

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE LAGRANGE EN FIBRADOS JETS

por

JUAN CARLOS JUÁREZ PARADAS

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al
Título de Magister Scientiarum mención Matemática

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas I.V.I.C.
Centro de Estudios Avanzados

Caracas, Venezuela

Diciembre, 2008

El Trabajo de Grado de Juan Carlos Juárez Paradas, titulado “Estudio del Problema de Lagrange en Fibrados Jets”, ha sido aprobado por el jurado, quien no se hace responsable de su contenido, pero que lo ha encontrado correcto en su calidad y en su forma de presentación, en fe de lo cual firman,

Dr. Rodrigo Medina

I.V.I.C.

Dr. Lázaro Recht

U.S.B.

Dra. Stefania Marcantognini

Tutora del Trabajo de Grado

I.V.I.C.

Gabriel Padilla

Director del Trabajo de Grado

U.C.V.

Centro de Estudios Avanzados, I.V.I.C.

Altos de Pipe, Diciembre 2008

RESUMEN DEL TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO
PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN
MATEMÁTICA

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE LAGRANGE EN FIBRADOS JETS

POR

JUAN CARLOS JUÁREZ PARADAS

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

I.V.I.C.

CENTRO DE ESTUDIOS AVANZADOS

CARACAS, VENEZUELA

2008

STEFANIA MARCANTOGNINI

GABRIEL PADILLA

TUTORA

DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO

Las ecuaciones Euler-Poincaré clásicas surgen a través de una reducción del principal variacional $\int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$ donde $L : T(G) \rightarrow \mathbb{R}$ es un Lagrangiano G -invariante, definido sobre el fibrado tangente de un grupo de Lie. Se define el

Lagrangiano reducido $l : T(G)/G \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación L sobre el cociente. Las ecuaciones Euler-Lagrange de L para curvas sobre G son equivalentes a un nuevo tipo de ecuaciones de l , curvas reducidas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones Euler-Poincaré (véase [CGR]).

El propósito de este trabajo es el estudio del problema de Lagrange sobre los fibrados jets $J^1(P)$, específicamente se muestra en detalle la demostración del teorema de reducción Euler-Poincaré sobre fibrados principales, con un grupo de Lie general, como objetivo principal, además de resultados importantes de la teoría de fibrados y conexiones. La reducción Euler-Poincaré trata con un Lagrangiano definido sobre el primer fibrado jet $J^1(P)$ de un fibrado principal $L : J^1(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ invariante bajo la acción natural inducida por el grupo estructural G sobre $J^1(P)$. El problema variacional reducido toma lugar sobre el fibrado de las conexiones $C(P)$, el cual es isomorfo al espacio cociente $(J^1(P))/G$.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por todos los momentos de mi vida.

A mi familia, que me han apoyado en mis decisiones, y son parte fundamental para alcanzar mis objetivos.

A mis amigos Silvana, Beatriz, Yuceny, Iraima, Claudia, Jimmy, Jose Miguel y Edilmo, que cada día me han ayudado. Además de compartir momentos agradables.

Al Departamento de Matemáticas, en especial atención a la Dra. Stella Brascesco y a mi tutora la Dra. Stefania Marcantognini, siempre atentas con sus estudiantes. A mi director de tesis, el Dr. Gabriel Padilla, por su apoyo, comprensión y asesoría en mis años de estudio. Al Centro de Estudios Avanzados, por su gran amabilidad hacia los estudiantes.

Al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas por haberme dado la oportunidad de pertenecer a esta gran familia, y darme financiamiento en mi período de estudio. A la Biblioteca Marcel Roche (I.V.I.C), y Biblioteca Alonso Gámero de la Facultad de Ciencias de la U.C.V.

A mis padres y hermanos, siempre presentes en mi vida...

Índice general

Resumen	iii
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Introducción	1
1. Introducción a las Variedades	4
1.1. Variedades	4
1.2. Espacio tangente a una variedad M	8
1.3. Grupos y Álgebras de Lie	18
2. Fibrado principal	28
2.1. Fibrados topológicos	29
2.2. Fibrados principales	35
2.3. Campos G -invariantes y fundamentales	39
2.4. Fibrados asociados $\text{Ad}(P)$ y adjuntos $\text{ad}(P)$	43
3. Geometría del fibrado de conexiones y fibrado de los 1-jets $J^1(P)$	48

3.1. Conexiones principales	49
3.2. La sucesión de Atiyah	56
3.3. Fibrado de las conexiones	58
3.4. Fibrado de los 1-jets $J^1(P)$	60
3.5. La identificación $(J^1(P))/G \simeq C(P)$	64
4. Cálculo variacional general y el problema de Lagrange en fibrados jets	67
4.1. Cálculo variacional	68
4.2. Problema de reducción sobre fibrados jets	72
Bibliografía	80
Índice alfabético	85
Curriculum Vitae	88

Lista de figuras

1.1. M es localmente euclideo	5
1.2. Cambio de coordenadas	6
1.3. Cubrimiento de la esfera S^2 por casquetes esféricos	8
1.4. Plano tangente a la esfera en el punto $x \in S^2$	8
1.5. Espacio tangente $T_x(M)$ y vector tangente $X_x \in T_x(M)$	11
1.6. Identificación de vectores	12
1.7. Campo vectorial en \mathbb{R}^2	14
1.8. Campo de vectorial X sobre M	15
1.9. Curva integral a través de un campo de vectores	17
1.10. Círculo unitario	20
1.11. El 2-Toro	20
1.12. Producto vectorial de vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$	22
1.13. Aplicación exponencial	24
1.14. La aplicación adjunta es una linealización de la conjugación	25
2.1. Representación de un fibrado	29
2.2. Fibrado tangente de \mathbb{R} , $T(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	30

2.3. Fibrado vectorial de fibra \mathbb{R} sobre S^1	32
2.4. Fibrado de grupos de Lie de fibra \mathbb{Z}_2 sobre S^1	32
2.5. Visualización de la fibración de Hopf.	34
2.6. Fibrado trivial, $P = M \times G$	38
2.7. Campo G -invariante sobre la esfera S^2	40
2.8. Interpretación gráfica del fibrado asociado $\pi_F : P \times^G F \longrightarrow M$. . .	43
2.9. Banda de Möbius	44
3.1. Descomposición de un vector $X_u \in T_u(P)$	50
3.2. Forma de Maurer-Cartan en $G = S^1$	51
3.3. Interpretación de un vector como una clase de curvas.	61
3.4. Interpretación de una translación del subespacio vectorial.	66
4.1. La variación infinitesimal de s_t , $\delta s(x)$ para $x \in M$, es un campo vectorial sobre P	69

Introducción

La teoría de fibrados principales ha jugado un papel fundamental tanto en matemáticas como en diversas modelizaciones de problemas de física, tales como el problema de Lagrange. El reconocimiento de la importancia de los fibrados toma lugar en el período de 1935 a 1940. La primera definición general fue dada por Whitney. Hopf y Stiefel demostraron la utilidad de esta teoría, con aplicaciones de topología a geometría diferencial (véase [Ste]). En términos generales, un fibrado es un objeto con propiedades similares a las del producto cartesiano, está formado por tres espacios topológicos P , M , y F , y una aplicación llamada proyección, definida de P en M .

Un G -fibrado principal es un fibrado, cuyas fibras son espacios homogéneos, respecto a un grupo topológico. Una conexión sobre un fibrado principal permite comparar la geometría local de diferentes puntos. La teoría de conexiones conduce a los invariantes de curvatura y torsión. Es interesante notar que el conjunto de conexiones de un fibrado principal se identifica con las secciones de otro fibrado, llamado fibrado de las conexiones.

El cálculo de variaciones es la rama de la matemática en la que se estudian

métodos para obtener valores extremos de funcionales que dependen de la elección de una o varias funciones, sujetas a restricciones de diversa índole. Uno de los problemas fundamentales en el cálculo de variaciones, consiste en minimizar el funcional

$$S(x) = \int_T L(t, x, \dot{x}) dt, \quad \text{donde } t \in T \subset \mathbb{R}^m, x = (x^1, \dots, x^m)$$

sujeto a ciertas condiciones. Este tipo de problemas es conocido como **problema de Lagrange** (véase [Moi]). Euler propuso un método para dar una solución aproximada de problemas de cálculo variacional, basados en la reducción del problema. Para el caso más simple de cálculo variacional, la variación está definida como:

$$\delta S(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{x(t)} h(t) dt,$$

donde $h(t)$ es una función suave arbitraria. La condición $\delta S = 0$ es necesaria para que la función $x(t)$ alcance un valor extremo del funcional L , esta función debe satisfacer las ecuaciones diferenciales $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$, llamada ecuación variacional de Euler, y en teoría mecánica **ecuación de Euler-Lagrange** (véase [GPS]).

Este trabajo pretende recoger algunas ideas de la teoría de fibrados en relación con el problema de Lagrange, específicamente con el teorema de reducción Euler-Poincaré sobre fibrados principales, como objetivo principal. La reducción de estas ecuaciones de la manera clásica (véase [MR]) parte de considerar un grupo de Lie G y un Lagrangiano, $L : T(G) \rightarrow \mathbb{R}$, invariante bajo la acción natural de G sobre su fibrado tangente. Esto naturalmente induce una función $l : T(G)/G \rightarrow \mathbb{R}$ llamado **Lagrangiano reducido**. Las ecuaciones Euler-Lagrange de L para curvas sobre G son equivalentes a un nuevo tipo de ecuaciones de l , curvas reducidas

en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Estas ecuaciones son conocidas como las **ecuaciones Euler-Poincaré** (véase [CGR]).

La formulación moderna del Lagrangiano generalizado y la dinámica Hamiltoniana sobre fibrados se escriben en el lenguaje de **espacios jets** o **variedades jets** (véase [Sau], [KMS]). Estos espacios generalizan al fibrado tangente. En esta estructura es posible escribir las ecuaciones diferenciales sobre las secciones de un fibrado suave en una forma invariante. Históricamente, los espacios jets son atribuidos a C. Ehresmann, y fueron un avance al método de prolongación de E. Cartan (véase [Iva]).

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, comienza con un estudio preliminar de algunas definiciones y resultados de variedades diferenciales, grupos y álgebras de Lie. En el Capítulo 2, se establecen las propiedades de fibrados diferenciables. El grupo de automorfismos de un fibrado principal y del subgrupo Gauge del mismo, que serán usados más adelante, y se introducen los fibrados asociados, los fibrados adjuntos, esto es, la geometría de los fibrados principales que se utilizan en teorías Gauge. En el Capítulo 3, estudia la geometría del fibrado de conexiones. Uno de los principales resultados es la correspondencia entre el conjunto de conexiones de un fibrado principal y las secciones del fibrado de conexiones $C(P)$, además de la identificación de la variedad cociente $(J^1(P))/G$ del fibrado de los 1-jets con $C(P)$. Y por último el Capítulo 4, fundamental en este trabajo, muestra el teorema de reducción Euler-Poincaré sobre fibrados principales para un grupo de Lie general (véase [CGR]). Además se estudian algunos conceptos de cálculo variacional en relación con las ecuaciones Euler-Lagrange.

Capítulo 1

Introducción a las Variedades

En este capítulo son introducidas de manera breve las herramientas básicas de la teoría de variedades diferenciales; y, como caso particular, se estudian los grupos de Lie G , con algunos ejemplos clásicos. Además de la correspondencia biunívoca entre un álgebra de Lie de G , y el espacio tangente a G en la identidad. Los grupos de Lie son de gran utilidad para el estudio de los G -fibrados principales (véase [Ste]).

1.1. Variedades

Una variedad diferenciable es un espacio topológico M bajo ciertas condiciones, cubierto por subconjuntos abiertos que son homeomorfos a subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^m . A estos homeomorfismos les exigiremos cumplir algunas condiciones que nos permitirán extender la noción de diferenciabilidad, para funciones definidas en M . Uno de los ejemplos más simples de variedades, son las superficies,

encontradas en los cursos de Cálculo.

Las variedades diferenciales son muy importantes en física, éstas forman la base para algunas teorías, como la mecánica clásica (mecánica de Lagrange) [GPS], la relatividad general [Sch] y la teoría de Yang-Mills (Gauge Theory) [Fra].

Definición 1.1.1. Una **variedad topológica** de dimensión m , es un espacio topológico M no vacío, Hausdorff, 2^o numerable y localmente euclidiano de dimensión m en todos sus puntos, es decir, para cada punto $x \in M$, existe una vecindad abierta U de x y un homeomorfismo φ de U sobre $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

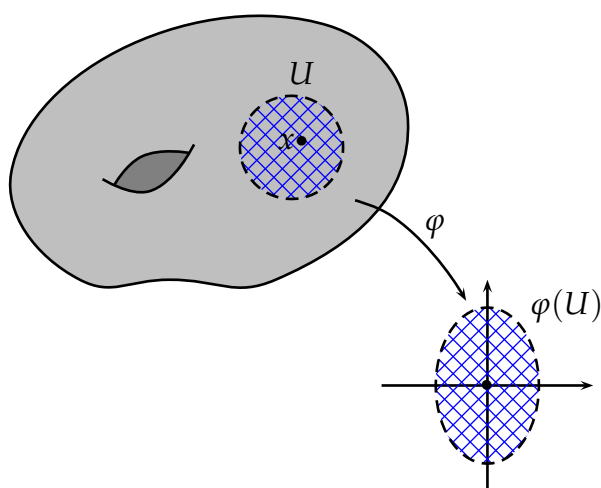


Figura 1.1: M es localmente euclidiano

Definición 1.1.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es diferenciable de clase C^k , para k un entero no negativo, si las derivadas parciales $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ existen y son continuas en U para $\alpha \leq k$.

Una aplicación f es diferenciable de clase C^k si y sólo si cada una de las funciones componentes $f^i = r^i \circ f$ es C^k . Aquí $r^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la i -ésima coordenada. Diremos que f es **suave**, si es de clase C^k para todo $k \geq 0$.

Sea φ un homeomorfismo de un conjunto abierto $U \subset M$ sobre \mathbb{R}^m . El par (U, φ) (algunas veces denotado por (U, x^1, \dots, x^m) , con $x^i = r^i \circ \varphi$) es llamado **carta** o **sistema coordenado** sobre $U \subset M$. La aplicación, $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow U$, es una **parametrización** de $U \subset M$.

Definición 1.1.3. Un **variedad suave** es un par (M, \mathcal{A}) donde M es una variedad topológica de dimensión m y \mathcal{A} es una colección de sistemas coordenados $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}\}$ que satisface las dos propiedades siguientes:

(a) $M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha$.

(b) Las aplicaciones $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, llamadas **cambios de coordenadas**, son funciones suaves, para cualquier par $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

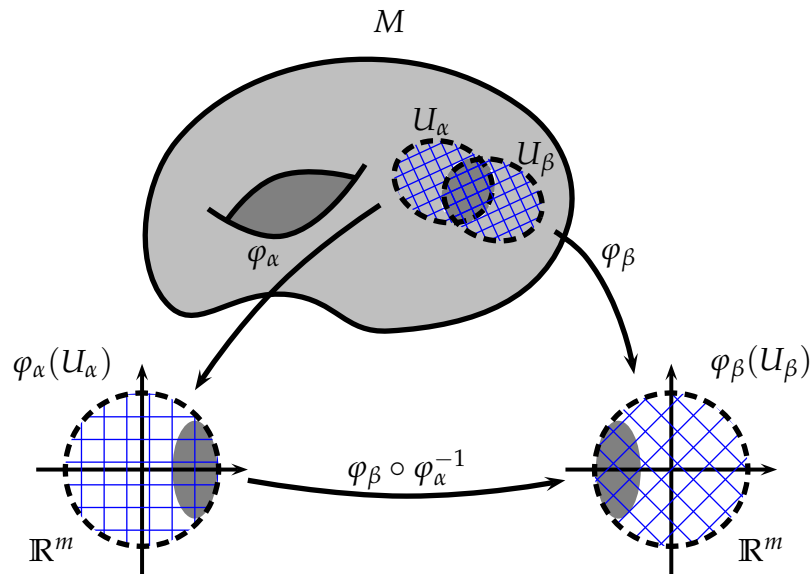


Figura 1.2: Cambio de coordenadas

Una familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}\}$ que satisface las condiciones (a) y (b) es llamado **atlas suave** de M .

Diremos que el atlas \mathcal{A} es **maximal** con respecto a (b) si para cualquier sistema coordinado (U, φ) sobre $U \subset M$ tal que $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son suaves para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Dado un atlas sobre M , podemos fácilmente completarlo en uno maximal, tomando la unión de todas las cartas que, junto con cualquier otra carta del atlas dado, verifique la condición (b). (Veáse [doC, 0.§2], [Spi, 2.§1]). Debido a ello sólo consideraremos atlas suaves.

Ejemplo 1.1.4. Ejemplos de variedades suaves.

(a) La variedad suave de dimensión m , más simple es \mathbb{R}^m ; con su topología usual y atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, \text{Id}_{\mathbb{R}^m})\}$.

(b) Un subconjunto abierto N (no vacío) de una variedad suave M^m , con la topología de subespacio, también es una variedad suave de dimensión m .

(c) $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, el conjunto de todas las matrices con entradas reales de orden $m \times n$, admite una estructura de variedad suave. Esto se puede ver extendiendo todas las entradas de cada matriz en una sola fila, así podemos identificar $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con \mathbb{R}^{mn} .

(d) La esfera unitaria n -dimensional, $S^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$ es una variedad suave. Consideramos las aplicaciones

$$\varphi_{kj} : U_{kj} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{kj}(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_{n+1})$$

donde $U_{kj} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in S^n : (-1)^j z_k > 0\}$, $j = 0, 1$ y $k = 1, 2, \dots, n+1$. La colección $\{(U_{kj}, \varphi_{kj})\}$ es un atlas para S^n (veáse [doC, pág. 55], para el caso $n = 2$).

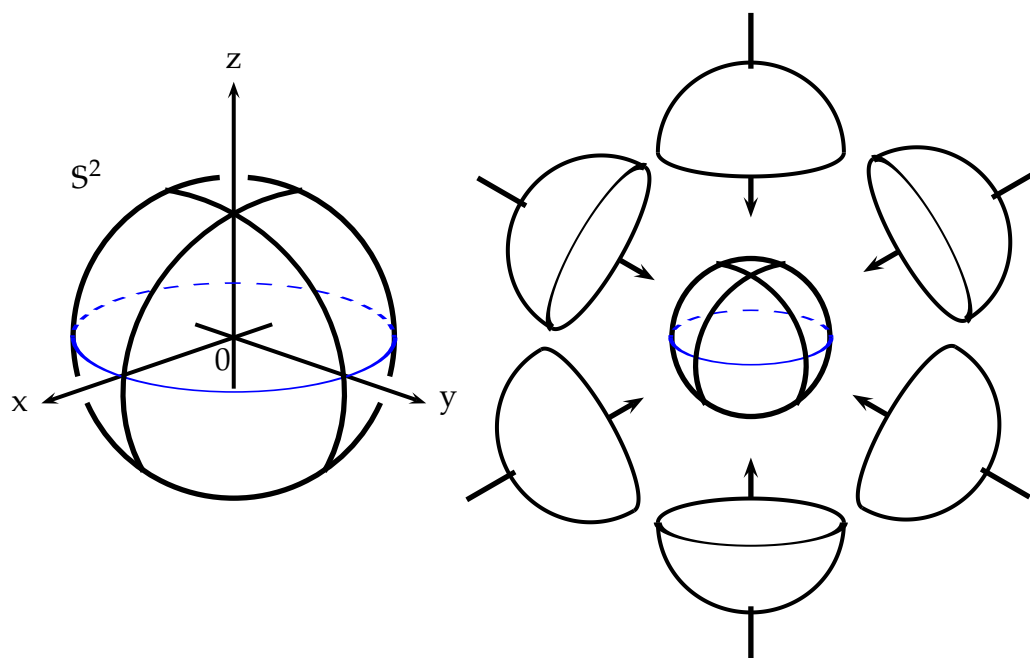


Figura 1.3: Cubrimiento de la esfera S^2 por casquetes esféricos

1.2. Espacio tangente a una variedad M

A cada punto de una superficie en \mathbb{R}^3 le podemos asociar un plano tangente, esta idea se generaliza a la teoría de variedades, y cada punto x de una variedad M le asignamos un espacio vectorial real, el cual intuitivamente contiene las posibles “direcciones” que pasan a través de x . Este espacio es llamado **espacio tangente** de la variedad en x .

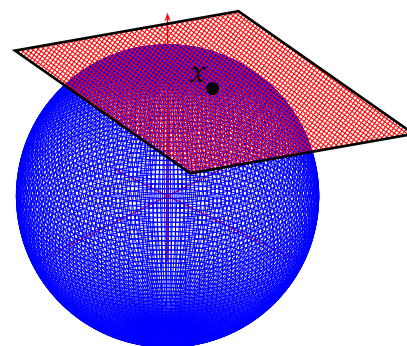


Figura 1.4: Plano tangente a la esfera en el punto $x \in S^2$

Sean M y N dos variedades y $x \in M$. Consideremos todas las aplicaciones suaves $f : U_x \rightarrow N$ donde U_x es una vecindad abierta de $x \in M$. Escribiremos $f \simeq_x g$ si existe una vecindad abierta V de x , con $f|_V = g|_V$. Ésta es una relación

de equivalencia sobre el conjunto de todas las aplicaciones consideradas. La clase de f es llamada **gérmen de f** en x . El conjunto de todos los gérmenes es denotado por $C_x^\infty(M, N)$.

Un **vector tangente** apoyado en un punto $a \in \mathbb{R}^m$ es simplemente un par (a, X) con $X \in \mathbb{R}^m$, también denotado por X_a . Esto induce una aplicación lineal, llamada **derivación**, $X_a : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $X_a(f) = D_X f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tX)$.

El valor depende sólo del gérmen de f en a y satisface la **regla de Leibnitz**

$$X_a(fg) = X_a(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot X_a(g).$$

Lema 1.2.1. Para cualquier $a \in \mathbb{R}^m$, las m derivaciones

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{x=a}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_{x=a}, \text{ definidas por } \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{x=a} (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad (i = 1, \dots, m)$$

forman una base para $T_a(\mathbb{R}^m)$.

[Dem.] Si $D : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y satisface la regla de Leibnitz en a , entonces

D es dado por la acción de un vector tangente apoyado en el punto a . Esto puede

ser visto como sigue: para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(a + t(x - a)) dt \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(a + t(x - a)) dt (x^i - a^i) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x) (x^i - a^i), \text{ donde } h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(a + t(x - a)) dt \end{aligned}$$

Como $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$, se tiene $D(\text{constante}) = 0$. Así

$$\begin{aligned}
D(f) &= D(f(a) + \sum_{i=1}^n h_i(x)(x^i - a^i)) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^n (D(h_i(x))(a^i - a^i) + h_i(x)(D(x^i) - 0)) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)D(x^i),
\end{aligned}$$

donde x^i es la i -ésima función coordenada sobre \mathbb{R}^m . También se tiene que

$$D(f) = \sum_{i=1}^m D(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (f) \quad \text{y} \quad D = \sum_{i=1}^m D(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a. \quad (1.1)$$

Así, D es inducido por el vector tangente $(a, \sum_{i=1}^m D(x^i)e_i)$, donde (e_i) es la base estandar de \mathbb{R}^m . \square

Definición 1.2.2. Se define **espacio tangente**, $T_x(M)$ de M en x , como el conjunto de todas las aplicaciones $X_x : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_x^\infty(M)$ las siguientes condiciones

$$(i) \quad X_x(\alpha f + \beta g) = \alpha X_x(f) + \beta X_x(g) \quad \text{(Linealidad).}$$

$$(ii) \quad X_x(fg) = X_x(f)g(x) + f(x)X_x(g) \quad \text{(Regla de Leibnitz).}$$

El espacio tangente $T_x(M)$ es un espacio vectorial con las operaciones:

$$(X_x + Y_x)(f) = X_x(f) + Y_x(f)$$

$$(\alpha X_x)(f) = \alpha(X_x)(f)$$

Cada elemento de $T_x(M)$ es llamado **vector tangente a M en x** .

Sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave entre variedades. Entonces F induce una aplicación lineal, $F_* : T_x(M) \longrightarrow T_{F(x)}(N)$, para cada $x \in M$, dada por $(F_*(X_x))(h) = X_x(h \circ F)$, con $h \in C_{F(x)}^\infty(N, \mathbb{R})$.

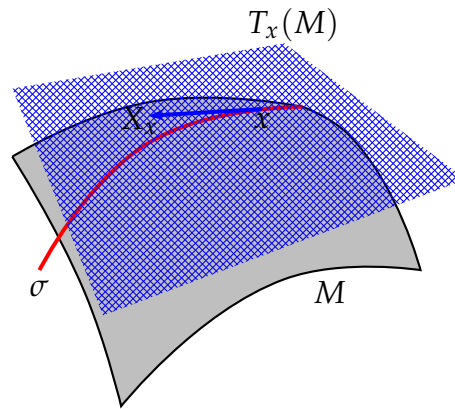


Figura 1.5: Espacio tangente $T_x(M)$ y vector tangente $X_x \in T_x(M)$

Si (U, u) es una carta arbitraria sobre M con $x \in U$, entonces la aplicación $u^* : C_{u(x)}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \longrightarrow C_x^\infty(M, \mathbb{R})$, con $u^*(f) = f \circ u$, y la aplicación entre espacios tangentes, $u_* : T_x(M) \longrightarrow T_{u(x)}(\mathbb{R}^m)$, son isomorfismos. Así por el Lema 1.2.1, $T_x(M)$ es un espacio vectorial de dimensión m .

Lema 1.2.3. Toda $X_x \in T_x(M)$ se escribe de manera única como $X_x = \sum_{i=1}^m X_x(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$.

[Dem.] Usaremos la notación $u = (u^1, \dots, u^m)$; u^i para la i -ésima función coordenada sobre U , y $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x := u_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{u(x)} \right) = u_*^{-1}(u(x), e_i)$.

Además $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x \in T_x(M)$ es la derivación dada por

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x (s) = \frac{\partial (s \circ u^{-1})}{\partial x^i} (u(x)) \quad \text{con } s : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Por la igualdad (1.1) se tiene

$$\begin{aligned} u_*(X_x) &= \sum_{i=1}^m (u_*(X_x))(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{u(x)} = \sum_{i=1}^m X_x(x^i \circ u) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{u(x)} \\ &= \sum_{i=1}^m X_x(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{u(x)} \end{aligned}$$

$$\text{así } X_x = u_*^{-1}(u_*(X_x)) = \sum_{i=1}^m X_x(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x. \quad \square$$

Proposición 1.2.4. *El espacio tangente de una variedad suave M^m en un punto es isomorfo a \mathbb{R}^m , esto es, $T_x(M) \simeq \mathbb{R}^m$.*

La demostración se obtiene identificando las bases de $T_x(M)$ y \mathbb{R}^m .

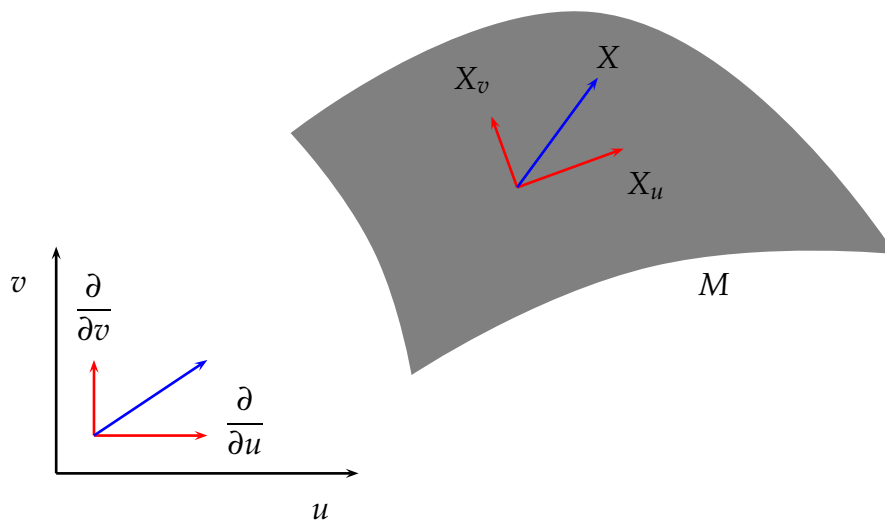


Figura 1.6: Identificación de vectores

Lema 1.2.5. (Propiedades) Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ dos aplicaciones suaves y $x \in M$. Las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) $F_* : T_x(M) \rightarrow T_{F(x)}(N)$ es lineal, para cada $x \in M$.
- (b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_x(M) \rightarrow T_{G(F(x))}(P)$.
- (c) $(\text{Id}_M)_* = \text{Id}_{T_x(M)} : T_x(M) \rightarrow T_x(M)$.
- (d) Si F es un difeomorfismo, entonces $F_* : T_x(M) \rightarrow T_{F(x)}(N)$ es un isomorfismo.

La demostración de las propiedades se puede consultar en [Mic1, 1.§11].

Fibrado tangente a una variedad M

El fibrado tangente de una variedad es la unión de todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad. Éste forma parte de un tipo de fibrados, llamados **fibrados vectoriales**, donde la fibra es un espacio vectorial. Más adelante daremos una introducción acerca de fibrados (para una revisión completa consultar [Ste]).

Definición 1.2.6. Sea M una variedad suave de dimensión m , se llama **fibrado tangente** $T(M)$ a la unión disjunta de espacios tangentes a M , esto es

$$T(M) = \bigsqcup_{x \in M} T_x(M)$$

y la aplicación proyección

$$\pi : T(M) \longrightarrow M$$

está dada por $\pi(v_x) = x$, con $v_x \in T_x(M)$. El fibrado $T(M)$ es uno de los ejemplos más importantes de fibrado vectorial.

Veamos que $T(M)$ tiene estructura de variedad suave. En efecto:

Sea $\mathcal{A} = \{(U_j, \psi_j)\}$ un atlas suave para M y (U, φ) un sistema coordenado local de \mathcal{A} . Tenemos que $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, donde m es la dimensión de M . Para cualquier vector $v \in T_x(M)$, su imagen $\varphi_*(v)$ puede ser escrita de la forma

$$\varphi_*(v) = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + a_m \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ahora definimos la aplicación

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$$

que envía cada $v \in T_x(M)$, en

$$\tilde{\varphi}(v) = (\varphi(p), a_1, \dots, a_m) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m.$$

La aplicación $\tilde{\varphi}$ es biyectiva. Ahora introducimos una topología en $T(M)$ declarando que cada $\pi^{-1}(U)$ es abierto, y $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo. La colección

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ es un atlas suave para $T(M)$.

Campos vectoriales

Un campo vectorial es una construcción del cálculo vectorial que asocia un vector a cada punto en el espacio euclideo. Los campos vectoriales se utilizan a menudo en física, para modelar la velocidad y la dirección de un líquido móvil a través del espacio, o la intensidad y la dirección de una cierta fuerza, como la fuerza electromagnética o la gravitatoria, pues cambian punto a punto. En la teoría de variedades los campos vectoriales se define como las secciones del fibrado tangente a la variedad.

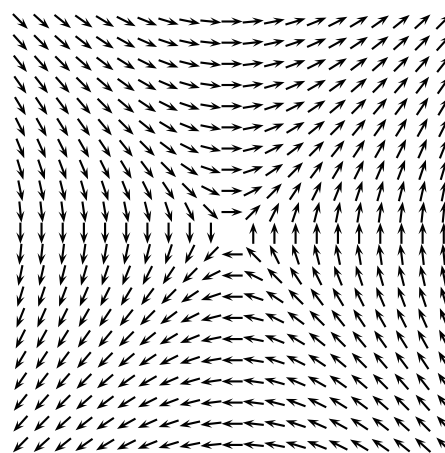


Figura 1.7: Campo vectorial en \mathbb{R}^2

En esta sección se presenta la identificación de campo vectorial suave y el álgebra de las derivaciones; las propiedades del corchete de Lie y el teorema de existencia de curvas integrales.

Definición 1.2.7. Diremos que una aplicación $\sigma : [a, b] \longrightarrow M$ es una **curva suave en M** si σ se extiende a una aplicación C^∞ de $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ en M para algún

$\epsilon > 0$. La curva $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ se dice suave a trozos si existe una partición $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$ tal que $\sigma|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}$ es suave para cada $i = 0, \dots, n-1$.

Una curva suave a trozos es necesariamente una aplicación continua.

Si $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva suave en M , entonces su vector tangente

$$\dot{\sigma}(t) = d\sigma \left(\frac{d}{dr} \Big|_{r=t} \right) \in T_{\sigma(t)}(M)$$

está bien definido para cada $t \in [a, b]$.

Definición 1.2.8. Un **campo vectorial** X a lo largo de una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es una aplicación $X : [a, b] \rightarrow T(M)$ la cual levanta a σ ; esto es, $\pi \circ X = \sigma$, donde $\pi : T(M) \rightarrow M$. Un campo de vectores X es llamado **campo vectorial suave** a lo

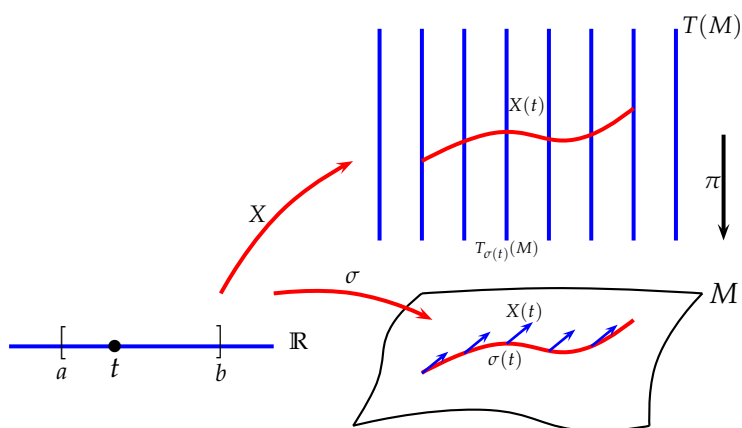


Figura 1.8: Campo de vectorial X sobre M

largo de σ si la aplicación $X : [a, b] \rightarrow T(M)$ es suave. Un campo vectorial suave X sobre un conjunto abierto $U \subset M$ es un levantamiento de U en $T(M)$, esto es, una aplicación suave $X : U \rightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ X = \text{Id}_U$.

Denotaremos a el conjunto de todos los campos de vectores suaves por $\mathfrak{X}(M)$.

Con las operaciones de adición y multiplicación por escalar punto a punto, es un espacio vectorial.

Proposición 1.2.9. *El espacio $\mathfrak{X}(M)$ de los campos vectoriales suaves sobre M coincide con el espacio de todas las derivaciones del álgebra $C^\infty(M)$ de funciones suaves, es decir, las aplicaciones \mathbb{R} -lineales $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, que satisfacen la regla de Leibnitz $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, las siguientes declaraciones son equivalentes:*

(a) X es de clase C^∞ .

(b) Si (U, x^1, \dots, x^m) es un sistema coordinado sobre M , y si $\{a_i\}$ es una colección de funciones definidas sobre U por $X|_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces $a_i \in C^\infty(U)$.

(c) Para cada $V \subset M$ abierto y $f \in C^\infty(V)$, vale que $X(f) \in C^\infty(V)$

Para la demostración de la Proposición veáse [Mic1, 1. §3], [War, pág. 35].

Definición 1.2.10. (Corchetes de Lie). Si X e Y son campos vectoriales suaves sobre M , se define el campo vectorial $[X, Y]$, llamado **corchete de Lie** de X e Y , por:
 $[X, Y]_x(f) = X_x(Y(f)) - Y_x(X(f)), \quad \text{con } x \in M.$

Lema 1.2.11. *Sean X, Y y Z campos vectoriales suaves sobre M . Entonces:*

(a) $[X, Y]$ es un campo vectorial sobre M .

(b) Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$.

(c) $[X, Y] = -[Y, X]$

$$(d) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Todas estas propiedades son verificadas fácilmente usando el conmutador $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ en el espacio de las derivaciones del álgebra $C^\infty(M)$.

Definición 1.2.12. Sea X un campo vectorial sobre M . Una curva suave σ en M es una **curva integral** de X , si $\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$, para cada t en el dominio de σ .

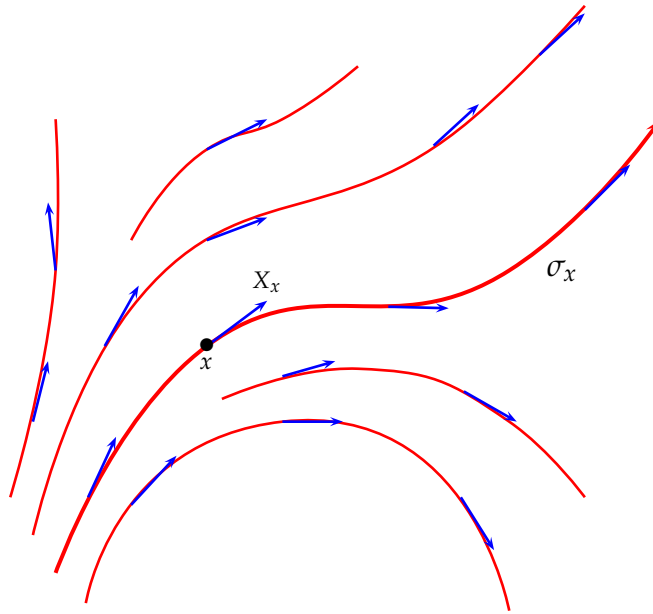


Figura 1.9: Curva integral a través de un campo de vectores

Proposición 1.2.13. Sea X un campo vectorial suave sobre una variedad diferenciable M .

Para cada $x \in M$, existen $a(x), b(x)$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, y una curva suave

$$\sigma_x : (a(x), b(x)) \longrightarrow M$$

tales que

$$(a) \quad 0 \in (a(x), b(x)) \text{ y } \sigma_x(0) = x$$

(b) σ_x es una curva integral de X .

(c) Si $\mu : (c, d) \longrightarrow M$ es una curva suave que satisface las condiciones (a) y (b), entonces $(c, d) \subset (a(x), b(x))$ y $\mu = \sigma_x|_{(c,d)}$.

Para la demostración de la proposición, veáse [War, pág. 38].

Ejemplo 1.2.14. Consideremos el campo de vectores en \mathbb{R}^2 definido en términos de la carta identidad $(\mathbb{R}^2, \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ de funciones coordenadas (x^1, x^2) , por

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Una curva $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva integral de X si y sólo si

$$\frac{d}{dt}(x^1 \circ \sigma) = x^1 \circ \sigma, \quad \frac{d}{dt}(x^2 \circ \sigma) = x^2 \circ \sigma$$

se sigue que las componentes de la aplicación que define la curva son $\sigma^1(t) = ae^t$ y $\sigma^2(t) = be^t$. Por consiguiente, existe una única curva integral con dominio \mathbb{R}

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto (ae^t, be^t)$$

que parte del punto dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1.3. Grupos y Álgebras de Lie

Los grupos de Lie son muy importantes en análisis matemático, física y geometría, sirven para describir la simetría de las estructuras analíticas. Fueron introducidos por Sophus Lie en 1870, para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales.

En esta sección se presenta una breve introducción a los grupos de Lie. El punto central de esta teoría es la relación entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie

asociada. Se estudiarán las propiedades de la aplicación exponencial, aplicación adjunta y acciones de grupos sobre un espacio topológico.

Definición 1.3.1. Un **Grupo de Lie** es una variedad suave G , que tiene una estructura de grupo compatible con la estructura de variedad, en el sentido que las aplicaciones multiplicación $\mu : G \times G \longrightarrow G$ con $\mu(g, h) = gh$, e inversión $I : G \longrightarrow G$ por $I(g) = g^{-1}$, son suaves, para todo $g, h \in G$.

Un subgrupo cerrado $H \leq G$, que es también una subvariedad, es llamado **subgrupo de Lie** de G . Las aplicaciones suaves $L_g : G \longrightarrow G$, con $L_g(h) = gh$; y $R_h : G \longrightarrow G$, por $R_h(g) = gh$, son llamadas aplicaciones **translación a izquierda** y **translación a derecha**.

Si $e \in G$ denota **el elemento neutro**, entonces $L_e = \text{Id}_G = R_e$, además $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$. Así L_g y R_h son difeomorfismos para cada $g, h \in G$, estas aplicaciones conmutan, es decir, $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$. Las aplicaciones inducidas $(L_g)_*$, y $(R_h)_*$ son también difeomorfismos.

Ejemplo 1.3.2. Los grupos de Lie son abundantes.

1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es un grupo de Lie bajo la adición de vectores.
2. El producto $G \times H$ de dos grupos de Lie es un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de producto de grupos.
3. El círculo unitario $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie con las operaciones inducidas por \mathbb{C}^* , donde \mathbb{C}^* es el conjunto de los números complejos sin el cero.

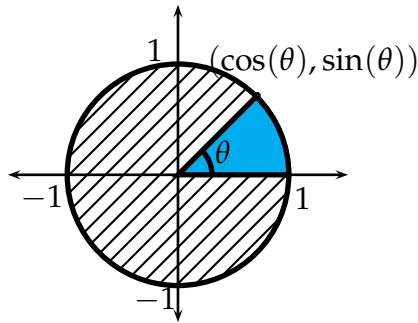


Figura 1.10: Círculo unitario

4. El n -Toro T^n (n un entero positivo) es un grupo de Lie, el cual es el producto del grupo de Lie S^1 consigo mismo n -veces.

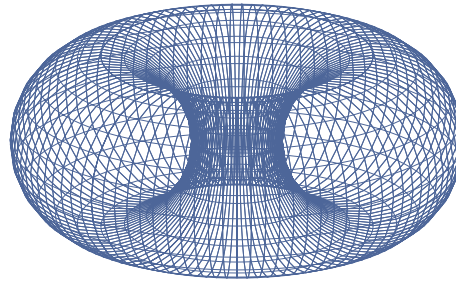


Figura 1.11: El 2-Toro

5. La variedad $GL_m(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales no-singulares $m \times m$ es un grupo de Lie, bajo multiplicación de matrices.

Algunos grupos de Lie más importantes (véase [Bak, pág 189]).

6. El Grupo Lineal General Positivo, $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.
7. El Grupo Lineal General Proyectivo,

$$PGL_n^+(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) / \{\lambda I \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

8. El Grupo Lineal Especial, $SL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

9. El Grupo Lineal Especial Proyectivo

$$\mathrm{PSL}_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R}) / \{\lambda I \in \mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. El Grupo Ortonormal, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = 1\}$.

Definición 1.3.3. Un **álgebra de Lie** sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial real \mathfrak{g} junto con una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (llamado corchete) tal que para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

- (a) $[aX + Y, bZ + W] = ab[X, Z] + a[X, W] + b[B, Z] + [Y, W]$ (Bilinealidad)
- (b) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anti-commutativo)
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Identidad de Jacobi)

La importancia del concepto de álgebra de Lie es que existe un álgebra de Lie de dimensión finita intimamente asociada con el grupo de Lie, y que las propiedades del grupo de Lie están reflejadas en las propiedades de su álgebra de Lie. Por ejemplo, los grupos de Lie conexos o simplemente conexos están completamente determinados (bajo isomorfismos) por sus álgebras de Lie. El estudio de estos grupos de Lie se reduce en gran parte al estudio de sus álgebras de Lie.

Ejemplo 1.3.4. Ejemplos de álgebras de Lie.

- (a) Dado un grupo de Lie G , el espacio vectorial de campos tangentes sobre G , $\mathfrak{X}(G)$, es un álgebra de Lie con la operación corchete de Lie de campos

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

(b) El espacio vectorial de todos los campos vectoriales suaves sobre una variedad M forman un álgebra de Lie bajo la operación corchete de Lie sobre campos vectoriales.

(c) Cualquier espacio vectorial llega a ser un álgebra de Lie, si todos los corchetes son igual a 0. Estas álgebras son llamadas abelianas.

(d) El espacio vectorial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices con entradas reales $n \times n$ forman un álgebra de Lie, si definimos el corchete como:

$$[A, B] = AB - BA, \quad \text{para cada } A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

(e) Un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$ es un álgebra de Lie, si definimos: $[x, x] = [y, y] = 0$, $[x, y] = y$, y se extiende bilinealmente.

(f) \mathbb{R}^3 con la operación producto vectorial, es un álgebra de Lie.

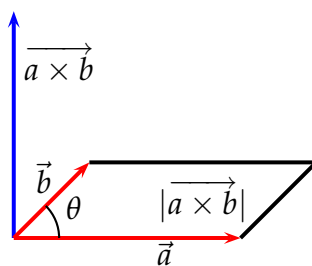


Figura 1.12: Producto vectorial de vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

Definición 1.3.5. Un campo vectorial suave X sobre G es un **campo vectorial invariante a izquierda** si para cada $g \in G$, se satisface $(L_g)_*(X) = X$.

Sea $\mathfrak{X}_L(G)$ el conjunto de todos los campos invariantes a izquierda sobre G . Si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ y $g \in G$, entonces $(L_g)_*([X, Y]) = [(L_g)_*(X), (L_g)_*(Y)] = [X, Y]$, por tanto $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$. El conjunto, $\mathfrak{X}_L(G)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

Definición 1.3.6. Dado un grupo de Lie G , se define el **álgebra de Lie** G , como el álgebra de los campos invariantes a izquierda:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid (L_g)_*(X) = X, \forall g \in G\} = \mathfrak{X}_L(G)$$

Interpretaciones

Sea G un grupo de Lie, $e \in G$ el elemento unidad y \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G .

1. Hay una biyección entre los espacios vectoriales $\mathfrak{X}_L(G)$ y $T_e(G)$:

Para cada $\xi \in T_e(G)$, definimos el campo vectorial X_ξ sobre G como:

$$X_\xi(g) = (L_g)_*(\xi). \text{ Entonces}$$

$$X_\xi(gh) = (L_{gh})_*(\xi) = (L_g)_*((L_h)_*(\xi)) = (L_g)_*(X_\xi(h)),$$

lo cual muestra que X_ξ es invariante a izquierda. Las aplicaciones lineales

$$\zeta_1 : \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow T_e(G) \quad X \longmapsto X(e) \quad \text{y}$$

$$\zeta_2 : T_e(G) \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G) \quad \xi \longmapsto X_\xi$$

satisfacen $\zeta_1 \circ \zeta_2 = \text{Id}_{T_e(G)}$ y $\zeta_2 \circ \zeta_1 = \text{Id}_{\mathfrak{X}_L(G)}$. Se define el conchete de Lie en $T_e(G)$ por $[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e)$, donde $\xi, \eta \in T_e(G)$ y $[X_\xi, X_\eta]$ es el conchete de Lie de campos vectoriales. Esto hace a $T_e(G)$ un álgebra de Lie. (Véase [MR]).

2. Hay una correspondencia entre las subálgebras de Lie de \mathfrak{g} y los subgrupos de Lie conexos de G .

Definición 1.3.7. La **aplicación exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ está definida por $\exp(\xi) = \sigma_\xi(1)$, donde $\sigma_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es la única curva integral maximal de X_ξ que satisface $\sigma_\xi(0) = e$ y $\sigma'_\xi(t) = X_\xi(\sigma_\xi(t))$.

La aplicación exponencial satisface las siguientes propiedades ([MR, 9 §.1]):

- $\exp(t\tilde{\zeta}) = \sigma_{\tilde{\zeta}}(t)$;
- $\exp((t+s)\tilde{\zeta}) = \exp(t\tilde{\zeta}) \cdot \exp(s\tilde{\zeta})$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;
- $\exp(-\tilde{\zeta}) = \exp(\tilde{\zeta})^{-1}$

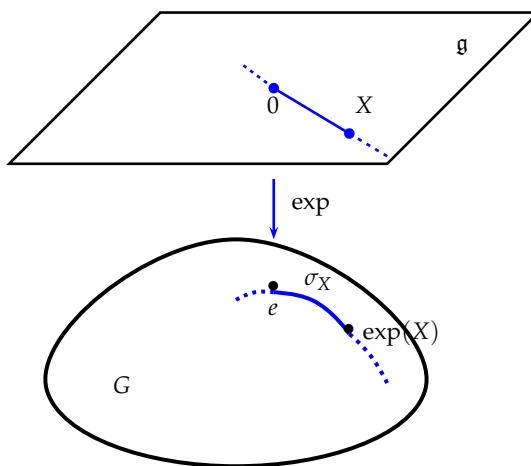


Figura 1.13: Aplicación exponencial

Ejemplo 1.3.8. Sea $G = GL_m(\mathbb{R})$, con álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m^2} = M_{m \times m}(\mathbb{R})$.

Para cada $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, la aplicación $\sigma_A : \mathbb{R} \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ dada por $t \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$ es la curva integral, tal que $\sigma_A(0) = I$ y $\sigma'_A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i = \sigma_A(t)A$. Por lo tanto, la aplicación exponencial es dada por

$$\exp : \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \rightarrow GL_m(\mathbb{R}), \quad A \mapsto \sigma_A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Definición 1.3.9. Sean G un grupo de Lie y $g \in G$, se define la **aplicación conjugada** o **conjugación** como: $C_g : G \rightarrow G$, donde $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Esta aplicación es un difeomorfismo que fija el elemento neutro, debido a que C_g

se puede escribir como la composición de los difeomorfismos $R_{g^{-1}}$ y L_g , esto es,

$$C_g(h) = (R_{g^{-1}} \circ L_g)(h) \text{ para todo } h \in G.$$

Se define la **aplicación adjunta mayúscula** $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, como la diferencial de la aplicación $C_g(h)$ con respecto a h , en $h = e$; esto es, $\text{Ad}_g(\eta) = C_{g*}(\eta)$.

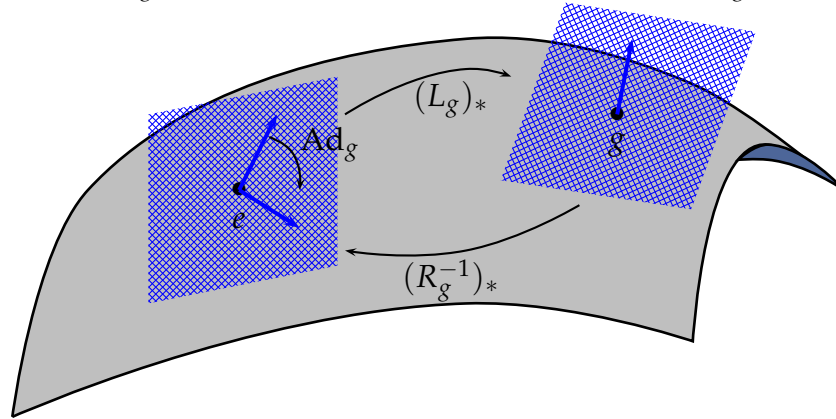


Figura 1.14: La aplicación adjunta es una linealización de la conjugación

Diferenciando $\text{Ad}_g(\eta)$ con respecto a g , en $g = e$, obtenemos la **aplicación adjunta minúscula** $\text{ad}_\eta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\text{ad}_\eta(\xi) = \varphi_*^\eta(\xi)$, donde $\varphi^\eta = \text{Ad}_g(\eta)$.

Proposición 1.3.10. Para cualquier par $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, se satisface que $\text{ad}_\eta(\xi) = [\xi, \eta]$.

[Dem.] Sean $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ y $g \in G$. Denotemos por $\varphi_t(g) = g \exp(t\xi) = R_{\exp(t\xi)}(g)$ el flujo de X_ξ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{ad}_\eta(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_{\exp(t\xi)} \circ R_{\exp(-t\xi)})_*(\eta) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-t\xi)})_*((L_{\exp(t\xi)})_*(\eta)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-t\xi)})_*(X_\eta(\exp(t\xi))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^{-1})_*(X_\eta(\varphi_t(e))) = [X_\xi, X_\eta](e) = [\xi, \eta]. \end{aligned}$$

□

Acciones de grupos

Aquí mostraremos algunos resultados importantes relacionados con aplicaciones suaves entre grupos de Lie y variedades diferenciales.

Definición 1.3.11. Sea G un grupo y X un conjunto. Una **acción por la izquierda** de G en X es una función $\mu : G \times X \longrightarrow X$, que satisface

$$\mu(e, x) = x, \quad \text{y} \quad \mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x) \quad \text{para todo } g, h \in G, \text{ y } x \in X.$$

Por comodidad escribiremos habitualmente gx en lugar de $\mu(g, x)$. Se define la **órbita de un punto** $x \in X$, al subconjunto $\text{Orb}(x) = \{gx \mid g \in G\}$; y **estabilizador de x** al subgrupo G_x de G , dado por $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Definición 1.3.12. Sea G un grupo que actúa a izquierda sobre X . Diremos que la acción es

- **Transitiva:** si para cada par $p, q \in X$ existe $g \in G$ tal que $pg = q$.
- **Libre:** si se verifica $pg = q \iff g = e$, para cualesquiera $p, q \in X$. Cuando la acción es libre, $\text{Orb}(x) = G$.

Ejemplo 1.3.13. • El teorema de Cayley asegura que G actúa sobre sí mismo por translaciones: $L_g : G \longrightarrow G$ por $L_g(a) = ga$. Si $a \in G$, entonces la órbita en a es G y el estabilizador es $\{e\}$.

• Si G actúa sobre G/H (la familia de cocientes de un subgrupo H) por translaciones $L_g : G/H \longrightarrow G/H$, con $L_g(aH) = gaH$. La órbita $O(aH) = G/H$. Así que G actúa transitivamente sobre G/H . El estabilizador en aH , es aHa^{-1} .

Proposición 1.3.14. *Sea G un grupo de Lie que actúa a izquierda sobre una variedad suave M . Entonces $G/G_x \simeq \mathcal{O}(x)$, con $x \in M$.*

[Dem.] Si $x \in M$, G/G_x denota la familia de todos los cocientes de G_x en G . Definimos $f : \mathcal{O}(x) \rightarrow G/G_x$ por $f(ax) = aG_x$. Veamos que f está bien definida: si $ax = bx$ para algún $b \in G$, entonces $b^{-1}ax = x$, $b^{-1}a \in G_x$, y $aG_x = bG_x$. La función f es inyectiva: si $aG_x = f(ax) = f(cx) = cG_x$ para algún $c \in G$, entonces $c^{-1}a \in G_x$, $c^{-1}ax = x$, y $ax = cx$; además es sobreyectiva: si $a \in G$, entonces $aG_x = f(ax)$. Por tanto, f es biyectiva. Así que $G/G_x \simeq \mathcal{O}(x)$. \square

Capítulo 2

Fibrado principal

La estructura matemática en la cual la teoría clásica de campos Gauge tiene una interpretación geométrica natural es la teoría de fibrados principales con conexiones (véase [Soc]). Un fibrado principal suave es una estructura geométrica rica, esencialmente consta de dos variedades suaves, P espacio total, y M espacio base, además de un grupo de Lie G , que actúa a derecha sobre P (véase [Ste]). En aplicaciones físicas M es el espacio-tiempo del sistema físico y los campos Gauge son 1-formas ω con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre P .

Este capítulo comienza con algunas definiciones y resultados acerca de fibrados suaves. Dado un fibrado principal suave $\pi : P \longrightarrow M$ con grupo de Lie G , se definen los campos G -invariantes y fundamentales. Además, el grupo de Lie de automorfismos infinitesimales $\text{Aut}(P)$ y el grupo de transformaciones Gauge $\text{gau}(P)$, con sus respectivas álgebras de Lie asociadas. A partir de un fibrado principal se define en el siguiente capítulo el fibrado de conexiones $C(P)$, el cual se puede identificar con la variedad $(J^1(P))/G$ del fibrado de los 1-jets (véase [Gar]).

2.1. Fibrados topológicos

Un fibrado es un objeto con propiedades similares a las del producto cartesiano. El ejemplo más sencillo de fibrado es un producto de espacios topológicos $M \times F$. En general, un fibrado es una colección, $\mathcal{E} = (E, M, \pi, F)$; llamados E el espacio total, M la base y F la fibra; además de la aplicación $\pi : E \rightarrow M$. Los fibrados pueden tener propiedades especiales más complicadas que las de un simple producto. Si la fibra $F = G$ es un grupo de Lie y las cartas preservan la multiplicación del grupo; tenemos un fibrado principal (véase [Ste], [Kos]).

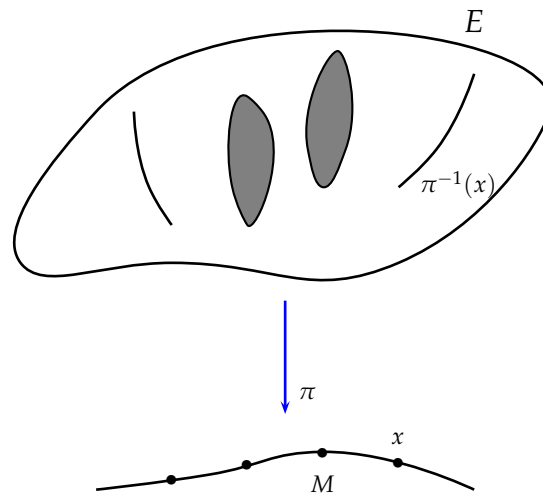


Figura 2.1: Representación de un fibrado

Definición 2.1.1. Sea F un espacio topológico y $\pi : E \rightarrow M$ una aplicación continua. Llamaremos la cuádrupla $\mathcal{E} = (E, M, \pi, F)$ **fibrado** (localmente trivial) con fibra (abstracta) F si, para cada $x \in M$, existe un conjunto abierto $U \subset M$ que contiene a x tal que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, por un homeomorfismo φ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

El homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$, tiene la forma $\varphi(p) = (\pi(p), \tilde{\varphi}(p))$ para cada $p \in \pi^{-1}(U)$, donde $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow F$ es una aplicación suave.

Observaciones ++ 2.1.2.

- El par (U, φ) es llamado **carta** del fibrado.
- La fibra sobre $x \in M$, $F_x = \pi^{-1}(x)$, es homeomorfa a F para cada $x \in M$, mediante la aplicación $\tilde{\varphi}$.
- La aplicación π_1 es la proyección en la primera coordenada.
- Si E, M y F son variedades suaves, π es una aplicación suave y las cartas siempre pueden elegirse suaves, tenemos un **fibrado suave**.

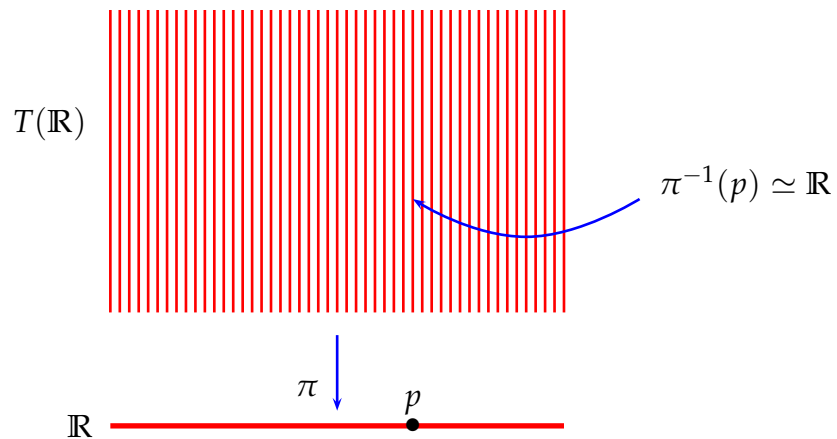


Figura 2.2: Fibrado tangente de \mathbb{R} , $T(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(Funciones de transición). Si (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son dos cartas en un entorno del punto $x \in M$. Para cada $p \in \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2)$, con $\pi(p) = x \in U_1 \cap U_2$, existen

$z, g \in F$ tales que $\varphi_1(p) = (x, z)$ y $\varphi_2(p) = (x, g)$, luego la función de transición $\gamma_{12}(x) : F \longrightarrow F$, inducida por la composición $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, sólo depende de x y satisface las siguientes propiedades (para más detalles véase [Ste, pág. 8]):

$$\bullet \gamma_{11} = \text{Id}_F, \quad \bullet \gamma_{12} = \gamma_{21}^{-1}, \quad \bullet \gamma_{12} \circ \gamma_{23} = \gamma_{13}.$$

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{E} = (E, M, \pi, F)$ un fibrado suave y G un grupo de Lie que actúa suavemente sobre F como grupo de difeomorfismos. Un G -atlas para \mathcal{E} es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cartas para \mathcal{E} tales que

- (i) La colección $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de M ;
- (ii) Para cada par de cartas (U, φ) y (V, ψ) en \mathcal{A} la aplicación

$$\Phi = \psi \circ \varphi^{-1} : (U \cap V) \times F \longrightarrow (U \cap V) \times F,$$

llamada **cambio de coordenadas**, tiene la forma $\Phi(x, z) = (x, \gamma(x)z)$; nótese que la **función de transición** $\gamma : U \cap V \longrightarrow G$ es una aplicación suave.

Observación ++ 2.1.4. • El fibrado $\mathcal{E} = (E, M, \pi, F)$ junto con el grupo de Lie G (Definición 2.1.3), es llamado **G -fibrado suave**.

Algunas veces llamaremos al grupo de Lie G **grupo estructural**. Para una revisión más detallada acerca de fibrados topológicos, consultar [Ste].

Definición 2.1.5. Un **fibrado vectorial** es un fibrado $\pi : E \longrightarrow M$, donde la fibra típica es un espacio vectorial F de dimensión finita. Sus funciones de transición pertenecen al grupo de transformaciones lineales de F , $\text{GL}(F)$.

Definición 2.1.6. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado, se llama **sección local** del fibrado a cualquier aplicación $s : U \longrightarrow E$, con $U \subset M$, que satisface $\pi \circ s = \text{Id}_U$. En particular, cuando $U = M$, diremos que es una **sección global** del fibrado.

Las secciones que nos interesan son las C^∞ , a este conjunto de secciones se denotará por $\Gamma(M, E)$ o simplemente $\Gamma(E)$, cuando se sobreentiendan las demás componentes del fibrado.

Ejemplo 2.1.7. Sea $T(M) \longrightarrow M$ el fibrado tangente. Una sección es una aplicación $s : M \longrightarrow T(M)$, tal que a cada $x \in M$ asigna un vector $v \in T_p(M)$, luego $\Gamma(T(M)) = \mathfrak{X}(M)$.

Ejemplo 2.1.8. Sea $\pi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, con $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el fibrado de la Figura 2.4. Con proyección $\pi(z) = z^2$.

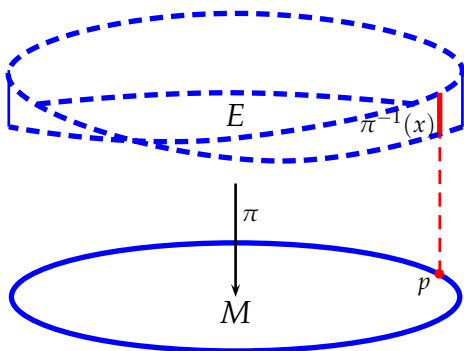


Figura 2.3: Fibrado vectorial de fibra \mathbb{R} sobre \mathbb{S}^1

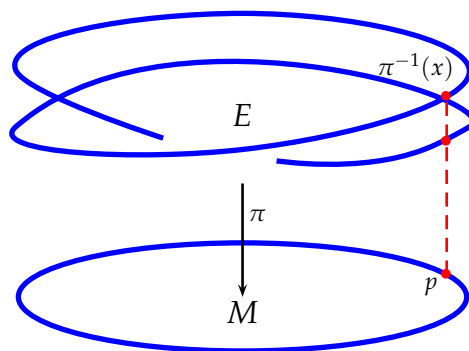


Figura 2.4: Fibrado de grupos de Lie de fibra \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{S}^1

El grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, de dimensión 2, actúa libremente por la derecha en

S^1 del siguiente modo: $T : S^1 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow S^1$ dada por

$$T(z, a) = \begin{cases} z & \text{si } a = 1 \\ -z & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

Sea $\{((0, 2\pi), e^{i\theta}), ((-\pi, \pi), e^{i\theta})\}$ un atlas de S^1 . Un atlas fibrado es la colección

$\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1^{-1}), (U_2, \phi_2^{-1})\}$, donde:

$U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, 2\pi)\} \times \mathbb{Z}_2$ con $\phi_1^{-1}(e^{i\theta}, \pm 1) = T(\pm 1, e^{i\frac{\theta}{2}}) = \pm e^{i\frac{\theta}{2}}$ y

$U_2 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (-\pi, \pi)\} \times \mathbb{Z}_2$ con $\phi_2^{-1}(e^{i\theta}, \pm 1) = \pm e^{i\frac{\theta}{2}}$ y la función de transición

$$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(e^{i\theta}, \pm 1) = \phi_1(\pm e^{i\frac{\theta}{2}}) = \begin{cases} \phi_1(e^{i\frac{\theta}{2}}) & \\ \phi_1(e^{i\frac{\theta}{2} + \pi}) & \end{cases} = \begin{cases} (e^{i\theta}, 1) \\ (e^{i\theta}, -1) \end{cases}$$

donde

$$\phi_1(e^{i\theta}) = \begin{cases} (e^{i2\theta}, 1) & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ (e^{i2(\theta-\pi)}, -1) & \text{si } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

El grupo \mathbb{Z}_2 actúa en \mathbb{R} por la izquierda mediante el producto. El fibrado vectorial asociado es la banda de Möbius de la Figura 2.3.

Ejemplo 2.1.9. Se denomina **Fibración de Hopf** al fibrado principal $S^3 \longrightarrow S^2$ de grupo S^1 , descubierto por Heinz Hopf, (véase [Hopf]). Por comodidad, consideremos $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|(z_1, z_2)\| = 1\}$; así definiremos una aplicación

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad \varphi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$$

Si $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

$$\begin{aligned} \||z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2\| &= (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + |2z_1\bar{z}_2|^2 \\ &= |z_1|^4 + |z_2|^4 - 2|z_1|^2|z_2|^2 + 4|z_1|^2|z_2|^2 \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

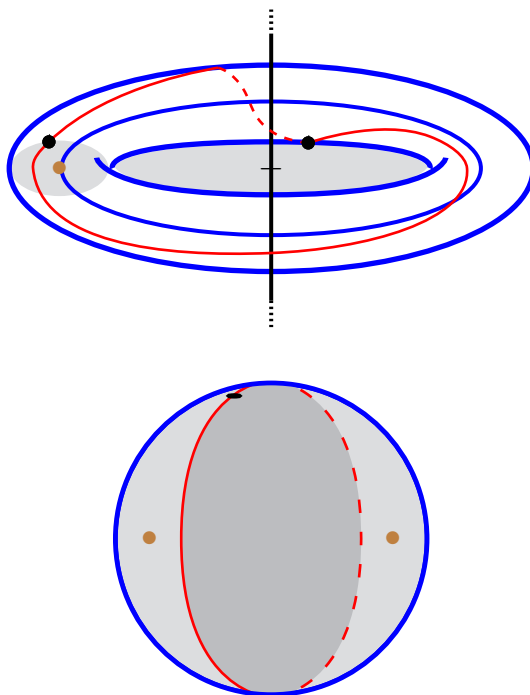


Figura 2.5: Visualización de la fibrición de Hopf.

Luego restringiéndonos a \mathbb{S}^3 obtenemos:

$$\pi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \quad \text{con} \quad \pi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$$

Además \mathbb{S}^1 actúa libremente en \mathbb{S}^3 por la derecha de la siguiente manera:

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \quad \text{dada por} \quad ((z_1, z_2), e^{i\theta}) \longmapsto (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta})$$

Así $\pi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es un fibrado principal de fibra \mathbb{S}^1 . Las fibras coinciden con las órbitas:

$$\begin{aligned} \pi(z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}) &= (|z_1 e^{i\theta}|^2 - |z_2 e^{i\theta}|^2, 2z_1 e^{i\theta} \overline{z_2 e^{-i\theta}}) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1 \bar{z}_2) \\ &= \pi(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Si consideramos el atlas de \mathbb{S}^2 formado por las proyecciones estereográficas que resultan de quitar los polos norte y sur, las funciones de transición son giros en \mathbb{S}^1 .

2.2. Fibrados principales

Los fibrados principales tienen aplicaciones importantes en topología y geometría diferencial. En física, tienen su uso en la teoría de Gauge (véase [Nab]). Los fibrados principales proporcionan un marco unificador en la teoría de los fibrados, en el sentido que todos los fibrados con grupo estructural G determinan un único G -fibrado principal desde el cuál puede ser reconstruido el fibrado original (véase [Ste]).

El objetivo principal de esta sección es presentar las herramientas necesarias para el estudio del fibrado de conexiones, fibrado de los 1-jets $J^1(P)$ y, por último, el teorema de reducción Euler-Poincaré en fibrados principales para un Lagrangiano G -invariante $L : J^1(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ (véase [CGR]).

Definición 2.2.1. Sea G un grupo de Lie. Un **fibrado principal suave** con grupo estructural G es un par (\mathcal{P}, T) , donde:

- (i) $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ es un G -fibrado suave.
- (ii) $T : P \times G \longrightarrow P$ es una acción a derecha de G sobre P ; esta será escrita como $T(z, a) = z \cdot a$, para cada $z \in P$ y $a \in G$.
- (iii) Para cada carta (U, φ) en el atlas \mathcal{A} del fibrado, se tiene

$$\varphi(x, a \cdot b) = \varphi(x, a) \cdot b, \quad x \in U, \quad a, b \in G.$$

Observaciones †† 2.2.2.

- La aplicación $\pi : P \longrightarrow M$ es sobreyectiva y abierta.

- La acción T es llamada **acción principal**. Por la condición (iii) tenemos que

$$\pi(z \cdot a) = \pi(z), \quad z \in P, \quad a \in G.$$

Por tanto, la acción T es libre y las órbitas de la G -acción son precisamente las fibras $G_x = \pi^{-1}(x)$ del fibrado ($x \in M$). En particular, las órbitas son subvariedades de P . Nótese que la aplicación $G_x \mapsto x$ define una biyección entre el espacio de órbitas P/G y la variedad suave M (véase [GHV]).

Definición 2.2.3. Un **morfismo** de fibrados principales $\pi : P \rightarrow M$, $\pi' : P' \rightarrow M'$ con grupos G, G' es una aplicación diferenciable $\Phi : P \rightarrow P'$ y un homomorfismo de grupos de Lie $\gamma : G \rightarrow G'$ tales que:

$$\Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot \gamma(g), \quad \forall u \in P, \quad g \in G.$$

Proposición 2.2.4. Dado un morfismo de fibrados principales $\Phi : P \rightarrow P'$ existe una única aplicación diferenciable $\varphi : M \rightarrow M'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} \quad (2.1)$$

[Dem.] **Unicidad.** Sean $\varphi, \varphi' : M \rightarrow M'$ dos aplicaciones diferenciables que hacen conmutativo el diagrama (2.1), esto es,

$$\varphi \circ \pi = \varphi' \circ \Phi, \quad \text{y} \quad \pi' \circ \Phi = \varphi' \circ \pi.$$

Por ser π sobreyectiva, para cada $x \in M$ existe un $u \in P$, con $\pi(u) = x$. Por tanto,

$$\varphi(x) = \varphi(\pi(u)) = \varphi'(\Phi(u)) = \varphi'(\pi(u)) = \varphi'(x).$$

Existencia. Para probar la existencia de φ , bastará demostrar que si $u, v \in P$ son puntos de la fibra de $x \in M$, se tiene $\pi'(\Phi(u)) = \pi'(\Phi(v))$. En efecto, como u y v pertenecen a la misma fibra, y las fibras coinciden con las órbitas (Observación 2.2.2), existe un $g \in G$ tal que $v = u \cdot g$, de donde

$$\pi'(\Phi(v)) = \pi'(\Phi(u \cdot g)) = \pi'(\Phi(u) \cdot \gamma(g)) = \pi'(\Phi(u)).$$

La conmutatividad y diferenciabilidad de φ se deducen de la propiedad característica de las submersiones sobreyectivas; esto es, una aplicación $\varphi : M \rightarrow M'$ es continua (resp. diferenciable) si y sólo si la composición $\varphi \circ \pi$ lo es. \square

Definición 2.2.5. Un **automorfismo** de un fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ es un difeomorfismo $\Phi : P \rightarrow P$ que conmuta con la acción del grupo G , es decir, $\Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot g$ con $u \in P$ (de otro modo $\Phi \circ R_g = R_g \circ \Phi$).

Observaciones ++ 2.2.6.

- El conjunto de todos los automorfismos de un fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ tiene estructura de grupo bajo la composición de funciones y se le denota por $\text{Aut}(P)$.
- Los $\Phi \in \text{Aut}(P)$ que proyectan sobre la identidad en M , es decir, $\varphi = \text{Id}_M$ (véase el diagrama (2.1)), son llamados **automorfismos verticales** o **transformaciones Gauge**. El conjunto de transformaciones Gauge es un subgrupo de $\text{Aut}(P)$, que se denota por $\text{Gau}(P)$.

Definición 2.2.7. Se llama **fibrado trivial** de base M y grupo G al fibrado principal

formado por la proyección $\pi_1 : M \times G \longrightarrow M$, la acción de G sobre $(M \times G)$ está dada por $(x, g) \cdot g' = (x, g \cdot g')$, para cada $x \in M$, y cada $g, g' \in G$.

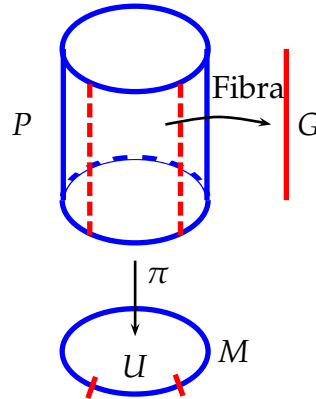


Figura 2.6: Fibrado trivial, $P = M \times G$

Un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ se dice que es **trivializable**, si existe un isomorfismo de G -fibrados principales sobre M con el fibrado trivial. Es decir, existe un difeomorfismo $\Phi : P \longrightarrow M \times G$ tal que:

$$\pi_1 \circ \Phi = \pi \quad \text{y} \quad \Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot g, \quad \forall u \in P, \forall g \in G.$$

Proposición 2.2.8. *Si un fibrado trivial $\pi : P \longrightarrow M$ admite una sección global, esto es, existe $s : M \longrightarrow P$ diferenciable tal que $\pi \circ s = \text{Id}_M$, entonces se verifica que es trivializable.*

Para la demostración véase [Mor, pág. 237].

Corolario 2.2.9. *Todo fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ es localmente trivial, es decir, para cada $x \in M$ existe un entorno abierto U tal que $\pi^{-1}(U)$ es trivializable.*

Proposición 2.2.10. *El conjunto de automorfismos de G -fibrados principales del fibrado trivial $M \times G$ está en biyección con el conjunto $\text{Diff}(M) \times C^\infty(M, G)$, donde $\text{Diff}(M)$*

es el conjunto de todos los difeomorfismos M en sí mismo. Igualmente, el subgrupo de transformaciones Gauge está en biyección con $C^\infty(M, G)$.

[Dem.] Sea $\Phi : M \times G \longrightarrow M \times G$ un automorfismo de un fibrado $\pi : M \times G \rightarrow M$ con $\varphi : M \longrightarrow M$ su proyección a la base, es decir, el difeomorfismo de M asociado a Φ definido en la Proposición 2.2.4. Tomemos ahora un punto $(x, g) \in M \times G$ cualquiera, y calculemos su imagen

$$\Phi(x, g) = \Phi((x, e) \cdot g) = \Phi(x, e) \cdot g = (\varphi(x), \phi(x)) \cdot g = (\varphi(x), \phi(x) \cdot g). \quad (2.2)$$

donde hemos definido la aplicación $\phi : M \longrightarrow G$ como $\phi(x) = \pi_2(\Phi(x, e))$. Cada automorfismo determina entonces un par de aplicaciones diferenciables φ y ϕ que verifican la expresión (2.2).

Recíprocamente, si tenemos un difeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$ y una aplicación diferenciable $\phi : M \longrightarrow G$ cualesquiera, construimos $\Phi : M \times G \longrightarrow M \times G$ un automorfismo, con $\Phi(x, g) = (\varphi(x), \phi(x) \cdot g)$. \square

2.3. Campos G -invariantes y fundamentales

En esta sección daremos la definición de campos que son invariantes por traslaciones a derecha, a partir de aquí se definen dos álgebras de Lie, el álgebra de los automorfismos infinitesimales $\text{aut}(P)$, y el álgebra de Lie de los grupos Gauge $\text{gau}(P)$. Los campos fundamentales se identifican con los elementos del fibrado vertical de manera biunívoca.

Definición 2.3.1. Dado un difeomorfismo entre variedades $\varphi : M \longrightarrow M'$, para

cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se designa por $\varphi \cdot X$ al campo vectorial de M' definido por:

$$(\varphi \cdot X)_{x'} = \varphi_*(X_{\varphi^{-1}(x')}), \quad \forall x' \in M'.$$

De este modo se tiene un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M')$, dado por, $X \longmapsto \varphi \cdot X$. Esto es,

- $\varphi \cdot (\lambda X, \mu Y) = \lambda(\varphi \cdot X) + \mu(\varphi \cdot Y), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$
- $\varphi \cdot [X, Y] = [\varphi \cdot X, \varphi \cdot Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

Si $\psi : M' \longrightarrow M''$ es otro difeomorfismo, se tiene $(\psi \circ \varphi) \cdot X = (\psi \cdot (\varphi \cdot X))$. En particular, $\text{Diff}(M)$ actúa sobre $\mathfrak{X}(M)$.

Definición 2.3.2. Dado un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ de grupo estructural G , se dice que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(P)$ es **G -invariante** si $(R_g)_*(X) = X, \forall g \in G$.

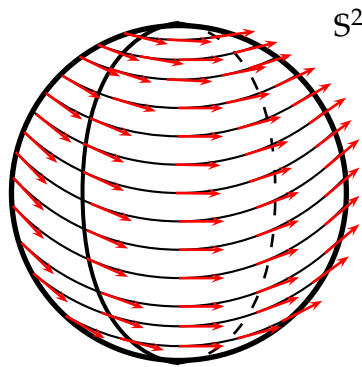


Figura 2.7: Campo G -invariante sobre la esfera S^2

Si Φ_t es el flujo de un campo X , entonces X es G -invariante si y solamente si para cada $t \in \mathbb{R}$ y $g \in G$ vale $\Phi_t \circ R_g = R_g \circ \Phi_t$. Esta es la razón por lo que los campos G -invariantes son llamados también **automorfismos infinitesimales** del fibrado principal.

Definición 2.3.3. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal de grupo G . Se denota por $\text{aut}(P)$ al álgebra de Lie de $\text{Aut}(P)$, es decir,

$$\text{aut}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid (R_g)_*(X) = X, \forall g \in G\}$$

y denotamos por $\text{gau}(P)$ al álgebra de Lie de $\text{Gau}(P)$, es decir,

$$\text{gau}(P) = \{X \in \text{aut}(P) \mid \pi_*(X) = 0\}$$

Un campo vectorial $X \in \text{gau}(P)$, es llamado **campo de Gauge** o **transformación Gauge infinitesimal**.

Definición 2.3.4. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal de grupo G . El subfibrado $V(P) = \{X \in T(P) \mid \pi_*(X) = 0\}$ de vectores tangentes a la fibra de P es llamado **fibrado vertical de P** . Para cada $u \in \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, se tiene una sucesión exacta de espacios vectoriales,

$$0 \longrightarrow T_u(\pi^{-1}(x)) = V_u(P) \longrightarrow T_u(P) \xrightarrow{\pi_*} T_x(M) \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

Definición 2.3.5. Dado un elemento $B \in \mathfrak{g}$ se define el **campo fundamental** $B^* \in \mathfrak{X}(P)$, como el campo que tiene el siguiente flujo:

$$\Phi_t^B(u) = R_{\exp(tB)}(u) = u \cdot \exp(tB).$$

Proposición 2.3.6. Se verifican las siguientes propiedades:

- (a) Los campos B^* son π -verticales.
- (b) La aplicación $*$: $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ es un monomorfismo de álgebras de Lie.
- (c) $(R_g)_*(B_u^*) = (\text{Ad}_{g^{-1}}B)_{u \cdot g}^*$ para cada $u \in P$ y $g \in G$.

(d) Para cada $u \in P$, la aplicación $*$: $\mathfrak{g} \longrightarrow V_u(P)$, $B \longmapsto B_u^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. De hecho, el fibrado $V(P)$ es isomorfo al fibrado trivial $P \times \mathfrak{g}$ por la aplicación $(u, B) \longmapsto B_u^*$.

Para la demostración véase [KN, I.§5].

Definición 2.3.7. En el fibrado trivial $\pi : P = M \times G \longrightarrow M$, para cada $B \in \mathfrak{g}$, se define el campo fundamental \tilde{B} como aquél que tiene el siguiente flujo:

$$\Psi_t^B(x, g) = L_{\exp(tB)}(x, g) = (x, \exp(tB) \cdot g) \quad (2.4)$$

Proposición 2.3.8. Si $P = M \times G$, se tienen las siguientes propiedades:

- (a) Los campos \tilde{B} son campos Gauge.
- (b) Para cada $u \in P$, la aplicación $\tilde{u} : \mathfrak{g} \longrightarrow V_u(P)$, $B \longmapsto \tilde{B}_u$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

[Dem.]

- (a) Los campos \tilde{B} son campos verticales. Sea $u = (x, g) \in P$ cualquiera. Entonces

$$\pi_*(\tilde{B}_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\pi(x, \exp(tB)g) \right) = 0$$

Además su flujo Ψ_t^B conmuta con R_g , para cualquier $g \in G$, así $\tilde{B} \in \text{gau}(P)$.

- (b) Para cada $u = (x, g) \in P$, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} V_u(P) &= \{(X, B) \in T_x(M) \times T_g(G) \mid \pi_*(X, B) = 0\} \\ &= \{(X, B) \in T_x(M) \times T_g(G) \mid X = 0\} \\ &= \{(0, B) \in T_x(M) \times T_g(G) \mid B \in T_g(G)\} \simeq T_g(G) \end{aligned}$$

Por tanto $V_u(P) \simeq T_g(G)$ y como $T_g(G) \simeq \mathfrak{g}$ mediante la aplicación $(R_{g^{-1}})_*$, se tiene $V_u(P) \simeq \mathfrak{g}$. □

2.4. Fibrados asociados $\text{Ad}(P)$ y adjuntos $\text{ad}(P)$

Dado un fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ de grupo estructural G , podemos construir un nuevo tipo de estructuras llamados **fibrados asociados**. Sólo necesitamos incluir una variedad suave F , en la cual actúe el grupo de Lie G . En esta sección, mostraremos, como punto principal, la identificación entre las secciones del fibrado asociado $\text{Ad}(P)$ y el grupo de Lie $\text{Gau}(P)$. Además de la correspondencia entre el álgebra de Lie de campos de Gauge $\text{gau}(P)$ y el conjunto de secciones $\Gamma(M, \text{ad}(P))$.

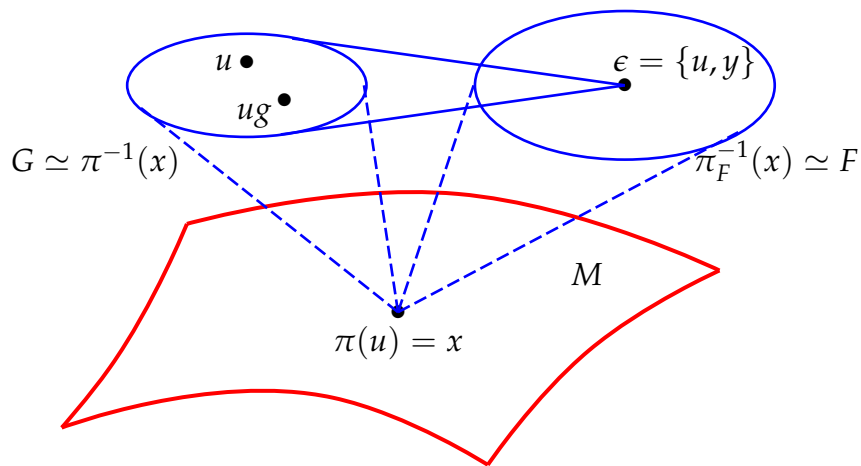


Figura 2.8: Interpretación gráfica del fibrado asociado $\pi_F : P \times^G F \rightarrow M$

Definición 2.4.1. Sea $\pi : P \rightarrow M$ un fibrado principal de grupo estructural G . Supongamos que se tiene una acción por la izquierda, $(g, y) \mapsto g \star y$ de G por difeomorfismos en una variedad F . Entonces G actúa por la derecha en el espacio

$P \times F$ de la siguiente manera: $(u, y) \cdot g = (u \cdot g, g^{-1} \star y)$, para cada $u \in P, y \in F$ y $g \in G$. El cociente de esta acción es un espacio fibrado sobre M

$$\pi_F : P \times^G F \longrightarrow M$$

con $\pi_F(\{u, y\}) = \pi(u)$ en donde $\{, \}$ denota la clase de equivalencia. Este fibrado es llamado **fibrado asociado** a P por la acción \star de G sobre F .

Ejemplo 2.4.2. Un ejemplo sencillo de fibrado asociado es la cinta de Möbius, para la cual $G = \mathbb{Z}^2$ es el grupo cíclico de orden 2 (véase Ejemplo 2.1.8).

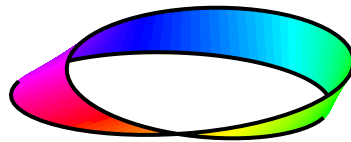


Figura 2.9: Banda de Möbius

Proposición 2.4.3. Las secciones de un fibrado asociado $\pi_F : P \times^G F \longrightarrow M$ están en correspondencia biunívoca con el conjunto de aplicaciones diferenciales $\tilde{s} : P \longrightarrow F$ que son G -invariantes, es decir, $\tilde{s}(u \cdot g) = g^{-1} \star \tilde{s}(u)$.

Para la demostración véase [Mic1, pág. 51].

Definición 2.4.4. La acción de G sobre sí mismo a través de la aplicación conjugación $C_g : G \longrightarrow G$, dada por $C_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$, define el fibrado asociado $\pi_G : P \times^G G \longrightarrow M$, se denota por $\text{Ad}(P)$.

Las fibras del fibrado asociado $\pi_G : \text{Ad}(P) \longrightarrow M$ poseen estructura de grupo de Lie isomorfo a G con la operación: $\{u, y\} \cdot \{u, y'\} = \{u, y \cdot y'\}$, de modo que π_G

es un fibrado en grupos de Lie. Como consecuencia, el conjunto $\Gamma(M, \text{Ad}(P))$ de secciones de π_G tiene estructura de grupo con la operación

$$(s \cdot s')(x) = s(x) \cdot s'(x) \quad \forall x \in M. \quad (2.5)$$

Proposición 2.4.5. *El conjunto $\text{Gau}(P)$ de transformaciones Gauge está en biyección natural con el conjunto $\Gamma(M, \text{Ad}(P))$ de secciones del fibrado $\text{Ad}(P)$. Con la estructura de grupo de $\Gamma(M, \text{Ad}(P))$ definida en (2.5) y la estructura del grupo de $\text{Gau}(P)$ como grupo de transformaciones, dicha biyección es un isomorfismo de grupos.*

[Dem.] Sea $\Phi : P \longrightarrow P$ una transformación Gauge, esto es, $\pi(\Phi(u)) = \pi(u)$, para $u \in P$. Entonces $\Phi(u)$ y u pertenecen a $\pi^{-1}(\pi(u))$; por la Definición 2.2.1, existe un único $g_u \in G$, tal que $\Phi(u) = u \cdot g_u$. Definimos $\hat{\Phi} : P \longrightarrow G$ como $\hat{\Phi}(u) = g_u$. Por ser Φ equivariante, tenemos $\Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot g$, así,

$$u \cdot g \cdot \hat{\Phi}(u \cdot g) = u \cdot \hat{\Phi}(u) \cdot g \Rightarrow \hat{\Phi}(u \cdot g) = g^{-1} \cdot \hat{\Phi}(u) \cdot g = C_{g^{-1}}(\hat{\Phi}(u))$$

Luego, $\hat{\Phi} \in C^\infty(P, G)$ es equivariante.

A su vez, la expresión

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi)(u) &= \Phi(\Psi(u)) = \Phi(u \cdot \hat{\Psi}(u)) = \Phi(u) \cdot \hat{\Psi}(u) \\ &= u \cdot \hat{\Phi}(u) \hat{\Psi}(u) = u \cdot (\hat{\Phi} \cdot \hat{\Psi})(u) \end{aligned}$$

asegura que la correspondencia $\text{Gau}(P) \simeq \Gamma(M, \text{Ad}(P))$ es un morfismo de grupos.

Viceversa, por la Proposición 2.4.3, el conjunto $\Gamma(M, \text{Ad}(P))$ está en biyección con las aplicaciones equivariantes $C^\infty(P, G)$. Dada $\hat{\Phi} : P \longrightarrow G$ equivariante, defi-

nimos $\Phi : P \longrightarrow P$ como

$$\Phi(u) = u \cdot \hat{\Phi}(u). \quad (2.6)$$

Además $\pi(\Phi(u \cdot g)) = \pi(u \cdot g \cdot \hat{\Phi}(u \cdot g)) = \pi(u)$ para $u \in P, g \in G$. Esto implica que Φ es una transformación Gauge. \square

Definición 2.4.6. La acción de G sobre su álgebra \mathfrak{g} a través de la aplicación adjunta $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, define el fibrado asociado $\pi_{\mathfrak{g}} : P \times^G \mathfrak{g} \longrightarrow M$, llamado **fibrado adjunto** y se denota por $\text{ad}(P)$.

Observación ++ 2.4.7. Si $(u, B) \in P \times \mathfrak{g}$, entonces su clase de equivalencia es

$$\{u, B\}_{\text{ad}} = \{(u \cdot g, \text{Ad}_{g^{-1}}(B)) \mid g \in G\} \in \text{ad}(P)$$

El fibrado adjunto es un fibrado vectorial de fibra \mathfrak{g} . Veamos como son las coordenadas de $\text{ad}(P)$. Primero fijamos una base de \mathfrak{g} , $\{B_1, \dots, B_m\}$ y consideramos una trivialización local $(U \times G)$ del fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$. Podemos identificar $U \times \mathfrak{g} \simeq \text{ad}(P)|_U$, mediante la aplicación

$$(x, A) \longmapsto \{(x, e), A\}_{\text{ad}}$$

Así las coordenadas en $\text{ad}(P)|_U$ son (x_i, A_i^α) con $A = \sum A_i^\alpha B_\alpha$.

Proposición 2.4.8. El conjunto $\text{gau}(P)$ de campos Gauge está en biyección natural con el conjunto $\Gamma(M, \text{ad}(P))$ de secciones del fibrado $\text{ad}(P)$.

[Dem.] Por la Proposición 2.3.6-(d), tenemos que, para cada $u \in P$, la aplicación ${}^*_u : \mathfrak{g} \longrightarrow V_u(P)$ es un isomorfismo. Si X es un campo Gauge, tenemos $\pi_*(X) = 0$.

Por tanto, $X_u \in V_u(P)$. Se define $\hat{\chi} : P \longrightarrow \mathfrak{g}$ como la única aplicación que satisface $X_u = (\hat{\chi}(u))_u^*$. Además

$$(\text{Ad}_{g^{-1}}(\hat{\chi}(u))_{ug}^*) = (R_g)_*(X_u) = (\hat{\chi}(ug))_{ug}^*.$$

Así, $\hat{\chi}(ug) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\hat{\chi}(u))$ es equivariante.

Viceversa, por la Proposición 2.4.3, el conjunto $\Gamma(M, \text{ad}(P))$ está en biyección con el conjunto de funciones $\hat{\chi} : P \longrightarrow \mathfrak{g}$ tales que

$$\hat{\chi}(u \cdot g) = \text{Ad}_{g^{-1}}\hat{\chi}(u). \quad (2.7)$$

Dada una aplicación equivariante $\hat{\chi}$, definimos el campo X como

$$X_u = (\hat{\chi}(u))_u^*. \quad (2.8)$$

Además, $(R_g)_*(X_u) = (R_g)_*(\hat{\chi}(u))_u^* = (\text{Ad}_{g^{-1}}\hat{\chi}(u))_{ug}^* = (\hat{\chi}(ug))_{ug}^* = X_{ug}$. Esto se obtiene a partir de la Proposición 2.3.6-(c) y la ecuación (2.7). Así X es un campo Gauge. □

Capítulo 3

Geometría del fibrado de conexiones y fibrado de los 1-jets $J^1(P)$

Muchas de las construcciones descritas en los capítulos anteriores serán usadas para presentar las nociones básicas del fibrado de conexiones $C(P)$ y fibrados jets $J^1(P)$, que se requieren para el estudio del teorema de reducción Euler-Poincaré en fibrados principales. Este capítulo tiene como objetivo principal mostrar la identificación que existe entre el espacio cociente $(J^1(P))/G$ y el fibrado de conexiones $C(P)$.

Las conexiones sobre fibrados principales juegan un papel fundamental expresando las ecuaciones de movimientos para sistemas mecánicos con simetría, de una manera intrínseca. Los fibrados jets fueron concebidos como construcciones matemáticas donde es posible escribir ecuaciones diferenciables sobre las secciones de un fibrado de modo invariante. El concepto de **fibrado jet** fue introducido por Ehresmann (véase [Ehr]). Más recientemente, los fibrados jets han resultado

ser de gran interés en el cálculo de variaciones (véase [KMS], [Sau]).

3.1. Conexiones principales

En esta sección se muestran las tres definiciones de conexión sobre un fibrado principal más comunes, además las equivalencias entre ellas.

Definición 3.1.1. (I) Una **conexión** en un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales $\Gamma : T(P) \longrightarrow V(P)$ tal que:

- Γ es un retracto de la inclusión, es decir, $\Gamma|_{V(P)} = \text{Id}_{V(P)}$.
- Γ es compatible con la acción del grupo G , esto es,

$$\Gamma \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ \Gamma, \quad \forall g \in G.$$

Definición 3.1.2. (II) Una **conexión** en un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ es una distribución \mathcal{H} (llamada parte horizontal), suplementaria a la distribución vertical V e invariante por la acción del grupo G en P . Es decir,

$$(i) \quad T_u(P) = \mathcal{H}_u \oplus V_u(P), \quad \forall u \in P$$

$$(ii) \quad (R_g)_*(\mathcal{H}_u) = \mathcal{H}_{u \cdot g}, \quad \forall u \in P, \forall g \in G$$

Para cada campo vectorial X sobre P , por la condición (i), se tiene en cada punto una descomposición

$$X_u = X_u^h + X_u^v \in \mathcal{H}_u \oplus V_u(P), \quad u \in P.$$

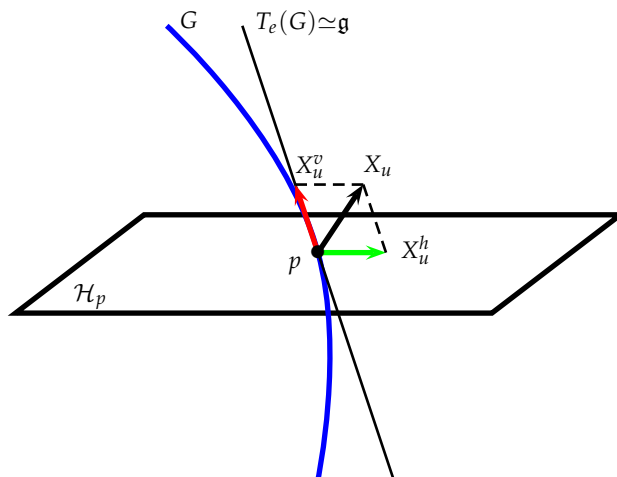


Figura 3.1: Descomposición de un vector $X_u \in T_u(P)$

Definición 3.1.3. (III) Una **conexión** en un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ es una 1-forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ que satisface:

- Para cada $B \in \mathfrak{g}$ y $u \in P$, se tiene que $\omega(B_u^*) = B$, donde B_u^* es el campo fundamental de B (véase la Definición 2.3.5).
- $(R_g)^*\omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$, para todo $g \in G$.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos el fibrado trivial $P = M \times G$, $\pi : P \longrightarrow M$ la proyección sobre el primer factor. Definimos $\omega_{MC} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ como sigue:

$$(\omega_{MC})_u = (L_{g^{-1}} \circ \pi_2)_*, \quad \text{con } u = (x, g) \in M \times G \quad (3.1)$$

donde $\pi_2 : P \longrightarrow G$ es la proyección sobre el segundo factor y $L_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ es la translación a izquierda por g^{-1} . Mostraremos que $\omega_{MC} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, esto es, que ω_{MC} es diferenciable. Nótese que $\omega_{MC} = \pi_2^* \omega_0$, donde $\omega_0 \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ está definido por

$$(\omega_0)_g = (L_{g^{-1}})_*. \quad (3.2)$$

Es suficiente mostrar que ω_0 es diferenciable. Si $X \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ y $\tilde{X} \in T_g(G)$ es el correspondiente campo invariante a izquierda entonces $\omega_0(\tilde{X}) = X$ es constante y así diferenciable. Como cada campo vectorial Y sobre G es combinación lineal de campos invariantes a izquierda con coeficiente diferenciable se sigue que $\omega_0(Y)$ es diferenciable. Además,

- Si $\nu_u : \mathfrak{g} \rightarrow V_u(P)$ es la aplicación definida en la Proposición 2.3.6-(d), se tiene que $(\omega_{MC})_u \circ \nu_u = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$.
- $R_g^* \omega_{MC} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_{MC}$, para todo $g \in G$.

La 1-forma ω_0 sobre G es llamada la **forma de Maurer-Cartan** (véase [Sha, 3.§1]).

En particular, para $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ la forma de Maurer-Cartan es

$$\omega_0 = g^{-1} dg, \quad g \in G.$$

Ejemplo 3.1.5. Sea $G = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el grupo de Lie de la esfera unitaria, con espacio tangente

$$T(\mathbb{S}^1) = \{(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) \mid r, \theta \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1.$$

Sea $\mathfrak{g} = T_e(\mathbb{S}^1)$ el álgebra de Lie asociada al grupo \mathbb{S}^1 . Consideremos una acción a izquierda de \mathbb{S}^1 sobre $T(\mathbb{S}^1)$:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{S}^1 \times T(\mathbb{S}^1) &\rightarrow T(\mathbb{S}^1) \\ (e^{i\varphi}, (e^{i\theta}, ire^{i\theta})) &\xrightarrow{\mu} (e^{i(\varphi+\theta)}, ire^{i(\varphi+\theta)}) \end{aligned}$$

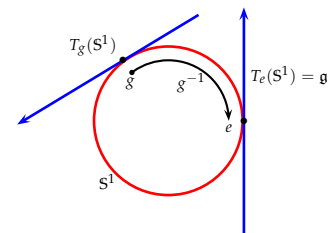


Figura 3.2: Forma de Maurer-Cartan en $G = \mathbb{S}^1$

Luego $\mathcal{E} = (T(\mathbb{S}^1), \pi, \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es un fibrado trivial suave con $\pi : T(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la proyección. La forma de Maurer-Cartan $(\omega_{MC})_u : T_u(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathfrak{g}$, con $u = (r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, está dada por:

$$(\omega_{MC})_u(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) = (L_{e^{-i\theta}})_*(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) = (1, ir)$$

Lema 3.1.6. *Las definiciones (I), (II) y (III) son equivalentes.*

[Dem.] Primero demostraremos (I) \Leftrightarrow (II).

(I) \Rightarrow (II) Dada una conexión como en la Definición I, defino $\mathcal{H}_u = \text{Ker}(\Gamma_u)$, entonces la distribución \mathcal{H} verifica las propiedades de la Definición II. En efecto:

El homomorfismo inclusión $i_* : \mathcal{H}_u \longrightarrow T_u(P)$ y $\Gamma_u : T_u(P) \longrightarrow V_u(P)$ definen la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_u \xrightarrow{i_*} T_u(P) \xrightarrow{\Gamma_u} V_u(P) \longrightarrow 0$$

Además $\beta = \text{Id}_{V_u(P)}$ es una escisión de la sucesión, esto es, $\Gamma \circ \beta = \text{Id}_{V_u(P)}$. Por lo tanto, $T_u(P) = \mathcal{H}_u \oplus V_u(P)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (R_g)_*(\mathcal{H}_u) &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), \Gamma_u(X) = 0\} \\ &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), \Gamma_u((R_g)_*(X)) = (R_g)_*(\Gamma_u(X)) = 0\} \\ &= \{X \in T_{ug}(P) \mid \Gamma_u(X) = 0\} = \mathcal{H}_{ug} \end{aligned}$$

(II) \Rightarrow (I). Sea \mathcal{H} una conexión como en la Definición II. Para cada $u \in P$, se satisface $T_u(P) = \mathcal{H}_u \oplus V_u(P)$. Definimos $\Gamma_u : T_u(P) \longrightarrow V_u(P)$ como la proyección en el subespacio vertical. Además

- $\Gamma|_{V(P)} = \text{Id}_{V(P)}$.
- Dado $X = X^h + X^v \in T_u(P)$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_u \circ (R_g)_*)(X) &= \Gamma_u((R_g)_*(X^h + X^v)) \\
&= \Gamma_u((R_g)_*(X^h)) + \Gamma_u((R_g)_*(X^v)) = (R_g)_*(X^h) \\
&= (R_g)_*(\Gamma_u(X^h)) = (R_g)_*(\Gamma_u(X^h + X^v)) \\
&= ((R_g)_* \circ \Gamma_u)(X)
\end{aligned}$$

La aplicación Γ así definida cumple lo enunciado en la Definición I.

Ahora veamos que **(II)** \Leftrightarrow **(III)**.

(II) \Rightarrow **(III)**. Sea \mathcal{H} una conexión como en la Definición II. Se define $\omega : T(P) \rightarrow \mathfrak{g}$ por $\omega = (\pi_2)_* \circ \beta$, donde $(\pi_2)_* : T_u(P) \rightarrow V_u(P)$ es la proyección, y β es la inversa de la aplicación $*$: $\mathfrak{g} \rightarrow V_u(P)$ (Proposición 2.3.6-(d)). Así para cada vector $X = X^h + X^v$ en $T_u(P)$, tenemos $\omega(X) = B$, con $B_u^* = X^v$, $u \in P$.

La aplicación $\omega : T(P) \rightarrow \mathfrak{g}$ es lineal, puesto que $(\pi_2)_*$ y β son lineales. Además es G -invariante

$$\begin{aligned}
(R_g)^*\omega(X) &= \omega((R_g)_*(X^h + X^v)) = \omega((R_g)_*(X^h)) + \omega((R_g)_*(X^v)) \\
&= 0 + \omega((R_g)_*(X^v)) = \omega((\text{Ad}_{g^{-1}}(B))_{u_g}^*) = \text{Ad}_{g^{-1}}(B) \\
&= \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega(X)) = (\text{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega)(X)
\end{aligned}$$

Luego ω es una 1-forma de conexión como en la Definición III.

(III) \Rightarrow **(II)**. Sea ω una 1-forma como en la Definición III. Para cada $u \in P$ defini-

mos el conjunto

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(\omega) = \{X \in T(P) \mid \omega(X) = 0\}$$

Es una distribución: $\mathcal{H}_u = \{X_u \in T_u(P) \mid \omega(X_u) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $T_u(P)$.

Complementaria a la vertical: si $X \in V_u(P)$, con $X = B_u^*$ para algún $B \in \mathfrak{g}$, entonces $\omega(X) = B$, por tanto

$$\mathcal{H}_u \cap V_u(P) = 0.$$

Además $X^h = X - (\omega(X))_u^*$.

Finalmente, es G -invariante:

$$\begin{aligned} (R_g)_*(\mathcal{H}_u) &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), \omega(X) = 0\} \\ &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega(X)) = 0\} \\ &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), (R_g)_*(\omega(X)) = 0\} \\ &= \{(R_g)_*(X) \mid X \in T_u(P), \omega((R_g)_*(X)) = 0\} \\ &= \{X \in T_{ug}(P) \mid \omega(X) = 0\} = \mathcal{H}_{ug}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.7. *Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal con conexión. Entonces cada automorfismo de P induce una conexión.*

[Dem.] Sean $\pi : P \longrightarrow M$ un G -fibrado principal con una conexión \mathcal{H} y Φ un elemento de $\text{Aut}(P)$. Para cada $u \in P$, $\Phi(\mathcal{H})_{\Phi(u)} := \Phi_*(\mathcal{H}_u)$ es una conexión en P .

En efecto:

- Es complementaria a la distribución vertical:

$$\begin{aligned}\pi_*(\Phi(\mathcal{H})_{\Phi(u)}) &= (\pi \circ \Phi)_*(\mathcal{H}_u) = (\varphi \circ \pi)_*(\mathcal{H}_u) \\ &= \varphi_*(\pi_*(\mathcal{H}_u)) \neq 0 \quad \text{en vista de que } \pi_*(\mathcal{H}_u) \neq 0.\end{aligned}$$

- Es G -invariante: si $g \in G$

$$\begin{aligned}(R_g)_*(\Phi(\mathcal{H})_u) &= (R_g \circ \Phi)_*(\mathcal{H}_{\Phi^{-1}(u)}) = (\Phi \circ R_g)_*(\mathcal{H}_{\Phi^{-1}(u)}) \\ &= \Phi_*((R_g)_*(\mathcal{H}_{\Phi^{-1}(u)})) = \Phi_*(\mathcal{H}_{\Phi^{-1}(u)g}) \\ &= \Phi_*(\mathcal{H}_{\Phi^{-1}(ug)}) = \Phi(\mathcal{H})_{ug}.\end{aligned}$$

□

Una conexión en un fibrado principal define una noción de horizontabilidad, de modo que se pueden “subir” horizontalmente vectores.

Proposición 3.1.8. *Sea $\pi : P \rightarrow M$ un fibrado principal con conexión. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe un único $\bar{X} \in \mathfrak{X}(P)$ horizontal tal que $\pi_*(\bar{X}) = X$. Además, el campo \bar{X} es G -invariante, esto es, $(R_g)_*(\bar{X}) = \bar{X}$.*

[Dem.] Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tomamos $u \in P$ y $(U \times G, \varphi)$ una trivialización local en un entorno de u , tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

Consideremos el campo (X, B) de $U \times G$. El campo $\varphi_*^{-1}(X, B) \in \mathfrak{X}(P)$ es horizontal si y sólo si $B = -\omega(\varphi_*^{-1}(X, 0))$.

En efecto,

$$\omega(\varphi_*^{-1}(X, B)) = \omega(\varphi_*^{-1}(X, 0)) + \omega(\varphi_*^{-1}(0, B)) = \omega(\varphi_*^{-1}(X, 0)) + B$$

la última igualdad viene de $\varphi_*(B_u^*) = (0, B)_{(x, g)}$, $\forall p \in P$ con $\varphi(u) = (x, g)$;

$$\varphi_*(B_u^*) = \varphi_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (u \cdot \exp(tB))\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(u \cdot \exp(tB)) = (0, B)_{(x, g)}$$

El campo buscado es $\bar{X} = \varphi_*^{-1}(X, -\omega(\varphi_*^{-1}(X, 0)))$.

A $\bar{X} \in \mathfrak{X}(P)$ se le llama **levantamiento horizontal** o **elevación** de $X \in \mathfrak{X}(M)$. \square

3.2. La sucesión de Atiyah

Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un G -fibrado principal. La acción de G sobre P define de manera natural una acción por la derecha sobre $T(P)$ como

$$(X_u, g) \longmapsto (R_g)_*(X_u),$$

para cada $X_u \in T_u(P)$, $u \in P$, y $g \in G$. El cociente $T_G(P) = T(P)/G$ existe como variedad diferenciable fibrada sobre M a través de la proyección

$$\pi_G(\{X_u\}) = \pi_*(X_u),$$

donde $\{X_u\}$ representa la clase de equivalencia de X_u . El subfibrado $V(P) \xrightarrow{i} T(P)$ queda invariante por la acción definida en $T(P)$ y su cociente $V_G(P)$ vuelve a ser una variedad diferenciable.

Proposición 3.2.1. *Sea $\pi : P \longrightarrow M$ fibrado principal. Se tiene la siguiente sucesión exacta corta de fibrados vectoriales sobre M*

$$0 \longrightarrow V_G(P) \xrightarrow{i_G} T_G(P) \xrightarrow{\pi_G} T(M) \longrightarrow 0. \quad (3.3)$$

A esta sucesión se le conoce como **sucesión de Atiyah**.

Proposición 3.2.2. La aplicación $\zeta : \text{ad}(P) \longrightarrow V_G(P)$, dada por $\zeta(\{(u, B)\}_{\text{ad}}) = \{B_u^*\}$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre M .

[Dem.] • La aplicación ζ está bien definida: sean $(u, B), (u', B') \in P \times \mathfrak{g}$ tales que $\{(u, B)\}_{\text{ad}} = \{(u', B')\}_{\text{ad}}$. Así, existe un $g \in G$ tal que $u' = u \cdot g$ y $B' = \text{Ad}_{g^{-1}}(B)$.

• Por la Proposición 2.3.6-(c), $(B')_{u'}^* = (\text{Ad}_{g^{-1}}B)_{u \cdot g}^*$ así $\{B_u^*\} = \{B_{u'}^*\}$. La biyectividad de ζ se obtiene del isomorfismo $P \times \mathfrak{g} \longrightarrow V(P)$ (Proposición 2.3.6). \square

Proposición 3.2.3. Las secciones globales del fibrado $T_G(P) \longrightarrow M$ se corresponden de modo natural y biunívoco con los campos G -invariantes de P , esto es

$$\Gamma(M, T_G(P)) \simeq \text{aut}(P). \quad (3.4)$$

Análogamente

$$\Gamma(M, V_G(P)) \simeq \text{gau}(P). \quad (3.5)$$

[Dem.] Sea $\{X_u\} \in T_G(P)$ una clase de equivalencia de X_u . Una sección global del fibrado $T_G(P) \longrightarrow M$ es una aplicación $\phi : M \longrightarrow T_G(P)$, que asigna a cada $x \in M$ un campo G -invariante X_u definido en todo P , con $u \in \pi^{-1}(x)$. Por tanto $\phi \in \Gamma(M, T_G(P))$ determina un elemento de $\text{aut}(P)$.

Viceversa, sea X_u un campo G -invariante de P , restringido a una fibra $\pi^{-1}(x)$, con $x \in M$, esto determina una clase $\{X_u\} \in (T_G(P))_x$. La aplicación definida por $\phi : M \longrightarrow T_G(P)$, dada por $x \longmapsto \phi(x) = \{X_u\}$, es una sección global de $T_G(P)$, esto es, $\pi_G(\phi(x)) = \pi_G(\{X_u\}) = \pi_*(X_u) = x$. Si se consideran vectores verticales, obtenemos el isomorfismo de la ecuación (3.5). \square

3.3. Fibrado de las conexiones

En esta sección se muestra la relación entre las conexiones sobre un G -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ con la sucesión de Atiyah. La colección de todas las escisiones de la sucesión de Atiyah, viene a ser un nuevo fibrado suave sobre M , llamado fibrado de las conexiones $C(P)$. Al fijar una conexión \mathcal{H} sobre un fibrado principal, obtendremos que $C(P) \simeq T^*(M) \otimes \text{ad}(P)$.

Proposición 3.3.1. *Existe una correspondencia biunívoca entre las escisiones de la sucesión de Atiyah:*

$$0 \longrightarrow V_G(P) \xrightarrow{i_G} T_G(P) \xrightarrow{\pi_G} T(M) \longrightarrow 0$$

y el conjunto de conexiones del fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$.

[Dem.] Sea Γ una conexión del fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ y sea

$$h : T_x(M) \longrightarrow T_u(P), \quad u \in \pi^{-1}(x), \quad x \in M$$

la elevación horizontal de vectores definida por Γ . Si $X \in T_x(M)$ es un vector tangente, el campo X_u^h , con $u \in \pi^{-1}(x)$, es G -invariante a lo largo de la fibra de x y por tanto determina un elemento $\{X_u^h\}$ de $(T_G(P))_x$. Se define la sección σ_Γ de π_G , como

$$\sigma_\Gamma : T(M) \longrightarrow T_G(P) \quad \text{por} \quad \sigma_\Gamma(X) = \{X_u^h\}$$

Viceversa, sea $\sigma_\Gamma : T(M) \longrightarrow T_G(P)$ una escisión de la sucesión de Atiyah. Dado un $X \in T_x(M)$, se define su elevación horizontal a $T_u(P)$, $u \in \pi^{-1}(x)$,

$$\begin{array}{ccc} & & X_u^h \in T_u(P) \\ & \nearrow h & \vdots \\ X \in T_x(M) & \xrightarrow{\sigma_\Gamma} & (T_G(P))_x \\ & & \downarrow \end{array}$$

como el único vector X_u^h cuya clase $\{X_u^h\}$ en $T_G(P)$ coincide con $\sigma_\Gamma(Y)$. La elevación $h : T_x(M) \longrightarrow T_u(P)$, $X \longmapsto X_u^h$, $u \in \pi^{-1}(x)$, proviene de la conexión que tiene como subespacio horizontal en $u \in P$ a $\mathcal{H}_u = (T_x(M))_u^h$, imagen de $T_x(M)$ por h . Al ser $\{X_u^h\}$ clases de vectores G -invariantes, \mathcal{H}_u es G -invariante. \square

Definición 3.3.2. Se define el **fibrado de las conexiones** del fibrado principal P sobre M como

$$p : C(P) \longrightarrow M, \quad \text{donde} \quad C(P) = \bigsqcup_{x \in M} (C(P))_x$$

como el subfibrado de $\text{Hom}(T(M), T_G(P))$ determinado por todas las aplicaciones \mathbb{R} -lineales $\Gamma_x : T_x(M) \longrightarrow (T_G(P))_x$, $x \in M$, tales que $\pi_G \circ \Gamma_x = \text{Id}_{T_x(M)}$.

Observación ++ 3.3.3. Como consecuencia de la Proposición 3.3.1 las secciones globales del fibrado de las conexiones $p : C(P) \longrightarrow M$ se identifican de forma natural con las conexiones de P .

Proposición 3.3.4. El fibrado $p : C(P) \longrightarrow M$ tiene estructura de fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial $\text{Hom}(T(M), \text{ad}(P)) \simeq T^*(M) \otimes \text{ad}(P)$.

[Dem.] Sean $\lambda, \mu \in (C(P))_x$ y consideremos $\lambda - \mu : T_x(M) \longrightarrow (T_G(P))_x$. Como $\pi_* \circ \lambda = \pi_* \circ \mu$, se tiene que $\text{Im}(\lambda - \mu) \subset (V_G(P))_x$, por la Proposición 3.2.2, tenemos $V_G(P) \simeq \text{ad}(P)$. Luego, $\lambda - \mu$ se puede ver como una forma en M con valores en $\text{ad}(P)$, esto es, $\lambda - \mu : T_x(M) \longrightarrow (\text{ad}(P))_x$ es lineal. Así, $(C(P))_x$ es un espacio afín modelado sobre el fibrado vectorial $T_x^*(M) \otimes (\text{ad}(P))_x$. \square

Proposición 3.3.5. Sea \mathcal{H} una conexión sobre el fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$. El fibrado de conexiones $C(P)$ es difeomorfo al fibrado vectorial $T^*(M) \otimes \text{ad}(P)$.

[Dem.] Sea $\sigma_\Gamma : M \longrightarrow C(P)$ la sección del fibrado de conexiones inducida por la conexión \mathcal{H} (Observación 3.3.3). Definimos la aplicación suave

$$\gamma^{\mathcal{H}} : C(P) \longrightarrow T^*(M) \otimes \text{ad}(P), \quad \text{por} \quad \gamma^{\mathcal{H}}(\Gamma_x) = \Gamma_x - \sigma_{\mathcal{H}}(x),$$

con $\Gamma_x \in (C(P))_x$. Veamos que esta aplicación es un difeomorfismo.

(i) $\gamma^{\mathcal{H}}$ es inyectiva: sean $\Gamma_x, \Gamma'_x \in (C(P))_x$,

$$\begin{aligned} \gamma^{\mathcal{H}}(\Gamma_x) = \gamma^{\mathcal{H}}(\Gamma'_x) &\Rightarrow \Gamma_x - \sigma(x) = \Gamma'_x - \sigma(x) \\ &\Rightarrow \Gamma_x = \Gamma'_x. \end{aligned}$$

(ii) $\gamma^{\mathcal{H}}$ es sobreyectiva: sea $\Gamma'_x \in T^*(M) \otimes \text{ad}(P)$. Definimos $\Gamma_x = \Gamma'_x + \sigma(x)$ como la aplicación $\Gamma_x : T_x(M) \longrightarrow (T_G(P))_x$. Como $\Gamma'_x : T_x(M) \longrightarrow \text{ad}(P)$, tenemos que $\pi_G \circ \Gamma'_x = 0$. Luego,

$$\pi_G \circ \Gamma_x = \pi_G \circ \Gamma'_x + \pi_G \circ \sigma(x) = 0 + \text{Id}_{T_x(M)} = \text{Id}_{T_x(M)},$$

así que $\Gamma_x \in (C(P))_x$. Además, $\gamma^{\mathcal{H}}(\Gamma_x) = \Gamma'_x$.

Por último, $\gamma^{\mathcal{H}}$ y su inversa $\gamma^{-\mathcal{H}} : T^*(M) \otimes \text{ad}(P) \longrightarrow C(P)$, $\Gamma'_x \longmapsto \Gamma'_x + \sigma(x)$ son aplicaciones suaves, por lo tanto, $\gamma^{\mathcal{H}}$ es un difeomorfismo. \square

Observación ++ 3.3.6. Dada otra sección $\sigma : M \longrightarrow C(P)$, escribiremos

$$\sigma^{\mathcal{H}} := \gamma^{\mathcal{H}} \circ \sigma : M \longrightarrow T^*(M) \otimes \text{ad}(P).$$

3.4. Fibrado de los 1-jets $J^1(P)$

La formulación moderna del Lagrangiano generalizado y la dinámica Hamiltoniana sobre fibrados está desarrollada en el lenguaje de espacios jets, o variedades jets

(véase [KMS], [Sau]). En términos generales, dadas dos variedades suaves M y N , y dos aplicaciones suaves $f, g : M \rightarrow N$ se dicen que determinan el mismo 1-jet en $x \in M$, si $f_* = g_*$ y $f(x) = g(x)$. El concepto de espacio jet está basado sobre la idea de orden de tangencia, en los puntos de una variedad (véase [Iva]).

Sea M una variedad, un vector tangente se puede ver como una clase de equivalencia de velocidades de curvas. Si consideramos el conjunto

$$S = \{\alpha \in C^1(I, M) \mid 0 \in I\}$$

y la relación de equivalencia dada por

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \begin{cases} \alpha_1(0) = \alpha_2(0) \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_1 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_2 \end{cases}$$

tenemos $v = [\alpha]$ con $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha = v$.

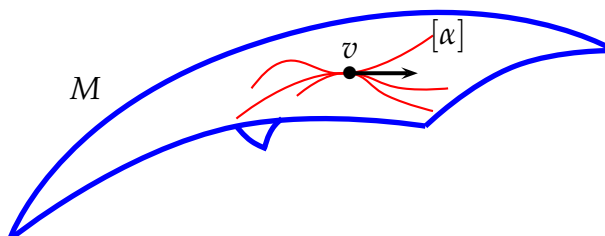


Figura 3.3: Interpretación de un vector como una clase de curvas.

Definición 3.4.1. Sea M una variedad m -dimensional, $k < m$ y $x \in M$; se define el **espacio de 1-jets en x de aplicaciones** $C^1(\mathbb{R}^k; M)$, denotado por $J_x^1(\mathbb{R}_0^k, M)$, como las clases de equivalencia de aplicaciones $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^k; M)$ con la relación

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \begin{cases} \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x \\ \frac{d}{dt_i} \Big|_{t_i=0} \alpha_1 = \frac{d}{dt_i} \Big|_{t_i=0} \alpha_2 \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.2. Si $k = 1$, tenemos $J_x^1(\mathbb{R}_0, M) = T_x(M)$ y en el caso $k = 2$, $J_x^1(\mathbb{R}_0^2, M)$ es la colección de subespacios de dimensión 2 de $T_x(M)$.

Definición 3.4.3. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal, con $\dim(P) = m + n$ y $\dim(M) = m$. Sea $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ un sistema coordenado sobre un conjunto abierto $U \subset P$. El sistema coordenado (U, ψ) es llamado un **sistema coordenado adaptado** si, para todo $a, b \in U$ con $\pi(a) = \pi(b) = p$, se tiene $\pi_1(\psi(a)) = \pi_1(\psi(b))$, donde la aplicación $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es la proyección sobre el primer factor.

Observaciones ++ 3.4.4.

- El significado de esta definición es que puntos en la misma fibra $\pi^{-1}(p) \cap U$ tienen sus primeras m coordenadas iguales, y distintas en las últimas n coordenadas.
- Dado un sistema coordenado adaptado (U, ψ) , escribiremos $\psi = (x^i, \psi^\alpha)$ donde $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ son las primeras m -funciones coordenadas, y ψ^α las n -funciones coordenadas siguientes.

Definición 3.4.5. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado. Se dice que dos secciones locales s, s' definidas en un entorno de un punto $x \in M$ tienen el mismo 1-jet (se denotará por $j_x^1 s' = j_x^1 s$) si $s(x) = s'(x)$, y $s_*(X) = s'_*(X)$, para todo $X \in T_x(M)$. El espacio de clases de esta relación de equivalencia es $J^1(P)$. Esto es,

$$J^1(P) = \bigsqcup_{u \in P} (J^1(P))_u, \quad \text{donde } (J^1(P))_u = \{j_x^1 s \mid s(x) = u\}.$$

Proposición 3.4.6. El conjunto $J^1(P)$ tiene estructura de variedad diferenciable fibrada sobre P , que denotaremos por $\pi_{10} : J^1(P) \longrightarrow P$, $\pi_{10}(j_x^1 s) = s(x)$.

Además, la composición

$$\pi \circ \pi_{10} : J^1(P) \longrightarrow M$$

vuelve a ser un fibrado, llamado **fibrado de los 1-jets de π** .

Para la demostración véase [Gar] y [Sau].

Observaciones ++ 3.4.7.

- Si (U, ψ) es un sistema coordenado adaptado sobre la variedad suave P , entonces un sistema coordenado inducido (U^1, ψ^1) sobre la variedad suave $J^1(P)$ está definido por

$$U^1 = \{j_x^1 s : s(x) \in U\}$$

$$\psi^1 = (x^i, \psi^\alpha, \psi_i^\alpha), \quad i = 1, \dots, m, \text{ y } \alpha = 1, \dots, n$$

donde

$$x^i(j_x^1 s) = x^i(x), \quad \psi^\alpha(j_x^1 s) = \psi^\alpha(s(x)), \quad \psi_i^\alpha(j_x^1 s) = \left. \frac{\partial(\psi_i^\alpha \circ s)}{\partial x^i} \right|_x$$

y son conocidas como **derivadas coordenadas**.

- La dimensión de la variedad suave $J^1(P)$ es $m + n + mn$ (véase [Sau, §4. 2]).

Ejemplo 3.4.8. Sea $\mathcal{E} = (M \times \mathbb{R}, \pi_1, M)$ el fibrado trivial, entonces existe un difeomorfismo entre la primera variedad jet $J^1(P)$ y $T^*(M) \times \mathbb{R}$.

Para contruir este difeomorfismo, comenzamos por considerar una sección local $s : W \longrightarrow \mathbb{R}$ con W un abierto en \mathbb{R} , esto es, $s \in \Gamma_W(M \times \mathbb{R})$. Escribiremos $\tilde{s} = \pi_2 \circ s \in C^\infty(W)$, entonces para cada $t \in W$,

$$j_t^1 s = \{v \in \Gamma_W(M \times \mathbb{R}) \mid \tilde{v}(t) = \tilde{s}(t), \tilde{v}_* = \tilde{s}_*\}.$$

Consecuentemente la aplicación

$$\Phi : J^1(P) \longrightarrow T^*(M) \times \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \Phi(j_t^1 s) = (\tilde{s}_*, \tilde{s}(t))$$

está bien definida y es inyectiva. Al escribir la aplicación Φ en coordenadas locales se muestra que es un difeomorfismo, porque si (x^i, u) son las coordenadas sobre $M \times \mathbb{R}$ donde $u = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ es la función identidad en \mathbb{R} , entonces la coordenada derivada u_i sobre $J^1(M \times \mathbb{R})$ corresponde a la coordenada $\frac{\partial}{\partial u^i}$ sobre $T^*(M)$.

Ejemplo 3.4.9. Si \mathcal{E} es ahora el fibrado trivial $(\mathbb{R} \times F, \pi_1, \mathbb{R})$, entonces existe un difeomorfismo entre $J^1(P)$ y la variedad suave $\mathbb{R} \times T(F)$.

3.5. La identificación $(J^1(P))/G \simeq C(P)$

Dado un grupo Lie G de un fibrado principal, que actúe a derecha sobre el fibrado de los 1-jets $J^1(P)$, se define el espacio cociente $(J^1(P))/G$, el cual resulta ser una variedad suave. En esta sección mostraremos la identificación entre el $(J^1(P))/G$ y el fibrado de las conexiones $C(P)$.

Sea $\pi' : J^1(P) \longrightarrow M$ el fibrado de 1-jets de un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$, con G grupo estructural. El grupo de Lie G actúa por la derecha en $J^1(P)$ de la siguiente manera

$$j_x^1 s \cdot g := j_x^1 (R_g \circ s),$$

para cada sección local s de $\pi : P \longrightarrow M$.

El espacio cociente $(J^1(P))/G$ se puede identificar con $C(P)$. Esta identificación se puede entender de la siguiente manera: sea $q : J^1(P) \longrightarrow C(P)$ la aplicación

definida de la siguiente manera. Un elemento $j_x^1 s \in J^1(P)$ determina un retracto $\Gamma_{s(x)} : T_{s(x)}(P) \longrightarrow V_{s(x)}(P)$ de la inclusión $V_{s(x)}(P) \subset T_{s(x)}(P)$, colocando

$$\Gamma_{s(x)}(X) = X - s_*(\pi_*(X)), \quad \forall X \in T_{s(x)}(P).$$

Dado $u \in \pi^{-1}(x)$ arbitrario, existe un único $g \in G$ tal que $s(x) \cdot g = u$. Definimos $\Gamma_u : T_u(P) \longrightarrow V_u(P)$, como $\Gamma_u = (R_g)_* \circ \Gamma \circ (R_{g^{-1}})_*$, es decir, trasladar $\Gamma_{s(x)}$ por $(R_g)_*$. De esta manera, se ha obtenido una “conexión en el punto” $x \in M$; por la Proposición 3.3.1 Γ_u determina una única $\sigma_x \in (C(P))_x$. Por tanto, escribimos $q(j_x^1 s) = \sigma_x$. No es difícil probar que q es una sumersión sobreyectiva cuyas órbitas son las fibras de G . Por lo tanto, $J^1(P)/G$ puede ser identificado con $C(P)$ (para más detalles véase [CM]).

Proposición 3.5.1. *Sea $\pi' : J^1(P) \longrightarrow M$ el fibrado de los 1-jets de secciones del G -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$. La fibración $q : J^1(P) \longrightarrow C(P)$ es un fibrado principal de grupo estructural G . Además, la aplicación $j_x^1 s \longmapsto (q(j_x^1 s), s(x))$ es un isomorfismo de G -fibrados principales entre $J^1(P)$ y $(C(P)) \times_M P = p^*P$, es decir, se tiene el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} J^1(P) \simeq p^*P & \xrightarrow{\pi_{10}} & P \\ \downarrow q & & \downarrow \pi \\ (J^1(P))/G \simeq C(P) & \xrightarrow{p} & P/G \simeq M \end{array}$$

Para la demostración véase [Gar].

Observación ++ 3.5.2. Para el caso $P = M \times G$, tenemos la siguiente identificación

$$J^1(P) \simeq T^*(M) \otimes T(G).$$

Más precisamente, los elementos $j_x^1 s \in J^1(P)$ se pueden considerar como aplicaciones lineales $s_* : T_x(M) \longrightarrow T_{s(x)}(P)$, donde s es una sección de $\pi : P \longrightarrow M$. En vista de que el fibrado es trivial, podemos escribir $s(x) = (x, g(x))$, para alguna aplicación suave $g \in C^\infty(M, G)$, y $T_{s(x)}(P) = T_x(M) \oplus T_{g(x)}(G)$, entonces podemos identificar $j_x^1 s$ con $g_* \in T_x^*(M) \otimes T_{g(x)}(G)$.

Teorema 3.5.3. *El espacio cociente $(J^1(P))/G$ de dicha acción resulta ser una variedad diferenciable. (Veáse [Gar]).*

La identificación $(J^1(P))/G = C(P)$, se puede entender geoméricamente de la siguiente manera: un elemento $j_x^1 s$ del fibrado de los 1-jets $J^1(P)$ se identifica con la imagen $s_*(T_x(M)) \subset T_u(P)$, $u = s(x)$, donde $s : U \longrightarrow P$ es una sección local del fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$, este subespacio vectorial es un complemento “horizontal” $\mathcal{H}_u(P)$ de $V_u(P)$. La acción de G sobre $J^1(P)$ es trasladar este subespacio vectorial al subespacio $(R_g)_*(\mathcal{H}_u(P))$. Así, una clase de equivalencia de esta acción es una colección de subespacios horizontales G -invariantes a lo largo de $\pi^{-1}(x)$, es decir, un elemento de $(C(P))_x$ (véase [Cas]).

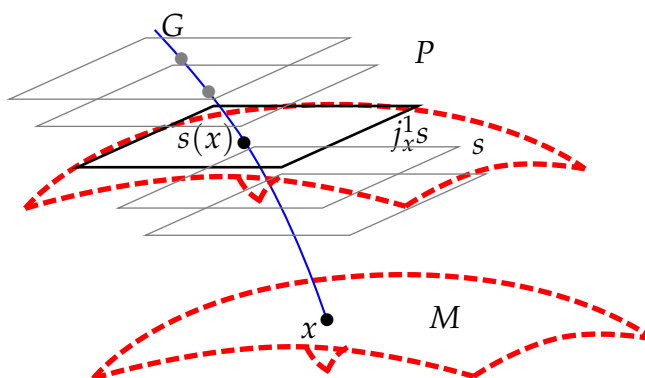


Figura 3.4: Interpretación de una translación del subespacio vectorial.

Capítulo 4

Cálculo variacional general y el problema de Lagrange en fibrados jets

Las ecuaciones del movimiento en mecánica lagrangiana son **las ecuaciones de Lagrange**, también conocidas como las ecuaciones **Euler-Lagrange**.

La formulación moderna de la mecánica lagrangiana se realiza con toda generalidad sobre una variedad diferenciable, llamada **espacio de fase**, sobre la cual se construye el fibrado tangente, **espacio de configuración**. Sobre el espacio de fase de dimensión $2m$, siendo m el número de grados de libertad, se define una **función lagrangiana**, que puede expresarse en términos de una carta local de coordenadas sobre \mathbb{R}^{2m} (véase [GPS]).

Este capítulo muestra una prueba detallada del teorema de reducción sobre fibrados jets, para un grupo de Lie general (véase [CGR]); se comienza estudiando algunos conceptos de variación vertical, derivada covariante y operador divergencia inducido por una conexión \mathcal{H} , relacionados con el problema de Lagrange,

específicamente con las ecuaciones Euler-Poincaré.

4.1. Cálculo variacional

El cálculo de variaciones es un campo de la matemática que trata con funcionales. Tales funcionales pueden ser formados como integrales que involucren una función desconocida y sus derivadas. La aplicación principal de esta área consiste en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable.

Bajo ciertas condiciones, los máximos y mínimos de una función dada pueden ser encontrados buscando los puntos en donde la derivada se anula. En analogía, las soluciones de un problema variacional pueden ser obtenidas dando solución a las **ecuaciones Euler-Lagrange** asociadas. Las ecuaciones Euler-Lagrange son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de problema variacional alcanza un extremo. Aparecen sobre todo en el contexto de la mecánica clásica en relación con el **principio de mínima acción**, aunque también aparecen en teoría clásica de campos (véase [GPS]).

En esta sección se muestra la definición de variacional vertical, el cual en un fibrado principal es un campo Gauge. Llamaremos **Lagrangiano densidad de primer orden** a un morfismo fibrado entre el fibrado de los 1-jets y $\wedge^m(T^*(M))$, el fibrado lineal de las m -formas sobre M . A partir de estas definiciones y los resultados de los capítulos 2 y 3, se muestra con detalles, en la siguiente sección, la

demostración del teorema de reducción sobre fibrados principales.

Definición 4.1.1. Sea $s : U \rightarrow P$ una sección local con soporte compacto del fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$. Una **variación vertical de s** es una familia uniparamétrica $\{s_\epsilon\}$ de secciones locales del fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, cada s_ϵ está definido sobre U y $s_0 = s$. La derivada

$$\delta s := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} s_\epsilon,$$

es llamada **variación infinitesimal de s_ϵ** ; δs es un campo vectorial que cubre la sección s , vertical con respecto a π , esto es,

- $\delta s : M \rightarrow T(P)$ satisface $\delta s(x) \in T_{s(x)}(P)$, y
- $\pi_* \circ \delta s = 0$, así $\delta s \in V_{s(x)}(P)$.

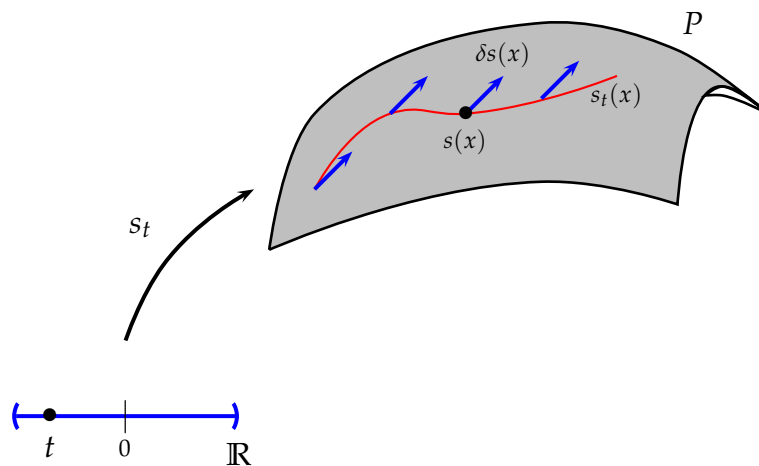


Figura 4.1: La variación infinitesimal de s_t , $\delta s(x)$ para $x \in M$, es un campo vectorial sobre P .

Observación ++ 4.1.2. Como la sección $s : U \rightarrow P$ tiene soporte compacto en un conjunto abierto U , se considerarán variaciones s_ϵ tal que $\delta s = 0$ sobre la frontera

∂U . Si M es compacto, se pueden considerar secciones globales y el requerimiento $\delta s = 0$ sobre ∂U no es necesario.

Lema 4.1.3. *El campo vectorial δs es un campo Gauge.*

[Dem.] La sección local $s : U \rightarrow P$ induce una trivialización en el fibrado principal. Debido a esto, podemos considerar que $P = U \times G$ y π es la proyección sobre el primer factor, es decir, $\pi : U \times G \rightarrow U$, con U abierto en M . La sección $s : U \rightarrow P = U \times G$ puede ser escrita como $s(x) = (x, g(x))$, para alguna aplicación suave $g : U \rightarrow G$.

Por la correspondencia biunívoca entre $V_{s(x)}(P)$ y \mathfrak{g} , existe un único $B \in \mathfrak{g}$, tal que $\delta s(x) = \tilde{B}_{s(x)}$, donde

$$\tilde{B}_{(x,g)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(tB)}(x, g)$$

Por tanto

$$\delta s(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (x, \exp(\epsilon B)g(x)) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} s_{\epsilon}(x),$$

donde $s_{\epsilon} : U \rightarrow U \times G$ está dada por $s_{\epsilon}(x) = (x, \exp(\epsilon B)g(x))$. Las aplicaciones s_{ϵ} forman una familia uniparamétrica de secciones locales del fibrado principal trivial.

Como R_a conmuta con L_b , para todo $a, b \in G$, tenemos que el campo vertical $\tilde{B}_{s(x)} = \delta s(x)$ es G -invariante. Así $\delta s \in \text{gau}(P)$. \square

Definición 4.1.4. Un **Lagrangiano densidad de primer orden** es un morfismo fibrado $\mathcal{L} : J^1(P) \rightarrow \Lambda^m(T^*(M))$ que cubre la aplicación identidad, Id_M , en M , $\Lambda^m(T^*(M))$ es el fibrado lineal de las m -formas sobre M . Si M es una variedad sua-

ve, orientada por una forma de volumen ν , entonces podemos escribir $\mathcal{L} = L(\nu)$, donde $L : J^1(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamado **Lagrangiano asociado a \mathcal{L}** .

Observación ++ 4.1.5. El morfismo \mathcal{L} induce la aplicación identidad en el espacio base M (cubre la aplicación identidad). Esto es, hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} J^1(P) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*(M) \\ \pi_{10} \downarrow & & \downarrow \pi'_{10} \\ M & \xrightarrow{\text{Id}_M} & M \end{array}$$

Definición 4.1.6. Sea $U \subset M$ un conjunto abierto, con \bar{U} compacto. Denotemos por $\Gamma_c(P)$ al conjunto de secciones locales $s : \bar{U} \subset M \longrightarrow P$ del fibrado $\pi : P \longrightarrow M$. La **acción** definida por el Lagrangiano densidad es la aplicación

$$\mathcal{S} : \Gamma_c(P) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que envía cada $s \in \Gamma_c(P)$ al valor $\mathcal{S}(s) = \int_U (\mathcal{L} \circ j^1s) = \int_U (L \circ j^1s)\nu$.

Observación ++ 4.1.7. Diremos que una sección s del fibrado principal es **crítica** si se satisface $\delta\mathcal{S}/\delta s = 0$, esta expresión también es llamada **condición de extremalidad** de \mathcal{S} .

Proposición 4.1.8. Una sección s es crítica si y sólo si satisface las ecuaciones Euler-Lagrange, esto es,

$$\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \circ j^1s - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i^\alpha} \circ j^1s \right) = 0, \text{ para toda } \alpha = 1, \dots, n \text{ e } i = 1, \dots, m$$

donde $(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha)$ son coordenadas sobre $J^1(P)$.

Para la demostración véase [GS].

Observación ++ 4.1.9. La proposición anterior establece que, una sección local s de un fibrado principal satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para L si y sólo si el principio variacional $\delta \int_U L(j_x^1 s) \nu = 0$ se satisface, para variaciones verticales δs a lo largo de s con soporte compacto.

4.2. Problema de reducción sobre fibrados jets

En mecánica, la reducción Lagrangiana es la reducción Euler-Poincaré. Este proceso puede ser resumido como sigue: se comienza con un grupo de Lie G y un Lagrangiano

$$L : T(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$

invariante bajo la acción de G sobre su fibrado tangente. Esto induce una función

$$l : T(G)/G \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamado **Lagrangiano reducido**. Más aún, las ecuaciones Euler-Lagrange de L para curvas sobre G son equivalentes a un nuevo tipo de ecuaciones de l , curvas reducidas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Estas ecuaciones son conocidas como las **ecuaciones Euler-Poincaré** (véase [CGR]).

El primer intento en extender estas ideas para la teoría de campos se encuentra en [CRS]. En este caso, la reducción Euler-Poincaré se trabaja con un Lagrangiano definido sobre el primer fibrado jet de un fibrado principal,

$$L : J^1(P) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El problema variacional reducido ahora toma lugar sobre $C(P) \simeq (J^1(P))/G$, el fibrado de conexiones. En este capítulo completamos con detalles la prueba del teorema de reducción para un grupo de Lie general (véase [CGR]) y se añaden varios hechos que son importantes para su demostración.

Proposición 4.2.1. *Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un G -fibrado principal, con conexión fija \mathcal{H} . Sea $s : U \longrightarrow P$ una sección local de π , con soporte compacto, y consideremos una variación vertical de s (Definición 4.1.1). Se define $\sigma_\epsilon = q(j^1 s_\epsilon)$ y $\sigma^{\mathcal{H}} = \Upsilon^{\mathcal{H}} \circ \sigma$ (Observación 3.3.6). Entonces*

$$\delta\sigma := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \sigma_\epsilon = \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) - [\sigma^{\mathcal{H}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \eta],$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie sobre \mathfrak{g} , y $\nabla^{\mathcal{H}} : \Gamma(\text{ad}(P)) \longrightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes \text{ad}(P))$ es la derivada covariante inducida por \mathcal{H} en el fibrado asociado $\text{ad}(P)$, definido en una trivialización por

$$\nabla^{\mathcal{H}}(\eta) = \xi_* + [\omega^{\mathcal{H}}\langle \cdot, \cdot \rangle, \xi]$$

donde $\eta : U \longrightarrow \text{ad}(P)$ es una sección del fibrado adjunto, con $\eta(x) = (x, \xi(x))$, y $\omega^{\mathcal{H}}$ es una 1-forma de conexión inducida por \mathcal{H} .

[Dem.] Como esto es una declaración local, trabajaremos con una trivialización local $V \times G$ del G -fibrado principal P , donde $V \subset U$ es abierto en M . Una sección local $s : V \longrightarrow P$ puede ser escrita como $s(x) = (x, g(x))$, para alguna aplicación suave $g : V \longrightarrow G$.

Dada δs a lo largo de s , sea $X \in \text{gau}(P)$ el único campo Gauge tal que $\delta s = X|_{s(M)}$ (véase Lema 4.1.3); por la identificación $\text{gau}(P) \simeq \Gamma(\text{ad}(P))$ (Proposición 2.4.8), X determina una única sección η del fibrado adjunto.

Además se tiene que $(T_G(P))_x \simeq T_x(V) \times \mathfrak{g}$, con $x \in V$, mediante la aplicación suave $\tilde{\varphi} : (T_G(P))_x \longrightarrow T_x(M) \times \mathfrak{g}$, dada por $\tilde{\varphi}(\{(X, B)\}_G) = (X, B)$, donde $\{(X, B)\}_G = \{(X, (R_h)_*(B)) \in T_x(M) \times T_h(G) \mid h \in G\}$.

La sección local $s : V \longrightarrow P$ define una sección local en el fibrado de conexiones $C(P)$, $\sigma : V \longrightarrow C(P)$, dada por $\sigma(x) = q(j_x^1 s)$. Por la Proposición 3.5.1, tenemos que $C(P)|_V \simeq T^*(V) \otimes \mathfrak{g}$ y, por la Observación 3.5.2, $J^1(P)|_V \simeq T^*(M) \otimes T(G)$; además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 J^1(P)|_V \simeq T^*(V) \otimes T(G) & \xrightarrow{\pi_{10}} & P|_V \simeq V \times G \\
 \downarrow q & & \downarrow \pi_1 \uparrow s \\
 C(P)|_V \simeq T^*(V) \otimes \mathfrak{g} & \xrightleftharpoons[\sigma]{p} & V
 \end{array}$$

Donde $(C(P))_x = \{\hat{s} \in \text{Hom}(T_x(V), T_x(V) \times \mathfrak{g}) \mid \pi_* \circ \hat{s} = \text{Id}_{T_x(V)}\}$.

Por tanto, la aplicación $\sigma(x) = q(j_x^1 s)$ se puede escribir como

$$\sigma(x) = (R_{g(x)^{-1}})_* \circ (\pi_2)_* \circ s_* = (R_{g(x)^{-1}})_* \circ g_*.$$

Por la identificación de $\text{ad}(P)|_V$ con $V \times \mathfrak{g}$ (Observación 2.4.7), tenemos que $\eta \in \Gamma(\text{ad}(P)|_V)$ se puede escribir de la forma $\eta(x) = (x, \xi(x))$, para alguna aplicación suave $\xi : V \longrightarrow \mathfrak{g}$, y la variación δs es así obtenida como la derivada de la variación $s_\epsilon(x) = (x, \exp(\epsilon \xi(x))g(x))$. En efecto, para $\epsilon = 0$ se tiene $s_0 = s$ y la derivada de s_ϵ con respecto a ϵ es el campo vectorial Gauge X a lo largo de la sección s la cual

coincide, por construcción, a δs . Además

$$\begin{aligned} \delta\sigma(x) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \sigma_\epsilon(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left((R_{g(x)^{-1} \exp(-\epsilon\zeta(x))})_* \circ (\exp(\epsilon\zeta)g)_* \right) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (R_{g(x)^{-1} \exp(-\epsilon\zeta(x))})_* \left((R_{g(x)})_* \circ (\exp(\epsilon\zeta))_* + (L_{\exp(\epsilon\zeta(x))})_* \circ g_* \right) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left((R_{\exp(-\epsilon\zeta(x))})_* \circ (\exp(\epsilon\zeta))_* \right) \\ &\quad + \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(\text{Ad}_{\exp(\epsilon\zeta(x))} \circ (R_{g(x)^{-1}})_* \circ g_* \right) \quad (\mathbf{I}) \end{aligned}$$

Para cada $x \in V$, tenemos que $\zeta(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(t\zeta(x)))$, donde $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, está definida por: $B \mapsto \exp(B) = \sigma_B(1)$, con $\sigma_B(t)$ la curva integral del campo invariante $B \in \mathfrak{g}$, que satisface $\sigma_B(0) = e \in G$. (Se escribe $\exp(tX) = \sigma_X(t)$, para $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, para más detalles véase la Definición 1.3.7). Como $T_{\zeta(x)}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$, la aplicación inducida $\zeta_* : T_x(V) \rightarrow \mathfrak{g}$ está dada por

$$\zeta_* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left((R_{\exp(-t\zeta(x))})_* \circ (\exp(t\zeta))_* \right)$$

Por lo tanto ζ_* equivale al primer sumando de la expresión (I).

Recordemos que la aplicación adjunta minúscula se define como (Definición 1.3.9)

$$\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{por} \quad \text{ad}_X(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tX)}(Y) = [X, Y].$$

Para $X = \zeta(x)$, e $Y = (R_{g(x)^{-1}})_* \circ g_* = \sigma(x)$, se tiene que el segundo sumando de la expresión (I) es $[\zeta(x), \sigma(x)]$.

Así obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\sigma(x) &= \zeta_* - [\sigma(x), \zeta(x)] = \zeta_* - [\omega^{\mathcal{H}} \circ s_*, \zeta(x)] - [\sigma(x) - \omega^{\mathcal{H}} \circ s_*, \zeta(x)] \\ &= \nabla^{\mathcal{H}}(\zeta(x)) - [\sigma^{\mathcal{H}}(x), \zeta(x)], \end{aligned}$$

Esto es equivalente a $\delta\sigma = \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) - [\sigma^{\mathcal{H}}, \eta]$. □

Observación ++ 4.2.2. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un G -fibrado principal suave y \mathcal{H} una conexión. El **dual del fibrado adjunto**, $(\text{ad}(P))^* = (P \times \mathfrak{g}^*)/G$, puede ser visto como el fibrado asociado a P por la representación dual de G sobre \mathfrak{g}^* , esto es, $g \longmapsto \text{Ad}_{g^{-1}}^*$. Por la Proposición 2.4.3, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de secciones del fibrado dual adjunto, $\Gamma((\text{ad}(P))^*)$, y el conjunto

$$\{\beta \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*) \mid \beta(p \cdot g) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\beta(p)), p \in P, g \in G\}.$$

Definición 4.2.3. Sea (U, φ) una trivialización del fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, una sección $\beta \in \Gamma_U((\text{ad}(P))^*)$ puede ser escrita como $\beta(x) = (x, \psi(x))$, donde $\psi : P \longrightarrow \mathfrak{g}$ es una aplicación suave; se define **la derivada covariante inducida por la conexión \mathcal{H}** por

$$\tilde{\nabla}^{\mathcal{H}}(\beta) = \psi_* - \text{ad}_{\sigma^{\mathcal{H}}(\cdot)}^*(\psi)$$

o equivalentemente

$$(\tilde{\nabla}_X(\beta))\eta = X(\langle \beta, \eta \rangle) - \langle \beta, \nabla_X \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \Gamma(\text{ad}(P)), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición 4.2.4. Dada $\sigma \in \Gamma(C(P))$ una sección del fibrado de conexiones, la aplicación $l : C(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ define un operador lineal

$$\frac{\delta l}{\delta \sigma} : T^*(M) \otimes \text{ad}(P) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dada por}$$

$$\frac{\delta l}{\delta \sigma}(\zeta_x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{l(\sigma(x) - \epsilon \zeta_x) - l(\sigma(x))}{\epsilon}, \quad \forall \zeta_x \in (T^*(M) \otimes \text{ad}(P))_x, \quad x \in M,$$

llamado **la derivada vertical de l a lo largo de σ** .

El operador l puede ser visto como una sección global del fibrado dual $(T^*(M) \otimes \text{ad}(P))^* \simeq T(M) \otimes (\text{ad}(P))^*$, esto es, un campo vectorial con valores en el fibrado dual $(\text{ad}(P))^*$.

Lema 4.2.5. Para una conexión fija \mathcal{H} sobre el fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$, existe un **operador divergencia** asociado, $\operatorname{div}^{\mathcal{H}} : \Gamma(T(M) \otimes (\operatorname{ad}(P))^*) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{ad}(P)^*)$, que satisface las siguientes condiciones. Sean $\chi, \chi' \in \Gamma(T(M) \otimes (\operatorname{ad}(P))^*)$, $\eta \in \Gamma(\operatorname{ad}(P))$, $f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$\text{i) } \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi + \chi') = \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi) + \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi'),$$

$$\text{ii) } \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(f\chi) = \chi d(f) + f \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi),$$

iii) $\operatorname{div}(\langle \chi; \eta \rangle) = \langle \operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi); \eta \rangle + \langle \chi; \nabla^{\mathcal{H}} \eta \rangle$. Aquí $\langle ; \rangle$ es un producto bilineal y div se refiere al operador divergencia usual sobre M . Además, si $\{E^1, \dots, E^m\}$ es una base de secciones locales del fibrado $(\operatorname{ad}(P))^*$, entonces cualquier elemento $\chi \in \Gamma(T(M) \otimes (\operatorname{ad}(P))^*)$ puede ser escrito como $\chi = \sum_{i=1}^m (X_i \otimes E^i)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que

$$\operatorname{div}^{\mathcal{H}}(\chi) = \sum_{i=1}^m (\operatorname{div}(X_i) \otimes E^i + \tilde{\nabla}_{X_i}^{\mathcal{H}}(E^i)).$$

Observación ++ 4.2.6. Para la demostración véase [CRS]. En el caso $P = M \times G$ y \mathcal{H} una conexión trivial, el operador $\operatorname{div}^{\mathcal{H}}$ es el operador **divergencia usual**.

Teorema de reducción sobre fibrados principales

Teorema 4.2.7. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal sobre una variedad M con una forma de volumen ν y $L : J^1(P) \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano G invariante. Sea $l : C(P) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por L en el cociente. Para un conjunto abierto $U \subset M$ con \bar{U} compacto y $s : \bar{U} \longrightarrow P$ una sección local de π , se define $\sigma : U \longrightarrow C(P)$ por $\sigma(x) = q(j_x^1 s)$, donde $q : J^1(P) \longrightarrow C(P) = (J^1(P))/G$ es la proyección canónica. Entonces, para cada conexión principal \mathcal{H} sobre P , las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El principio variacional $\delta \int_U L(j_x^1 s) \nu = 0$ se satisface, para variaciones verticales δs a lo largo de s , con soporte compacto.

2. La sección local $s : U \longrightarrow P$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para L .

3. El principio variacional $\delta \int_U l(\sigma(x)) \nu = 0$ se satisface, usando variaciones de la forma

$$\delta \sigma = \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) - [\sigma^{\mathcal{H}}, \eta],$$

donde $\eta : U \longrightarrow \text{ad}(P)$ es cualquier sección del fibrado adjunto con soporte compacto.

4. Las ecuaciones de Euler-Poincaré se satisfacen:

$$\mathcal{EP}(l)(\sigma) := \text{div}^{\mathcal{H}} \left(\frac{\delta l}{\delta \sigma} \right) + \text{ad}_{\sigma^{\mathcal{H}}}^* \frac{\delta l}{\delta \sigma} = 0.$$

[Dem.]

- La equivalencia (1) \Leftrightarrow (2) se obtiene de la Proposición 4.1.8.
- Para (1) \Leftrightarrow (3), usamos que

$$\delta \int_M L(j_x^1 s) \nu = \delta \int_M l(\sigma(x)) \nu,$$

con el hecho de que, dada una variación vertical infinitesimal $\delta s = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} s_\epsilon$, la expresión del variacional reducido $\delta \sigma = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} q(j^1 s_\epsilon)$ está dado por

$$\delta \sigma = \nabla^H(\eta) - [\sigma^H, \eta].$$

Esto se obtiene de la Proposición 4.2.1.

- Para la equivalencia (3) \Leftrightarrow (4), tenemos

$$\begin{aligned}\delta \int_M l(\sigma(x))v &= \int_M \left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \delta \sigma \right\rangle v = \int_M \left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) - [\sigma^{\mathcal{H}}; \eta] \right\rangle v \\ &= \int_M \left(\left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) \right\rangle - \left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; [\sigma^{\mathcal{H}}, \eta] \right\rangle \right) v.\end{aligned}$$

Por el Lema 4.2.5-(iii) tenemos que

$$\left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \nabla^{\mathcal{H}}(\eta) \right\rangle = \operatorname{div} \left(\left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \eta \right\rangle \right) - \left\langle \operatorname{div}^{\mathcal{H}} \left(\frac{\delta l}{\delta \sigma} \right); \eta \right\rangle$$

así

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \left(\operatorname{div} \left(\left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \eta \right\rangle \right) - \left\langle \operatorname{div}^{\mathcal{H}} \left(\frac{\delta l}{\delta \sigma} \right); \eta \right\rangle - \left\langle \operatorname{ad}_{\sigma^{\mathcal{H}}}^* \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \eta \right\rangle \right) v \\ &= \int_M \left\langle \operatorname{div} \left(\frac{\delta l}{\delta \sigma} \right) - \operatorname{ad}_{\sigma^{\mathcal{H}}}^* \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \eta \right\rangle v\end{aligned}$$

Para la última igualdad se ha usado que

$$\int_M \operatorname{div} \left\langle \frac{\delta l}{\delta \sigma}; \eta \right\rangle v = 0$$

por el **Teorema de Stokes** (véase [MR, pág. 124]). Por lo tanto, para cualquier η ,

$$\delta \int_M l(\sigma(x))v = 0 \quad \text{si y sólo si (3) se satisface.}$$

□

Bibliografía

- [Ati] Atiyah, Michael. *Complex analytic connections in fibre bundles*. Transl. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 181- 207.
- [Bak] Baker, Andrew. *Matrix Groups: An Introduction to Lie Groups Theory*. Springer-Verlag. London Berlin Heidelberg (2002).
- [Boo] Boothby, Willian M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Second Edition, Academic Press, Inc (1986).
- [Cas] Castrillón López, M. *Formas Gauge invariantes en el fibrado de las conexiones de un fibrado principal*. Tesis Doctoral. Departamento de Geometría y Topología-Universidad Complutense de Madrid (1999).
- [CGR] Castrillón López, M., García, P. and Ratiu, T. S. *Euler-Poincaré reduction on principal bundles*. Lett. Math. Phys. **58** (2) (2001) 167-180.
- [CRS] Castrillón López, M., Ratiu, T. S. and Shkoller. *Reduction in principal fiber bundles: covariant Euler-Poincaré equations*. Proc. Amer. Math. Soc. **128**(7) (2000), 2155-2164.

- [CM] Castrillón López, M. and Masqué, Muñoz. *The geometry of the bundle of connections*. Math. Z. **236**, (2001), 797-811.
- [CR] Castrillón López, M. and Ratiu, T. S. *Reduction in principal bundles: covariant Lagrange-Poincaré equations*. Commun. Math. Phys. **236**, (2003), 223-250.
- [doC] do Carmo, Manfredo P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, (1992).
- [Ehr] Ehresmann, Charles. *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), 29-55.
- [Fra] Frampton, Paul. *Gauge Field Theories*. Second Edition, Wiley, (2000).
- [Gar] García, Pedro. *Connections and 1-jet bundles*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 47 (1972), 227-242.
- [GHV] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R. *Connections, curvature and cohomology*. Pure and Applied Mathematics Vol.47. Academic Press. New York (1972).
- [GS] Goldschmidt, Hubert and Sternberg, Shlomo. *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **23,1** (1973), 203-267.
- [GPS] Goldstein, Herbert., Poole, Charles P. and Safko, John L. *Classical Mechanics*. Third Edition. Addison Wesley (2002).

- [Hopf] Hopf, H. *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugeläche*. Math. Ann. **104** (1931), 637-665.
- [Iva] Ivancevic, Vladimir and Ivancevic, Tijana. *Applied Differential Geometry: A Modern Introduction*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2007).
- [KMS] Kolář, Ivan., Michor, Peter. W. and Slovák, Jan. *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1993).
- [KN] Kobayashi, Shoshichi and Nomizu, Katsumi. *Foundations of Differential Geometry*. John Wiley & Sons. Inc. (Interscience Division). New York, Vol. I (1963).
- [Kos] Koszul, J. L. *Fibre Bundles and Differential Geometry*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay (1960).
- [MR] Marsden, Jerrold and Ratiu, Tudor. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag New York, Inc (1994).
- [Mic1] Michor, Peter W. *Gauge theory for fiber bundles*. Lecture Notes. Bibliopolis, Napoli (1988).
- [Mic2] Michor, Peter W. *Topics in differential geometry*. Lecture Notes (2007). Accesible en <http://www.mat.univie.ac.at/michor/dgbook.pdf>.
- [Moi] Moiseev. *Variational calculus*. Cálculo de variaciones. [En línea]. Accesible en <http://eom.springer.de/v/v096190.htm> (01/03/2009).

- [Mor] Morita, Shigeyuki. *Geometry of Differential Forms*. Vol. **201**. Transl. Amer. Math. Soc (2001).
- [Nab] Naber, G. *Topology, Geometry, and Gauge Fields*. New York: Springer-Verlag (2000).
- [San] Santa-María, Ignacio. *Conexiones en fibrados principales y aplicaciones a las ecuaciones de campo*. Departamento de Geometría y Topología-Universidad Complutense de Madrid (2007).
- [Sau] Saunders, D. J. *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1989).
- [Sha] Sharpe, Richard W. *Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics Vol. **166**. Springer-Verlag. New York-Heidelberg-Berlin (1996).
- [Sch] Schutz, Bernard F. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press (1985).
- [Soc] Socolovsky, M. *Gauge transformations and fiber bundle theory*. J. Math. Phys. **32**(9) (1991), 2522-2531.
- [Spi] Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Second Edition, Vol. **I**. Publish or Perish, Inc (1999).
- [Ste] Steenrod, Norman. *The topology of fiber bundles*. Princeton University Press. Princeton-New Jersey (1951).

[War] Warner, F. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 94. Springer-Verlag. New York-Heidelberg-Berlin (1983).

Índice alfabético

acción

libre, 26

por la izquierda, 26

principal, 36

transitiva, 26

álgebra de Lie, 21, 23

aplicación

adjunta mayúscula, 25

adjunta minúscula, 25

conjugada, 24

exponencial, 23

atlas

maximal, 7

suave, 6

automorfismo, 37

vertical, 37

cambio de coordenadas, 31

campo fundamental, 41

campo Gauge, 41

campo vectorial, 14

invariante a derecha, 40

invariante a izquierda, 22

suave, 15

carta, 6, 30

conexión, 49, 50

corchete de Lie, 16, 23

curva

integral suave, 17

suave, 14

suave a trozos, 15

derivada

covariante inducida, 76

vertical de un operador, 76

derivadas coordenadas, 63

espacio

de los 1-jets, 61

- tangente, 10
- estabilizador, 26
- fibra, 30
- Fibración de Hopf, 33
- fibrado, 29
 - adjunto, 46
 - asociado, 44
 - de las conexiones, 59
 - de los 1-jets, 63
 - principal, 35
 - suave, 30, 31
 - tangente, 13
 - trivial, 37
 - vectorial, 31
 - vertical, 41
- forma de Maurer-Cartan, 51
- función
 - de transición, 30, 31
 - diferenciable, 5
 - suave, 5
- G-atlas, 31
- grupo
 - de Lie, 19
 - estructural, 31
- Lagrangiano
 - asociado, 71
 - densidad de primer orden, 70
 - reducido, 72
- levantamiento horizontal de un vector, 56
- localmente euclidiano, 5
- morfismo de fibrados principales, 36
- operador divergencia, 77
- órbita, 26
- parametrización, 6
- sección
 - global, 32
 - local, 32
- sistema coordenado, 6
 - adaptado, 62
- subgrupo de Lie, 19
- sucesión de Atiyah, 57

transformación Gauge infinitesimal, *véase*

campo Gauge

transformaciones Gauge, *véase* automor-

fismo vertical

translación a

derecha, 19

izquierda, 19

variación

infinitesimal, 69

vertical, 69

variedad

suave, 6

topológica, 5

vector tangente, 9, 10

Curriculum Vitae

DATOS PERSONALES

Nombre	Juan C. Juárez Paradas
Lugar y Fecha de Nacimiento	Barquisimeto, 18 de mayo de 1982
Nacionalidad	Venezolana

ESTUDIOS REALIZADOS

U.E.N. Jacinto Lara, Bachiller en Ciencias.

Universidad Centro-Occidental Lisandro Alvarado, Licenciado en Ciencias Matemáticas.

CARGOS DESEMPEÑADOS

Preparador de Matemáticas (U.C.L.A., Decanato de Ciencias)

Marz. 2006 - Marz. 2009: Estudiante Graduado del I.V.I.C.

CAMPO EN QUE HA TRABAJADO

Geometría Diferencial y Sistemas Dinámicos

HONORES Y DISTINCIONES

Becario del I.V.I.C. de Marz. 2006 - Marz. 2009.