sección extendemos lo resultados de *Matkowski* en [18] sobre operadores de composición uniformemente continuos en espacios de variación acotada.

Dados dos conjuntos (no vacíos) A y B, la notación B^A se mantendrá para el conjunto de todas las funciones de A a B. Como es usual, si M, N son espacios vectoriales, la notación $L(M,N)$ se mantendrá para el conjunto de todas las aplicaciones lineales de M a N.

Sea A, B y C conjuntos no vacíos. Si $h : A \times C \to B$ es una función dada, $X \subset C^A$ y $Y \subset B^A$ son espacios vectoriales entonces, el operador de composición Nemytskii) no lineal $\mathbf{H} : X \to Y$, generado por la función h, es definido como

$$(\mathbf{H}f)(\mathbf{t}) := h(\mathbf{t}, f(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in A.$$

Puesto que vamos a tratar con diferentes φ-funciones y en aras de presentar una demostración clara, denotamos la norma de $BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M})$ por $\|\cdot\|_{(\Phi,\mathcal{M})}$.

Teorema 2.4.1. *Supongamos que $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$ es un n-dimensional, intervalo no degenerado, Φ y $\Psi \in \mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son* `MVS` *y $\mathcal{C}$ es un subconjunto convexo de $\mathcal{M}$ (con int$\mathcal{C} \neq \emptyset$). Si un operador de composición $\boldsymbol{H}$, generado por la función $h : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \times \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ (continua en la primera variable), aplica el conjunto $\{f \in BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M}) : f([\mathbf{a},\mathbf{b}]) \subset \mathcal{C})\}$ dentro de $BRV_\Psi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{N})$ y es uniformemente continuo entonces existen funciones $A \in L(\mathcal{M},\mathcal{N})$ y $B : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathcal{N}$ tales que*

$$h(\mathbf{t}, u) = A(\mathbf{t})u + B(\mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}], \quad u \in \mathcal{C}. \tag{2.4.1}$$

Además, si $0 \in \mathcal{C}$ entonces $B \in BRV_\Psi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{N})$.

Demostración. Debido a que $\mathbf{H}$ es uniformemente continuo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$\|\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)\|_\Psi \leq \epsilon$ siempre que $f_1, f_2 \in \{f \in BRV_\Phi^n([\mathbf{a},\mathbf{b}];\mathcal{M}) : f([\mathbf{a},\mathbf{b}]) \subset \mathcal{C})\}$ satisface $\|f_1 - f_2\|_\Phi \leq \delta$.

Se sigue que el *módulo de continuidad* de $\mathbf{H}$:

$$\omega(p) := \sup\{\|\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)\|_{\Psi} \, : \, \|f_1 - f_2\|_{\Phi} \leq p\} \; (p > 0)$$

está bien definido, es continuo en cero, $\omega(0) = 0$ y

$$\|\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi} \leq \omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi}). \tag{2.4.2}$$

Si $\|\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi} > 0$, de la desigualdad (2.4.2) y del lema (2.3.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi}^{n}\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right) &\leq TRV_{\Phi}\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right) \\ &\leq TRV_{\Phi}\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)}{\|\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi}} \frac{\|Hf_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi}}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right) \\ &\leq \frac{\|\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi}}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})} TRV_{\Phi}\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)}{\|\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2\|_{\Psi}}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right) \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Así

$$1 \geq \rho_{\Phi}^{n}\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right) \geq \Phi\left(\frac{\Delta_n\left(\dfrac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2), [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}\right)}{Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2],$$

lo cual implica que

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2] \quad \geq \quad \Delta_n\left(\frac{\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2), [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]}{\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi})}\right)$$

y

$$\Delta_n\left(\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2), [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]\right) \leq \Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]}\right) Vol\,[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]\omega(\|f_1 - f_2\|_{\Phi}) \tag{2.4.4}$$

Por otro lado, veamos que h es continua en la segunda variable.
En efecto: Sean y y $\widetilde{y}$ dos puntos distintos en $\mathcal{C}$ y defiinimos

$$f_1(\mathbf{x}) := y \quad \text{y} \quad f_2(\mathbf{x}) := \widetilde{y} \qquad \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Así, $f_1, f_2 \in \{f \in BRV_{\Phi}^{n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathcal{M}) : f([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subset \mathcal{C})\}$ y

$$\|f_1 - f_2\|_{\Phi} \;=\; d((f_1 - f_2)(\mathbf{a}), 0) + p_{\Phi}(f_1 - f_2) = d(y - \widetilde{y}, 0).$$

Definamos $T := \mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2)$, entonces, para $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ se tiene

$$\begin{aligned}
& d(h(\mathbf{x}, y) - h(\mathbf{x}, \widetilde{y}), 0) \\
= \; & d(\mathbf{H}f_1(\mathbf{x}) - \mathbf{H}f_2(\mathbf{x}), 0) \\
= \; & d(T(\mathbf{x}), 0) \\
\leq \; & \Delta_n\left(T, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]\right) + n \sum_{\mathbf{0}<\theta<\mathbf{1}} \Delta_{|\theta|}\left(T_\theta^{\mathbf{a}}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta\right) + \|T(\mathbf{a})\|.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Ya que (2.4.4) se cumple para cualquier $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, en particular se sigue para $\mathbf{t}_1 = \mathbf{a}$ and $\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}$, por tanto de (2.4.5) obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
& d(h(\mathbf{x}, y) - h(\mathbf{x}, \widetilde{y}), 0) \qquad\qquad (2.4.6)\\
\leq \; & n\Delta_n\left(T, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]\right) + n \sum_{\mathbf{0}<\theta<\mathbf{1}} \Delta_{|\theta|}\left(T_\theta^{\mathbf{a}}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta\right) + d(T(\mathbf{a}), 0) \\
\leq \; & n \sum_{\mathbf{0}<\theta\leq\mathbf{1}} \omega(\|f_1 - f_2\|_\Phi)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta}\right) Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta + d((\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2)(\mathbf{a}), 0) \\
\leq \; & n \sum_{\mathbf{0}<\theta\leq\mathbf{1}} \omega(\|f_1 - f_2\|_\Phi)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta}\right) Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta + \|(\mathbf{H}f_1 - \mathbf{H}f_2)\|_\Psi \\
\leq \; & n \sum_{\mathbf{0}<\theta\leq\mathbf{1}} \omega(\|f_1 - f_2\|_\Phi)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta}\right) Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta + \omega(\|f_1 - f_2\|_\Phi) \\
= \; & \left\{ n \sum_{\mathbf{0}<\theta\leq\mathbf{1}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta}\right) Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta + 1 \right\} \omega(\|f_1 - f_2\|_\Phi) \\
= \; & \left\{ n \sum_{\mathbf{0}<\theta\leq\mathbf{1}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta}\right) Vol\,[\mathbf{a}, \mathbf{x}]\lfloor\theta + 1 \right\} \omega(\|y - \widetilde{y}\|_M)
\end{aligned}$$

En consecuencia, cuando $y \to \widetilde{y}$ el límite del lado derecho de (2.4.6) es cero lo cual prueba la continuidad de h en la segunda variable.

Mostremos que h satisface la ecuación de Jensen en la segunda variable.

En efecto, sea $\mathbf{t}_1 = \left(t_1^{(i)}\right)_{i=1}^n$ y $\mathbf{t}_2 = \left(t_2^{(i)}\right)_{i=1}^n \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, supongamos además que $\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2$, y definamos la función

$$\eta_i(t) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_i \leq t \leq t_1^{(i)} \\ \dfrac{t - t_1^{(i)}}{t_2^{(i)} - t_1^{(i)}} & \text{si} \quad t_1^{(i)} \leq t \leq t_2^{(i)} \\ 1 & \text{si} \quad t_2^{(i)} \leq t \leq b_i. \end{cases}$$

A continuación, consideremos $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ y definamos

$$f_j(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^n \eta_i(x_i)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_j + \mathbf{y}_2\right], \tag{2.4.7}$$

para $\quad j = 1, 2$, donde $\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Nótese que

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}\eta(x_i)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 - \prod_{i=1}^{n}\eta(x_i)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) - \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2\right] \\ &= \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_1 - f_2$ tiene Φ-variación cero y

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\|_{(\Phi,\mathcal{M})} &= d((f_1 - f_2)(\mathbf{a}), 0) + p_{\varphi}(f_1 - f_2) \\ &= d((f_1 - f_2)(\mathbf{a}), 0) = d\left(\frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{2}, 0\right) = d\left(\frac{\mathbf{y}_1}{2}, \frac{\mathbf{y}_2}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Notemos entonces que

- Si $\mathbf{x} = \mathbf{t}_\alpha$ donde $\alpha_i = 2 \quad$ para $\quad i = 1, 2, ..., n \quad$ entonces

$$\prod_{i=1}^{n}\eta(t_{\alpha_i}^{(i)}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{t_{\alpha_i}^{(i)} - t_1^{(i)}}{t_2^{(i)} - t_1^{(i)}} = 1.$$

- Si $\mathbf{x} = \mathbf{t}_\alpha$ con $\alpha_i \neq 2 \quad$ para algún $\quad 1 \leq i \leq n \quad$ entonces

$$\prod_{i=1}^{n}\eta(t_{\alpha_i}^{(i)}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{t_{\alpha_i}^{(i)} - t_1^{(i)}}{t_2^{(i)} - t_1^{(i)}} = 0.$$

Así, por (2.4.7)

- Si $\alpha_i = 2$ para $\quad i = 1, 2, ..., n \quad$ entonces

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{t}_\alpha) &:= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}\eta(t_{\alpha_i}^{(i)})(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\right] = \mathbf{y}_1, \ \text{y} \\ f_2(\mathbf{t}_\alpha) &:= \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}\eta(t_{\alpha_i}^{(i)})(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_2\right] = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}. \end{aligned}$$

- Si $\alpha_k \neq 2$ para algún $\quad 1 \leq k \leq n \quad$ entonces

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{t}_\alpha) &:= \frac{1}{2}[\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2] = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}, \\ f_2(\mathbf{t}_\alpha) &:= \mathbf{y}_2. \end{aligned}$$

Así, por la definición de $\mathbf{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}f_1(\mathbf{t}_2) &= h(\mathbf{t}_2, f_1(\mathbf{t}_2)) = h(\mathbf{t}_2, \mathbf{y}_1) \\
\mathbf{H}f_2(\mathbf{t}_2) &= h(\mathbf{t}_2, f_2(\mathbf{t}_2)) = h\left(\mathbf{t}_2, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) \\
\mathbf{H}f_1(\mathbf{t}_1) &= h(\mathbf{t}_1, f_1(\mathbf{t}_1)) = h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) \\
\mathbf{H}f_2(\mathbf{t}_1) &= h(\mathbf{t}_1, f_2(\mathbf{t}_1)) = h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_2),
\end{aligned}$$

y, si θ es un multi-índice no nulo diferente de $\mathbf{1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}f_1(\theta\,\mathbf{t}_1 + (1-\theta)\mathbf{t}_2) &= h\left(\theta\,\mathbf{t}_1 + (1-\theta)\mathbf{t}_2, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) \\
\mathbf{H}f_2(\theta\,\mathbf{t}_1 + (1-\theta)\mathbf{t}_2) &= h(\theta\,\mathbf{t}_1 + (1-\theta)\mathbf{t}_2, \mathbf{y}_2)
\end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{t}_2 \to \mathbf{t}_1$ sobre el lado izquierdo de (2.4.4) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{t}_2 \to \mathbf{t}_1} d\left(\sum_{\theta \le \mathbf{1}} (-1)^{|\theta|}\,(\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2))(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_2), 0\right) \\
= \; & d\left(h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_1) - h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) + \lim_{\mathbf{t}_2 \to \mathbf{t}_1} \sum_{\substack{\theta \le \mathbf{1} \\ \theta \ne \mathbf{1}}} (-1)^{|\theta|}\,(\mathbf{H}(f_1) - \mathbf{H}(f_2))(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_2), 0\right) \\
= \; & d\left(h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_1) - h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right)\right. \\
+ \; & \left.\lim_{\mathbf{t}_2 \to \mathbf{t}_1} \sum_{\substack{\theta \le \mathbf{1} \\ \theta \ne \mathbf{1}}} (-1)^{|\theta|} \left[h\left(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_2, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) - h(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_2, \mathbf{y}_2)\right], 0\right) \\
= \; & d\left(h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_1) - h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right)\right. \\
+ \; & \left.\sum_{\substack{\theta \le \mathbf{1} \\ \theta \ne \mathbf{1}}} (-1)^{|\theta|} \left[h\left(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) - h(\theta\,\mathbf{t}_1 + (\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_2)\right], 0\right) \\
= \; & d\left(h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_1) - h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) + \sum_{\substack{\theta \le \mathbf{1} \\ \theta \ne \mathbf{1}}} (-1)^{|\theta|} \left[h\left(\mathbf{t}_1, \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}\right) - h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}_2)\right], 0\right).
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Ahora, el número de n-uplas que contiene k unos, con $k > 0$, es igual a $\binom{n}{k} =$

$\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, así

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\boldsymbol{\theta}\leq \mathbf{1}\\ \boldsymbol{\theta}\neq \mathbf{0}}}(-1)^{|\theta|}\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right]\\
=&\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right]\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\\
=&\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right]\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}-\binom{n}{0}\right\}\\
=&\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right]\left\{(-1+1)^n-\binom{n}{0}\right\}\\
=&\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right]\{-1\}\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto, sustituyendo esta última igualdad en (2.4.8) se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{t}_2\to\mathbf{t}_1} d\left(\sum_{\boldsymbol{\theta}\leq\mathbf{1}}(-1)^{|\theta|}\,(\mathbf{H}(f_1)-\mathbf{H}(f_2))(\theta\,\mathbf{t}_1+(\mathbf{1}-\theta)\mathbf{t}_2),0\right)\\
=\;& d\left(h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_1)-h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)+\sum_{\substack{\boldsymbol{\theta}\leq \mathbf{1}\\ \theta\neq 0}}(-1)^{|\theta|}\left[h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)\right],0\right)\\
=\;& d\left(h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_1)-h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)+h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2),0\right).
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

Por otro lado, por propiedad dada en la observación (2.3.17) se tiene que el límite cuando $\mathbf{t}_2\to\mathbf{t}_1$ sobre el lado derecho de (2.4.4) es cero, por tanto

$$
d\left(h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_1)-h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)-h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right)+h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2),0\right)=0
$$

o equivalentemente

$$
\frac{h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_1)+h(\mathbf{t}_1,\mathbf{y}_2)}{2}=h\left(\mathbf{t}_1,\frac{\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2}{2}\right).
$$

Así $h(\mathbf{t}_1,\cdot)$ es solución para la ecuación de Jensen en $\mathcal{C}$ para $\mathbf{t}_1\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Adaptando un argumento clásico estandar (c.f Kuczma [16], ver también [18]) concluimos que existen $A(\mathbf{t}_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ y $B \in \mathcal{N}^{[\mathbf{a}.\mathbf{b}]}$ tales que

$$h(\mathbf{t}_1, \mathbf{y}) = A(\mathbf{t}_1)\mathbf{y} + B(\mathbf{t}_1) \qquad \mathbf{y} \in \mathcal{C}. \tag{2.4.10}$$

Finalmente, nótese que si $0 \in \mathcal{C}$, entonces tomando $y = 0$ in (2.4.10), se tiene $h(\mathbf{t}, \mathbf{0}) = B(\mathbf{t})$, para $\mathbf{t} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, lo cual implica que $B \in BRV^n_\Psi([\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathcal{N})$. $\square$

Bibliografía

[1] J. Appell and P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operator*, Cambridge University Press, New York, 1990.

[2] W. Azíz *Algunas extensiones a $\mathbb{R}^2$ de la noción de funciones con φ-variación acotada en el sentido de Riesz y controlabilidad de las RNC*, Tesis Doctoral para optar la título de Doctor en Ciencias, Facultad de Ciencias-UCV, 2009.

[3] W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes, J.L. Sánchez, *Functions of Bounded φ-variation in $\mathbb{R}^2$ in the sense of Riesz*, J. Math. Appl. Publ. House Rzesz Low Univ. Technol., Rzesz Low. ISSN 1733-6775 (2009).

[4] M. Bracamonte, J. Giménez and N. Merentes. *Vector valued functions of φ-bidimensional bounded variation*. Submitted.

[5] D. Bugajewska, *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation*, revisted. Mathematical and Computer Modelling 52 (5-6): 791-796 (2010).

[6] S.T. Chen, *Geometry of Orlicz Spaces*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)356 (Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996).

[7] V. V. Chistyakov,Superposition Operators in the Algebra of Functions of two Variables with Finite Total Variation,Monatshefte für Mathematik,v. 137,(2002),p.99-114.

[8] V. V.Chistyakov, *Generalized Variation of Mappings with Applications to Composition Operators and Multifunctions* Positivity, Vol. 5, 4 (2001), 323-358.

[9] V. V. Chistyakov, *Functions of several variables of finite variation and superposition operators*, in: Real Analysis Exchange 26th Summer Symposium, Lexington, VA, USA, 2002, pp. 61-66.

[10] V. V. Chistyakov and Y. Tretyachenko, *Maps of several variables of finite total variation and Helly-type selection principles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 370, No. 2 (2010), 672-686

[11] J. A. Clarkson and C. R. Adams,On Definitions of Bounded Variation for Functions of two Variables, Trans. Amer. Math. Soc.,v. 35, (1933),824-854.

[12] J. A. Clarkson, and R. Adams, Properties of Functions $f(x, y)$ of Bounded Variation,Trans. Amer. Math. Soc.,v. 36, (1934),711-730.

[13] G. H. Hardy, On Double Fourier Series, and Especially those which Represent the Double Zeta–Function width real and inconmesurable parameters,Quart. J. Math. Oxford.,v. 37,(1905/06),53-79.

[14] T.H. Hildebrandt, *Introduction to the theory of integration*, Academic Press, New York and London, 1963.

[15] C. Jordan, *Sur la Série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 2 (1881), 228-230.

[16] M. Kuzcma, *An introduction to the theory of functional Equations and Inequalities,* Polish Scientific Editors and Silesian University, Warszawa, Kraków, katowice, 1985.

[17] L. Maligranda and W. Orlicz ,On Some Properties of Functions of Generalized Variation, Mh. Math., volume 104,(1987),53-65.

[18] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the space of bounded variation functions*, Math. Nachr. 282 (2010).

[19] J. Matkowski, and N. Merentes, Characterization of Globally Lipschitzian Composition Operators in the Banach Space $BV_p^2[a,\, b]$,Archivum Math.,28,3–4,1992,181-186.

[20] N. Merentes, Composition of Functions of Bounded φ–variation,P.U.M.A.,Ser 1, (1991), 39-45.

[21] N. Merentes, On a Characterization of Lipschitzian Operators of Substitution in the space of bounded Riesz φ–variation,Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math,34,(1991).

[22] N. Merentes, On the Composition Operator in $RV_\varphi[a,\, b]$,Collectanea mathematica, 46,3,1995, 231-238

[23] N. Merentes and S. Rivas, El Operador de Composición en Espacios de Funciones con algún tipo de Variación Acotada, Facultad Ciencias-ULA ,Mérida-Venezuela, (1996), p.256.

[24] Yu. T. Medvedev, A Generalization of Certain Theorem of Riesz,journal Uspekhi Mat. Nauk.,(6) (1953),p.115-118.

[25] J. Musielak and W. Orlicz, On generalized variations (I),Journal Studia Mathematica, T. XVIIL,(1959),p. 11-41.

[26] M. T. Neves, φ–Variación Acotada en el Sentido de Wiener y Riesz y el Operador de Composición,Trabajo de Pasantía Universidad Nacional Abierta, Aragua,(1994).

[27] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen 69 (1910), 449 - 497.

[28] L. C. Young, Sur une Généralisation de la notion de variation de Pussance Piéme au Sens de N. Wiener et sur la Convergence des Séries de Fourier,C. R. Acad. Sci. París, Ser A-B, 240, (1937),p.470–472.

[29] D. E Varberg, On Absolutely Continuous Functions,Amer. Math. Month.,8,(1965),p.831-841.

[30] G. Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Atti Accad. Sci. Torino, 43 (1908) pp. 75-92.

[31] Wiener, N., *The quadratic variation of a functionsand its Fourier coefficient*, J. Mass. Inst. Technology, 3 (1924), 73-94.