Aproximación diferenciable de Funciones Lipschitz en Variedades Finsler

Yenny Carolina Rangel Oliveros

Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de ciencias y tecnología.

Barquisimeto, 2014

Aproximación diferenciable de Funciones Lipschitz en Variedades Finsler

Por

Yenny Carolina Rangel Oliveros

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar a la categoría de Agregado en el escalafón del personal docente e investigación de la UCLA

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de ciencias y tecnología.

Barquisimeto, 2014

Aproximación diferenciable de Funciones Lipschitz en Variedades Finsler

Resumen

La presente Memoria está dedicada fundamentalmente a estudiar dos cuestiones, relacionadas entre sí, en el marco de los espacios de funciones diferenciables en variedades Finsler. Por una parte, nos interesamos en un problema de aproximación diferenciable, más concretamente la cuestión de aproximar uniformemente una función Lipschitziana por funciones diferenciables y Lipschitzianas, manteniendo el control sobre las constantes de Lipschitz. Como una consecuencia de este hecho obtenemos un criterio de completitud en la clase de las variedades Finsler que hemos llamado casi-reversibles. Por otro lado, considerando el álgebra normada $C_b^1(M)$ de todas las funciones de clase C^1 con derivada acotada sobre una variedad Finsler M casi-reversible y completa, obtenemos una caracterización de isomorfismos de álgebras $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ como una composición de operadores. De esto obtenemos una variante del teorema de Myers-Nakai [26] en el contexto de variedades Finsler completas reversibles.

Índice general

Introducción

Antecedentes

Existen muchas funciones definidas en variedades Riemannianas de relevante significado geométrico las cuales son Lipschitz pero no diferenciables, como es el caso por ejemplo de la función distancia. Por tal motivo es interesante estudiar la regularización y aproximación diferenciable de funciones Lipschitz sobre variedades Riemannianas, tal estudio ha sido realizado en el trabajo clásico de Greene y Wu [18], donde en particular es probado que toda función real Lipschitz sobre una variedad Riemanniana (conexa, segundo numerable y finito dimensional) puede ser aproximada, en la topología C^0-fina, por funciones Lipschitz diferenciables cuyas contantes de Lipschitz pueden estar arbitrariamente cercanas a la constante de Lipschitz de la función original. Este resultado ha sido extendido en [3] al caso de variedades Riemannianas de dimensión infinita, donde son dadas algunas aplicaciones interesantes. Recientemente, se han obtenido resultados relacionados de aproximación en las llamadas variedades Banach-Finsler [22]. Nuestro propósito en este trabajo es estudiar el problema de aproximación análogo en el contexto de variedades Finsler de dimensión finita.

Una estructura de Finsler determina una geometría que en general no es "infinitesimalmente euclídea". Este tipo de estructura ya fue sugerida por el propio Riemann en su Tesis de Habilitación "Über die Hypotheser welche der geometric zugrund liegen"(1854), pero no fue estudiada en detalle hasta más tarde por P. Finsler en su Tesis "Über kurven und Flächen in allgeneinen Räumen"(1918), de quien toma el nombre. Con más precisión, una estructura de Finsler en una variedad consiste en la asignación en cada punto de la variedad de lo que se llama una *norma de Minkowski* (véase definición 4.1), que es una función homogénea con buenas propiedades de diferenciabilidad y convexidad, pero que no es simétrica en general, y por tanto no es una norma en el sentido usual. Esta estructura permite definir la longitud de caminos sobre la variedad de la manera habitual y de este modo introducir la *distancia geodésica* sobre la variedad, que en general será una *distancia no simétrica*.

Estructura de la memoria y aportes originales.

Para poder considerar las correspondientes estructuras métricas, supondremos a lo largo de la Memoria que todas las variedades son conexas (en caso contrario el estudio se reduciría a cada componente conexa).

El contenido de la Memoria es el siguiente: El Capítulo 1 comienza con una breve recopilación de los conceptos y los resultados fundamentales sobre variedades Finsler que serán utilizados en el trabajo. Nuestras referencias principales aquí serán el libro de Bao, Chern y Shen [4] y el trabajo de Deng y Hou [6].

En el capítulo 2 nos dedicaremos a dar una desigualdad del valor medio en este contexto de las variedades Finsler, el cual es un aporte original publicado recientemente.

En el capítulo 3 desarrollaremos el resultado principal de este trabajo que dice que toda función real Lipschitz sobre una variedad Finsler segundo numerable y conexa puede ser aproximada en la topología C^0-fina, por funciones Lipschitz de clase C^1 de constantes Lipschitz arbitrariamente cercanas a la constante de Lipschitz de la función original. Este resultado de aproximación es un aporte original recientemente publicado y ha sido usado en [12] para obtener una versión del teorema de Myers-Nakai para variedades Finsler reversibles (esto es en el caso que la estructura Finsler es absolutamente homogénea).

En el capítulo 4 introducimos la clase de variedades Finsler casi-reversibles, las cuales pueden ser descritas como aquellas variedades Finsler donde las funciones distancias son Lipschitz. Como una consecuencia del resultado principal, obtenemos un criterio de completitud para variedades Finsler casi-reversibles, en términos de la existencia de una función propia de clase C^1 con derivada uniformemente acotada. En este camino extendemos el criterio de completitud para variedades Riemannianas dada por Gordon en [8].

Finalmente en el capítulo 5 consideramos un álgebra normada $C_b^1(M)$ de todas las funciones de clase C^1 con derivada acotada sobre na variedad Finsler M casi-reversible, y obtenemos una caracterización de isomorfismos de álgebras normadas como composición de operadores. De esto obtenemos una variante del teorema de Myers-Nakai [26] en el contexto de variedades Finsler reversibles completa. En este sentido, recordemos que el teorema clásico de Myers-Nakai [[24],[26]] establece que, para una variedad Riemanniana de dimensión finita, la estructura Riemanniana de la variedad queda determinada por la estructura natural de álgebra de Banach en el espacio de las funciones diferenciables, acotadas y con derivada acotada, definidas sobre la variedad.

Publicaciones resultado de la memoria

Los resultados originales de este trabajo han sido publicados en la revista Journal of function spaces and Applications en el 2013 (ver [13]). Es importante destacar que mis aportes en este artículo se enfocan principalmente en los capítulos 3 y 5 enmarcado en el proyecto de investigación 014-CT-2012 (CDCHT-UCLA-Venezuela).

Capítulo 1

Variedades Finsler

En este capítulo presentaremos las nociones básicas sobre variedades Finsler en dimensión finita basadas en el libro de Bao, Chern y Shen [4] que utilizaremos en los siguientes capítulos.

En lo que sigue vamos a emplear habitualmente espacios vectoriales de dimensión finita siempre considerados sobre el cuerpo de los números reales.

Dentro de los espacios vectoriales, estamos acostumbrados a tratar con las llamadas normas euclideas que son inducidas por un producto escalar, pero existen definiciones alternativas de normas. Un ejemplo lo constituyen las denominadas normas de Minkowski.

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Decimos que un funcional $F : V \to [0, +\infty)$ es una norma Minkowski sobre V si satisface las siguientes condiciones:*

1. **Positividad:** $F(v) = 0$ *si, y sólo si,* $v = 0$.
2. **desigualdad triangular:** $F(u + v) \leq F(u) + F(v)$, *para todo* $u, v \in V$
3. **Regularidad:** *F es continua sobre V y es C^∞ sobre $V - \{0\}$;*
4. **Positivamente homogénea:** $F(\lambda v) = \lambda F(v)$, *para todo* $\lambda > 0$ *y todo* $v \in V$;
5. **Convexidad fuerte:** *Para todo $v \in V - \{0\}$, la forma cuadrática g_v asociada a la segunda derivada de la función F^2 en v, esto es*

$$g_v = \frac{1}{2} d^2[F^2](v)$$

   es definida positiva sobre V.

Notamos que las condiciones 1) y 2) en la definición anterior son consecuencias de las condiciones 3)-5) (ver teorema 1.2.2 de [4]). Es claro que toda norma asociada a un producto interno es una norma de Minkowski. En general, una norma de Minkowski no necesariamente es simétrica, y existen ejemplos muy interesantes de norma de Minkowski no simétrica, uno de ellos son los espacios Randers (ver [4])

Definición 1.2. *Sea V un espacio métrico. Diremos que la distancia d en V es asimétrica si para todo v y w en V se tiene que*

$$d(v,w) \neq d(w,v).$$

Ejemplo 1.3. Sea Ω un dominio acotado en $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$. Supongamos que Ω es estrictamente convexo, es decir, si para cualquier segmento L en $\mathbb{R}^n$ los extremos de L están contenidos en Ω, entonces todo el segmento L está contenido en Ω. Para un par de puntos $v, w \in \Omega$, sea L_{vw} la línea que comienza en v y pasa por w. Como Ω es estrictamente convexo, existe un único punto de intersección $z_{vw} = L_{vw} \cap \partial\Omega$.

Definamos

$$d(v,w) = \ln \frac{|z_{vw} - v|}{|z_{vw} - w|}, \tag{1.1}$$

donde ln es el logaritmo natural. Mostraremos que d es asimétrica sobre Ω, d es llamada la métrica *Funk*. Para ello es suficiente probar la desigualdad triangular:

$$d(v,w) \leq d(v,r) + d(r,w).$$

Supongamos que $r \notin L_{vw}$, entonces sean $z_{vr} = L_{vr} \cap \partial\Omega$, $z_{rw} = L_{rw} \cap \partial\Omega$ y $x = L_{vw} \cap L_{z_{vr} z_{rw}}$. Luego, sean

$$\theta = \angle v x z_{vr}, \quad \phi = \angle v z_{vr} z_{rw}, \quad \psi = \angle r z_{rw} z_{vr}.$$

Por la ley del seno, tenemos las siguientes identidades.

$$\frac{|z_{vr} - v|}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{|x - v|}{\operatorname{sen}\phi}, \quad \frac{|z_{rw} - w|}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{|x - w|}{\operatorname{sen}\psi}, \quad \frac{|z_{rw} - r|}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{|z_{vr} - r|}{\operatorname{sen}\psi}.$$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|x - v|}{|x - w|} &= \frac{|z_{vr} - v| \operatorname{sen}\phi / \operatorname{sen}\theta}{|z_{rw} - w| \operatorname{sen}\psi / \operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{|z_{vr} - v| \operatorname{sen}\phi}{|z_{rw} - w| \operatorname{sen}\psi} \\ &= \frac{|z_{vr} - v|}{|z_{rw} - w|} \frac{|z_{rw} - r|}{|z_{vr} - r|}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{|z_{vw} - v|}{|z_{vw} - w|} = \frac{|z_{vw} - x| + |x - v|}{|z_{vw} - x| + |x - w|} < \frac{|x - v|}{|x - w|}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{|z_{vw} - v|}{|z_{vw} - w|} < \frac{|z_{vr} - v|}{|z_{vr} - r|} \frac{|z_{rw} - r|}{|z_{rw} - w|}.$$

Y esto da,

$$d(v, w) < \ln \frac{|z_{vw} - v|}{|z_{vw} - w|} = \ln \frac{|z_{vw} - v|}{|z_{vw} - r|} + \ln \frac{|z_{vw} - r|}{|z_{vw} - w|} = d(v, r) + d(r, w).$$

Así d es una métrica sobre Ω.

Ahora veamos el caso especial cuando $\Omega = \mathbb{B}^n$ es la bola unidad en el espacio Euclídeano $\mathbb{R}^n$. Para un par de puntos $v, w \in \mathbb{B}^n$, sea

$$z_{vw} = v + \lambda(w - v) \in \partial\mathbb{B}^n, \quad \lambda > 1.$$

De la ecuación $|z|^2 = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sqrt{\langle v, w - v\rangle^2 + |w - v|^2(1 - |v|^2)} - \langle v, w - v\rangle}{|w - v|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|v - w|^2 - (|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2)} - \langle v, w - v\rangle}{|w - v|^2}. \end{aligned}$$

Por (4.2), obtenemos una fórmula para la métrica Funk sobre $\mathbb{B}^n$

$$d(p, q) = \ln \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \ln \frac{\sqrt{|v - w|^2 - (|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2)} - \langle v, w - v\rangle}{\sqrt{|v - w|^2 - (|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2)} - \langle w, w - v\rangle}.$$

Note que

$$\lim_{w \to \partial\mathbb{B}^n} d(0, w) = \infty, \qquad \lim_{v \to \partial\mathbb{B}^n} d(v, 0) = \ln 2.$$

Observación 1.4. Asociada a una norma de Minkowski F tenemos una *distancia asimétrica*

$$d_F(v, w) = F(w - v)$$

que genera la topología usual.

Como consecuencia de las propiedades de una norma de Minkowski que nos da la definición tenemos el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [4][Teorema 1.2.2, pág 6]

Teorema 1.5. *Sea (V, F) un espacio de Minkowski. Entonces tenemos las siguientes propiedades:*

- *(Positividad)*

$$F(v) > 0 \quad \text{si, y solamente si, } v \neq 0.$$

- *(Desigualdad triangular)*

$$F(v_1 + v_2) \leq F(v_1) + F(v_2), \tag{1.2}$$

donde la igualdad se cumple si y solamente si $v_2 = tv_1$ o $v_1 = tv_2$ para algún $t \geq 0$.

Ejemplo 1.6. Sea α una norma asociada a un producto escalar y β una forma lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Definimos

$$F(v) = \alpha(v) + \beta(v). \tag{1.3}$$

Claramente, F satisface 1 y 2 en la Definición 1.1 . Vamos a mostrar que 3 se cumple si y solamente si $\|\beta\| = \sup_{\alpha(v)=1} \beta(v) < 1$.

Fijemos una base $\{b_i\}_{i=1}^n$ para V y expresemos

$$\alpha(v) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v^i v^j}, \quad \beta(v) = \sum_{i=1}^n b_i v^i, \quad v = \sum_{i=1}^n v^i b_i \in V,$$

donde (a_{ij}) es una matriz simétrica definida positiva. Tenemos

$$\|\beta\| = \sup_{\alpha(v)=1} \beta(v) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} b_i b_j},$$

donde $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Sea

$$g_{ij}(v) = d^2[\frac{1}{2}F^2](v).$$

Unos cálculos dan:

$$g_{ij}(v) = \frac{F}{\alpha}\Big(a_{ij} - \frac{v_i}{\alpha}\frac{v_j}{\alpha}\Big) + \Big(\frac{v_i}{\alpha} + b_i\Big)\Big(\frac{v_j}{\alpha} + b_j\Big), \tag{1.4}$$

donde $v_i = a_{is} v^s$. De (4.5), podemos mostrar que (g_{ij}) es definida positiva para todo $v \neq 0$ si y solamente si $\|\beta\| < 1$. Así $F = \alpha + \beta$ es una norma de Minkowski si y solamente si $\|\beta\| < 1$. Una función $F = \alpha + \beta$ sobre V con $\|\beta\| < 1$ es llamada una norma Randers.

Ahora verifiquemos (4.3) por un camino directo. Observe que

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \alpha(u+v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &\leq \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &= F(u) + F(v). \end{aligned}$$

En algunas situaciones la norma de Minkowski satisface el criterio de simetría $F(-v) = F(v)$. En este caso tenemos homogeneidad absoluta, para ello establecemos la siguiente definición

Definición 1.7. *Diremos que F es reversible o absolutamente homogénea si $F(\lambda v) = |\lambda| F(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$. En este caso F es una norma en el sentido usual.*

Observación 1.8. En general, encontramos esta propiedad un poco restrictiva, porque excluye algunos ejemplos interesantes tal como la norma Randers del Ejemplo 1.6 en donde podemos observar fácilmente que $F(-v) \neq F(v)$ cuando $\beta \neq 0$, puesto que $F(v) = \alpha(v) + \beta(v)$ y $F(-v) = \alpha(v) - \beta(v)$. En efecto, la norma Randers es absolutamente homogénea si y solamente si esta es Euclídea.

Recordemos que un dominio D en un espacio vectorial V es estrictamente convexo si dados dos puntos cualesquiera en su clausura $\overline{D}$ el segmento que los une está contenido en el interior de D. Luego, si tomamos F una norma Minkowski dado cualquier $r > 0$, es fácil probar que la bola $B^n(r) = \{v \in V : F(v) < r\}$ de radio r (centrada en el origen) es un dominio estrictamente convexo con frontera $S^{n-1}(r) = \{v \in V : F(v) = r\}$ de clase C^∞, esto significa que convexidad fuerte implica convexidad estricta.

El siguiente ejemplo muestra que hay funciones homogéneas F en el cual las bolas unidad son estrictamente convexas pero no son fuertemente convexas. Por lo tanto ellas no definen una norma de Minkowski.

Ejemplo 1.9. Considere el siguiente dominio en V

$$D = \left\{ v : (v_1)^4 + (v_2)^4 < 1 \right\}$$

estrictamente convexo. La función $F : S = \partial D \to [0, +\infty)$ está dada por:

$$F(v) = \left\{ (v_1)^4 + (v_2)^4 \right\}^{\frac{1}{4}}.$$

Luego, la forma bilineal $g_{ij}(v)$ es semidefinida positiva para todo $v \in S$. Sin embargo, D no es fuertemente convexa, En efecto sea

$$g_{11} = \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_1}[\frac{1}{2}F^2], \quad g_{12} = \frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_1}[\frac{1}{2}F^2] = g_{21}, \quad g_{22} = \frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_2}[\frac{1}{2}F^2].$$

Haciendo unos cálculos tenemos que:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 3v_1^2(v_1^4 + v_2^4)^{-\frac{1}{2}} - 2v_1^6(v_1^4 + v_2^4)^{-\frac{3}{2}} \\ g_{12} &= -2v_1^3 v_2^3 (v_1^4 + v_2^4)^{-\frac{3}{2}} = g_{21} \\ g_{22} &= 3v_1^2(v_1^4 + v_2^4)^{-\frac{1}{2}} - 2v_1^6(v_1^4 + v_2^4)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$det(g_{ij}) = 9v_1^4(v_1^4 + v_2^4)^{-1} - 12v_1^8(v_1^4 + v_2^4)^{-2} + (4v_1^{12} - 4v_1^6v_2^6)(v_1^4 + v_2^4)^{-3}$$

Así, observamos que para $(0, 1) \in S$ el $det(g_{ij}) = 0$.

Con este ejemplo es importante observar que si tenemos una aplicación continua $F : V \to [0, +\infty)$ tal que

- F es de clase C^∞ en $V - \{0\}$.
- F es estrictamente convexa.
- $F(\lambda v) = \lambda F(v)$, para todo $\lambda > 0$.

Entonces F no es necesariamente una norma de Minkowski, porque necesitamos la convexidad fuerte.

Definición de variedad Finsler:

Estudiada la norma de Minkowski y sus propiedades procedemos a definir lo que es una variedad Finsler. Coloquialmente hablando, una métrica Finsler sobre una variedad M finito dimensional es una función $F : TM \to \mathbb{R}$ continua, cuya restricción a cada espacio tangente T_pM con $p \in M$ es una norma de Minkowski. Formalmente definimos una variedad Finsler como sigue:

Definición 1.10. *Diremos que (M, F) es una variedad Finsler si F es una función*

$$F : TM \to [0, +\infty)$$

continua, con la propiedad de que es diferenciable en $TM - \{0\}$ y para todo $p \in M$, $F(p, \cdot) : T_pM \to [0, +\infty)$ es una norma de Minkowski.

Estructura de longitud:

Sean (M, F) una variedad Finsler y $\alpha : [a, b] \to M$ una curva de clase C^1 a trozos. Definimos la longitud de α como:

$$L_F(\alpha) = \int_a^b F(\alpha(t), \alpha'(t))dt.$$

Por otro lado sea $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ una biyección de clase C^1 tal que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Entonces $\alpha \circ \varphi$ es de clase C^1 a trozos, y ésta es llamada una reparametrización de α. Es fácil comprobar que

$$L_F(\alpha \circ \varphi) = L_F(\alpha).$$

Diremos que la curva α está parametrizada por la longitud del arco o tiene *velocidad Finsleriana constante*, cuando $\alpha : [a,b] \to M$ satisface $F(\alpha(t), \alpha'(t)) = 1$ para todo $t \in [a,b]$, excepto en un número finito de puntos. En este caso se tiene que

$$L_F(\alpha|_{[r,s]}) = \int_r^s F(\alpha(t), \alpha'(t))dt = s - r,$$

para cada $r, s \in [a,b]$.

Veamos que todo camino C^1 a trozos $\alpha : [a,b] \to M$ que satisface $\alpha'(t) \neq 0$ salvo en un número finito de puntos, puede reparametrizarse por la longitud de arco. En efecto, definamos la función $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_a^t F(\alpha(t), \alpha'(t))dt.$$

Entonces s es monótona y $s(a) = 0$, mientras que $s(b) = L_F(\alpha)$. Puesto que solo hay una cantidad finita de valores de $t \in [a,b]$ tales que $\alpha'(t) = 0$, podemos dividir el intervalo $[a,b]$ en subintervalos donde $\alpha'(t) \neq 0$ excepto en los extremos de los subintervalos. Consideraremos cada uno de ellos por separado. Sea $[a_1, b_1]$ uno de estos subintervalos con $\alpha'(t) \neq 0$ para $t \in (a_1, b_1)$. Sea $s(a_1)$ la longitud de la curva sobre el intervalo $[a, a_1]$, y definamos

$$s(t) = s(a_1) + \int_{a_1}^t F(\alpha(t), \alpha'(t))dt \quad \text{para } \ a_1 \leq t \leq b_1.$$

Entonces s es estrictamente creciente en $[a_1, b_1]$, y por lo tanto la función inversa $t = \varphi(s)$ está definida sobre el intervalo $[s(a_1), s(b_1)]$, es de clase C^1 en $(s(a_1), s(b_1))$, y además $F((\alpha \circ \varphi)(s), (\alpha \circ \varphi)'(s)) = 1$. Así podemos reparametrizar la curva por la variable s en este subintervalo. De esta manera, el camino α sobre $[a,b]$ es reparametrizado por otro camino

$$\alpha \circ \varphi : [0, L_F] \to M$$

via la función $\varphi : [0, L_F] \to [a,b]$ tal que $F((\alpha \circ \varphi)(s), (\alpha \circ \varphi)'(s)) = 1$ salvo un número finito de puntos, y $L_F((\alpha \circ \varphi)|_{[0,s]}) = s$.

Con esta definición de longitud, cada variedad Finsler (M, F) conexa se convierte en un *espacio métrico asimétrico* de un modo natural definiendo la función distancia d_F sobre $M \times M$ por:

$$d_F(p,q) = \text{ínf}\{L_F(\alpha) : \alpha \text{ es un camino } C^1 \text{ a trozos desde } p \text{ hasta } q \text{ en } M\}.$$

Es fácil verificar que (M, d_F) satisface los dos primeros axiomas de un espacio métrico:

(1)$d_F(p,q) \geq 0$, donde la igualdad se cumple si y solamente si $p = q$.

(2)$d_F(p,q) \leq d_F(p,z) + d_F(z,q)$.

Si la estructura Finsler F es absolutamente homogénea, entonces también tenemos que

(3) $d_F(p,q) = d_F(q,p)$.

En este caso, (M, d_F) es un espacio métrico genuino. Sin embargo, enfatizamos que generalmente la función distancia d_F sobre una variedad Finsler no tiene la propiedad de simetría (3). Por ejemplo, esto ocurre en un espacio de Minkowski que no sea absolutamente homogéneo.

Bolas métricas por la derecha y esferas métricas por la derecha:

Como hemos comentado anteriormente la distancia d_F sobre una variedad Finsler puede que no tenga la propiedad de simetría por ello nos vemos en la necesidad de definir las bolas laterales en esta variedad. Pero antes enunciaremos la siguiente proposición que nos permite comparar la métrica Finsler con la Euclídea. Su demostración puede verse en [4][Lema 6.2.1, pág 146].

Proposición 1.11. *Sea (M, F) una variedad Finsler. Para todo punto $p \in M$ existe una carta $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes propiedades:*

- *La clausura de U es compacta, $\varphi(p) = 0$, y φ es un difeomorfismo de U sobre una bola abierta de $\mathbb{R}^n$.*
- *Existe una constante $c > 1$ tal que*

$$\frac{1}{c}|d\varphi(q)(v)| \leq F(q,v) \leq c|d\varphi(q)(v)| \quad y \quad F(q,-v) \leq c^2 F(q,v),$$

  para todo $v \in T_pM$ y $q \in \overline{U}$.
- *Dados $p_1, p_2 \in U$, tenemos*

$$\frac{1}{c}|\varphi(p_2) - \varphi(p_1)| \leq d_F(p_1,p_2) \leq c|\varphi(p_2) - \varphi(p_1)|. \tag{1.5}$$

- *Para cada par de puntos $p_1, p_2 \in U$, tenemos*

$$\frac{1}{c^2} d_F(p_2,p_1) \leq d_F(p_1,p_2) \leq c^2 d_F(p_2,p_1). \tag{1.6}$$

Anteriormente hemos dado la noción de una bola tangente $B_{0_p}(r)$ y una esfera tangente $S_{0_p}(r)$. Estos objetos tienen radio r y centro p, y viven en el espacio tangente T_pM. Su contraparte sobre M son las bolas métricas por la derecha $\mathbf{B}_p^+(r)$ y las esferas métricas por la derecha $\mathbf{S}_p^+(r)$:

$$\mathbf{B}_p^+(r) = \{q \in M : d_F(p,q) < r\}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{S}_p^+(r) = \{q \in M : d_F(p,q) = r\}. \tag{1.8}$$

Ahora debemos mostrar que la topología de la variedad coincide con la generada por las bolas métricas por la derecha. Para ello utilizaremos la desigualdad (1.6) de la Proposición 1.11.

El lado derecho de (1.6) dice que la topología métrica está contenida en la topología de la variedad, y el lado izquierdo de (1.6) dice que la topología de la variedad está contenida en la topología métrica.

Ahora vamos a demostrar que toda bola métrica por la derecha es un conjunto abierto. Tomemos $q \in \mathbf{B}_p^+(r)$. Luego, el número ϵ dado por $r - d_F(p,q)$ es positivo. Asociemos a q un conjunto abierto U, una función coordenada φ, una bola Euclideana abierta $\mathbb{B}^n(s)$, y una constante $c > 1$ con la propiedad descrita en (1.6). Suponiendo c suficientemente grande, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{\epsilon}{c} \leq s$. Por tanto como φ es un difeomorfismo, tenemos que

$$\mathbf{O} = \varphi^{-1}\Big[\mathbb{B}^n\Big(\frac{\epsilon}{c}\Big)\Big]$$

es un conjunto abierto en la topología de la variedad y contiene al punto q.

Para cada $x \in \mathbf{O}$, el lado derecho de (1.6) implica que

$$d_F(q,x) \leq c|\varphi(x)| < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Así,

$$d_F(p,x) \leq d_F(p,q) + d_F(q,x) < (r-\epsilon) + \epsilon = r.$$

En otras palabras, $\mathbf{O}$ está contenido en $\mathbf{B}_p^+(r)$.

Además se tiene que la bola métrica por la derecha $\mathbf{B}_p^+(r)$ se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos de la variedad. También es cierto que todo conjunto abierto de la variedad es una unión de bolas métricas por la derecha. En efecto, Sea $\mathbf{O}$ cualquier conjunto abierto en la topología de la variedad M. Tomemos cualquier $p \in \mathbf{O}$. Asociado a p hay un entorno coordenado U, una función coordenada φ, una bola abierta Euclideana $\mathbb{B}^n(s)$, y una constante $c > 1$ con la propiedad descrita en (1.6). Tomemos s suficientemente pequeño de tal forma que U esté contenido en $\mathbf{O}$, entonces

$$\mathbf{B}_p^+\Big(\frac{s}{2c}\Big) \subset U. \tag{1.9}$$

Puesto que hemos tomado un s pequeño de tal forma que $U \subset \mathbf{O}$, tenemos que la bola métrica por la derecha está contenida en $\mathbf{O}$. Haciendo este proceso para cada $p \in \mathbf{O}$ y por (1.9) tendríamos que $\mathbf{O}$ es una unión de bolas métricas por la derecha.

Luego es suficiente probar (1.9). Supongamos que existe un punto $q \in \mathbf{B}_p^+\big(\frac{s}{2c}\big) - U$, entonces

- Puesto que $d_F(p,q) < \frac{s}{2c}$, existe una curva continua diferenciable a trozos $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ que va de p a q, y su longitud es menor que $\frac{s}{2c}$. En particular, la curva γ está contenida en $\mathbf{B}_p^+\big(\frac{s}{2c}\big)$.

- Ahora, supongamos que γ comienza en p pero en un entorno de q está fuera de U. Sea $\gamma(t_0)$ el primer punto de γ tal que $\gamma(t_0)$ no está en U. Notemos que para $0 \leq t < t_0$, $\gamma(t)$ está en U y $\mathbf{B}^+_p\left(\frac{s}{2c}\right)$. Por lo tanto podemos aplicar el lado izquierdo de (1.6) el cual nos dice que

$$\frac{1}{c}|\varphi(\gamma(t))| \leq d_F(p, \gamma(t)) < \frac{s}{2c}.$$

Esto es,

$$|\varphi(\gamma(t))| < \frac{s}{2}$$

para $0 \leq t < t_0$.

Por otro lado, ya que $\gamma(t_0)$ está en la frontera de U, tenemos que

$$|\varphi(\gamma(t_0))| = s.$$

Luego, estas dos últimas condiciones violan la continuidad de $\varphi \circ \gamma$ y esto da una contradición.

Resumiendo tenemos que la topología generada por las bolas métricas por la derecha coincide con la topología de la variedad.

Por otro lado, definimos las bolas métricas por la izquierda como:

$$\mathbf{B}^-_p(r) = \{q \in M : d_F(q, p) < r\}.$$

De forma análoga se demuestra que toda bola métrica por la izquierda es un conjunto abierto de M y que todo conjunto abierto de M es una unión de bolas métricas por la izquierda. Por tanto, la topología generada por las bolas métricas por la izquierda es precisamente la topología de la variedad.

Si (V, F) es un espacio de Minkowski, es decir, es un espacio vectorial dotado con una norma de Minkowski, entonces la distancia asimétrica asociada d_F está dada por:

$$d_F(u, v) = F(v - u).$$

En este caso denotaremos por $B_0(r)$ la bola por la derecha de centro $0 \in V$ y radio r, y la llamaremos la bola de Minkowski de centro 0 y radio r. Esto es:

$$B_0(r) = \mathbf{B}^+_0(r) = \{v \in V : F(v) < r\}.$$

Para finalizar este capítulo recordemos el siguiente resultado de Deng y Hou (ver teorema 1.2 en [4]), concerniente a la función exponencial en una variedad Finsler, la cual será muy usada en lo que sigue de este trabajo.

Teorema 1.12. *Sea (M, F) una variedad Finsler conexa, sea $x \in M$, y considere $r > 0$ tal que la función exponencial $exp_x : B_0(r) \to \mathbf{B}^+_x(r)$ es un difeomorfismo de clase C^1. Entonces, para $u, v \in B_0(r)$ con $u \neq v$, tenemos que*

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{F(x, v - u)}{d_F(exp_x(u), exp_x(v))} = 1.$$

A continuación hacemos la siguiente observación de terminología.

Observación 1.13. Supongamos que X y Y son dos conjuntos no vacíos, dotados con la distancia asimétrica d_X y d_Y respectivamente. Diremos que una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es C-Lipschitz si, para todo $x_1, x_2 \in X$:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d_X(x_1, x_2).$$

Por otro lado, diremos que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es C-bi-Lipschitz cuando f es biyectiva y f, f^{-1} son C-Lipschitz.

Con esta terminología y como una consecuencia directa del teorema 1.12, obtenemos el siguiente resultado,

Corolario 1.14. *Sea (M, F) una variedad Finsler conexa. Para cada $x \in M$ y cada $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que la función exponencial $exp_x : B_0(r) \to \mathbf{B}^+_x(r)$ es un difeomorfismo de clase C^1, el cual es $(1 + \epsilon)$-bi-Lipschitz.*

Capítulo 2

Desigualdad del valor medio

En este capítulo obtenemos una desigualdad del valor medio en el contexto de variedades Finsler. Los teoremas del valor medio de funciones reales definidas en variedades Finsler se deducen fácilmente de los teoremas del valor medio para funciones de una variable, pero es conveniente establecerlo con precisión y demostrarlo para utilizarlo más adelante.

Si (M, F) es una variedad Finsler conexa, definimos la constante de Lipschitz de una función $f : M \to \mathbb{R}$ como

$$Lip(f) \quad = \quad \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d_F(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\} \in [0, \infty].$$

Por supuesto f es Lipschitz si, y solamente si, $Lip(f) < \infty$. Denotamos por $Lip(M)$ el espacio de todas las funciones reales Lipschitzianas definidas sobre M.

Definición 2.1. *Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, definimos como la norma usual de su diferencial $df(x)$ en el punto $x \in M$ por*

$$\|df(x)\|_F = \sup\{|df(x)(v)| : v \in T_xM, F(x, v) \leq 1\}.$$

El siguiente teorema nos da el resultado deseado de la desigualdad del valor medio.

Teorema 2.2. *Sea (M, F) una variedad Finsler conexa, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Entonces,*

$$Lip(f) = \sup\{\|df(x)\|_F : x \in M\}.$$

Así, para todo $p, q \in M$, tenemos que

$$|f(p) - f(q)| \leq \sup\{\|df(x)\|_F : x \in M\} \cdot d_F(p, q).$$

Demostración. Para la demostración fijamos $C \geq 0$, y vamos a probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es Lipschitz.
(2) $\|df(x)\|_F \leq C$, para cada $x \in M$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que existe algún $p \in M$ con $\|df(p)\|_F > C$. Entonces existe algún $v \in T_pM$ tal que $F(p,v) \leq 1$ y $|df(p)(v)| > C$. Supongamos por ejemplo que $df(p)(v) > C$, la prueba usando el otro caso es análoga. Como es mostrado en [4] (ver teorema 6.3.1), podemos elegir $r > 0$ tal que la geodésica $\gamma(t) = exp_p(tv)$, definida para $t \in [0,r]$, minimiza la distancia Finsler desde el punto p esto es, $d_F(p,\gamma(s)) = s$, para todo $s \in [0,r]$.

Ahora definamos $h : [0,r] \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = f(\gamma(t)).$$

Entonces tenemos que $h'(0) = df(p)(v) > C$, y por lo tanto existe algún $\delta \in (0,r)$ tal que

$$\frac{h(t) - h(0)}{t} > C, \quad 0 < t \leq \delta.$$

Ya que $p = \gamma(0)$, elegimos $q = \gamma(\delta)$ y obtenemos que

$$|f(p) - f(q)| = h(\delta) - h(0) > C \cdot \delta = C \cdot d_F(p,q)$$

lo cual contradice el hecho de que f es C-Lipschitz.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Consideremos $x, y \in M$, y sea $\epsilon > 0$. Elijamos un camino diferenciable C^1 a trozos $\gamma : [a,b] \to M$ tal que $\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$ y

$$L_F(\gamma) \leq d_F(x,y) + \epsilon.$$

Definamos ahora $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $h(t) = f(\gamma(t))$. Entonces

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= |\int_a^b h'(t)dt| \leq \int_a^b |h'(t)|dt \\
&= \int_a^b |df(\gamma(t))(\gamma'(t))|dt \\
&\leq \int_a^b \|df(\gamma(t))\|_F \cdot F(\gamma(t),\gamma'(t))dt \\
&\leq C \int_a^b F(\gamma(t),\gamma'(t))dt = C \cdot L_F(\gamma) \leq C(d_F(x,y) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot d_F(x,y)$, para todo $x, y \in M$ ■

Finalizamos este capítulo con el siguiente resultado que da una caracterización local de funciones Lipschitz, la cual usaremos mas adelante.

Proposición 2.3. *Sean* (M, F_M) *y* (N, F_N) *variedades Finsler conexas, con distancias Finsler* d_M *y* d_N *respectivamente. Una función* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *es* C*-Lipschitz si, y solamente si, es localmente* C*-Lipschitz, esto es, todo punto* $p \in M$ *tiene un entorno* U_p *tal que, para todo* $x, y \in U_p$,

$$d_N(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_M(x, y).$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Obvia.

$\Longleftarrow$) Supongamos que f es localmente C-Lipschitz. Consideremos $x, y \in M$ y $\epsilon > 0$. Tomemos un camino de clase C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \to M$ de x a y, tal que $L_F(\gamma) \leq d_F(x, y) + \epsilon$. Por hipótesis cada $p \in \gamma([a, b])$ tiene un entorno abierto U_p donde f es C-Lipschitz, esto es, para cada $i = 1, ..., k$ se tiene que $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ está contenida en U_p para algún $p \in \gamma([a, b])$. entonces

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(y)) &\leq \sum_{i=1}^{k} d_N(f(\gamma(t_{i-1})), f(\gamma(t_i))) \\ &\leq C \sum_{i=1}^{k} d_M(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\ &\leq C \sum_{i=1}^{k} L_M(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = C \cdot L_M(\gamma) \leq C \cdot (d_M(x, y) + \epsilon). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es C-Lipschitz. ■

Capítulo 3

Aproximación diferenciable de funciones Lipschitz

En este capítulo dada una variedad Finsler segundo numerable (M, F), mostraremos que para toda función Lipschitz f definida sobre M, para toda función continua $\epsilon : M \to (0, +\infty)$, y para todo número positivo $r > 0$, existe una función Lipschitz $g : M \to \mathbb{R}$ diferenciable de clase C^1 tal que $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon(x)$ para todo $x \in M$ y $Lip(g) \leq Lip(f) + r$.

Es bien conocido que toda función Lipschitz $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ puede ser uniformemente aproximada por funciones Lipschitz C^∞-diferenciables cuyas constantes de Lipschitz son las mismas que las de f. Usando las mismas técnicas, mostraremos que una función Lipschitz definida en un espacio de Minkowski se puede aproximar por una función Lipschitz de clase C^1.

Lema 3.1. *Sea (V, F) un espacio vectorial dotado con una norma Minkowski. Consideremos un conjunto abierto $A \subset V$ y, para $\delta > 0$, denotamos*

$$A_\delta = \{v + w : v \in A;\ F(w) < \delta\} = \bigcup_{v \in A} B_v(\delta).$$

Supongamos que $f : A_\delta \to \mathbb{R}$ es Lipschitz y sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $g : V \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(v) - g(v)| \leq \epsilon \ \ \forall v \in A$, y $Lip(g|_A) \leq Lip(f|_A)$.

Demostración. Fijemos una base de V y supongamos que $V = \mathbb{R}^n$. Notemos que por compacidad local, se sigue que la norma de Minkowski F es equivalente a la norma euclidiana usual $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, es decir, existe $R \geq 1$ tal que,

$$\frac{1}{R} \cdot \|v\| \leq F(v) \leq R \cdot \|v\|$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Ahora, si $f : A_\delta \to \mathbb{R}$ es C-Lipschitz, para la norma de Minkowski F, entonces f es $(C \cdot R)$-Lipschitz para la norma euclidiana. Por lo tanto, usando el resultado de extensión de MacShane, podemos obtener una extención Lispchitz $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Por otro lado, tomemos $(\varphi_k)_k$ una sucesión regularizante de funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, donde cada φ_k es no-negativa, el $\text{sop}(\varphi_k)$ está contenido en la bola euclideana $\mathbb{B}(0, \frac{1}{k})$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$. Para cada k, definimos $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$f_k(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(v + w)\varphi_k(w)dw.$$

Cada f_k es de clase C^∞ y, ya que $\tilde{f}$ es uniformemente continua, tenemos que la sucesión (f_k) converge a $\tilde{f}$ uniformemente sobre $\mathbb{R}^n$.

Dado $\epsilon > 0$ sea $k > \frac{R}{\delta}$ suficientemente grande tal que $\|f_k - \tilde{f}\|_\infty < \epsilon$, y definamos $g = f_k$. Entonces, si $u, v \in A$:

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(v)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(u + w)\varphi_k(w)dw - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(v + w)\varphi_k(w)dw| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(u + w) - \tilde{f}(v + w)| \cdot |\varphi_k(w)|dw \\
&= \int_{\mathbb{B}(0,\frac{1}{k})} |f(u + w) - f(v + w)| \cdot |\varphi_k(w)|dw \\
&= C \cdot F(v - u) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(w)dw \\
&= C \cdot d_F(u, v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $Lip(g|_A) \leq Lip(f|_A)$. ■

El siguiente teorema es uno de los resultados importantes de este trabajo.

Teorema 3.2. *Sea (M, F) una variedad Finsler segundo numerable y conexa, sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, sea $\epsilon : M \to (0, +\infty)$ una función continua, y $r > 0$. Entonces existe una función Lipschitz $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $|f(p) - g(p)| \leq \epsilon(p)$ para todo $p \in M$, y $Lip(g) \leq Lip(f) + r$.*

Demostración. Sea $p \in M$ y $K = Lip f$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon(p) \leq r/2$ para todo $p \in M$. Además, fijemos $\epsilon(p) > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$K(1 + \epsilon(p))^2 < K + \frac{r}{2}. \tag{3.1}$$

Ahora, Por el Corolario 1.14, para cada $p \in M$ podemos tomar $\delta_p > 0$ suficientemente pequeño tal que la función exponencial $\exp_p$ sea un difeomorfismo $(1+\epsilon(p))$-bi-Lipschitz de clase C^1 de la bola de Minkowski $B_{0_p}(3\delta_p) \subset T_pM$ sobre la bola $\mathbf{B}^+_p(3\delta_p) \subset M$, donde 0_p denota el vector nulo de T_pM. Además por la continuidad de f y ϵ, podemos suponer que los δ_p son también suficientemente pequeños tales que $\epsilon(q) \geq \frac{\epsilon(p)}{2}$ y $|f(q)-f(p)| \leq \frac{\epsilon(p)}{2}$

para todo $q \in \mathbf{B}^+_p(3\delta_p)$. Ya que M es segundo numerable podemos tomar una sucesión (p_n) de puntos en M tal que

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^+_{p_n}(\delta_n),$$

donde denotamos $\delta_n = \delta_{p_n}$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : B_{0_{p_n}}(3\delta_n) \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(v) = f(\exp_{p_n}(v)),$$

el cual es $K(1 + \epsilon(p_n))$-Lipschitz.

Por otro lado, vamos a construir una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{\mathbf{B}^+_{p_n}(2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M y a estimar la constante de Lipschitz de cada una de las funciones de esta partición de la unidad. Sea $\theta_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de clase C^∞ tal que

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (-\infty, \delta_n]; \\ 0, & \text{si } x \in [2\delta_n, +\infty), \end{cases}$$

y definamos

$$\varphi_n(p) = \begin{cases} \theta_n(F(p_n, \exp^{-1}_{p_n}(p))), & \text{si } p \in \mathbf{B}^+_{p_n}(3\delta_n); \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Es claro que cada una de las funciones $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ son Lipschitz de clase C^1 y satisfacen que $\varphi_n = 1$ sobre la bola $\mathbf{B}^+_{p_n}(\delta_n)$ y $\varphi_n = 0$ sobre $M - \mathbf{B}^+_{p_n}(2\delta_n)$.

Definamos las funciones $\psi_k =: M \to [0,1]$ por

$$\psi_k = \varphi_k \prod_{j<k}(1 - \varphi_j),$$

es claro que ψ_k es C_k-Lipschitz, donde

$$C_k := \sum_{j\leq k} \mathrm{Lip}(\varphi_j),$$

además se puede verificar que;

1. Para cada $p \in M$, si $k = k(p) = \mathrm{mín}\{j : d_F(p_j, p) < \delta_j\}$ entonces, como $1 - \psi_k = 0$ sobre $\mathbf{B}^+_{p_k}(\delta_k)$ tenemos que $sop(\psi_k) \cap \mathbf{B}^+_{p_k}(\delta_k) = \emptyset$ para todo $l > k$ y $sop(\psi_k) \subset \mathbf{B}^+_{p_k}(2\delta_k)$;

2. $\sum_k \psi_k = 1$;

esto es, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad de clase C^1 subordinada al cubrimiento $\{\mathbf{B}^+_{p_n}(2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M.

Por otro lado por el lema 3.1 podemos encontrar una función $g_n : T_{p_n}M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$|g_n(v) - f_n(v)| \leq \frac{\epsilon(p_n)}{2^{n+2}(C_n + 1)}, \tag{3.2}$$

para todo $v \in T_{p_n}M$ y,

$$Lip(g_n|_{B_{0_{p_n}}(2\delta_n)}) = Lip(f_n|_{B_{0_{p_n}}(2\delta_n)}) = K(1 + \epsilon(p_n)). \tag{3.3}$$

Ahora definimos nuestra aproximación $g : M \to \mathbb{R}$ por

$$g(p) = \sum_n \psi_n(p) g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p)),$$

para cualquier $p \in M$. Observe que si $p \in \mathbf{B}^+_{p_n}(3\delta_n)$ como la exponencial $\exp_{p_n}$ es un difeomorfismo de clase C^1 de $B_{0_{p_n}}(3\delta_n)$ sobre $\mathbf{B}^+_{p_n}(3\delta_n)$, la expresión $\psi_n(p)g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ está bien definida y es de clase C^1 sobre $\mathbf{B}^+_{p_n}(3\delta_n)$. Por otro lado, si $p \notin \mathbf{B}^+_{p_n}(2\delta_n) \supset \text{sop}(\psi_n)$ entonces $\psi_n(p) = 0$. Luego, para cualquier $p \notin \mathbf{B}^+_{p_n}(3\delta_n)$, podemos suponer que las expresiones $\psi_n(p)g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ y $g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ se anulan. Con estas observaciones, puesto que las ψ_n forman una partición de la unidad de clase C^1 se sigue que g está bien definida y es de clase C^1 sobre M.

Veamos que g y $Lip(g)$ aproximan a f y $Lip(f)$ respectivamente. Fijemos algún $p \in M$ y sea $k = k(p) = \text{mín}\{j : d_F(p_j, p) < \delta_j\}$, entonces tenemos que $\psi_l = 0$ sobre $\mathbf{B}^+_{p_k}(\delta_k)$ para todo $l > k$. Para simplificar notación denotaremos $v_m = \exp_{p_m}^{-1}(p) \in T_{p_m}M$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
|g(p) - f(p)| &= \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p) g_m(\exp_{p_m}^{-1}(p)) - f(p)\right| \\
&= \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p)\left[g_m(v_m) - f(p)\right]\right| = \left|\sum_{m\leq k} \psi_m(p)\left[g_m(v_m) - f_m(v_m)\right]\right| \\
&\leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p) \frac{\epsilon(p_m)}{2^{m+2}(C_m + 1)} \leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p) \frac{\epsilon(p_m)}{2} \leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)\epsilon(p) \\
&= \sum_m \psi_m(p)\epsilon(p) = \epsilon(p).
\end{aligned}$$

Finalmente veamos que $Lip(g) \leq K + r$. Por la proposición 2.3 es suficiente mostrar que g es localmente $(K+r)$-Lipschitz, para ello probaremos que, g es Lipschitz en el conjunto abierto $\mathbf{B}^+_a(\delta_a) \cap \mathbf{B}^-_a(\delta_a)$.

Sea $a \in M$, y defina $k = k(a) = \text{mín}\{j : d_F(p_j, a) < \delta_j\}$ entonces $\text{sop}(\psi_l) \cap \mathbf{B}^+_{p_k}(\delta_k) = \emptyset$ para todo $l > k$. Además sea

$$\delta_a = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_k, \delta_k - d_F(a, p_k)\},$$

y

$$P_{p,q} = \{m \in \{1, ..., k\} : \mathbf{B}^+_{p_m}(2\delta_m) \cap \{p, q\} \neq \emptyset\}.$$

Tenemos que si $p, q \in \mathbf{B}^+_a(\delta_a) \cap \mathbf{B}^-_a(\delta_a)$, entonces

1. Para todo $m \in \{1, ..., k\}$, se satisface lo siguiente:

- si $q \in \mathbf{B}^+_{p_m}(2\delta_m)$ entonces, $p \in \mathbf{B}^+_{p_m}(3\delta_m)$,
- si $p \in \mathbf{B}^+_{p_m}(2\delta_m)$ entonces $q \in \mathbf{B}^+_{p_m}(3\delta_m)$.

En efecto, sabemos que si $p, q \in \mathbf{B}^+_a(\delta_a) \cap \mathbf{B}^-_a(\delta_a)$ entonces $d_F(q, p) < 2\delta_a < \delta_m$ por la definición de δ_a. Así si $q \in \mathbf{B}^+_{p_m}(2\delta_m)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} d_F(p_m, p) &\leq d_F(p_m, q) + d_F(q, p) \\ &< 2\delta_m + \delta_m = 3\delta_m. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p \in \mathbf{B}^+_{p_m}(3\delta_m)$. De forma análoga se demuestra la otra implicación.

Por tanto, para todo $m \in P_{p,q}$ tenemos que $p, q \in \mathbf{B}^+_{p_m}(3\delta_m)$; en particular, si $m \in P_{p,q}$, entonces $v_m = \exp^{-1}_{p_m}(p)$ y $w_m = \exp^{-1}_{p_m}(q)$ están bien definidas, y usando (3.3), tenemos que

$$\begin{aligned} |g_m(v_m) - g_m(w_m)| &\leq K(1 + \epsilon(p_m)) d_F(\exp^{-1}_{p_m}(p), \exp^{-1}_{p_m}(q)) \\ &\leq K(1 + \epsilon(p_m))^2 d_F(p, q). \end{aligned}$$

(recuerde que $\exp^{-1}_{p_m} : \mathbf{B}^+_{p_m}(3\delta_m) \to B_{p_m}(3\delta_m)$ es $(1 + \epsilon(p_m))$-Lipschitz).

2. Si $m \in \mathbb{N} - \{P_{p,q}\}$ entonces $\psi_m(p) = 0 = \psi_m(q)$ (porque $\operatorname{sop}(\psi_m) \subset \mathbf{B}^+_{p_m}(2\delta_m)$ y $\operatorname{sop}(\psi_\ell) \cap \mathbf{B}^+_{p_k}(\delta_k) = \emptyset$ para todo $l > k$).

Por lo tanto tenemos que, para $p, q \in \mathbf{B}^+_a(\delta_a) \cap \mathbf{B}^-_a(\delta_a)$ (con la notación $v_m = \exp^{-1}_{p_m}(p)$ y $w_m = \exp^{-1}_{p_m}(q)$)

$$g(p) = \sum_{m \in P_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p), \quad g(q) = \sum_{m \in P_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q),$$

$$1 = \sum_{m \in P_{p,q}} \psi_m(p) = \sum_{m \in P_{p,q}} \psi_m(q), \text{ y}$$

$$|g_m(v_m) - g_m(w_m)| \leq K(1 + \epsilon(p_m))^2 d_F(p, q) \text{ siempre y cuando } m \in P_{p,q}.$$

Fijemos $p, q \in \mathbf{B}^+_a(\delta_a) \cap \mathbf{B}^-_a(\delta_a)$. Ya que $\sum_{m \in P_{p,q}} f(p)(\psi_m(p) - \psi_m(q)) = 0$, tenemos

$$g(p) - g(q) = \sum_{m \in P_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p) - \sum_{m \in P_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q) =$$

$$\sum_{m \in P_{p,q}} (g_m(v_m) - f(p))(\psi_m(p) - \psi_m(q)) + \sum_{m \in P_{p,q}} (g_m(v_m) - g_m(w_m))\psi_m(q)$$

Por lo tanto, usando (3.1), (3.2), y el hecho de que ψ_m es C_m-Lipschitz tenemos que,

$$\begin{aligned} &\left|g(p) - g(q)\right| \leq \\ &\sum_{m \in P_{p,q}} \left|g_m(v_m) - f(p)\right| . \left|\psi_m(p) - \psi_m(q)\right| + \sum_{m \in P_{p,q}} \left|g_m(v_m) - g_m(w_m)\right|\psi_m(q) \leq \\ &\sum_{m \leq k} \frac{\epsilon(p_m)}{2^{m+2}(C_m + 1)} C_m d_F(p, q) + \sum_{m \leq k} (K + r/2) d_F(p, q)\psi_m(q) \leq \\ &\sum_{m \leq k} \frac{\epsilon(a)}{2^{m+1}} d_F(p, q) + (K + r/2) d_F(p, q) \leq (K + r) d_F(p, q), \end{aligned}$$

porque $\sum_{m\leq k} \frac{\epsilon(a)}{2^{m+1}} \leq \epsilon(a) \leq r/2$. Esto muestra que g es localmente $(K + r)$-Lipschitz lo cual concluye la prueba del teorema. $\blacksquare$

Observación 3.3. En general, la función exponencial en una variedad Finsler es solamente de clase C^1. Hay un resultado de Akbar-Zadeh en [1] (ver también [4], pág. 127), que dice que la función exponencial es de clase C^2 si, y solamente si, es de clase C^∞, esta propiedad caracteriza una clase especial de variedades Finsler, llamadas variedades de tipo Berwald. Así, si (M, F) es una variedad segundo numerable, conexa del tipo Berwald, la función aproximante g del teorema anterior puede ser construida de clase C^∞.

Capítulo 4

Variedades casi-reversibles y un criterio de completitud

En este capítulo desarrollaremos como una aplicación del resultado de aproximación del capítulo anterior, un criterio de completitud para la clase de variedades que llamaremos casi reversibles. Estas son definidas como sigue:

Definición 4.1. *Una variedad Finsler (M, F) es llamada casi-reversible si existe $C \geq 1$ tal que;*

$$F(x, -v) \leq CF(x, v), \quad \forall (x, v) \in TM.$$

Es claro que toda variedad Finsler reversible es casi-reversible. En efecto, una veriedad Finsler es reversible si, y solamente si, es casi-reversible para $C = 1$. Un ejemplo de una clase de variedades casi-reversible (no necesariamente reversible) son las variedades de tipo Berwald.

El siguiente teorema da una caracterización muy usada de variedades conexas casi-reversibles

Proposición 4.2. *Sea (M, F) una variedad Finsler conexa y sea $C \geq 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $F(x, -v) \leq C \cdot F(x, v), \quad \forall (x, v) \in TM.$

(2) $\frac{1}{C} d_F(y, x) \leq d_F(x, y) \leq C d_F(y, x), \quad \forall x, y \in M.$

(3) Para todo $p \in M$, la función distancia por la derecha $\Phi_p = d_F(p, \cdot)$ es C-Lipschitz.

(4) Para todo $p \in M$, la función distancia por la izquierda $\psi_p = d_F(\cdot, p)$ es C-Lipschitz.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $x, y \in M$ y $\gamma : [0,1] \to M$ un camino C^1 a trozos de y a x. Entonces el camino $\tilde{\gamma} : [0,1] \to M$ definido por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$; es un camino C^1 a trozos de x a y. Ahora,

$$\begin{aligned} L_F(\tilde{\gamma}) &= \int_0^1 F(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t))dt = \int_0^1 F(\gamma(1-t), -\gamma'(1-t))dt \\ &= \int_0^1 F(\gamma(s), -\gamma'(s))ds \leq C \cdot \int_0^1 F(\gamma(s), \gamma'(s))ds \\ &= C \cdot L_F(\gamma). \end{aligned}$$

Esto implica que, $d_F(y,x) \leq C d_F(x,y)$ entonces $\frac{1}{C} d_F(y,x) \leq d_F(x,y)$. Intercambiando los roles de x y y, obtenemos que $d_F(x,y) \leq C d_F(y,x)$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $x \in M$ del teorema 1.12 tenemos que si $v \neq 0$ entonces

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x, tv - t(-v))}{d_F(\exp_x(-tv); \exp_x(tv))} = 1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x, t(-v) - tv)}{d_F(\exp_x(tv); \exp_x(-tv))}.$$

Esto es;

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x, 2tv)}{d_F(\exp_x(-tv); \exp_x(tv))} = 1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x, 2t(-v))}{d_F(\exp_x(tv); \exp_x(-tv))}.$$

Así obtenemos que,

$$\begin{aligned} F(x,-v) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{d_F(\exp_x(tv); \exp_x(-tv))}{2t} \\ &\leq C \lim_{t\to 0^+} \frac{d_F(\exp_x(-tv); \exp_x(tv))}{2t} = C \cdot F(x,v). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Para todo $p, x, y \in M$ tenemos de la desigualdad triangular, que

$$\begin{aligned} d_F(p,x) - d_F(p,y) &\leq d_F(y,x) \\ d_F(p,y) - d_F(p,x) &\leq d_F(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto por hipótesis se sigue que,

$$|d_F(p,x) - d_F(p,y)| \leq C d_F(x,y).$$

Esto significa que la función $\Phi_p = d_F(p, \cdot)$ es C-Lipschitz.

(3) $\Rightarrow$ (2) Por hipótesis tenemos que dados $p, x, y \in M$ se satisface

$$d_F(p,x) - d_F(p,y) \leq C d_F(x,y),$$

haciendo $p = y$ tenemos que

$$d_F(y,x) \leq C d_F(x,y).$$

Además invirtiendo los roles de x y y obtenemos que $d_F(x, y) \geq \frac{1}{C} d_F(y, x)$.

(4) $\Rightarrow$ (2) Es análoga a la demostración anterior. ■

Note que haciendo $C = 1$ en el resultado anterior, podemos deducir la siguiente caracterización de variedad reversible conexa.

Corolario 4.3. *Sea (M, F) una variedad Finsler conexa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) $F(x, -v) = F(x, v), \quad \forall (x, v) \in TM$

(2) $d_F(y, x) = d_F(x, y), \quad \forall x, y \in M.$

Como una aplicación del teorema 3.2, obtenemos un criterio de completitud en el contexto de las variedades casi-reversibles. Para ello utilizaremos el artículo de William Gordon [15] y lo adaptaremos para el caso Finsler.

Para hablar de completitud debemos hablar de sucesiones de Cauchy, en el contexto de variedades Finsler establecemos las siguientes definiciones:

Definición 4.4. *Sea (M, F) una variedad Finsler.*

- *Una sucesión (x_n) en M se dice que converge a $x \in M$ si, dado cualquier conjunto abierto $\mathbf{U}$ conteniendo a x, existe un entero positivo N (dependiendo de $\mathbf{U}$) tal que*
$$i \geq N \quad \Rightarrow \quad x_i \in \mathbf{U}.$$
- *Una sucesión (x_n) en M se dice que es de Cauchy por la derecha (resp., por la izquierda) si, para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N (que depende de ϵ) tal que*
$$N \leq i < j \quad \Rightarrow \quad d_F(x_i, x_j) < \epsilon \quad [\textit{resp.}, d_F(x_j, x_i) < \epsilon].$$

Definición 4.5. *Diremos que una variedad Finsler (M, F) es completa por la derecha con respecto a la función distancia d_F si toda sucesión de Cauchy por la derecha converge en M. Por otro lado M es completa por la izquierda con respecto a la función distancia d_F si toda sucesión de Cauchy por la izquierda converge en M.*

Observaciones 4.6.

- Una variedad Finsler compacta (M, F) es al mismo tiempo completa por la derecha y completa por la izquierda, aunque d_F sea simétrica o no.
- En una variedad Finsler casi-reversible, hablar de completitud por la derecha y por la izquierda es equivalente.

Por otro lado, recuerde que una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ es propia, si para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, su preimagen $f^{-1}(K)$ es compacta.

Proposición 4.7. *Sea (M, F) una variedad Finsler segundo numerable, conexa y casi-reversible. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es completa por la derecha.*

2. *Existe $f : M \to \mathbb{R}$ propia y Lipschitz.*

3. *Existe $g : M \to \mathbb{R}$ propia de clase C^1, cuya diferencial es uniformemente acotada en norma.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Fijemos $p \in M$ y consideremos la función distancia por la derecha $\varphi_p = d_F(p, \cdot)$. El Teorema de Hopf-Rinow (ver teorema 6.6.1 en [4]) nos dice que una variedad Finsler M es completa por la derecha si y solamente si todo subconjunto de M cerrado y acotado es compacto. Esto implica que φ_p es una función propia. Además por la proposición 4.2 tenemos que φ_p es Lipschitz.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que la función propia $f : M \to \mathbb{R}$ es C-Lipschitz, y fijemos algún $\epsilon > 0$. Por el Teorema 3.2 ,existe una función $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

1. $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in M.$

2. $Lip(g) \leq C + \epsilon.$

Luego, como f es propia tenemos que g es propia y por el Teorema 2.2 tenemos que $\|dg(x)\|_F \leq C + \epsilon$, para todo $x \in M$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy por la derecha en M. Ya que $g : M \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces $\{g(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto $\{g(x_n)\}$ converge a algún $z \in \mathbb{R}$. Así $K = \{z\} \cup \{g(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Por otro lado, (x_n) está contenido en $g^{-1}(K)$, el cual es compacto ya que g es propia, por lo tanto (x_n) es convergente en M. ■

Capítulo 5

Algebras de funciones diferenciables sobre variedades Finsler

El teorema clásico de Myers-Nakai afirma que la estructura Riemanniana de una variedad Riemanniana M está determinada por la estructura de álgebra normada del conjunto de todas las funciones acotadas de clase C^1 sobre M con derivada acotada el cual denotamos como $C_b^1(M)$. Esto fué probado por Myers [24] en el caso cuando M es compacto, y luego Nakai [26] lo extendió al caso general. Recientemente, fueron obtenidos resultados análogos para el caso de variedades Riemannianas de dimensión infinita (ver [11]) y para el caso de variedades Banach-Finsler (ver [21]). Nuestro objetivo en este capítulo es obtener una descripción de isomorfismos de álgebras entre espacios del tipo $C_b^1(M)$, donde M denota una variedad Finsler casi-reversible. De esto, obtendríamos una variante del teorema de Myers-Nakai en el contexto de variedades Finsler casi-reversibles.

Ahora sea (M, F) una variedad Finsler y sea $C_b^1(M)$ el espacio de todas las funciones reales acotadas de clase C^1 definidas sobre M cuya derivada tiene norma acotada uniformemente. Dotemos a $C_b^1(M)$ con la norma natural

$$\|f\|_{C_b^1} = \text{máx}\{\sup_{x\in M} |f(x)|, \sup_{x\in M} \|df(x)\|_F\}.$$

Dotado con esta norma se puede verificar fácilmente que $C_b^1(M)$ es un álgebra normada completa que satisface

$$\|f \cdot g\|_{C_b^1} \leq 2\|f\|_{C_b^1} \cdot \|g\|_{C_b^1}.$$

Ahora vamos a construir el espacio de estructura asociado a $C_b^1(M)$, para ello sea $\aleph(M)$ el conjunto de todas las formas lineales $\varphi : C_b^1(M) \to \mathbb{R}$, multiplicativas, no nulas.

Afirmación: Cada $\varphi \in \aleph(M)$ satisface que $\|\varphi\| = 1$, y además φ es positivo, esto es, $\varphi(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$.

Demostración:
Como φ es multiplicativo y no nulo, es claro que $\varphi(1) = 1$. Ahora vamos a ver que, para

todo $f \in C_b^1(M)$ $\varphi(f)$ pertenece a la clausura de $f(M)$. En efecto, si $\alpha = \varphi(f)$ no está en la clausura de $f(M)$, entonces $f(-\alpha)^2 \geq \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Así $\frac{1}{(f-\alpha)^2} \in C_b^1(M)$ y,

$$1 = \varphi\Big((f-\alpha)^2 \cdot \frac{1}{(f-\alpha)^2}\Big) = \varphi((f-\alpha)^2) \cdot \varphi\Big(\frac{1}{(f-\alpha)^2}\Big).$$

Como $\varphi((f-\alpha)^2) = 0$, tenemos una contradicción. Así obtenemos que φ es positiva. Además se tiene que $|\varphi(f)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)|$ para todo $f \in C_b^1(M)$, por lo tanto $\|\varphi\| = 1$.

Dotemos a $\aleph(M)$ con la topología débil estrella la cual es heredada del espacio dual $C_b^1(M)^*$. Ya que $\aleph(M)$ es un subconjunto débil estrella cerrado de la bola unitaria, vemos que $\aleph(M)$ es un espacio compacto.

Ahora consideremos la inmersión $\delta : M \to \aleph(M)$ dada por $\delta(x) = \delta_x$, donde $\delta_x(f) = f(x)$, para todo $f \in C_b^1(M)$ y $x \in M$. Note que toda función $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con soporte compacto pertenece a $C_b^1(M)$, y así, en particular, $C_b^1(M)$ separa puntos y conjuntos cerrado de M. De esto no es difícil deducir que δ es una inmersión topológica.

Por otro lado, el conjunto $\delta(M)$ es denso en $\aleph(M)$. En efecto; sea $\varphi \in \aleph(M)$, y considere una base de entornos de φ en la topología débil estrella de la forma

$$W = \{\psi \in \aleph(M) : |\psi(f_j) - \varphi(f_j)| < \epsilon, \quad j = 1, ..., m\},$$

donde $f_1, ..., f_m \in C_b^1(M)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe algún $x \in M$ tal que $\delta_x \in W$, ya que de lo contrario la función $g = \sum_{j=1}^m (f_j - \varphi(f_j))^2 \in C_b^1(M)$ será mayor o igual que ϵ^2 y $\varphi(g) = 0$, lo cual es imposible puesto que φ es positiva. Por tal motivo podemos decir que $\aleph(M)$ es una compactificación de M.

En lo que sigue nos concentraremos en el caso de variedades Finsler casi-reversibles y completas. El siguiente lema nos dará una caracterización topológica del espacio $\aleph(M)$.

Lema 5.1. *Sea (M, F) una variedad Finsler casi-reversible,completa (por la derecha), segundo numerable y conexa, y sea $\varphi \in \aleph(M)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *φ tiene una base numerable de entornos en $\aleph(M)$.*
2. *Existe algún $x \in M$ tal que $\varphi = \delta_x$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Ya que M es completa (por la derecha), por la proposición 4.7 existe una función propia $g : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 cuya diferencial es uniformemente acotada en norma. Supongamos ahora que $\varphi \in \aleph(M) - \varphi(M)$ tiene una base numerable de entornos en $\aleph(M)$. Ya que $\delta(M)$ es denso en $\aleph(M)$, existe una sucesión (x_n) en M tal que (δ_{x_n}) converge a φ. Ya que $\varphi \notin \delta(M)$, vemos que (x_n) no tiene una subsucesión convergente en M. Ya que g es propia, deducimos que $\lim_{n\to\infty} |g(x_n)| = +\infty$. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $|g(x_{n_{k+1}})| > 1 + |g(x_{n_k})|$ para todo k. Ahora podemos elegir una función $\theta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de clase C^1, con derivada acotada, tal que $\theta(g(x_{n_{2k+1}})) = 1$ y $\theta(g(x_{n_{2k}})) = 0$ para todo k. Entonces la función $f = \theta \circ g \in C_b^1(M)$, pero la sucesión

$(\delta_{x_{n_k}}(f))$ no es convergente, lo cual es una contradicción.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si $\varphi = \delta_x$ para algún $x \in M$, consideremos una base de entornos numerable (V_n) de x en M. Entonces la familia $\{\mathrm{cl}_{\aleph(M)} V_n\}$ es una base de entornos numerable de δ_x en $\aleph(M)$. ■

El siguiente Lema muestra las propiedades métricas de la inmersión $\delta : M \to \aleph(M)$:

Lema 5.2. *Sea (M, F) una variedad Finsler casi-reversible,completa (por la derecha), segundo numerable y conexa, con una constante C. Entonces, para cada $x, y \in M$ tenemos que:*

$$\frac{1}{C}\,\mathrm{mín}\{1, d_F(x, y)\} \leq \|\delta_x - \delta_y\| \leq d_F(x, y).$$

Demostración. Recuerde que

$$\|\delta_x - \delta_y\| = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in C_b^1(M);\ \|f\|_{C_b^1} \leq 1\}.$$

Así por la desigualdad del valor medio deducimos que $\|\delta_x - \delta_y\| \leq d_F(x, y)$. para la otra desigualdad, supongamos que $x \neq y$ y consideremos la función $\Phi : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) = \frac{1}{C}\,\mathrm{mín}\{1, d_F(x, y)\}.$$

Es claro que $0 \leq \Phi \leq \frac{1}{C} \leq 1$, y de la proposición 4.2 tenemos que $Lip(\Phi) \leq 1$. Ahora dado $0 < \epsilon < \frac{1}{2C}\,\mathrm{mín}\{1, d_F(x, y)\}$, por el teorema 3.2 existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $|f(u) - \Phi(u)| \leq \epsilon$, para todo $u \in M$, y $Lip(f) \leq 1 + \epsilon$. Así $\|f\|_{C_b^1} \leq 1 + \epsilon$.

Ahora consideremos $\hat{f} = \frac{1}{1+\epsilon} f$, y obtenemos que $\|\hat{f}\|_{C_b^1} \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| &= \frac{1}{1+\epsilon}|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{1+\epsilon}(|\Phi(x) - \Phi(y)| - 2\epsilon) \\ &= \frac{1}{1+\epsilon}\frac{1}{C}\,\mathrm{mín}\{1, d_F(x, y)\} - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}, \end{aligned}$$

el cual es el resultado deseado. ■

Recuerde que si M y N son variedades Finsler, una aplicación $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ es un isomorfismo de álgebras normadas si T es una biyección lineal bi-continua tal que $T(f \cdot g) = T(f) \cdot T(g)$ para todo $f, g \in C_b^1(N)$. A continuación damos el resultado principal de este capítulo, el cual da una caracterización de tales isomorfismos de álgebras normadas.

Teorema 5.3. *Sean (M, F_M) y (N, F_N) variedades Finsler casi-reversibles,completas (por la derecha), segundo numerable y conexas, con constantes C_M y C_N respectivamente. Para una aplicación $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es un isomorfismo de álgebras normadas.*

2. *Existe un difeomorfismo $h : M \to N$ de clase C^1, el cual es bi-Lipschitz para la respectivas distancias Finsler, tal que $T(f) = f \circ h$, para todo $f \in C_b^1(N)$. Además en este caso la constante bi-Lipschitz de h puede ser elegida como*

$$\text{máx}\{C_N \cdot \|T\|, C_M \cdot \|T^{-1}\|\}.$$

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ es un isomorfismo de álgebras normadas. Considere la función transpuesta $T^* : C_b^1(M)^* \to C_b^1(N)^*$, definida por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$ para todo $\varphi \in C_b^1(M)^*$. ya que T es multiplicativa y T^* es bi-continua, vemos que la restricción de T^* define un homeomorfismo de $\aleph(M)$ sobre $\aleph(N)$. Consideremos ahora las inmersiones naturales $\delta_M : M \to \aleph(M)$ y $\delta_N : N \to \aleph(N)$. Por Lema 5.1 deducimos que $T^*(\delta(M)) = \delta_N(N)$, entonces la restricción de T^* define un homeomorfismo de $\delta_M(M)$ sobre $\delta_N(N)$. Así podemos definir $h = (\delta_N)^{-1} \circ T^* \circ \delta_M : M \to N$, el cual es un homeomorfismo de M sobre N. Además, tenemos que, para todo $x \in M$ y $f \in C_b^1(N)$:

$$T(f)(x) = \delta_x(T(f)) = T^*(\delta_x)(f) = \delta_{h(x)}(f) = f(h(x)),$$

esto es, $T(f) = f \circ h$. En particular, note que $f \circ h$ es de clase C^1 para toda función $f : N \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con soporte compacto. De esto se puede deducir fácilmente que h y h^{-1} son de clase C^1, por tanto h es un difeomorfismo de clase C^1. Ahora vamos a ver que $h : M \to N$ es bi-Lipschitz para las respectivas distancias Finsler d_M y d_N. Usando la proposición 2.3 es suficiente probar que h y h^{-1} son localmente Lipschitz. Dado $p \in M$, considere el entorno abierto

$$U^p = \mathbf{B}_p^+(1/2) \cap \mathbf{B}_p^-(1/2) \cap h^{-1}(\mathbf{B}_{h(p)}^+(1/2)) \cap h^{-1}(\mathbf{B}_{h(p)}^-(1/2)).$$

Si $x, y \in U^p$ tenemos que $d_M(x, y) < 1$ y $d_N(h(x), h(y)) < 1$, entonces por el lema 5.2

$$\frac{1}{C_N} d_N(h(x), h(y)) \leq \|\delta_{h(x)} - \delta_{h(y)}\| = \|T^*(\delta_x - \delta_y)\| \leq \|T\| \cdot \|\delta_x - \delta_y\| \leq \|T\| d_M(x, y).$$

Por lo tanto tenemos que h es $C_N \cdot \|T\|$-Lipschitz. Análogamente se tiene que h^{-1} es $C_M \cdot \|T^{-1}\|$-Lipschitz.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Por el teorema 2.2 tenemos que $C_b^1(M)$ es el conjunto de todas las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 las cuales son Lipschitz y por tanto es un álgebra normada, igualmente se tiene para $C_b^1(N)$, por lo tanto esta implicación es clara. ■

Ahora rápidamente vamos a deducir de nuestros resultados previos una versión del teorema clásico de Myers-Nakai en el contexto de variedades Finsler reversibles. Recordemos que una función $h : (M, F_M) \to (N, F_N)$ entre variedades Finsler es una isometría Finsler si h es un difeomorfismo de clase C^1 el cual preserva la estructura Finsler, esto es; para todo $x \in M$ y todo $v \in T_x M$:

$$F_M(x, v) = F_N(h(x), dh(x)(v)).$$

Extendiendo el resultado clásico de Myers y Steenrod [25] para variedades Riemannianas, Deng y Hou probaron en ([6], teorema 2.2) que si (M, F_M) y (N, F_N) son variedades Finsler conexas, una función $h : M \to N$ es una isometría Finsler si, y solamente si, h es biyectiva y preserva la correspondiente distancia Finsler d_M y d_N, esto es, para todo $x, y \in M$:

$$d_M(x, y) = d_N(h(x), h(y)).$$

Ahora combinando el resultado anterior con el teorema 5.3 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Sean M y N variedades Finsler segundo numerables, conexas, reversibles y completas. Entonces M y N son equivalentes como variedades Finsler, si y solamente si, $C_b^1(M)$ y $C_b^1(N)$ son álgebras normadas isométricas. Además, toda isometría de álgebras normadas $T : C_b^1(N) \to C_b^1(M)$ es de la forma $T(f) = f \circ h$ donde $h : M \to N$ es una isometría Finsler.*

Bibliografía

[1] Akbar-Zadeh, H., *Sur les espaces de Finsler à courbures sectionnelles constantes*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci, 74(5) (1988) 281-322.

[2] Azagra, D. and Ferrera, J., *Inf-convolution and regularization of convex function on Riemannian manifolds of nonpositive curvature*, Rev. Mat. Complut, 19(2) (2006) 323-345.

[3] Azagra, D., Ferrera, J., López-Mesas F. and Rangel, Y., *Smooth approximation of Lipschitz function on Riemannian manifolds*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 1370-1378.

[4] Bao, D., Chern, S. and Shen, Z., *An introducction to Riemannian-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, MR 2001.

[5] Chern, S. and Shen, Z., *Riemann-Finsler Geometry*, World Scientific, 2004.

[6] Deng, S. and Hou, Z., *The group of isometries of a Finsler space*, Pac. J. Math. 207(1) (2002) 149-155.

[7] Egloff, D, *Uniform Finsler Hadamar manifolds*, Annales de l' I.H.P section A, tome 66. (3) (1997) 323-357.

[8] Ekeland, I., *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geom. 13(2) (1978) 287-301.

[9] Garrido, M. and Jaramillo, J., *Homomorphisms on Function Lattices*, Monatsh. Math. 141 (2004) 127-146.

[10] Garrido, M. and Jaramillo, J., *A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions*, Monatsh. Math. 131 (2001) 189-192.

[11] Garrido, Isabel, Jaramillo, Jesús and Rangel, Yenny, *Algebras of differentiable functions on Riemannian manifolds*, Bull. London Math. Soc. 41 (2009) 993-1001.

[12] Garrido, Isabel, Jaramillo, Jesús and Rangel, Yenny, *Lip-density and algebras of Lipschitz functions on metric spaces*, Extracta Math. 25 (2010) 249-261.

[13] Garrido, Isabel, Jaramillo, Jesús and Rangel, Yenny, *Smooth approximation of Lipschitz functions on Finsler manifolds*, Journal of function spaces and applications. (2013).

[14] Gordon, W., *An analytical criterion for the completeness of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 37(1) (1973) 221-225.

[15] Gordon, W., *Corrections to An analytical criterion for the completeness of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1) (1974) 130-131.

[16] Greene, R. and Wu, H., *On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions*, Indiana Uni. Math. J. 22 (1972/1973) 641-653.

[17] Greene, R. and Wu. H., *C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta. Math. J. 137(3-4) (1976) 209-245.

[18] Greene, R. and Wu, H., *C^∞ Approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions*, Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (4)12(1) (1979) 47-84.

[19] Ichijyo, Y., *Finsler manifolds modeled on a Minkowski space*,J.Math. Kyoto Univ. (Kyoto Daigaku J. Math.) 16-3 (1976) 639-652.

[20] Isbell, J., *Algebras of uniformly continuous functions*,Annals of mathematics. 69, n1(1958), 96-125.

[21] Jaramillo, J. A, Jiménez-Sevilla, M and Sánchez-González, L, *Characterization of a Banach-Finsler manifold in terms of the algebras of smooth functions*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[22] Jiménez-Sevilla, M and Sánchez-González, L, *On some problems on smooth approximation and smooth extension of Lipschitz functions on Banach-Finsler manifolds*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 3487-3500.

[23] Moulis, N., *Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 21(4) (1971) 293-345.

[24] Myers, S., *Algebras of differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 917-922.

[25] Myers, S. and Steenrod, N., *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. 40 (1939) 400-416.

[26] Nakai, M., *Algebras of some differentiable functions on Riemannian manifolds*, Japan. J. Math. 29 (1959) 60-67.

[27] Palais, R., *On the differentiability of isometries*, Proc. Math. AMS. 8 (1957) 805-807.

[28] Shen, Z., *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, 2001.