

**UNA DISERTACIÓN SOBRE LA REALIZACIÓN
DE MUNDOS-BRANA PARA CAMPOS DE ESPÍN 2 Y 1/2**

Por

Rodríguez Rafael Omar

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría
de Agregado en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología

Barquisimeto, 2010

UNA DISERTACIÓN SOBRE LA REALIZACIÓN
DE MUNDOS-BRANA PARA CAMPOS DE ESPÍN 2 Y 1/2

RODRIGUEZ RAFAEL OMAR

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"

BARQUISIMETO, 2010

Índice general

Resumen	II
Introducción y motivación	III
1. Paredes de Dominio.	1
1.1. Fluctuaciones gravitacionales.	2
1.1.1. Modo cero del espectro gravitacional.	3
2. Fermiones sobre la pared.	4
2.1. El efecto migratorio	5
3. Superpotencial y Paredes BPS.	7
3.1. Generando nuevas soluciones.	8
4. Mundos-Brana Estables.	10
4.1. Geometría intrinsecamente asimétrica.	11
Conclusiones	15
Apendices.	16
A. Perturbaciones gravitacionales	17
B. Fermiones sobre la pared	19
Bibliografía	19

Resumen

El proposito de este trabajo es el de mostrar que existen dos tipos de paredes de dominio BPS simples, en correspondencia con las condiciones requeridas, y físicamente pertinentes, para distinguir entre campos localizados y simplemente normalizables. Adicionalmente; los campos quirales de espín $1/2$, aún estando localizados, exhiben migración hacia el *bulk*, por lo que otra cota de Yukawa, definida como umbral de localización, es requerida.

Physics and Astronomy Clasification Scheme: 04.20.-q, 04.50.+h, 11.27.+d

Palabras Claves: paredes de dominio BPS, branas asimétricas, localización de gravedad, localización de fermiones.

Introducción y motivación

La hipótesis de que nuestro universo cuatro-dimensional sea una hipersuperficie embebida en un espaciotiempo de mayor dimensionalidad, ó *bulk*, esta siendo considerado con renovado interés. Nuevos modelos, de data relativamente reciente, requieren de dimensiones adicionales asociadas a escalas de compactificación correspondientes a la fenomenológica cota crítica de los efectos de la gravitacionales (entorno al milímetro) [1, 2, 3, 4, 5]. Por otro lado, también se han propuesto escenarios con dimensiones adicionales no-compactas, tal y como fué sugerido, años atras, por Rubakov-Shaposhnikov [6] y Akama [7]. En este sentido, nuestro universo visible se considera confinado en una lámina de mundo cuatro-dimensional, ó 3-brana, subespacio de un espaciotiempo de mayor dimensionalidad. En particular, el modelo de Randall-Sundrum (RS) [8] ha recibido mucha atención debido a que está soportado en un marco conceptual relativamente simple: una pared de dominio infinitamente delgada.

Sin embargo, considerar al continuo espaciotiempo en el que nos encontramos como una pared sin grosor es una idealización y es por ello que propuestas más realistas consideran al espesor de la misma [9, 10, 11, 12]. Las paredes de dominio con grosor son soluciones a la teoría que describe a la gravitación de Einstein en interacción con un campo escalar tipo *kink*, que interpola entre los mínimos de un potencial con rompimiento espontáneo de simetría.

Aún más, en el *bulk* se realizará un universo factible en la medida en que los grados de libertad físicos de las interacciones fundamentales y los campos de materia esten confinados sobre el mismo. En este sentido, el gravitón exhibe un modo cero normalizable y un espectro masivo de altas energías sobre esta topología; mientras que los campos de espín 1/2 no están acotados debido a que se comportan de manera opuesta a los campos de espín 2 [13], es decir, el campo gravitacional de la pared genera una fuerza repulsiva sobre la materia. En [6], Rubakov y Shaposhnikov también mostraron que si el fermión correspondía a un estado normalizable, la interacción entre los fermiones debía estar mediada por el campo escalar a través de un acoplamiento de Yukawa [14, 15, 16].

En general, en la mayoría de los reportes relacionados con el confinamiento de fermiones¹ se congetura la localización bajo la satisfacción de la condición de campos de materia normalizable. Lo cuál, no es necesariamente cierto ya sea porque está en un entorno ó debido a que una función acotada puede tener varios minimos relativos y, en consecuencia, su distribución de probabilidad no estará exclusivamente soportada sobre la pared. Así, la comunidad tiene la falsa impresión de que los campos normalizables de la teoría yacen sobre la brana y que dicho efecto es independiente del espacio de parámetros. En consecuencia, en la literatura no ha sido publicada una discusión amplia al respecto. Por ejemplo, en [29] se reporta un método para

¹conocidos hasta la fecha y con una muestra representativa dispuesta en la bibliografía.

obtener dos soluciones compatibles con el mismo campo escalar, pero con diferentes potenciales. En particular, es de enfatizar que a partir de una familia estática de paredes dobles con simetría Z_2 [30] obtienen otra familia de paredes dobles sin simetría de reflexión [29]. Como miembros de ambas familias, se tienen branas simples asociados a espaciotiempos con ó sin simetría especular, respectivamente, y en los cuales gravitación corresponde a un campo localizado en ambos casos. Aún más, en [16] se demuestra que la brana simple con simetría Z_2 localiza fermiones y en [22] se asegura que los fermiones también acompañan a los gravitones sobre la brana asimétrica, para un espacio de parámetros arbitrario y argumentado bajo un estudio del comportamiento de los extremos de la función ó análisis asintótico.

Sin embargo, en el último caso, la anterior aseveración entra en conflicto con lo esperado. Es decir; dado que el gravitón se desplaza hacia aquella región cuya curvatura es mayor, el fermión se desplazará hacia aquella donde la constante cosmológica es menor (donde la repulsión es mínima), acorde a sus respectivas naturalezas. Entonces, se debe esperar que sólo en un espacio de parámetros reducido se realice la localización de los campos en cuestión; aquel espacio que selecciona al único miembro de la familia, en el parámetro de deformación de los vacíos, que corresponde un mundo-brana: la pared con simetría especular y por lo tanto sus deformaciones deben corresponder a paredes solitarias en el caso de brana simple.

En este trabajo se está interesado en hallar las características enfáticas que distinguen al subconjunto de los mundos-brana del resto de las paredes de dominio, en correspondencia con su capacidad de albergar al gravitón y al fermión sobre tal defecto topológico. Para ello, en los capítulos 1 y 2 se realiza un introducción detallada sobre las paredes de dominio y la localización de fermiones. En particular se reporta el efecto migratorio como una consecuencia de la competencia gravitacional entre la pared y el acoplamiento de Yukawa, y se estudia mediante el uso del método de Laplace. En el capítulo 3 se presenta a la teoría en terminos de la formulación de primer orden de Skenderis-Townsend [17] para generar nuevas soluciones mediante el corrimiento del falso superpotencial y haciendo uso de la invariancia bajo traslación del campo escalar, que presenta dicha formulación.

Finalmente, en el capítulo 4 se proponen las condiciones mínimas requeridas para localizar, simultáneamente, el espectro de los campos dinámicos presentes en la teoría: los de espín 2 y 1/2. También se demostrará que por consistencia, la deformación de los vacíos asintóticos del espaciotiempo destruye a los mundos-brana y condiciona la geometría de las paredes aisladas para su posterior toma por parte de los gravitones y fermiones quirales ligeros.

Capítulo 1

Paredes de Dominio.

Sea, la acción de la teoría de gravedad de Einstein acoplada a un campo escalar real ϕ

$$S = \int dx^4 dy \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.1)$$

donde g es el tensor métrico, R el escalar de curvatura y $V(\phi)$ el potencial escalar.

Ahora, considerese que el campo escalar satisface los siguientes requerimientos

1.- Tiene acceso a la dimensión adicional

$$\phi = \phi(y), \quad (1.2)$$

2.- Interpola suavemente entre los mínimos del potencial

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \phi(y) = \phi_\pm, \quad , \quad \lim_{\phi \rightarrow \phi_\pm} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (1.3)$$

Entonces, para $y \rightarrow \pm\infty$

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} R - \Lambda_+ \Theta(y) - \Lambda_- \Theta(-y) \quad , \quad \Lambda_\pm = \lim_{\phi \rightarrow \phi_\pm} V(\phi), \quad (1.4)$$

el espaciotiempo interpola asintóticamente entre dos sub-variedades cuya dinámica esta definida por la teoría de Einstein, en el vacío, con constantes cosmológicas Λ_+ y Λ_- . Lo anterior indica la presencia de una región de transición que separa ambos subespacios, llamada *wall of domain*, y sugiere que el mismo genera un campo gravitacional con simetría plano-paralela y transversa a la dimensión adicional

$$g_{\mu\nu} = e^{2A(y)} \left(-dt_\mu dt_\nu + dx_\mu^j dx_\nu^j \right) + dy_\mu dy_\nu, \quad (1.5)$$

donde $j = 1, 2, 3$ y $\mu, \nu = 0, \dots, 4$.

Continuando, las ecuaciones de campo generadas a partir de la acción (1.1) tienen la forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + V(\phi) \right], \quad (1.7)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.8)$$

con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía impulso. Siguiendo la estrategia usual, encontramos

$$\phi'(y)^2 = -3 A'' , \quad (1.9)$$

$$V(\phi) = -\frac{3}{2} A'' - 6 A'^2 , \quad (1.10)$$

donde la prima denota derivada respecto a y .

1.1. Fluctuaciones gravitacionales.

En [18] se propone una generalización del procedimiento para obtener las ecuaciones que describen las perturbaciones del espaciotiempo en el vacío presentado en [19]. Este *approach* se presenta a continuación.

Sea g_{ab} y ϕ las soluciones exactas al sistema Einstein-campo escalar formado por (1.6-1.8). Ahora, suponga que existe una familia uniparamétrica de tensores métricos

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\lambda) = g_{\alpha\beta} + \lambda h_{\alpha\beta} , \quad (1.11)$$

solución a las ecuaciones de campo, dadas en la forma del Ricci,

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{T}, \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\alpha \phi \tilde{\nabla}_\beta \phi - \tilde{g}_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\zeta \phi \tilde{\nabla}_\zeta \phi + V(\phi) \right], \quad (1.12)$$

donde $h_{\alpha\beta}$ representa la perturbación de la métrica y $\tilde{T} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}$. Similarmente, para el campo escalar

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}^\alpha \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 . \quad (1.13)$$

Entonces, la dinámica de la gravedad linealizada a primer orden en el parámetro de perturbación λ , en el sector transversal y sin traza y bajo el calibre axial

$$g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \nabla_\alpha h^\alpha_\beta = 0 \quad , \quad h_{\alpha 4} = 0 , \quad (1.14)$$

es descrita por (ver apéndice A)

$$-\frac{1}{2} \nabla^\delta \nabla_\delta h_{\alpha\zeta} + R^\delta_{(\alpha\zeta)}{}^\beta h_{\beta\delta} + R^\delta_{(\alpha} h_{\zeta)\delta} = \frac{2}{3} h_{\alpha\zeta} V(\phi) , \quad (1.15)$$

Por fenomenología, gravitación se propaga libremente sobre nuestro universo 4-dimensional. Por lo tanto, debe corresponder a una solución de onda plana libre sobre la hipersuperficie de la pared tal que

$$\square_4 \chi(t, x) = m^2 \chi(t, x), \quad a, b = 0, \dots, 3, \quad (1.16)$$

donde m es una constante y $\square_4 \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ es el D'Alambertiano 4-dimensional.

Asumiendo que nuestro universo corresponde a la pared, lo anterior sugiere la siguiente factorización de las fluctuaciones métricas

$$h_{ab} = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \psi_{ab}(y). \quad (1.17)$$

Así, de (1.15) obtenemos una ecuación tipo Schrödinger

$$[-\partial_y^2 + V_{QM}] \psi_{ab}(y) = m^2 e^{-2A(y)} \psi_{ab}(y), \quad V_{QM} = 2 A'' + 4A'^2. \quad (1.18)$$

Observe que este sistema puede estudiarse dentro del marco de la mecánica cuántica supersimétrica, ya que la ecuación (1.18) es factorizable en términos de las cargas conservadas de la teoría.

$$Q^\dagger Q \psi_{ab} = m^2 \psi_{ab}, \quad (1.19)$$

donde los operadores supersimétricos toman la forma

$$Q^\dagger = (\partial_y + 2A'), \quad Q = (-\partial_y + 2A'). \quad (1.20)$$

En consecuencia, el hamiltoniano equivalente es un operador definido semipositivo y por lo tanto no existen modos gravitacionales normalizables con energías negativas que puedan perturbar la estabilidad del *background* gravitacional [9, 11]. Es decir, los autovalores asociados a (1.18) son estrictamente positivos, $m^2 \geq 0$; en total correspondencia con el soporte conceptual de la teoría ya que en el marco de la Relatividad General no se predice la existencia de *taquiones* o hipotéticas partículas de masa imaginaria que se desplazan a velocidades mayores que la de la luz.

1.1.1. Modo cero del espectro gravitacional.

Es sencillo verificar que el estado fundamental, $m^2 = 0$, en los sistemas caracterizados por (1.19, 1.20) es proporcional a e^{2A} , de allí la importancia de obtener factores métricos acotados. A esta solución se le denomina *modo cero* o *modo no-masivo* del espectro de fluctuaciones gravitacionales y lo denotamos como ψ_g .

Si se logra localizar el modo cero sobre la pared de dominio, existe la posibilidad de encontrar un potencial gravitacional newtoniano asociado al modelo, toda vez que las correcciones al potencial no sean significativas [8]. Si, por el contrario, no se logra confinar gravedad sobre la pared, entonces no será posible obtener un modelo adecuado de nuestro universo.

Capítulo 2

Fermiones sobre la pared.

Considérese la acción de Dirac para un fermion Ψ propagándose en el espacio cinco-dimensional

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{ab} dx^a dx^b + dy^2, \quad (2.1)$$

acoplado al campo escalar ϕ

$$S_f = \int dx^4 dy \sqrt{-g} \left(\bar{\Psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \lambda \bar{\Psi} \phi \Psi \right), \quad (2.2)$$

donde λ es la constante de acoplamiento entre el espinor y el campo escalar; $\Gamma^\mu \equiv (\gamma^a, -i\gamma_5)$ las matrices gamma en espacio-tiempo curvo, que siguen la relación de anticonmutación $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2 \mathbb{I} g^{\mu\nu}$, con γ^a los generadores del álgebra de Clifford cuatro-dimensional $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2 \mathbb{I} \eta^{ab}$ y $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Supóngase ahora que Ψ admite la descomposición quiral

$$\Psi(x, y) = \varphi_L(x) \psi_L(y) + \varphi_R(x) \psi_R(y), \quad (2.3)$$

y asumiendo que $\varphi_{L,R}$ corresponden a las partículas ligeras de nuestro universo, se tiene que dicho campo debe satisfacer la ecuación de Dirac cuatro-dimensional, $\gamma^a \partial_a \varphi_{L,R} = 0$. Por lo tanto (ver apéndice B)

$$(\partial_y + 2A' \pm \lambda \phi) \psi_{L,R}(y) = 0, \quad (2.4)$$

cuya solución viene dada por

$$\psi_{L,R}(y) = N \exp \left(-2A(y) \mp \lambda \int \phi(y) dy \right). \quad (2.5)$$

Ahora, considerese una brana con simetría Z_2 centrada en $y = 0$, que interpola asintóticamente entre dos espaciotiempos AdS_5 con constante cosmológica Λ . Para $y \rightarrow \pm\infty$ el modo fermionico (2.5) se comporta como

$$\psi_{L,R} \rightarrow e^{(\sqrt{|\Lambda|/6} \mp \lambda\phi)|y|} \quad (2.6)$$

donde $\phi(\pm\infty) = \pm\varphi$.

Así, una condición necesaria para el confinamiento de fermiones viene dado por

$$\lambda_L > \frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}} \equiv \lambda_1 \quad , \quad \lambda_R < -\frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}} \quad , \quad (2.7)$$

para los modos *left* y *right* respectivamente. De esta manera recobramos un resultado bien conocido [20, 16]: dependiendo de la naturaleza del acoplamiento uno de los modos quirales es normalizable mientras que el otro no; es decir, la pared de dominio genera un rompimiento de simetría quiral topológico sobre las hipersuperficies cuatro-dimensionales. En adelante, a lo largo de este trabajo, consideraremos un sólo modo quiral (*left*) y lo denotaremos como ψ_f .

Nótese que el término proveniente del acoplamiento Yukawa, genera un mecanismo basado en la magnitud de λ para controlar el comportamiento asintótico de $\psi_{L,R}(y)$ [6, 13]. De esta manera, podemos seleccionar un rango de valores convenientes para la constante de acoplamiento y garantizar un perfil acotado de la fluctuación espinorial hacia la dimensión adicional.

Sin embargo, la restricción anterior no es una condición suficiente para localizar, en el sentido de que el perfil de (2.5) tenga un máximo absoluto sobre la pared. La misma provee estados acotados normalizables, dentro de los cuales se encuentran presentes soluciones con varios extremos relativos correspondientes a manifestaciones directas de la competencia gravitacional entre la geometría del espaciotiempo y la interacción de Yukawa, las cuales condicionan la existencia del fermión sobre la pared. En este sentido, en la literatura sólo han sido reportado aquellos valores de λ para los cuales el fermión es normalizable [16, 15, 21, 22, 23]. Por lo tanto, es posible identificar dos estados de normalización y uno de ellos corresponde a una localización rigurosa del fermión tal y como se muestra a continuación.

2.1. El efecto migratorio

Sean λ_1 y λ_2 , donde $\lambda_2 > \lambda_1$, las constantes críticas de Yukawa a partir de los cuales el perfil de (2.5) es normalizable o localizado sobre la pared, respectivamente. Entonces, para $\lambda < \lambda_1$ el fermión es expulsado por el campo gravitacional de la pared; mientras que para $\lambda > \lambda_2$ esta localizado sobre la misma.

El sector $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ corresponde a un fermión cuya distribución de probabilidad se realiza en términos de tres puntos críticos: un par de máximos entorno a la pared en contraste con un mínimo sobre la misma. Esto implica, que el fermión es repelido por la brana de tal manera que permanece orbitando alrededor de ella. A éste fenómeno es a lo que se designa en este trabajo como *efecto migratorio*. En la Fig.2.1 es posible observar las situaciones descritas anteriormente.

El umbral caracterizado por λ_2 , más allá de un breve comentario realizado en [21], no ha sido calculado ni analizado. En lo que sigue, mostraremos un método para determinar dicho umbral. Para ello, observe que el estado localizado del fermión ligero esta caracterizado por un perfil gaussiano con un máximo sobre la brana, esto sugiere la aplicación del método de Laplace para evaluar la integral de ψ_f y obtener la respectiva restricción sobre la constante de Yukawa. Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_f(y) \simeq \left[\frac{2\pi}{-2|A''(0)| + \lambda\phi'(0)} \right]^{1/2} \psi_f(0) \quad (2.8)$$

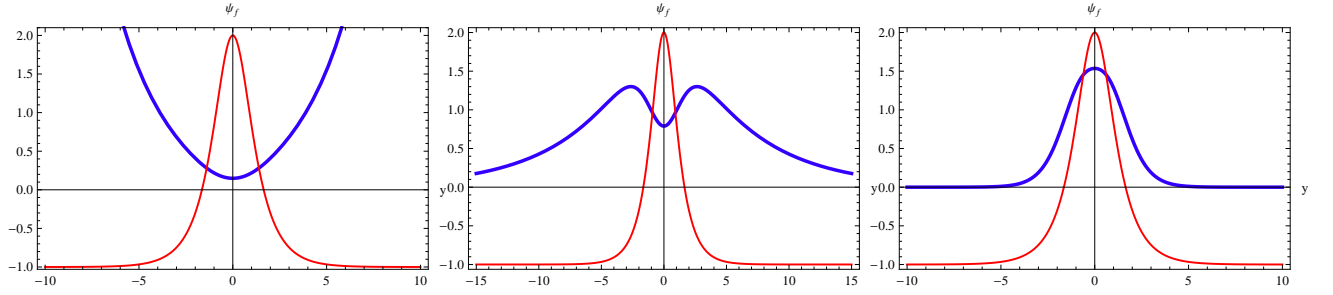


Figura 2.1: Plots de ψ_f (azul) en la pared de sine-Gordon (rojo) para $\lambda < \lambda_1$ (izquierda), $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (centro) and $\lambda > \lambda_2$ (derecha), donde $\alpha = \delta = 1$.

donde se ha considerado $\psi_f'(0) = 0$ y $\psi_f''(0) < 0$. Por lo tanto, para que el resultado sea real y en consecuencia obtener una solución localizada y normalizada se tiene que cumplir

$$\lambda > 2 \frac{|A''(0)|}{\phi'(0)} \equiv \lambda_2. \quad (2.9)$$

A continuación se mostrará un ejemplo para ilustrar lo anteriormente discutido.

La pared de sine-Gordon

Una solución biparamétrica tipo pared de dominio con tensor métrico (1.5), es dada por

$$A(y) = -\delta \ln \left(\cosh \frac{\alpha y}{\delta} \right) \quad (2.10)$$

con

$$\phi(y) = \phi_0 \arctan \left(\sinh \frac{\alpha y}{\delta} \right), \quad \phi_0 = \sqrt{3\delta} \quad (2.11)$$

y

$$V(\phi) = 3\alpha^2 \left[\left(\frac{1}{2\delta} + 2 \right) \cos^2 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) - 2 \right], \quad (2.12)$$

donde el campo escalar (2.11) interpola suavemente entre los mínimos del potencial (2.12), $\pm\pi\phi_0/2$. Esta solución fué reportada en [10] y la geometría corresponde a una brana con grosor en un espaciotiempo AdS_5 con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$. El espectro de las fluctuaciones gravitacionales en este espaciotiempo, viene dado por un modo cero localizado sobre la pared y un conjunto continuo de modos masivos propagandose libremente en el *bulk* 5-dimensional.

La localización, en contraste con la normalización, puede parecer un detalle sutil, a pesar de esto la misma es rigurosamente necesaria. Así, de (2.10) y (2.11) tenemos

$$A''(0) = -\frac{1}{\delta} \frac{|\Lambda|}{6}, \quad \phi'(0) = \frac{\phi_0}{\delta} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}} \quad (2.13)$$

tal que, usando (2.7) y (2.9), la localización de fermiones ligeros sobre esta pared se realiza bajo los estados normalizables definidos por las siguientes cotas de Yukawa

$$\lambda_1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{3\delta}} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}} \right), \quad \lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{3\delta}} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}}. \quad (2.14)$$

Capítulo 3

Superpotencial y Paredes BPS.

En el capítulo 1 se demostró que para un espaciotiempo tipo pared de dominio el sistema acoplado Einstein-campo escalar es equivalente a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Es posible reducir el orden de estas ecuaciones asumiendo la siguiente consideración. Sea $W(\phi)$ una función tal que

$$A' \equiv -W(\phi) . \quad (3.1)$$

En consecuencia, de (1.9) y (1.10) se obtiene

$$\phi' = 3 \frac{dW}{d\phi} , \quad (3.2)$$

$$V(\phi) = \frac{3}{2} \left[3 \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - 4W^2 \right] . \quad (3.3)$$

Nótese que

$$\frac{dV}{d\phi} = 3 \left[3 \frac{d^2W}{d\phi^2} - 4W \right] \frac{dW}{d\phi} . \quad (3.4)$$

Es decir, los puntos críticos de $V(\phi)$ corresponden tanto a puntos críticos de $W(\phi)$ como a puntos que satisfacen

$$\frac{d^2W}{d\phi^2} - 4W = 0 . \quad (3.5)$$

En el marco de las teorías de supergravedad $W(\phi)$ es conocido como “superpotencial” y sus puntos críticos implican vacíos AdS estables. Los otros extremos de $V(\phi)$ implican vacíos AdS no necesariamente estables. Así, dado (3.1) el sistema acoplado Einstein-campo escalar se reduce al formalismo de primer orden [17].

Continuando, para un espaciotiempo con simetría plano-paralela a lo largo de la dimensión adicional asociado a un tensor métrico (1.5), el escalar de Ricci viene dado por

$$R = -4 (5A'^2 + 2A'') . \quad (3.6)$$

Sustituyendo en la acción (1.1) se tiene

$$S = - \int dx^4 E[A, \phi] , \quad (3.7)$$

donde ha sido considerado $(e^A)'|_{y=\pm\infty} = 0$ y

$$E[A, \phi] = \frac{1}{2} \int dy e^{4A} [(\partial_y \phi)^2 - 12A'^2 + 2V(\phi)] . \quad (3.8)$$

Identificando (3.3) en la anterior expresión, dicho funcional puede ser rescrito a la Bogomol'nyi

$$E[A, \phi] = \frac{1}{2} \int dy e^{4A} \left[\left(\partial_y \phi - 3 \frac{dW}{d\phi} \right)^2 - 12(A' + W)^2 \right] , \quad (3.9)$$

el cual, es extremado justamente por las ecuaciones de primer orden (3.1) y (3.2).

Por lo tanto, las paredes de dominio obtenidas a partir del formalismo de primer orden, donde los vacíos son estables, son soluciones que satisfacen la cota de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield y en consecuencia se conocen como configuraciones BPS.

3.1. Generando nuevas soluciones.

Sea $(\mathbb{R}^5, \mathbf{g})$, una pared de dominio en un espaciotiempo curvo AdS_5 con constantes cosmológicas Λ_+ y Λ_- a ambos lados de la hipersuperficie 4-dimensional, donde la geometría viene especificada por (1.5).

Ahora, como fué indicado en [24], es posible obtener nuevas soluciones BPS desplazando al superpotencial por una constante positiva

$$\tilde{W} = W + \beta . \quad (3.10)$$

Acorde con (3), el nuevo superpotencial \tilde{W} es compatible con el mismo campo escalar asociado a W . Aún más, dado que los extremos de $V(\phi)$ coincide con los de $W(\phi)$, se sigue que los extremos del nuevo potencial escalar $\tilde{V}(\phi)$, son los mismos de $V(\phi)$, esto es $\phi = 0$ and $\phi = \phi_{\pm}$, donde $\phi_{\pm} \equiv \phi(y = \pm\infty)$. Sin embargo, las constantes cosmológicas a cada lado de la pared cambian de la siguiente manera

$$\tilde{\Lambda}_+ = -6 \left(\sqrt{|\Lambda_+|/6} + \beta \right)^2 , \quad \tilde{\Lambda}_- = -6 \left(\sqrt{|\Lambda_-|/6} - \beta \right)^2 , \quad (3.11)$$

donde es requerido $0 < \beta/\sqrt{|\Lambda_-|/6} < 1$, con la finalidad de obtener soluciones normalizables para el gravitón.

El nuevo factor *warp* es dado por $\tilde{A}(y) = A(y) - \beta y$ y por lo tanto el modo cero gravitacional y quiral son *warpeados* por la constante β

$$\tilde{\psi}_g \sim \psi_g e^{-2\beta y} , \quad \tilde{\psi}_f \sim \psi_f e^{2\beta y} \quad (3.12)$$

de tal manera que $\tilde{\psi}_g$ es atenuado hacia la región con constante cosmológica $\tilde{\Lambda}_-$, mientras que $\tilde{\psi}_f$ se comporta de manera opuesta, esto es, son atenuados hacia la región con constante cosmológica $\tilde{\Lambda}_+$. En [24] este efecto fué usado sobre una pared BPS doble, con el fin de obtener los campos dinámicos de espín 2 y 1/2 localizados de manera opuesta sobre las dos sub-branas que alberga el interior de la configuración.

Continuando, acorde a [16] las soluciones a las ecuaciones Einstein-campo escalar con simetría plano paralela correspondientes a un $V(\phi)$ y ϕ dados, son parte de una familia de soluciones desplazadas con

$$\tilde{\phi}(y) = \phi(y) + \epsilon \quad , \quad \tilde{V}(\tilde{\phi}) = V(\tilde{\phi} - \epsilon) \quad , \quad (3.13)$$

con ϵ una constante, asociada a la misma métrica y constantes cosmológicas. El *shifting* es irrelevante para las propiedades gravitacionales del sistema, como puede ser verificado por simple inspección de (3.1), (3.2) y (3.3), pero no para el confinamiento del fermión

$$\tilde{\psi}_f \sim \psi_f(y) e^{(2\beta - \lambda\epsilon)y} \quad . \quad (3.14)$$

Observe que, con respecto al *bulk* fermión, este grado de libertad corresponde a un término masivo $m\bar{\Psi}\Psi$, donde $m \equiv \lambda\epsilon$ es la masa 5-dimensional. Esto es semejante a los *scenarios split fermion* [25, 26], en los cuales los fermiones presentes en el *bulk* son distribuidos alrededor de la brana en diferentes posiciones acorde a su masa, ofreciendo de esta manera una explicación a la jerarquía de masas y al decaimiento del protón [27, 28]. Por lo tanto, (3.14) permite correlacionar a ϵ con la acción de un campo gravitacional atractivo sobre la masa del fermion *bulk*.

Lo anterior sugiere la interesante posibilidad de localizar gravitones y fermiones imponiendo restricciones sobre β y ϵ . En este sentido, la cota mínima del acoplamiento de Yukawa es requerida para acotar explícitamente a los campos de materia sobre la pared. En particular, si la topología del espaciotiempo tiene simetría de reflexión, $\Lambda_+ = \Lambda_-$, la deformación gravitacional provista por (3.10) y (3.13), que en este caso corresponde a la incorporación de asimetría sobre el escenario, provee un espectro completo de estados físicos coexistiendo sobre la brana si el fermión no exhibe efecto migratorio; que aún en este caso se manifiesta en (3.14) a través de ψ_f . Por tanto, en este caso, el estado de confinamiento de los fermiones se obtiene para $\lambda > \lambda_2$, donde λ_2 corresponde al de su homólogo simétrico dado por (2.5).

En el próximo capítulo, se tratará el caso en el que $\Lambda_+ \neq \Lambda_-$ mediante el análisis de una configuración particular pero sin pérdida de generalidad; así como el planteamiento de las condiciones suficientes y necesarias que definen a un mundo-brana estable.

Capítulo 4

Mundos-Brana Estables.

A continuación, examinemos la estabilidad que tienen las pared de dominio, generadas en la sección 3.1, para corresponder a un escenario mundo-brana. En tal sentido, los campos dinámicos de espín 2 y 1/2 deben coexistir sobre la pared. Esto es, sea y_0 el lugar donde se encuentra la brana, entonces se deben satisfacer los siguientes requerimientos

- i) La densidad de energía tiene un máximo en y_0

$$\tilde{A}'''(y_0) = A'''(y_0) = 0, \quad (4.1)$$

- ii) El modo cero de las fluctuaciones gravitacionales tiene un máximo en y_0

$$\tilde{A}'(y_0) = A'(y_0) - \beta = 0, \quad (4.2)$$

- iii) El modo quiral ligero tiene un máximo en y_0

$$\tilde{\phi}(y_0) = \phi(y_0) + \epsilon = 0. \quad (4.3)$$

Para un $W(\phi)$ arbitrario, existen dos tipos de soluciones posibles

A . Solución mundo-brana.

Si $A(y)$ y $\phi(y)$ corresponden a soluciones de (3.1) compatibles con un mundo-brana con constantes cosmológicas Λ_+ y Λ_- , entonces

$$A'''(y_0) = A'(y_0) = 0 \quad , \quad \phi(y_0) = 0 . \quad (4.4)$$

En consecuencia, de (4.1, 4.2, 4.3), resulta

$$\beta = \epsilon = 0 . \quad (4.5)$$

El resultado anterior admite la siguiente interpretación: una deformación del mundo-brana ocasionada por medio de (3.10) y (3.13), a pesar de generar estados normalizables, automáticamente deslocaliza los campos de la pared.

B . Solución pared aislada.

Si $A(y)$ y $\phi(y)$ corresponden a una solución pared de dominio de (3.1) pero no compatibles con un mundo-brana, entonces

$$A'(y_0) \neq 0 . \quad (4.6)$$

Así de las restricción (4.2), tenemos que sólo es posible localizar la gravedad cuando

$$\beta \neq 0 , \quad (4.7)$$

mientras que (4.3) sigue siendo, con ϵ no necesariamente nulo, la condición para confinar los fermiones sobre la brana. Por lo tanto, sobre estas paredes de dominio es que cobra sentido introducir una deformación como la sugerida en (3.10) y (3.13). Para ilustrar, consideremos a continuación un espaciotiempo pared de dominio donde se ha relajado la condición de simetría Z_2 .

4.1. Geometría intrinsecamente asimétrica.

Considere el siguiente falso superpotencial

$$W(\phi) = \frac{\alpha}{12\delta} \phi^2 \left(1 - \ln \frac{\phi^2}{12\delta} \right) . \quad (4.8)$$

Así, de las ecuaciones BPS (3) y (3.1) encontramos

$$A(y) = -\delta \exp(-2 e^{-\alpha y/\delta}) + \delta \text{Ei}(-2 e^{-\alpha y/\delta}) , \quad (4.9)$$

donde α y δ son constantes reales definidas positivas y Ei es la exponencial integral dada por

$$\text{Ei}(u) = - \int_{-u}^{\infty} e^{-t}/t dt . \quad (4.10)$$

y

$$\phi(y) = \phi_0 \exp(- e^{-\alpha y/\delta}) , \quad \phi_0 = 2\sqrt{3\delta} , \quad (4.11)$$

$$V(\phi) = 18 \left(\frac{\alpha}{12\delta} \phi \ln \frac{\phi^2}{12\delta} \right)^2 - 6 \left[\frac{\alpha}{12\delta} \phi^2 \left(1 - \ln \frac{\phi^2}{12\delta} \right) \right]^2 , \quad (4.12)$$

donde el campo interpola entre dos mínimos no degenerados de V , $\phi_- = 0$ y $\phi_+ = \phi_0$, ver Fig. 4.1. Esta geometría representa una familia bi-paramétrica de paredes de dominio con simetría plano-paralela y sin simetría de reflexión a lo largo de la dirección perpendicular a la pared, siendo asintóticamente plana $\Lambda_- = 0$ para $y < 0$ y AdS_5 con constante cosmológica $\Lambda_+ = -6\alpha^2$ para $y > 0$, tal y como se muestra a la izquierda de la Fig. 4.2.

Para continuar, examinemos la estabilidad que tiene este espaciotiempo pared de dominio para corresponder a un escenario mundo-brana. Si $y \rightarrow +\infty$, se tiene que $\psi_g \rightarrow 0$ y $\psi_f \rightarrow 0$ para un λ adecuado. Si $y \rightarrow -\infty$ resulta $\psi_{g,f} \rightarrow 1$ y $\psi_f \rightarrow 1$ debido a que el término de Yukawa

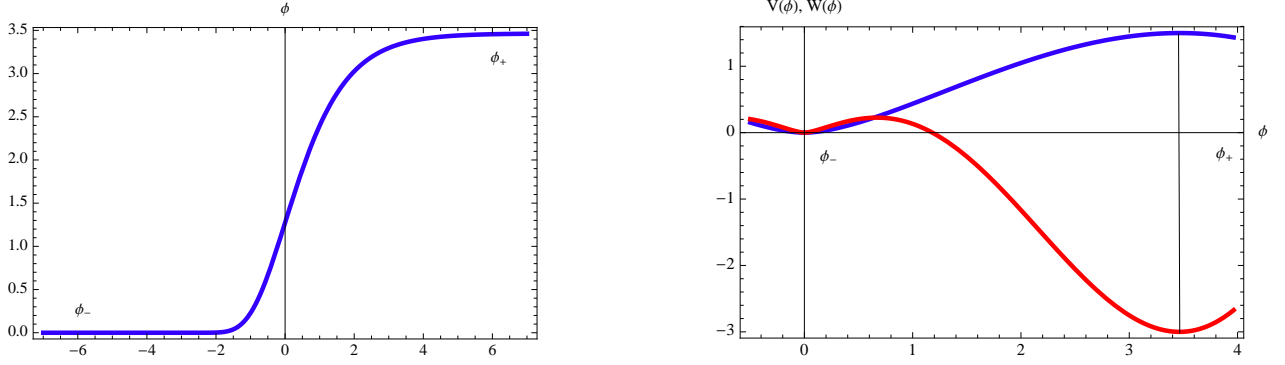


Figura 4.1: Campo escalar $\phi(y)$ (izquierda), Potencial de Autointeracción (rojo) y Superpotencial (derecha).

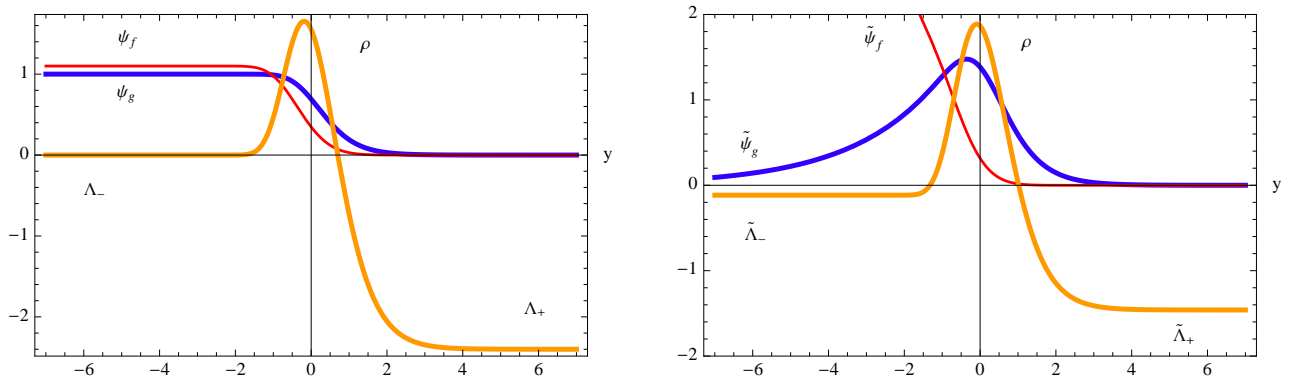


Figura 4.2: Gravitón (azul), fermión (rojo) y densidad de energía (anaranjado) con $\epsilon = 0$ para $\beta = 0$ (izquierda) y $0 < \beta < \alpha$ (derecha).

se anula para $\phi(-\infty) = 0$. Es decir, no es posible confinar gravedad ni localizar un modo quiral del fermión, dado que ψ_g y ψ_f no son soluciones normalizables sobre estas paredes, Fig. 4.2.

A continuación, usaremos la solución asimétrica (4.9, 4.11, 4.12) para encontrar branas con grosor en las que no estén presentes los problemas estructurales mencionados anteriormente. Para ello emplearemos el método mostrado en la sección 3.1, junto con las condiciones de localización (4.1, 4.2, 4.3). Así, considere la solución encontrada al desplazar al superpotencial (4.8) por una constante negativa $-\beta$. Como se muestra a la derecha de la Fig. 4.2, la pared correspondiente mantiene la ausencia de la simetría Z_2 , e interpola asintóticamente entre dos vacíos AdS_5 con constantes cosmológicas

$$\tilde{\Lambda}_- = -6\beta^2 \quad , \quad \tilde{\Lambda}_+ = -6(\alpha - \beta)^2 \quad , \quad 0 < \beta/\alpha < 1 . \quad (4.13)$$

En [18] se demostró que en este espaciotiempo se localiza la gravedad 4-dimensional sobre la pared. Sin embargo, ellas no pueden confinar fermiones ya que preservan el mismo campo escalar (4.11). Por lo tanto, adicionalmente, también se debe considerar el desplazamiento del campo escalar (4.11) por una constante $-\epsilon$. Así, la pared BPS asimétrica que interpola asintóticamente entre espaciotiempos con constantes cosmológicas dadas por (4.13), presenta un modo quiral no masivo normalizable [16].

Acorde con (4.1, 4.2, 4.3), para que el gravitón y el fermión coexistan sobre la pared, es necesario que

$$y_0 = 0 \quad , \quad \beta = 3\alpha/e^2 \quad , \quad \epsilon = \phi_0/e \quad , \quad (4.14)$$

Observe, que el valor de ϵ difiere de aquel reportado en [16].

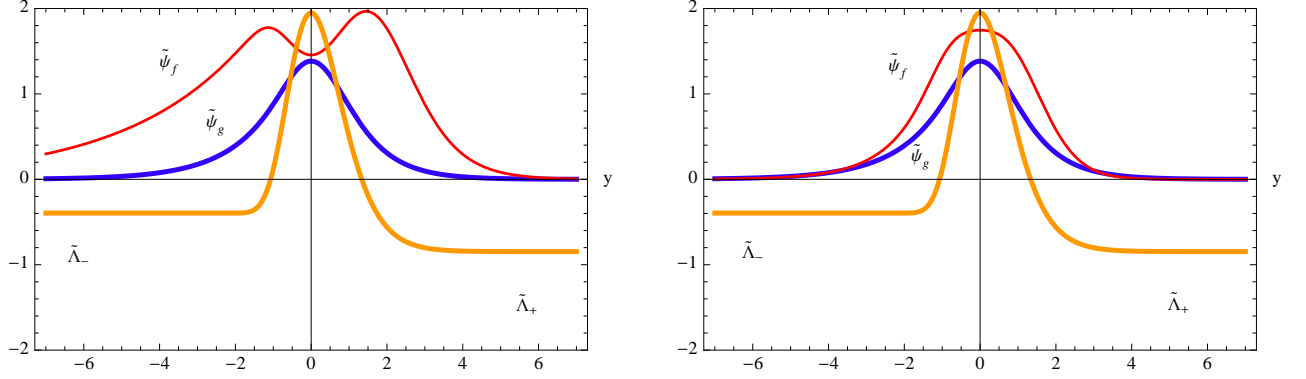


Figura 4.3: Gravitón (azul), fermión (rojo) y densidad de energía (anaranjado) con $\beta = 3\alpha/e^2$ y $\epsilon = \phi_0/e$ para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (izquierda) and $\lambda > \lambda_2$ (derecha).

Finalmente, la realización explicita de (4.9, 4.11, 4.12) como un mundo-brana requiere de la ausencia de la migración del campo de espín 1/2 hacia los bordes de la brana, imagen izquierda de Fig. 4.3. En la misma, ψ_f no es una solución par y , por lo tanto, no es posible aplicar el método de Laplace para hallar λ_2 , acorde a la sección 3.1. Por otro lado, para $y < 0$ el fermión

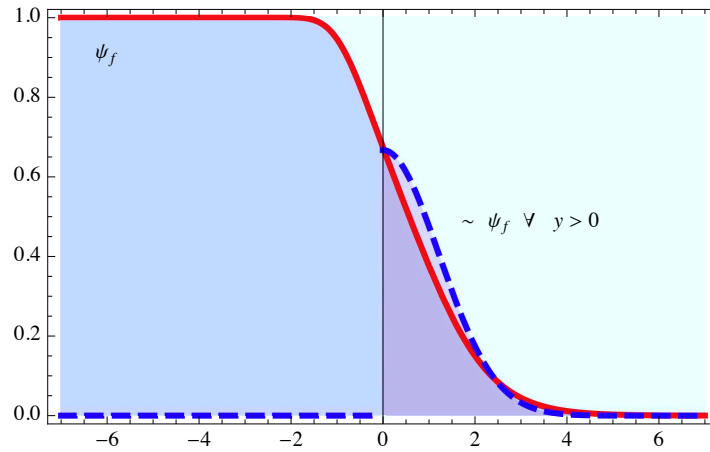


Figura 4.4: Perfil del fermión (rojo) y aproximación gaussiana (línea azul discontinua) para $y > 0$.

no es normalizable dado que $\phi(-\infty) = 0$; es decir, es en este sector la geometría quien domina y quien expulsa a los fermiones de la pared. Para $y \geq 0$, como se indicó previamente, la función ψ_f

converge. En consecuencia, es en esta región donde es posible identificar los efectos colaterales ó migratorios generados por la competencia gravitacional “geometría-Yukawa”. Por lo tanto; si bien es cierto que no es posible aplicar la aproximación de Laplace sobre ψ_f para $y \in \mathbb{R}$, también es cierto que es aplicable para $y \geq 0$, considerando a la solución aproximada por una gaussiana en toda esta región, ver Fig. 4.4. Esto es, sea ψ_f una solución definida sobre $y \in [0, +\infty)$ y con un máximo absoluto en uno de sus bordes, $y = 0$. Entonces

$$\int_0^\infty dy \psi_f(y) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} [-2|A''(0)| + \lambda\phi'(0)]^{-1/2} \psi_f(0), \quad (4.15)$$

la cual requiere que se cumpla (2.9) para que este bien definida. Por tanto, en la pared de dominio asimétrica que interpola asintóticamente entre espaciotiempos con constantes cosmológicas dadas por (4.13) y definida bajo (3.10), coexistirán simultáneamente $\tilde{\psi}_g$ y $\tilde{\psi}_f$ no solo si se cumple (4.14) sino que también debe satisfacerse $\lambda > \lambda_2$ donde el umbral de localización viene dado por

$$\lambda_2 = \frac{8}{e} \frac{\alpha}{\phi_0}, \quad (4.16)$$

acorde a (2.9).

Con el fin de determinar el estado de normalización del modo fermionico ligero $\tilde{\psi}_f$, es necesario establecer la intersección entre

$$\lambda_{1+} = 2 \frac{\sqrt{|\tilde{\Lambda}_+|/6}}{\phi_+ - \epsilon}, \quad \lambda_{1-} = 2 \frac{\sqrt{|\tilde{\Lambda}_-|/6}}{\phi_- + \epsilon}. \quad (4.17)$$

donde $\phi_\pm = |\phi(y = \pm\infty)|$ y la jerarquía entre λ_{1+} y λ_{1-} es definida acorde al espacio de parámetros escogido. En particular, para (4.14) se tiene que la cota de normalización viene dada por

$$\lambda_1 = \frac{6}{e} \frac{\alpha}{\phi_0} \quad (4.18)$$

y, en consistencia con el análisis previo, se cumple $\lambda_2 > \lambda_1$.

Conclusiones

Es posible generar toda una familia de paredes de dominio generalizadas a partir de una pared de dominio generatriz por medio del corrimiento del superpotencial y del campo escalar correspondientes

$$\tilde{W} = W + \beta \quad , \quad \tilde{\phi} = \phi + \epsilon .$$

Las condiciones lógicas requeridas para que los campos de espín 2 y 1/2, no-masivos, exhiban una alta probabilidad de recurrencia en un sector cuatro-dimensional transverso a la dimensión adicional correspondientes a las paredes generalizadas, permiten catalogar a las paredes generatrices en dos conjuntos: mundos-brana y paredes aisladas.

El primer conjunto generatriz provee paredes generalizadas incompatibles con un mundo-brana. Como corolario se tiene: *el rompimiento de la simetría Z_2 de un mundo-brana conlleva inexorablemente a la destrucción del escenario, en el sentido indicado anteriormente.*

Por otro lado, en [29] se reporta un *approach* para obtener nuevas soluciones generalizadas compatibles con el mismo campo escalar, que el de la generatriz, pero con diferentes potenciales. En particular, es de enfatizar que a partir de una familia estática de paredes dobles con simetría Z_2 [30] obtienen otra familia de paredes dobles sin simetría de reflexión [29]. Como miembros de ambas familias, se tienen branas simples asociados a espaciotiempos con ó sin simetría especular, respectivamente. En contraste con lo indicado en [22], es posible verificar que estas también muestran la misma patología mostrada en el párrafo previo, lo cuál sugiere la siguiente generalización, dada la inequivalencia entre los mecanismos planteados: *Las deformaciones de un mundo-brana que impliquen cambios en los vacíos de la teoría conllevan inexorablemente a la destrucción del escenario.*

Finalmente, es para el conjunto generatriz de paredes aisladas que tiene sentido la deformación. En particular, para una brana carente de simetría Z_2 y con condiciones ausentes para albergar otros campos dada por

$$W(\phi) = \frac{\alpha}{12\delta} \phi^2 \left(1 - \ln \frac{\phi^2}{12\delta} \right) ,$$

resulta que la deformación en β corrige la ausencia del gravitón [18] y en ϵ la de los campos de materia [16]. Pero, aún así, no está completamente realizado el mundo brana; debido al comportamiento migratorio del campo quiral. En este sentido, se requiere de las constantes críticas de Yukawa de normalización y de localización dadas por

$$\lambda_1 = \frac{6}{e} \frac{\alpha}{\phi_0} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{8}{e} \frac{\alpha}{\phi_0} .$$

Para $\lambda < \lambda_1$ no hay localización. Para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ y $\lambda > \lambda_2$ los fermiones orbitan en torno a la pared, sin embargo, en la región isla la probabilidad tiene tres puntos críticos relativos, dos de los cuales son máximos ubicados sobre el borde del defecto topológico; a diferencia de la región, $\lambda > \lambda_2$, donde la probabilidad posee un máximo absoluto sobre la brana. Este efecto, aunque comentado [21], para nuestro conocimiento, no ha sido reportado hasta la fecha en la literatura.

Como un comentario adicional; en [16] se muestran las condiciones bajo las cuales se confina el fermión. En particular, para el escenario intrinsecamente asimétrico, se muestra que el mínimo acoplamiento de Yukawa requerido para confinar se obtiene para

$$\epsilon = \left(1 + \sqrt{\frac{|\tilde{\Lambda}_+|}{|\tilde{\Lambda}_-|}} \right)^{-1} \phi_0$$

y viene dado por

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{|\tilde{\Lambda}_+|} + \sqrt{|\tilde{\Lambda}_-|}}{\phi_0}.$$

Notese que, asumiendo que el gravitón está localizado, para $\beta = 3\alpha/e^2$ se reducen a

$$\epsilon = \frac{3}{e} \frac{\phi_0}{e}, \quad \lambda_0 = 2 \frac{\alpha}{\phi_0}.$$

los cuales difieren del parámetro de localización $\epsilon = \phi_0/e$ y del umbral de normalización λ_1 . Por lo tanto, el valor crítico de confinamiento, reportado en [16], corresponde a un estado normalizado entorno a la brana y no sobre la brana.

Apéndice A

Perturbaciones gravitacionales

A continuación presentamos una generalización del método empleado para obtener las desviaciones gravitacionales de una solución de vacío a las ecuaciones de Einstein [19], al caso de una solución arbitraria del sistema acoplado Einstein campo escalar. Debemos acotar, que esta generalización fue inicialmente reportada en la Ref. [18].

Sea $\{g_{\alpha\beta}, \phi\}$, una solución exacta al sistema (1.6 - 1.8). Por otra parte, suponga que existe una familia uniparamétrica $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda)\}$ que también satisface el sistema (1.6 - 1.8), tal que

- $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda)\}$ sean diferenciable respecto a λ
- $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda)\}|_{\lambda=0} = \{g_{\alpha\beta}, \phi\}$.

Ocurre que pequeños valores de λ corresponden a pequeñas desviaciones de $\{g_{\alpha\beta}, \phi\}$, es decir

$$\frac{d}{d\lambda}\{\tilde{g}_{\alpha\beta}(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda)\}|_{\lambda=0} = \{h_{\alpha\beta}, \varphi\}, \quad (\text{A.1})$$

donde $\{h_{\alpha\beta}, \varphi\}$ representan las fluctuaciones de la métrica y el campo escalar respectivamente.

Para continuar, es conveniente escribir la ecuación (1.6) para $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ en la forma Ricci cinco-dimensional

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{T}, \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_\beta\tilde{\phi} - \tilde{g}_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^\zeta\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_\zeta\tilde{\phi} + V(\tilde{\phi})\right], \quad (\text{A.2})$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{T}_{\alpha\beta}$. Similarmente, tenemos para el campo escalar

$$\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}^\alpha\tilde{\phi} - \frac{dV(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Con el fin de desarrollar (A.2), consideremos primeramente el lado izquierdo de la forma Ricci.

Comencemos expresando el tensor de Riemann $\tilde{R}_{\alpha\beta\zeta}^\delta$ en términos de $R_{\alpha\beta\zeta}^\delta$,

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\zeta}^\delta = R_{\alpha\beta\zeta}^\delta - 2\nabla_{[\alpha}\tilde{C}^\delta{}_{\beta]\zeta} + 2\tilde{C}^\xi{}_{\zeta[\alpha}\tilde{C}^\delta{}_{\beta]\xi} \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\nabla_\zeta g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.5})$$

y

$$\tilde{C}^{\zeta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\zeta\delta} (\nabla_{\alpha}\tilde{g}_{\beta\delta} + \nabla_{\beta}\tilde{g}_{\alpha\delta} - \nabla_{\delta}\tilde{g}_{\alpha\beta}) . \quad (\text{A.6})$$

Entonces de la ecuación (A.4) se sigue que

$$\tilde{R}_{\alpha\zeta} = R_{\alpha\zeta} - 2\nabla_{[\alpha}\tilde{C}^{\beta}_{\beta]\zeta} + 2\tilde{C}^{\xi}_{\zeta[\alpha}\tilde{C}^{\beta}_{\beta]\xi} , \quad (\text{A.7})$$

el cual a primer orden de perturbación se reduce a

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{R}_{\alpha\zeta}\Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2}g^{\beta\delta}\nabla_{\beta}\nabla_{\delta}h_{\alpha\zeta} - \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}\nabla_{\zeta}(g^{\beta\delta}h_{\beta\delta}) + \nabla^{\beta}\nabla_{(\alpha}h_{\zeta)\beta} . \quad (\text{A.8})$$

Consideremos ahora el lado derecho de la forma Ricci cinco-dimensional (A.2) a primer orden de perturbación

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\tilde{T}_{\alpha\zeta} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{\alpha\zeta}\tilde{T}\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{2}{3}h_{\alpha\zeta}V(\phi) + \frac{2}{3}g_{\alpha\zeta}\frac{dV}{d\phi}\varphi + 2\nabla_{\alpha}\varphi\nabla_{\zeta}\phi . \quad (\text{A.9})$$

Además, consideremos también que el campo escalar depende únicamente de la coordenada adicional, $\phi = \phi(y)$. Entonces, igualando (A.8) y (A.9) y escogiendo el calibre axial

$$h_{y\alpha} = 0 , \quad (\text{A.10})$$

encontramos que el sector transversal y sin traza (TT) de las fluctuaciones $h_{\alpha\beta}$ se desacopla de las fluctuaciones escalares φ , permitiendo escoger esta última igual a cero. Por tanto, los modos TT se reducen a

$$-\frac{1}{2}\nabla^{\delta}\nabla_{\delta}h_{\alpha\zeta} + R^{\delta}_{(\alpha\zeta)}{}^{\beta}h_{\beta\delta} + R^{\delta}_{(\alpha}h_{\zeta)\delta} = \frac{2}{3}h_{\alpha\zeta}V(\phi) , \quad (\text{A.11})$$

donde hemos usado la siguiente relación

$$\nabla^{\beta}\nabla_{(\alpha}h_{\zeta)\beta} = \nabla_{(\alpha}\nabla^{\beta}h_{\zeta)\beta} + R^{\delta}_{(\alpha\zeta)}{}^{\beta}h_{\beta\delta} + R_{(\alpha}{}^{\beta}h_{\zeta)\beta} . \quad (\text{A.12})$$

En este trabajo, emplearemos la expresión (A.11) para determinar los modos TT de los diferentes espacio-tiempos pared de dominio discutidos aquí.

Apéndice B

Fermiones sobre la pared

Considere un espacio-tiempo cinco-dimensional pared de dominio asintóticamente AdS

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{ab} dx^a dx^b + dy^2, \quad (\text{B.1})$$

donde η es la métrica cuatro-diemnsional de Minkowski. En este apéndice los índices $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ corresponden a un espacio-tiempo curvo, mientras que los índices (a, b, c, \dots) están identificados con una variedad plana.

Consideremos ahora un campo espinorial $\Psi(x, y)$, el cual satisface la ecuación de Dirac en el *background* (B.1),

$$[i\Gamma^\mu \nabla_\mu - \lambda\phi(y)] \Psi(x, y) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.2})$$

donde las matrices Γ siguen la relación indicada en (2.2). Explícitamente tenemos que (B.2) se descompone de la siguiente manera

$$i\Gamma^a e_a{}^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu) \Psi(x, y) = \mathbf{0}, \quad \Omega_\mu = -\frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab} \Gamma_{ab}, \quad \Gamma_{ab} = \frac{1}{2} [\Gamma_a, \Gamma_b], \quad (\text{B.3})$$

siendo e y ω las tétradas y conexión espin del sistema, que siguen la relación

$$\omega_{\mu a}{}^c = -e_a{}^\nu (\partial_\mu e_\nu{}^c - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho e_\rho{}^c). \quad (\text{B.4})$$

Identificando a partir de (B.1) las tétradas, encontramos que

$$\Omega_m = \frac{1}{2} A'(y) e^{A(y)} \Gamma_m \Gamma^4, \quad \Omega_4 = \mathbf{0}, \quad (\text{B.5})$$

donde $m = 0, \dots, 3$. En consecuencia, la ecuación de Dirac (B.2) se reduce a

$$[ie^{-A(y)} \Gamma^a \partial_a + i\Gamma^4 (\partial_4 + 2A') - \lambda\phi] \Psi(x, y) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Ahora, considerando la descomposición quiral

$$\Psi(x, y) = \varphi_L(x) \psi_L(y) + \varphi_R(x) \psi_R(y), \quad (\text{B.7})$$

y asumiendo que $\varphi_{L,R}$ satisface la ecuación de Dirac cuatro-dimensional, $\gamma^a \partial_a \varphi_{L,R} = 0$, se tiene

$$(\partial_y + 2A' \pm \lambda \phi) \psi_{L,R}(y) = 0, \quad (\text{B.8})$$

Bibliografía

- [1] Petr Horava and Edward Witten. Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions. *Nucl. Phys.*, B460:506–524, 1996.
- [2] Petr Horava and Edward Witten. Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary. *Nucl. Phys.*, B475:94–114, 1996.
- [3] Andre Lukas, Burt A. Ovrut, K. S. Stelle, and Daniel Waldram. The universe as a domain wall. *Phys. Rev.*, D59:086001, 1999.
- [4] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263–272, 1998.
- [5] D. Cremades, L. E. Ibanez, and F. Marchesano. Standard model at intersecting D5-branes: Lowering the string scale. *Nucl. Phys.*, B643:93–130, 2002.
- [6] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys. Lett.*, B125:136–138, 1983.
- [7] K. Akama. An early proposal of 'brane world'. *Lect. Notes Phys.*, 176:267–271, 1982.
- [8] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.
- [9] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.
- [10] Martin Gremm. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett.*, B478:434–438, 2000.
- [11] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Timothy J. Hollowood, and Yuri Shirman. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys.*, B581:309–338, 2000.
- [12] A. Kehagias and K. Tamvakis. A self-tuning solution of the cosmological constant problem. *Mod. Phys. Lett.*, A17:1767–1774, 2002.
- [13] Borut Bajc and Gregory Gabadadze. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de Sitter space. *Phys. Lett.*, B474:282–291, 2000.

-
- [14] Christophe Ringeval, Patrick Peter, and Jean-Philippe Uzan. Localization of massive fermions on the brane. *Phys. Rev.*, D65:044016, 2002.
- [15] Ratna Koley and Sayan Kar. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 22:753–768, 2005.
- [16] Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Jose David Tempo. Fermion localization on thick branes. *Phys. Rev.*, D73:044033, 2006.
- [17] Kostas Skenderis and Paul K. Townsend. Gravitational stability and renormalization-group flow. *Phys. Lett.*, B468:46–51, 1999.
- [18] Oscar Castillo-Felisola, Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Alba Ramirez. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004.
- [19] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p.
- [20] A. Kehagias and K. Tamvakis. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504:38–46, 2001.
- [21] Tracy R. Slatyer and Raymond R. Volkas. Cosmology and Fermion Confinement in a Scalar-Field- Generated Domain Wall Brane in Five Dimensions. *JHEP*, 04:062, 2007.
- [22] Yu-Xiao Liu, Chun-E Fu, Li Zhao, and Yi-Shi Duan. Localization and Mass Spectra of Fermions on Symmetric and Asymmetric Thick Branes. *Phys. Rev.*, D80:065020, 2009.
- [23] Yu-Xiao Liu, Li-Da Zhang, Li-Jie Zhang, and Yi-Shi Duan. Fermions on Thick Branes in Background of Sine-Gordon Kinks. *Phys. Rev.*, D78:065025, 2008.
- [24] Rommel Guerrero, Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and R. Omar Rodriguez. Close to the edge: Hierarchy in a double braneworld. *Phys. Rev.*, D74:084025, 2006.
- [25] Nima Arkani-Hamed and Martin Schmaltz. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. *Phys. Rev.*, D61:033005, 2000.
- [26] Gonzalo A. Palma. Confining the electroweak model to a brane. *Phys. Rev.*, D73:045023, 2006.
- [27] Eugene A. Mirabelli and Martin Schmaltz. Yukawa hierarchies from split fermions in extra dimensions. *Phys. Rev.*, D61:113011, 2000.
- [28] Nima Arkani-Hamed, Yuval Grossman, and Martin Schmaltz. Split fermions in extra dimensions and exponentially small cross-sections at future colliders. *Phys. Rev.*, D61:115004, 2000.
- [29] Rommel Guerrero, R. Omar Rodriguez, and Rafael S. Torrealba. De Sitter and double asymmetric brane worlds. *Phys. Rev.*, D72:124012, 2005.
- [30] Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Aureliano Skirzewski. Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry. *Phys. Rev.*, D67:105003, 2003.