UNIVERSIDAD CENTROCIDENTAL 'LISANDRO ALVARADO'

DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GUÍA DIDÁCTICA DE ÁLGEBRA LINEAL

Por: Ronald Gutiérrez

Barquisimeto 2011

Índice general

0.1. Descripción del Curso

Nombre de la asignatura: Álgebra Lineal
Código: M4
Número de Créditos: 4
Semestre: III
Carrera: Análisis de Sistemas
Departamento: Matemática
Pre-requisitos: Estructuras Discretas (M1)
Profesores: Dennys Ramos, Ronald Gutiérrez.
Coordinador: Ronald Gutiérrez.

0.2. Justificación

La unidad curricular Álgebra Lineal está concebida para la carrera de Análisis de Sistemas con la intención de presentar al estudiante una introducción de objetos matemáticos que presentan propiedades de linealidad, propiedad que facilita el estudio de comprensión de tales objetos. Además las aplicaciones en el campo computacional, así como de otras ramas del álgebra en nuestros días, la hace indispensable para el desarrollo académico de cualquier programa académico de ciencia y/o tecnología. La adquisición y apropiación de estos conocimientos se inserta en las metas del diseño curricular de la carrera de Análisis de Sistema de la UCLA, puesto que proporcionará al estudiante la capacidad de resolver problemas analíticos, abstractos y de aplicación cuya lógica (matemática) favorecerá el desarrollo integral del perfil profesional de un analista de sistemas.

Respecto a la guía, esta tiene como finalidad complementar el texto **Introducción al Álgebra Lineal** de **Ronald Gutiérrez**, que se utilizará durante el desarrollo de la asignatura. Se desea entonces facilitar la comunicación e interacción entre alumno y profesor, siempre fundamental en el proceso de aprendizaje; esto no quiere decir que la guía sustituye el texto sino que lo complementa.

0.3. Contenido Programático del Curso

- **Capítulo 1: Vectores en $\mathbb{R}^n$**

1. Definición analítica de vector.
    a) Suma de vectores.
    b) Multiplicación de un vector por escalar.
    c) Norma de un vector.
    d) Producto interno de vectores.
    e) Angulo entre vectores.
2. Definición geométrica de vector.
    a) Suma de vectores.
    b) Multiplicación de un vector por escalar.
    c) Norma de un vector.
    d) Producto interno de vectores.
    e) Angulo entre vectores.
3. Producto vectorial.
4. Recta en $\mathbb{R}^n$.
5. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana de una recta.
6. Rectas paralelas.
7. Rectas ortogonales (o perpendiculares).
8. Planos en el espacio.
9. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana de un plano.
10. Planos paralelos.
11. Planos ortogonales (o perpendiculares).
12. Relaciones entre rectas y planos en el espacio.

- **Capítulo 2: Matrices**
    1. Matriz.
    2. Tipos de matrices.
    3. Suma de matrices.
    4. Multiplicación de una matriz por un escalar.
    5. Transpuesta de una matriz.
    6. Multiplicación de matrices.

7. Matrices invertibles.

- **Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones lineales**
  1. Ecuación lineal.
  2. Solución de una ecuación lineal.
  3. Sistemas de ecuaciones lineales (homogéneos, no-homogéneos).
  4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
  5. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.
- **Capítulo 4: Conjuntos Convexos**
  1. Segmentos de recta.
  2. Conjuntos convexos.
  3. Semiplanos (abiertos, cerrados).
  4. Hiperplanos.
  5. Punto extremo.
  6. Conjunto acotado.
  7. Valores extremos de una función real de dos variables reales.
  8. Teorema fundamental de la programación lineal.
  9. Aplicaciones del teorema fundamental de la programación lineal.
- **Capítulo 5: Espacios Vectoriales**
  1. Espacios vectoriales reales.
  2. Subespacios vectoriales.
  3. Combinaciones lineales.
  4. Conjuntos linealmente independientes.
  5. Conjuntos linealmente dependientes.
  6. Conjuntos generadores.
  7. Bases y dimensión de un espacio vectorial.
- **Capítulo 6: Trasnformaciones Lineales**
  1. Transformación lineal.

2. Teoremas de existencia y unicidad de transformaciones lineales.
3. Núcleo, imagen, nulidad, rango, de una transformación lineal.
4. Matriz de una transformación lineal.
5. Isomorfismos.

0.4. Orientaciones Generales

Esta guía fue elaborada con el propósito de orientar el aprendizaje de los estudiantes que cursan Álgebra Lineal (M4) del programa de Análisis de Sistemas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la UCLA, y su contenido está presentado acorde con los objetivos del programa de dicha asignatura; aún así, puede ser de ayuda complementaria para cualquier estudiante de un curso equivalente de Álgebra Lineal. Como ya se mencionó este trabajo es un complemento del texto **Introducción al Álgebra Lineal** de **Ronald Gutiérrez**, en donde los capítulo son presentados de forma sencilla, en la mayoría de los casos, tras cada definición y teorema se presentan diversos ejemplos que muestran distintas situaciones que se pueden presentar; cada capítulo trae consigo además de su respectivo contenido, una sección de ejercicios prácticos resueltos, una de ejercicios propuestos, y una de recomendaciones bibliográficas (del contenido del capítulo en particular, al final del texto aparece una bibliografía general). En el mismo orden de ideas, cada capítulo de la guía trae consigo un repaso de sus definiciones y teoremas fundamentales, secciones de ejercicios propuestos y una de autoevaluación para cada tema (con respuestas al final de la guía).

0.4.1. Para el Estudiante

A continuación se sugieren una serie de temas de matemática básica, cuyo repaso permitirán profundizar en los conocimientos previos que ya se poseen y además, serán indispensables para un buen desempeño en el curso.

1. Operaciones Básicas de los Números Reales:
   - Suma.
   - Resta.
   - Multiplicación.

- División.
- Exponenciación.

2. Valor absoluto.
3. Radicales y Factorización.
4. Polinomios.
5. Ecuaciones e Inecuaciones.
6. Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incognitas.

Para consultas al respecto, referimos al lector al libro **"Matemáticas Pre-Universitarias"** por **Mireya Bracamontes, Jurancy Ereú y Miguel Vivas.**

Por otro lado, es conveniente recordar algunos conceptos de la asignatura Estructuras Discretas (M1), para una mejor comprensión de los proximos temas a estudiar.

1. Proposiciones.
2. Conjuntos.
3. Operaciones con conjuntos.
4. Relaciones.
5. Relaciones de equivalencia.
6. Funciones.

Para consultas al respecto, referimos al lector al texto **Introducción a las Estructuras Discretas** por **Ronald Gutiérrez.**

Es muy importante que no intentes resolver ejercicios sin antes tener un buen dominio teórico, este es un error muy común, y en matemática la forma de resolver los problemas puede variar mucho entre ejercicios; por ello, un buen dominio teórico es la clave para la resolución de los diversos problemas. Tambien recuerda que lo importante **NO** es resolver todos los ejercicios, sino que **APRENDER** a resolver cualquier problema.

Si tienes presente estas sugerencias de seguro se aprovechará al máximo este curso y además crecerán tus posibilidades de éxito en el aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

0.4.2. Para el docente (Sugerencias para la Evaluación del Estudiante)

En los diversos ejemplos presentados en el texto guía, se dan las explicaciones básicas que se esperan del estudiante durante las evaluaciones. Por otro lado, al final de cada capítulo existen secciones de ejercicios resueltos y propuestos acordes a los objetivos (generales y específicos) a evaluar.

En la página 11 se detalla más información sobre la evaluación de los aprendizajes.

0.5. Objetivos Generales

1. Desarrollar su razonamiento lógico-matemático.
2. Generalizar la idea de linealidad de $\mathbb{R}^2$ a un espacio general.
3. Aplicar los resultados teóricos fundamentales estudiados.
4. Establecer algunas relaciones entre linealidad y convexidad.
5. Estar en capacidad de comprender y/o realizar demostraciones de los hechos básicos de la teoría estudiada.

0.6. Referencias Bibliográficas

1. **Básicas:**
   a) Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.
   b) Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.
   c) Gutiérrez, Ronald. Guía Introducción al Álgebra Lineal. 2011.
   d) Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.
2. **Complementarias:**
   a) Apostol, Tom. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté. Segunda edición, 1967.
   b) Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.

c) Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

Texto guía: Introducción al Álgebra Lineal por Ronald Gutiérrez.

Este texto se desarrolló específicamente para dictar nuestro curso. Contiene todos los temas del programa, juntos con debidas ilustraciones gráficas muy importantes para la comprensión de los objetivos; contiene además en cada capítulo secciones de ejercicios resueltos y propuestos.

Otro texto: Álgebra Lineal por Stanley Grossman.

Este texto es usado comunmente en cursos orientados a estudiantes de ingeniería, por ello es de gran apoyo para los contenidos del curso (por ejemplo en los capítulos 2 y 3).

Otro texto: Álgebra Lineal por Bernard Kolman.

Este otro texto será muy útil para el capítulo 3 de nuestro curso.

Para tranquilidad del lector le informamos que estos dos textos están ubicados en la biblioteca del Decanato de Ciencias y Tecnología, donde puedes consultar la disponibilidad de los ejemplares a través de la siguiente página web:

http:\\bibcyt.ucla.edu.ve.

0.7. Evaluación de los Aprendizajes

Al comienzo de cada capítulo aparecen los objetivos de aprendizaje que se esperan lograr, así como los contenidos temáticos, revisalos, de este modo la evaluación no tiene que ser una sorpresa, en este orden de ideas, en los diversos ejemplos presentados en el texto, se dan las explicaciones básicas para el alcance de los aprendizajes y por ende para el exito en las evaluaciones.

Al final de cada capítulo de la guía se te presenta una autoevaluación correspondiente al mismo, realízala antes de proceder a resolver los ejercicios pues estas te permitirán reconocer los avances o posibles dificultades que presentes en el proceso de aprendizaje. Al final de la guía puedes encontrar las respuestas de las autoevaluaciones.

Evaluaciones Sumativas:

A continuación se presenta el plan de evaluación del curso.

Evaluación	Capítulo	Ponderación	Parcial
Prueba escrita individual	1	30 puntos	I
Prueba escrita individual	2 y 3	25 puntos	II
Prueba escrita grupal (máx. 3 estudiantes)	4	10 puntos	II
Prueba escrita individual	5	20 puntos	III
Prueba escrita individual	6	15 puntos	III

Capítulo 1

VECTORES EN $\mathbb{R}^n$

El tema de vectores se aborda al principio desde un punto de vista algebraíco (analítica) de un vector, y luego desde un punto de vista geométrico; posteriormente, entrelazamos ambas teoría y procedemos a aplicarlas al estudiar las rectas y los planos.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Vectores.
2. Componentes.
3. Norma.
4. Producto escalar.
5. Angulo.
6. Segmento de recta.
7. Paralelismo.
8. Ortogonalidad.
9. Recta.
10. Ecuación: vectorial, paramétrica, cartesiana de una recta.
11. Rectas paralelas (rectas ortogonales).
12. Planos.

13. Ecuación: vectorial, paramétrica, cartesiana de un plano.

14. Planos paralelos (planos ortogonales).

1.1. Objetivos específicos

1. Graficar vectores en el plano cartesiano y en el espacio.

2. Demostrar propiedades básicas de la teoría de vectores.

3. Determinar la solución de problemas que involucren las operaciones con vectores junto con las nociones de producto escalar, norma, ángulo, ortogonalidad y paralelismo.

4. Determinar la ecuación (vectorial, cartesiana y/o paramétricas) de una recta dadas condiciones particulares de esta.

5. Dibujar rectas en el plano o en el espacio, a partir de su ecuación y/o condiciones particulares de la recta.

6. Determinar si dos rectas son o no paralelas (perpendiculares).

7. Determinar la ecuación (vectorial, cartesiana y/o paramétricas) de un plano dadas condiciones particulares de este.

8. Dibujar un plano en el espacio a partir de su ecuación y/o condiciones particulares de este.

9. Determinar cuando un plano es o no ortogonal (paralelo) a un plano (recta).

1.2. Resúmen teórico

1. **Definición algebraica de vector:** un **vector de n componentes** es un conjunto ordenado de n números reales $x_1, ..., x_n$ escritos de la forma:
   $(x_1, ..., x_k, ..., x_n)$ (vector fila de n componentes) o de la forma:
   $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (vector columna de n componentes).

En tal caso, a x_k lo llamaremos **k-ésima componente** del vector.

2. Dos vectores de n componentes $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$ son **iguales**, denotado por $X = Y$, si $x_k = y_k$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$ (son iguales si lo son componente a componente), en caso contrario decimos que los vectores son **distintos** ($X \neq Y$).

3. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ a el conjunto formado por todos los vectores de n componentes.

4. El vector nulo de n componentes, es aquel cuyas componentes son todas iguales a cero, se denota como $\mathbb{O}_n$ (o como $\mathbb{O}$ solamente en algunos casos).

5. Para $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

   a) La **suma de** A **más** B, denotada por $A + B$, como el vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:
   $$A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

   b) El **producto del escalar** α **por** A, denotado por αA, como el vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:
   $$\alpha A = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

6. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

   a) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
   b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (propiedad asociativa)
   c) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ (elemento neutro)
   d) $A + (-A) = -A + A = \mathbb{O}$ (elemento simétrico)
   e) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributiva)
   f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributiva)
   g) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A$
   h) $1.A = A$; $0.A = \mathbb{O}$; $\alpha\mathbb{O} = \mathbb{O}$
   i) $A + B = A + C \Rightarrow B = C$ (ley de cancelación)
   j) $\alpha A = \mathbb{O} \Rightarrow \alpha = 0 \vee A = \mathbb{O}$

El vector nulo es el único vector que cumple con c; por otro lado, para un vector A, $-A$ es el único vector que cumple con d y por esto se le llama **inverso simétrico** de A.

7. Si $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **norma** (o longitud) de A, denotado por $\| A \|$, al número real dado por:

$$\| A \| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$$

8. $\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

   a) $\| A \| = 0$ si y sólo si $A = \mathbb{O}$

   b) $\| A \| > 0$ si y sólo si $A \neq \mathbb{O}$

   c) $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$

   d) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ (desigualdad triangular)

9. Si $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos el **producto escalar de** A **por** B, denotado por $< A, B >$ (o $A.B$), al número real dado por:

$$< A, B > = a_1 b_1 + ... + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

10. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

   a) $< A, B > = < B, A >$

   b) $< A, B + C > = < A, B > + < A, C >$

   c) $< A + B, C > = < A, C > + < B, C >$

   d) $< \alpha A, B > = < A, \alpha B > = \alpha < A, B >$

   e) $< A, \mathbb{O} > = < \mathbb{O}, A > = 0$

   f) $< A, A > = 0$ si y sólo si $A = \mathbb{O}$

   g) $< A, A > > 0$ si y sólo si $A \neq \mathbb{O}$

   h) $| < A, B > | \leq \| A \| \| B \|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

11. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^n$. El **segmento de recta dirigido** de P a Q (en $\mathbb{R}^n$), denotado cómo $\overrightarrow{PQ}$, es el conjunto dado por:

$$\overrightarrow{PQ} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda Q + (1-\lambda)P, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

A P se le llama **punto inicial del segmento** (también se dice que el segmento está anclado en P) y al punto Q se le llama **punto términal del segmento** (o punto final del segmento).

12. Dos segmentos de rectas dirigidos $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ en $\mathbb{R}^n$, son **iguales**, denotado por $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, si $P = R$ y $Q = S$, en caso contrario diremos que son **distintos** y lo denotaremos por $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{RS}$.

13. Dados dos segmentos de rectas dirigidos $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ en $\mathbb{R}^n$, diremos que $\overrightarrow{PQ}$ es **equipolente** a $\overrightarrow{RS}$, denotado por: $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$, si

$$Q - P = S - R$$

14. **Definición geométrica de vector:** El conjunto de todos los segmentos de rectas dirigidos equipolentes a un segmento de recta dado se llama vector. A cualquier segmento de recta en ese conjunto se llama representación del vector. En tal caso, la igualdad de vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ en $\mathbb{R}^n$ se maneja como en el caso de segmentos de rectas.

15. Sean $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ vectores en $\mathbb{R}^n$.

    a) La suma de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ se define como:

    $$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{(P+R)(Q+S)}$$

    b) La multiplicación del número real α por el vector $\overrightarrow{PQ}$ cómo:

    $$\alpha\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(\alpha P)(\alpha Q)}$$

    c) La norma de $\overrightarrow{PQ}$, denotado por $\| \overrightarrow{PQ} \|$, cómo:

    $$\| \overrightarrow{PQ} \| = \| Q - P \|$$

d) El producto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$, denotado por: $<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}>$, cómo:

$$<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}>=<Q-P,S-R>$$

e) $\overrightarrow{PQ}$ tiene la **misma dirección** de $\overrightarrow{RS}$ si $S-R=c(Q-P)$, donde c es un número real mayor que cero.

f) $\overrightarrow{PQ}$ tiene **dirección opuesta** a la de $\overrightarrow{RS}$ si $S-R=c(Q-P)$ donde c es un número real menor que cero.

g) $\overrightarrow{PQ}$ es **paralelo** a $\overrightarrow{RS}$, denotado por $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{RS}$, si $S-R=c(Q-P)$ donde c es un número real distinto de cero.

h) $\overrightarrow{PQ}$ es **ortogonal** (o perpendicular) a $\overrightarrow{RS}$, denotado por $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RS}$, si $<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}>=0$

i) El **angulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$**, denotado cómo $\measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS})$, es el número real dado por:

$$\measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS})=\cos^{-1}\left(\frac{<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}>}{\parallel\overrightarrow{PQ}\parallel\parallel\overrightarrow{RS}\parallel}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{<Q-P,S-R>}{\parallel Q-P\parallel\parallel S-R\parallel}\right)$$

16. Si los vectores están anclados en el origen digamos $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ algunas de las definiciones quedan cómo:

a) A tiene la **misma dirección** de B si $B=cA$ donde c es un número real mayor que cero.

b) A tiene **dirección opuesta** a B si $B=cA$ donde c es un número real menor que cero.

c) A es **paralelo** a B, denotado por $A\parallel B$, si $B=cA$ donde c es un número real distinto de cero.

y así análogamente con el resto de las definiciones.

17. Dados $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{(a_1,b_1,c_1)}$, $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{(a_2,b_2,c_2)}$ en $\mathbb{R}^3$, el **producto vectorial** (producto cruz) de $\overrightarrow{A}$ por $\overrightarrow{B}$, denotado por $\overrightarrow{AxB}$ (o por $\overrightarrow{A}x\overrightarrow{B}$), es el vector de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\overrightarrow{AxB}=\overrightarrow{(b_1c_2-c_1b_2,c_1a_2-a_1c_2,a_1b_2-b_1a_2)}$$

18. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

    a) $Ax\mathbb{O} = \mathbb{O}xA = \mathbb{O} = AxA$

    b) $AxB = -BxA$

    c) $(\alpha A)xB = Ax(\alpha B) = \alpha(AxB)$

    d) $Ax(B + C) = AxB + AxC$

    e) $< AxB, C >=< A, BxC >$

    f) $< A, AxB >= 0 =< B, AxB >$

    g) Si A y B son no nulos, entonces A y B son paralelos si y sólo si $AxB = \mathbb{O}$

19. Dos vectores no nulos son paralelos si y sólo si el angulo entre ellos es 0 o π (0 si tienen la misma dirección, π si tiene dirección opuesta).

20. Dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si el angulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

21. Dados $P \in \mathbb{R}^n$,$V \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, la recta que pasa por P en la dirección de V, denotado por $L_{P,\overrightarrow{V}}$, es el conjunto:

$$L_{P,\overrightarrow{V}} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = P + \alpha V, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

22. La **ecuación vectorial** de la recta $L_{P,\overrightarrow{V}}$ es la ecuación dada por $X = P + \alpha V$

23. Si $X = (x_1, ..., x_n)$,$P = (p_1, ..., p_n)$ y $V = (v_1, ..., v_n)$, las **ecuaciones paramétricas** de la recta $L_{P,\overrightarrow{V}}$, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \alpha v_1 \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_n &= p_n + \alpha v_n \end{aligned}$$

24. Si $X = (x_1, ..., x_n)$,$P = (p_1, ..., p_n)$ y $V = (v_1, ..., v_n)$, la **ecuación cartesiana** de la recta $L_{P,\overrightarrow{V}}$, viene dada por:

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = ... = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

si cada $v_i \neq 0$, si algunos v_i son iguales a cero, en la ecuación aparecen como antes los términos donde los v_k son distintos de cero y se colocan aparte las expresiones $x_i = p_i$, cuando $v_i = 0$.

25. Diremos que las rectas $L_{P,\overrightarrow{V}}$, $L_{Q,\overrightarrow{W}}$ son paralelas, denotado por $L_{P,\overrightarrow{V}} \parallel L_{Q,\overrightarrow{W}}$, si V y W son paralelos.

26. Las rectas $L_{P,\overrightarrow{V}}$, $L_{Q,\overrightarrow{W}}$ son ortogonales (perpendiculares), denotado por $L_{P,\overrightarrow{V}} \perp L_{Q,\overrightarrow{W}}$, si V y W son ortogonales (perpendiculares).

27. Sea $P \in \mathbb{R}^3$, y sean $V, W \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ no paralelos. Definimos el plano que pasa por P y es generado por V, W al conjunto denotado cómo $\prod_{P,\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}}$ y dado por:

$$\prod_{P,\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}} = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = P + \alpha V + \beta W; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

En tal caso a la ecuación $X = P + \alpha V + \beta W$ se la llama **ecuación vectorial** del plano. Por otro lado, si $X = (x, y, z)$,$P = (p_1, p_2, p_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ y $W = (w_1, w_2, w_3)$, se llaman **ecuaciones paramétricas** del plano a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y &= p_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z &= p_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{aligned}$$

Y si N es perpendicular a V y a W (por ejemplo $N = VxW$), se le llama a la ecuación

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

ecuación cartesiana estándar (canónica) del plano y a N se le conoce como: **vector normal** del plano.

28. Sean $\prod_1, \prod_2$ planos en $\mathbb{R}^3$, con vectores normales N_1, N_2 respectivamente, y sea L una recta con vector director V. Entonces:

   a) $\prod_1$ es paralelo a $\prod_2$, denotado por $\prod_1 \parallel \prod_2$, si $N_1 \parallel N_2$.
   b) $\prod_1$ es perpendicular a $\prod_2$, denotado por $\prod_1 \perp \prod_2$, si $N_1 \perp N_2$.
   c) $\prod_1$ es paralelo a L, denotado por $\prod_1 \parallel L$, si $N_1 \perp V$.
   d) $\prod_1$ es perpendicular a L, denotado por $\prod_1 \perp \prod_2$, si $N_1 \parallel V$.

1.3. Observaciones

1. Se escribirá en ocasiones $-\alpha A$ en lugar de $(-\alpha)A$, para abreviar.

2. Las propiedades distributivas se pueden generalizar cómo sigue:

$$(\alpha_1 + ... + \alpha_k)A = \alpha_1 A + ... + \alpha_k A$$

$$\alpha(A_1 + ... + A_k) = \alpha A_1 + ... + \alpha A_k$$

3. $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{QP}$ (al menos que P sea igual a Q).

4. Las relaciones de paralelismo y de equipolencia son relaciones de equivalencia, por lo tanto podemos decir que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos o equipolentes en lugar de $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overrightarrow{RS}$ o $\overrightarrow{PQ}$ es equipolente a $\overrightarrow{RS}$ respectivamente.

5. Las relaciones de ortogonalidad, dirección opuesta y misma dirección son simétricas, así por ejemplo si $\overrightarrow{PQ}$ es ortogonal a $\overrightarrow{RS}$, entonces $\overrightarrow{RS}$ es ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$, por ello se puede decir que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son ortogonales (igual para dirección opuesta y misma dirección).

6. El angulo entre dos vectores se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$

7. No es dificil notar que $\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) = \measuredangle(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{PQ})$, así que se puede decir: el angulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ o el angulo entre $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PQ}$

8. Dos rectas $L_{P,\overrightarrow{V}}$, $L_{P,\overrightarrow{W}}$ que pasan por el mismo punto P son iguales si y sólo si V y W son paralelos. Por otro lado, dos rectas $L_{P,\overrightarrow{V}}$, $L_{Q,\overrightarrow{V}}$ en

la dirección de un mismo vector V son iguales si y sólo si $Q \in L_{P,\overrightarrow{V}}$ (o $P \in L_{Q,\overrightarrow{V}}$)

Es decir, una misma recta se puede escribir de formas distintas.

9. Muy importante a la hora de realizar ejercicios es el siguiente resultado:

   Dada una recta $L_{P,\overrightarrow{V}}$ y un punto $Q \notin L_{P,\overrightarrow{V}}$, existe una y sólo una recta L' que contiene Q y es paralela a L, a saber $L'_{Q,\overrightarrow{V}}$.

10. Dos puntos distintos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ pasa una y sólo una recta, a saber $L_{P,\overrightarrow{Q-P}}$ (también se puede escribir cómo $L_{Q,\overrightarrow{Q-P}}$, y obviamente se trata de la misma recta).

    Esto es muy importante, pues nos dice que no sólo hace falta conocer un punto de una recta y un vector director de ella para conocer su ecuación, sino que esto también se puede hacer si conocemos dos puntos distintos por los que pasa la recta.

    En la teoría de planos valen unos resultados similares, a saber:

11. Dos planos con iguales vectores directores (generadores) $\prod_{P,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$ y $\prod_{Q,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$ son iguales si $Q \in \prod_{P,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$ (o $P \in \prod_{Q,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$).

12. Dado el plano $\prod_{P,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$ y $Q \notin \prod_{P,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$, existe un plano y sólo uno que contiene a Q y es paralelo a $\prod_{P,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$, a saber $\prod_{Q,\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}$

13. Por tres puntos distintos P, Q, R que no están todos en una misma recta pasa uno y sólo un plano, a saber $\prod_{P,\overrightarrow{Q-P},\overrightarrow{Q-R}}$, otras formas de escribir este plano podrían ser $\prod_{P,\overrightarrow{P-Q},\overrightarrow{P-R}}$, $\prod_{Q,\overrightarrow{R-P},\overrightarrow{Q-R}}$

1.4. Ejercicios resueltos

1. Determine x real, de tal manera que los vectores $A = (1, 2, 3, 4)$ y $B = (0, x, 4, -2)$ sean ortogonales.

   Solución:

   Recordemos que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= < A, B > \\ &= < (1,2,3,4), (0,x,4,-2) > \\ &= 1 \cdot 0 + 2x + 3 \cdot 4 + 4(-2) \\ &= 0 + 2x + 12 - 8 \\ &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Luego al despejar, nos da $x = -2$

$\square$

2. Determine x, y, z reales, de tal manera que los vectores $A = (1,2,3,4)$ y $B = (y, x, z, -2)$ sean paralelos.

   Solución:

   Recordemos que dos vectores son paralelos si existe α real no nulo tal que $A = \alpha B$.

$$\begin{aligned} A = \alpha B &\Rightarrow (1,2,3,4) = \alpha(y, x, z, -2) \\ &\Rightarrow (1,2,3,4) = (\alpha y, \alpha x, \alpha z, -2\alpha) \\ &\Rightarrow 1 = \alpha y, 2 = \alpha x, 3 = \alpha z, 4 = -2\alpha \end{aligned}$$

   Despejando α en la cuarta ecuación tenemos $\alpha = \dfrac{4}{-2} = -2$. Luego sustituimos este valor en las otras ecuaciones y tenemos:

$$1 = -2y, 2 = -2x, 3 = -2z$$

   Por último despejamos x, y, z y tenemos:

$$x = -1, y = \frac{-1}{2}, z = \frac{-3}{2}$$

$\square$

3. Encuentre la ecuación de una recta que pase por el punto $S = (1, 0, -7)$ y sea perpendicular a la recta

$$L' : x - 8 = \frac{z - 5}{-6}, y = -3$$

Solución: Ya tenemos un punto por donde pasa la recta (S), ahora debemos encontrar un vector director para la recta, digamos $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{(a, b, c)}$, como nos dicen que la recta es perpendicular a la recta L', ahora si $\overrightarrow{V}$ es vector director de L', por definición de rectas perpendiculares tenemos que $< W, V >$.

L' está en forma cartesiana estándar, por lo que tenemos que $V = (1, 0, -6)$. Entonces,

$< W, V > = < (a, b, c), (1, 0, -6) > = 0$, lo que nos da $< W, V > = a - 6c = 0$
Notemos que nos da que $a = 6c$ y b puede ser cualquier número real, lo que quiere decir que existen infinitos vectores W con las caracteristicas requeridas.
Si $c = 1$ y $b = 1$, nos da $a = 6{,}1 = 6$, así hemos encontrado $W = (6, 1, 1)$.
Luego la ecuación cartesiana de la recta que pasa por S y con vector director W viene dada por:

$$\frac{x - 1}{6} = y = z + 7$$

$\square$

4. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $P = (1, 0, -2)$ y que es paralelo al plano de ecuación $-x - 2y + 4z = 15$.

Solución: Ya tenemos un punto por donde pasa el plano (P), nos falta encontrar entonces un vector normal al plano. Ahora, como es paralelo al plano de ecuación $x - 3y + 4z = 5$, nos sirve como vector normal de nuestro plano cualquier vector paralelo al vector normal de $-x - 2y + 4z = 15$, en particular un vector normal de $-x - 2y + 4z = 15$

será vector normal del plano buscado.
Un vector normal de $-x-2y+4z=15$ viene dado por $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{(-1,-2,4)}$

$$\begin{aligned} < N, X-P > &= < (-1,-2,4),(x,y,z)-(1,0,-2) > \\ &= < (-1,-2,4),(x-1,y,z+2) > \\ &= -x+1-2y+4z+8 \\ &= -x-2y+4z+9 \end{aligned}$$

La ecuación del plano viene dada así por $-x-2y+4z=-9$.

$\square$

1.5. Autoevaluación

Para cada una de las siguientes proposiciones, identifica cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F).

1. Los vectores $(1,2,3,4)$ y $(4,3,2,1)$ son iguales. ( )
2. Los vectores $(1\cdot 0, 3-2, 2^2)$ y $(0,1,4)$ son iguales. ( )
3. La norma del vector $A=(a_1,...,a_n)$ se define cómo
$$\| A \| = a_1^2 + ... + a_n^2 \qquad ()$$
4. Si A es un vector y α un número real, entonces se cumple que:
$$\| \alpha A \| = \alpha \| A \| \qquad ()$$
5. Si dos segmentos de rectas son equipolentes, entonces son paralelos. ( )
6. Si dos segmentos de rectas son ortogonales, entonces tienen dirección opuesta. ( )
7. Dos rectas son paralelas si sus vectores directores (respectivos) son paralelos.( )
8. Dos planos son ortogonales si sus respectivos vectores normales son ortogonales.( )
9. Un plano es paralelo a una recta si el vector normal del plano es paralelo al vector director de la recta. ( )
10. Una misma recta se puede escribir de distintas formas. ( )

1.6. Ejercicios propuestos

1. Demuestre las partes que no se probaron de los teoremas 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 del texto.

2. Dados $A = (1, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (-5, 2)$

   a) Encuentre: $8A$, $\quad A + B$, $\quad C - 3B$, $\quad 4(A + B) - 3C$, $\quad || A ||$

   b) Dibuje A, B y C en el plano cartesiano.

   c) Dibuje $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{(A + B)C}$ en el plano cartesiano.

   d) Determine el angulo entre A y B.

   e) Diga si A es paralelo a B.

   f) Determine si A es ortogonal a C.

3. Dados $A = (1, 2, 3)$, $B = (-3, 0, 5)$, $C = (2, 4, 6)$, $D = (1, 7, -5)$ $E = (1/2, 3/2, -3)$

   a) Encuentre:
   $A + 5B$, $\quad A - C + E$, $\quad -2(4(D - E) + B) + A$, $\quad AxB$
   $AxD + C$, $\quad (AxB)xC$, $\quad < A, B >$, $\quad < A, D >$
   $< C + 3B, E - 2A >$, $\quad || A ||$, $\quad || B ||$, $\quad || C + E ||$, $\quad || \overrightarrow{C} ||$
   $|| \overrightarrow{AB} ||$ $\quad || 2A - 5B ||$ $\quad || 3B + C || + < C - D, E + A >$

   b) Dibuje en el espacio los puntos A, B, C, D, E, AxB

   c) Dibule en el espacio los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{ED}$

   d) Encuentre el angulo entre A y B, el angulo entre C y D, y el angulo entre A y D.

   e) ¿Son A y C paralelos? ¿son B y D paralelos?

   f) ¿Son C y D ortogonales? ¿son A D paralelos?

4. Si $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 3, 6, 0)$. Encuentre:
   $A - 8B$, $\quad < 2A + B, 4B >$, $\quad || \overrightarrow{AB} ||$ $\quad$ y el angulo entre A y B.

5. Encuentre los números reales x, y, z tales que los puntos A y B sean iguales si:

   a) $A = (x, y, 3)$ y $B = (4, y + 3, z + 4)$

b) $A = (x, y+4, z-3)$ y $B = (2-x, 3y-4, 0)$

c) $A = (1, -x, y^2, 1-z)$ y $B = (z, x+2, 2y+1, 0)$

6. Encuentre un vector paralelo a $A = (1, -4, 6, 8)$ que tenga longitud igual a 4.

7. Encuentre un vector con dirección opuesta a $A = (0, -4, 5, 1)$ y con longitud igual a 3.

8. Encuentre un vector con la misma dirección de $A = (1, -5, 0)$ que tenga longitud igual a 2.

9. Encuentre un vector ortogonal a $A = (1, -4, 6)$ tal que su segunda coordenada sea 3.

10. Encuentre un vector ortogonal a $A = (2, -5, 8, 1)$ tal que su primera coordenada sea 0 y su tercera coordenada sea -2.

11. Dibuje las rectas $L_1 : \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z-1}{8}$

    $L_2 : \dfrac{x}{5} = y - 5 = \dfrac{z-1}{2}$; $L_3 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{-z-1}{-4}$

12. Diga cuáles de las rectas anteriores son ortogonales o paralelas entre si.

13. Dibuje los planos

    $\prod_1 : x + 2y - z = 1$; $\prod_2 : 3x - 2y + 4z = 4$; $\prod_3 : 2x - 5z = 2$

    $\prod_4 : 2y + z = 1$; $\prod_5 : 2x + 4y - 2z = 0$; $\prod_6 : y = 1$

14. Diga cuáles de los planos anteriores son ortogonales o paralelos entre si.

15. Para cada una de las rectas del ejercicio 9, diga cuáles de los planos del ejercicio 11 son ortogonales o paralelos a ella.

16. Sean $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -4, 9)$, $C = (8, 0, 1/2)$, $D = (4, 0, 1/4)$

    a) Encuentre la ecuación cartesiana estándar de la recta que pasa por A y D. Dibuje la recta.

    b) Encuentre la ecuación cartesiana estándar de la recta que pasa por A y C. Dibuje la recta.

c) Determina si las dos rectas dos anteriores son paralelas o perpendiculares.

d) Encuentre la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos A, B y C. Dibuje el plano.

17. Encuentre en cada caso una recta con las condiciones dadas. Además dibuje la recta cuando sea posible.

a) Pasa por el punto $P = (2, 6, 8, 0)$ con vector director $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{(1, 4, 3, 9)}$

b) Pasa por el punto $P = (2, 6, 8)$ y es paralela a la recta de ecuación

$$L : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{3}$$

c) Pasa por el punto $P = (1, 4, -3)$ y es ortogonal a la recta de ecuación

$$L : x - 2 = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{3}$$

d) Pasa por la intersección de las rectas
$L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-1}{3}$ y $L_2 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = z - 2$
con vector director igual a $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{(5, -7, 1)}$

e) Pasa por el punto $P = (1, 2)$ y es ortogonal a la recta
$L : x - 3 = \dfrac{y-4}{5}$

f) Pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$ y es ortogonal a las rectas
$L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-1}{3}$ y $L_2 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = z - 2$
Existen infinitas rectas con esta propiedad. Encuentre sólo una.

18. Encuentre en cada caso la ecuación vectorial y cartesiana del plano con las condiciones dadas. Además dibuje el plano. Algunos ejercicios pueden tener infinitas soluciones, en tales casos encuentre sólo una.

a) Pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ con vectores directores $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$ y $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{(1, -1, 0)}$

b) Pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ y tiene al vector $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{(1/3, 8, -7)}$ como vector normal

c) Pasa por el punto $A = (-6, 5, 0)$ y es paralelo al plano $\prod_1$ de ecuación $x - y + 3z = 9$

d) Pasa por el punto $A = (4, 6, -7)$ y es ortogonal al plano $\prod_1$ de ecuación $x - y + 3z = 9$

e) Pasa por el punto $A = (1/3, 4/7, 1)$ y es ortogonal a los planos $\prod_1$ y $\prod_2$ de ecuaciones $3x + z = 0$, $x + \dfrac{y}{3} - \dfrac{3z}{2} = 1$ respectivamente.

f) Pasa por el punto de intersección de las rectas
$L_1 : \dfrac{x}{2} = y - 1 = z - 2$ y $L_2 : x - 3 = \dfrac{y+1}{-3} = z - 4$
con vector normal $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{(1, 0, -2/5)}$

1.7. Referencias bibliográficas

1. Apostol, Tom. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté. Segunda edición, 1967.

2. Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.

3. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.

4. Gutiérrez, Ronald. Guía Didáctica de Álgebra Lineal. 2011.

5. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.

6. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.

7. Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

Capítulo 2

MATRICES

La presentación de la teoría de matrices es similar a la de la teoría de vectores. Primeramente se define una matriz de orden m por n con componentes reales; luego se definen las operaciones que se pueden efectuar con las matrices, las cuales heredan propiedades de sus componentes. Después, se pasa luego al tema de las operaciones elementales por filas y se concluye el capítulo con el tema de las matrices invertibles.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Matriz.
2. Coeficientes.
3. Orden de una matriz.
4. Matrices: cuadradas, nulas, identidad, diagonales, escalares, triangulares superiores, triangulares inferiores.
5. Suma de matrices.
6. Producto por escalar.
7. Transpuesta.
8. Producto de matrices.
9. Operaciones elementales por filas (oef).
10. Matrices equivalentes.

11. Forma escalonada por filas.
12. Forma escalonada reducida por filas.
13. Rango de una matriz.
14. Matriz invertible.
15. Matriz ampliada.

2.1. Objetivos específicos

1. Resolver problemas mediante las operaciones con matrices definidas.
2. Llevar una matriz a forma escalonada por filas
3. Determinar la forma escalonada reducida por filas de una matriz.
4. Determinar si una matriz es invertible o no, y en caso afirmativo encontrar la inversa de la matriz.
5. Demostrar propiedades básicas de la teoría de matrices.

2.2. Resúmen teórico

1. Dados enteros $m, n \geq 1$. Una **matriz de orden m por n (mxn)** en $\mathbb{R}$ es un arreglo rectangular con m filas y n columnas, representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

   Donde los a_{ij} son números reales, llamados **coeficientes** (componentes ó entradas) de la matriz A.

2. Al conjunto de todas las matrices de orden mxn sobre $\mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{M}_{mxn}(\mathbb{R})$, aunque nosotros sólo escribiremos $\mathbb{M}_{mxn}$.

3. Si una matriz tiene igual número de filas que de columnas diremos que la matriz es cuadrada.

4. Dos matrices $A = [a_{ij}]_{mxn}$ y $B = [b_{ij}]_{mxn}$ son iguales, lo cual denotaremos cómo $A = B$, si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$ y todo $j \in \{1, ..., n\}$.

5. Una matriz que posee sólo una columna es llamada **matriz unicolumna** ó **matriz columna**, por otro lado, una matriz que posee una sola fila se llama **matriz unifila** ó **matriz fila**. Ahora una matriz de orden mxn con todas sus componentes iguales a 0, se llama **matriz nula** y se denota por $\mathbb{O}_{mxn}$.

6. Una matriz canónica de orden mxn, denotada por E_{kl}, dada por $E_{kl} = [e_{ij}]_{mxn}$, donde $e_{ij} = 1$ si i=k y j=l y $e_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.

7. A una matriz cuadrada de orden nxn se le llama **matriz identidad**, denotada por I_n, si $I_n = [a_{ij}]_{nxn}$ es tal que $a_{ij} = 1$ si i=j y $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.

8. A una matriz cuadrada de orden nxn, $A = [a_{ij}]_{nxn}$ se le llama **matriz diagonal**, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

9. A una matriz cuadrada de orden nxn, $A = [a_{ij}]_{nxn}$ se le llama **matriz escalar**, si es una matriz diagonal pero además $a_{ij} = a$ siempre que $i = j$ $(a \in \mathbb{R})$.

10. A una matriz cuadrada de orden nxn, $A = [a_{ij}]_{nxn}$ se le llama **matriz triangular superior**, si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

11. A una matriz cuadrada de orden nxn, $A = [a_{ij}]_{nxn}$ se le llama **matriz triangular inferior**, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

12. La **adición usual de matrices** (adición de matrices), es la operación entre matrices del mismo orden, denotado por +, tal que a las matrices $A = [a_{ij}]_{mxn}, B = [b_{ij}]_{mxn} \in \mathbb{M}_{mxn}$ le asocia una matriz (suma de A + B) $A + B = C = [c_{ij}]_{mxn}$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i y para todo j.

13. La **multiplicación usual de escalar por una matriz** es la operación que asocia un número real α y una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ con una matriz

(producto de α por A) $\alpha A = B = [b_{ij}]_{mxn}$, donde $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todo i y para todo j.

14. La **transpuesta** de una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, denotada por A^T, es la matriz $A^T = [b_{kl}]_{nxm}$, donde $b_{kl} = a_{lk}$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$ y todo $l \in \{1, ..., m\}$.

15. Una matriz $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ se dice que es **simétrica** si $A = A^T$, y se dice que es **antisimétrica** si $A = -A^T$.

16. $\forall A, B, C \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

    a) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
    b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (propiedad asociativa)
    c) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ (elemento neutro)
    d) $A + (-A) = -A + A = \mathbb{O}$ (elemento simétrico)
    e) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributiva)
    f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributiva)
    g) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A$
    h) $1.A = A$; $0.A = \mathbb{O}$; $\alpha\mathbb{O} = \mathbb{O}$
    i) $A + B = A + C \Rightarrow B = C$ (ley de cancelación)
    j) $\alpha A = \mathbb{O} \Rightarrow \alpha = 0 \vee A = \mathbb{O}$
    k) $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; $(A^T)^T = A$

    La matriz nula es la única matriz que cumple con c; por otro lado, para una matriz A, $-A$ es la única matriz que cumple con d y se le llama **elemento simétrico** de A.

17. Dadas $A = [a_{ik}]_{mxp}$ y $B = [b_{kj}]_{pxn}$, definimos la **matriz producto** de A por B, denotado por AB, a la matriz $AB = [c_{ij}]_{mxn}$, donde

    $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

    para todo $i \in \{1, ...m\}$ y para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

18. $\forall A \in \mathbb{M}_{mxn}$ se tiene: $A\mathbb{O}_{nxl} = \mathbb{O}_{mxl}$, $\mathbb{O}_{pxm}A = \mathbb{O}_{pxn}$

19. $\forall A \in \mathbb{M}_{mxn}$ se cumple que: $AI_n = A$, $I_m A = A$

20. $\forall A \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall B \in \mathbb{M}_{nxp}$, $\forall C \in \mathbb{M}_{pxl}$ se cumple que: $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa).

21. $\forall A \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall B, C \in \mathbb{M}_{nxp}$ se cumple que: $A(B + C) = AB + AC$ (propiedad distributiva).

22. $\forall A, B \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall C \in \mathbb{M}_{nxp}$ se cumple que: $(A + B)C = AC + BC$ (propiedad distributiva).

23. $\forall A, B \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

24. $\forall A \in \mathbb{M}_{mxn}$, $\forall B \in \mathbb{M}_{nxp}$ se cumple que $(AB)^T = B^T A^T$.

25. Una operación elemental por fila (oef) es cualquier correspondencia (función) que asocia a cada matriz de $A \in \mathbb{M}_{mxn}$ una matriz de $\mathbb{M}_{mxn}$ de alguno de los siguientes tipos:

    a) **Tipo I**: Multiplicación de una fila de A (digamos la fila i) por un número real no nulo α, esto lo denotaremos por $f_i \to \alpha f_i$

    b) **Tipo II**: Sustitución de una fila de A (digamos la fila i) por la suma de dicha fila y un múltiplo no nulo (α) de otra fila de A (digamos la fila j), esto lo denotaremos por $f_i \to f_i + \alpha f_j$

    c) **Tipo III**: Intercambio de dos filas A, esto lo denotaremos por $f_i \leftrightarrow f_j$

26. A es **equivalente por filas** a B ($A, B \in \mathbb{M}_{mxn}$), denotado por $A \sim B$, si existe una secuencia finita de oef $e_1, ..., e_k$ tales que $(e_k \circ ... \circ e_1)(A) = B$ (es decir que de A se puede llegar hasta B por medio de un número finito de oef).

27. $A = [a_{ij}]_{mxn}$ se dice que está en **forma escalonada por fila**s si es la matriz nula o en caso contrario, satisface la siguientes condiciones:

    a) Las filas nulas de la matriz (si las hay) son las últimas de la matriz

    b) Si $a_{1j_1}, ..., a_{rj_r}$ son los primeros coeficientes no nulos de cada fila no nula (los cuales son llamados pivotes de A), entonces

    $$j_1 < ... < j_r$$

28. Para toda matriz $A \in \mathbb{M}_{mxn}$, existen matrices escalonadas por filas equivalentes a A. Mas aún si B y C son matrices escalonadas por filas equivalentes a A (y por tanto equivalentes B y C entre ellas), entonces B y C tienen el mismo número de filas; al número de filas no nulas de B (o C) llamaremos **rango de** A y lo denotaremos por $r(A)$.

29. $A \in \mathbb{M}_{mxn}$ se dice que está en **forma escalonada reducida por filas**; si está en forma escalonada por filas pero además todos sus pivotes son iguales a uno y los coeficientes por 'encima' de los pivotes son cero.

30. Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida por filas, pero una matriz escalonada reducida por filas puede ser equivalente a distintas matrices.

31. Una matriz $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ se dice que es **invertible** (o no singular) si existe $B \in \mathbb{M}_{nxn}$ tal que
$$AB = BA = I_n$$

32. Si $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ es invertible, entonces la matriz B en $\mathbb{M}_{nxn}$ tal que $AB = BA = I_n$ es única. A tal B la llamaremos **inversa** de A y la denotaremos por $B = A^{-1}$

33. Si $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ es invertible, su inversa también es invertible, más aún $(A^{-1})^{-1} = A$

34. Si $A, B \in \mathbb{M}_{nxn}$ son invertibles, entonces AB es invertible y su inversa viene dada por $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

35. Si para $A \in \mathbb{M}_{nxn}$, existen $P, Q \in \mathbb{M}_{nxn}$, tales que $AP = I_n$ y $QA = I_n$, entonces A es invertible y $Q = P = A^{-1}$

36. Si para $A \in \mathbb{M}_{nxn}$, existe $P \in \mathbb{M}_{nxn}$, tal que $AP = I_n$ ó $PA = I_n$, entonces A es invertible y $P = A^{-1}$

37. Si $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ es invertible y $X, Y \in \mathbb{M}_{nxm}$ son tales que $AX = AY$, entonces $X = Y$

38. Si $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ es invertible, entonces para todo $Y \in \mathbb{M}_{nxm}$ existe un único $X \in \mathbb{M}_{nxm}$ tal que $AX = Y$, tal X viene dado por $X = A^{-1}Y$.

2.3. Observaciones

1. En ocasiones es conveniente escribir una matriz A de la forma $A = [a_{ij}]_{mxn}$, sobre todo esto es muy conveniente a la hora de realizar demostraciones.

2. Se escribirá en ocasiones $-\alpha A$ en lugar de $(-\alpha)A$, para abreviar, así por ejemplo escribiremos $-A$, en lugar de $(-1)A$.

3. La transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior (y viceversa).

4. Si una matriz es antisimétrica su diagonal principal debe estar formada por sólo ceros.

5. Las únicas matrices que son simétricas y antisimétricas a la vez son las matrices nulas.

6. Si una matriz no es simétrica no es automáticamente antisimétrica (y viceversa), es decir, existen matrices que no son ni simétricas ni antisimétricas.

7. Las propiedades distributivas se pueden generalizar cómo:

$$(\alpha_1 + ...\alpha_k)A = \alpha_1 A + ... + \alpha_k A$$

$$\alpha(A_1 + ... + A_k) = \alpha A_1 + ... + \alpha A_k$$

8. Para multiplicar A por B, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B, por lo que el orden es importante al multiplicar; es decir, con esto se ve que AB no es necesariamente igual a BA, es más, es posible que BA no se pueda multiplicar. Notemos también que AB tiene el número de filas que posee A y el número de columnas de B.

9. Para cada oef, existe una oef del mismo tipo que es su inversa, a saber:

   - La inversa de $f_i \to \alpha f_i$, viene dada por $f_i \to \dfrac{1}{\alpha} f_i$
   - La inversa de $f_i \to f_i + \alpha f_j$, viene dada por $f_i \to f_i - \alpha f_j$
   - La inversa de $f_i \leftrightarrow f_j$, viene dada por $f_i \leftrightarrow f_j$

10. Las matrices equivalentes por filas tienen igual rango.

11. El rango de una matriz siempre es menor o igual a su número de columnas.

12. Solamente una matriz nula tiene rango igual a cero

13. Si dos matrices tienen igual rango no necesariamente son equivalentes.

14. No toda matriz reducida por filas es escalonada reducida por filas (por definición toda matriz escalonada reducida por filas es escalonada por filas).

15. Las matrices equivalentes por filas son equivalentes a la misma matriz escalonada reducida por filas

16. El rango de una matriz puede buscarse también por medio de la matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz

17. En ocasiones nos referiremos a la matriz escalonada reducida por filas equivalente a una matriz, como **su forma escalonada reducida por filas**.

18. Si $A \in \mathbb{M}_{nxn}$ es invertible, su forma escalonada reducida por filas es I_n, por lo tanto su rango será n.

19. **PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ INVERTIBLE**

    Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{nxn}$, para conocer si es o no invertible, y encontrar en caso afirmativo la inversa de la matriz se procede cómo sigue:

    a) Se escribe la matriz A y a su derecha se escribe I_n, obteniendo así una matriz de orden $nx(2n)$.

    b) Se lleva la matriz obtenida en el paso anterior a forma escalonada reducida por filas.

    c) Si la parte izquierda de la matriz obtenida en la parte anterior es I_n, la matriz A es invertible y la matriz de la parte derecha obtenida en el paso anterior sería su inversa. Si la matriz de parte izquierda no es I_n, entonces A no es invertible.

2.4. Ejemplo

Determine si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ es invertible. De serlo, encuentre A^{-1}.

Solución:

Por procedimiento, escribimos la matriz A y a su derecha I_4.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llevemos esta matriz a forma escalonada reducida por filas.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \to \frac{1}{3}f_3}{\overset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_4 \to f_4 - 2f_1}{\overset{f_2 \to f_2 - 2f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_2 \leftrightarrow f_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\overset{f_2 \to \frac{1}{3}f_4}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{2} f_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_2 \to f_2 - 2f_3}{\xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 4/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3 \to f_3 - (1/2)f_4}{\xrightarrow{\substack{f_1 \to f_1 - (1/2)f_4 \\ f_2 \to f_2 - 2f_4}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$$

Como la matriz del lado izquierdo nos da I_4, concluimos que A es invertible y su inversa viene dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ -1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

□

2.5. Autoevaluación

1. Para cada una de las siguientes proposiciones, identifica cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F).

   a) Una matriz cuadrada es nula si todos los números de su diagonal principal son cero. ( )

   b) La matriz identidad es aquella que posee todos los elementos de su diagonal principal iguales a uno. ( )

   c) Toda matriz escalar es una matriz diagonal. ( )

   d) Toda matriz triangular superior es escalonada por filas. ( )

   e) Ninguna matriz triangular superior es escalonada reducida por filas. ( )

f) El rango de una matriz es el número de filas no nulas de la matriz. ( )

g) Una matriz es invertible si y sólo si es escalonada reducida por fila. ( )

h) Si una matriz es antisimétrica, entonces todos los elementos de su diagonal principal son todos ceros. ( )

i) Si una matriz es igual a su transpuesta, entonces es escalar. ( )

j) El rango de una matriz siempre es menor o igual a su número de filas. ( )

2. Diga cuáles de las siguientes matrices son diagonales, escalares, triangulares superiores, triangulares inferiores, simétricas y/o antisimétricas.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \\ -7 & 0 & 9 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 3 & 8 \\ -1 & -6 & -8 & 4 \end{pmatrix},\ B_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

2.6. Ejercicios propuestos

1. Diga cuáles de las siguientes matrices son diagonales, escalares, triangulares superiores, triangulares inferiores, simétricas y/o antisimétricas.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 0 & 8 \\ -1 & -6 & -8 & 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \\ -4 & 0 & 5 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Demuestre las partes que no se probaron del teorema 2.2.1 del texto.

3. Consideremos las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Encuentre las matrices:
$A + B$, $2C$, $A - 3B$, $A + 2B - C$, AB, $A + BC$, A^t,$(A - 4B)^t$

4. Para las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 10 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 7 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$
encuentre:
AB, CA, BC,$(AB)^t$

5. Lleve cada una de las siguientes matrices a su forma escalonada reducida por filas, y encuentre el rango de cada matriz.
$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 10 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 7 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C_8 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C_9 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Demuestre el teorema 2.4.1 del texto.

7. Determine cuáles de las siguientes matrices son invertibles; para aquellas que lo sean encuentre su inversa.
$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$, $B_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,$B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$B_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$,$B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_9 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2.7. Referencias bibliográficas

1. Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.

2. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.

3. Gutiérrez, Ronald. Guía Didáctica de Álgebra Lineal. 2011.

4. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.

5. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.

6. Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

Capítulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este capítulo estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales tanto homogéneos, como no-homogéneos. No se demostrará ningún teorema ni se le pedirá al lector hacerlo.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Ecuación lineal.
2. Sistema de ecuaciones lineales (homogéneos, no-homogéneos).
3. Matriz ampliada.
4. Conjunto solución de un sistema.

3.1. Objetivos específicos

1. Determinar si un sistema de ecuaciones lineales es no homogéneo ó es homogéneo.
2. Determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución (consistente) o no.
3. Encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales consistente.

3.2. Resúmen teórico

1. Una **ecuación lineal** con n incógnitas es cualquier expresión del tipo

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

donde $x_1, ..., x_n$ representan las **incógnitas** (variables) de la ecuación, los números reales $a_1, ..., a_n$ se llaman **coeficientes** de la ecuación y $b \in \mathbb{R}$ es llamado **término independiente** de la ecuación. Una solución de ésta ecuación lineal es cualquier n-úpla $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que al sustituir sus valores ordenadamente en ella, esa identidad se satisface, es decir,

$$a_1t_1 + ... + a_nt_n = b$$

La ecuación se puede expresar como una ecuación matricial, a saber

$$\begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

Estas matrices reciben el nombre de **matriz de coeficientes**, **matriz de incógnitas** y **matriz independiente** respectivamente.

2. Un **sistema de ecuaciones lineales** con m ecuaciones y n incógnitas es cualquier colección de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, ..., x_n$ representan las **incógnitas** o variables del sistema, a los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se les llaman **coeficientes** del sistema y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ son llamados **términos independientes** del sistema. Si $b_1 = ... = b_m = 0$, se dice que el sistema es **homogéneo**; en caso contrario se dice que es **no homogéneo**.

El sistema se puede escribir en **forma matricial** cómo $AX = b$, donde $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

son llamadas respectivamente **matriz del sistema**, **matriz de las incógnitas** y **matriz de los términos independientes**. Una solución de tal sistema (si existe) es cualquier n-úpla $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ que es simultáneamente solución de cada una de las ecuaciones del sistema, es decir

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + ... + a_{1n}t_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}t_1 + ... + a_{mn}t_n = b_m \end{cases}$$

3. Un sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, se dice que es **consistente**, si tiene solución; en caso contrario se dice que es **inconsistente**

4. Si un sistema $AX = b$ es consistente y tiene solamente una solución, se dice que el sistema es **consistente determinado**. Si tiene infinitas soluciones se dice que el sistema es **consistente indeterminado** (cuando un sistema es consistente estas son las únicas opciones en cuanto se refiere a las soluciones)

5. Se conoce cómo matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales a la matriz de orden $mx(n+1)$ dado por $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$

6. Dados los sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$, $CX = d$ con $A, C \in \mathbb{M}_{mxn}$,$b, d \in \mathbb{M}_{mx1}$, decimos que los sistemas son equivalentes si $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ y $\left(\begin{array}{c|c} C & d \end{array} \right)$ son equivalentes por filas.

7. Si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, entonces tienen las mismas soluciones (por supuesto si uno no tiene solución el otro tampoco la tendrá)

8. Dado el sistema $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ con $A \in \mathbb{M}_{mxn}$, si

$$r(A) \neq r\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$$

entonces el sistema es inconsistente.

9. Dado el sistema $\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ con $A \in \mathbb{M}_{mxn}$, si

$$r(A) = r\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) = n$$

entonces el sistema es consistente determinado.

10. Dado el sistema $\begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix}$ con $A \in \mathbb{M}_{mxn}$, si
$$r(A) = r\begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix} = r < n$$
entonces el sistema es consistente indeterminado.

3.3. Observaciones

1. Los sistemas homogéneos siempre tienen solución.
2. Escribiremos el conjunto de todas las soluciones de un sistema cómo $\mathcal{S}(A, b)$ (A y b la matriz y matriz de los términos independientes del sistema respectivamente). Si el sistema es homogéneo su solución se escribe cómo $\mathcal{S}(A)$. Recordemos que para un sistema no homogéneo el conjunto solución puede ser vacío.

3.4. Ejercicios resueltos

1. Dado el sistema
$$\begin{cases} 2x + y + 3z + w = 4 \\ x - z = -2 \end{cases}$$
Encuentre su conjunto solución.

Solución:

La matriz ampliada del sistema viene dada por:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz ampliada del sistema, por lo tanto el sistema tiene solución.
El rango de la matriz del sistema es dos, y tiene cuatro columnas, lo

que quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones (dos variables libres).
El sistema asociado a la última matriz viene dado por:

$$\left\{\begin{array}{c} x - z = -2 \\ y + 5z + w = 8 \end{array}\right.$$

Entonces,

$$\begin{array}{c} x = z - 2 \\ y = -5z - w + 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) \in \mathcal{S}(A, b) \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y, z, w) = (z - 2, -5z - w + 8, z, w) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z, w) = (-2, 8, 0, 0) + (z, -5z, z, 0) + (0, -w, 0, w) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z, w) = (-2, 8, 0, 0) + z(1, -5, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1)\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}(A, b) = \{(-2, 8, 0, 0) + \alpha(1, -5, 1, 0) + \beta(0, -1, 0, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

2. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + z = 4 \\ x - y = -1 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$$

encuentre (si existe) su conjunto solución.

Solución: La matriz ampliada del sistema viene dada por

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{2} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - (1/2) f_3]{f_1 \to f_1 - (1/2) f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como vemos la matriz del sistema y la matriz ampliada del sistema tienen igual rango, así que el sistema tiene solución.
Como el rango de la matriz del sistema es igual a su número de columnas, concluimos que el sistema tiene solución única
El sistema asociado a la última matriz viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3/2 \\ y = 5/2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}(A, b) = \{(3/2, 5/2, 1)\}$$

$\square$

3.5. Autoevaluación

1. Para cada una de las siguientes proposiciones, identifica cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F).

a) Todo sistema homogéneo tienen solución. ( )

b) Los sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto solución. ( )

c) Existen sistemas que sean homogéneos y no homogéneos. ( )

d) Si el rango de la matriz de un sistema es igual al rango de la matriz ampliada del sistema, entonces el sistema tiene una única solución. ( )

e) Si el rango de la matriz ampliada de un sistema es igual al número de incógnitas del sistema, entonces el sistema tiene solución. ( )

2. Diga cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales y cuáles no.

a) $\begin{cases} x + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ y - x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 3z - 4w = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 1 \\ 2x^3 + y^3 - 3w^3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + 3y + z + 4w = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 8w = -1 \\ 3z + \dfrac{w}{4} = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} xyw = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 1 \\ 3y = 2 \\ 5z = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3}z - 5w = 7 \end{cases}$

3.6. Ejercicios propuestos

1. Diga si los sistemas de ecuaciones lineales siguientes son consistentes o inconsistentes. Para aquellos que sean consistentes encuentre su solución o soluciones según sea el caso.

    a) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=-1 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x+2y-w=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \\ 3z-4w=0 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} x-y+z-w=1 \\ 2x+y-3w=2 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} -x+3y+z+4w=0 \\ -2x+6y+2z+8w=-1 \\ 3z+w=-2 \end{cases}$

    e) $\begin{cases} x+2y-w=0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{cases}$

    f) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=1 \end{cases}$

    g) $\{x+y+z-5w=7$

2. Los siguientes ejercicios de aplicaciones pertenecen al libro: **Álgebra Lineal** de Stanley Grossman.

    a) Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó diarios 30 dólares en Inglaterra, 20 en Francia y 20 en España por concepto de hospedaje. En comida gastó diariamente 20, 30 y 20 dólares en cada país respectivamente. Sus gastos adicionales fueron de 10 dólares diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340 dólares en hospedaje, 320 dólares en comida y 140 dólares en gastos adicionales. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país.

b) Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías, Delta Airlines (DA), Hilton Hotels (HH) y McDonald's (CCD), y que hace dos días su valor bajó 350 dólares pero que ayer aumento 600 dólares. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de DA baja ó un dólar por acción y el de las de HH bajaron 1.5 dólares, pero que el precio de las acciones McD subió 0.5 dólares. Recuerda también que ayer el precio de las acciones DA subió 1.5 dólares, el de las de HH bajó otros 0.5 dólares por acción y las de McD subieron un dólar. Se sabe que la inversionista tiene 200 acciones de McD. Calcule el número de acciones que tiene en DA y en HH.

c) Un granjero da de comer a su ganado una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10 por ciento del requerimiento diario de proteína y 15 por ciento del de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento tipo B contiene 12 por ciento del requerimiento diario de proteína y 8 por ciento del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100 por ciento de los requerimientos mínimos diarios de proteína y carbohidratos ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe dar a un novillo al día?

d) Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto terminado. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división, y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga que se producen sólo dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere 384/17 horas de maquinado y 480/17 horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere 240/17 horas de maquinado y 640/17 horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante quiere mantener ocupados a sus empleados ¿cuántas sillas y cuántas mesas al día puede producir esta fábrica?

e) Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone una onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 512 onzas de helado y 160 onzas de jarabe en un día ¿ cuántos helados con soda y cuantas malteadas vende?

3.7. Referencias bibliográficas

1. Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.
2. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.
3. Gutiérrez, Ronald. Guía Didáctica de Álgebra Lineal. 2011.
4. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.
5. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.
6. Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

Capítulo 4

CONJUNTOS CONVEXOS

En este capítulo veremos una introducción, a la programación lineal. Comenzamos con los conjuntos convexos y luego tras una serie de definiciones introductorias veremos el teorema fundamental de la programación lineal, junto con ejemplos de su aplicación.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Segmentos de rectas.
2. Conjuntos convexos.
3. Semiespacios.
4. Hiperplanos.
5. Punto extremo.
6. Conjunto acotado.
7. Conjunto poligonal convexo.
8. Función lineal.

4.1. Objetivos específicos

1. Determinar gráficamente si un conjunto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es convexo.
2. Graficar el conjunto convexo poligonal que determina un sistema de desigualdades lineales en $\mathbb{R}^n$ dado.

3. Determinar los puntos extremos de un conjunto poligonal convexo dado.

4. Dada una función lineal f, determinar los valores máximos ó mínimos de f sobre un conjunto convexo poligonal cerrado acotado dado.

4.2. Resúmen teórico

1. Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, definimos cómo **segmento de recta abierto** que une a p y q cómo el conjunto, denotado por (p, q), dado por:

   $$(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^n / x = (1 - \lambda)p + \lambda q, 0 < \lambda < 1\}$$

   A p y q se le conocen cómo los extremos del segmento (p, q).

2. Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, definimos cómo **segmento de recta cerrado** que une a p y q cómo el conjunto, denotado por $[p, q]$, dado por:

   $$[p, q] = \{x \in \mathbb{R}^n / x = (1 - \lambda)p + \lambda q, 0 < \lambda < 1\}$$

   A p y q se le conocen cómo los extremos del segmento $[p, q]$.

3. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si para todo par de puntos $p, q \in A$, se cumple que $[p, q] \subset A$.

4. Dados $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^n$, definimos cómo:

   a) **Semiplano abierto** generado por a y B, al conjunto dado por:

   $$\{X \in \mathbb{R}^n / < B, X >< a\}$$

   ó dado por:

   $$\{X \in \mathbb{R}^n / < B, X >> a\}$$

   b) **Semiplano cerrado** generado por a y B, al conjunto dado por:

   $$\{X \in \mathbb{R}^n / < B, X >\leq a\}$$

   ó dado por:

   $$\{X \in \mathbb{R}^n / < B, X >\geq a\}$$

c) **Hiperplano** generado por a y B, al conjunto dado por:

$$\{X \in \mathbb{R}^n / < B, X >= a\}$$

5. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Un punto $p \in D$ se denomina **punto extremo** del conjunto D si ningún segmento de recta abierto dirigido (u, v) con extremos $u, v \in D$, contiene el punto p.

6. Un conjunto convexo D se denomina conjunto **convexo poligonal cerrado** si es la intersección de dos o más semiplanos cerrados.

7. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ se llama **acotado** si existe

$$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < r^2\}, r > 0$$

   tal que $S \subset D$ (D con estas características se llama **disco abierto centrado en el origen**).

8. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función:

   a) $f(a, b)$ $((a, b) \in A)$ es el **valor máximo** de f si

$$f(a, b) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in A$$

   b) $f(a, b)$ $((a, b) \in A)$ es el **valor mínimo** de f si

$$f(a, b) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in A$$

   c) Si $f(a, b)$ es un valor máximo ó valor mínimo de f, diremos que $f(a, b)$ es **valor extremo** de f.

9. **Teorema fundamental de la programación lineal:** Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x, y) = ax + by$ y D es un conjunto convexo poligonal cerrado y acotado, entonces f posee valores máximos y mínimos, y estos valores son alcanzados en puntos extremos de D.

4.3. Observaciones

1. Son conjuntos convexos:

a) Todos los segmentos de rectas dirigidos (abiertos, cerrados, semiabiertos).

b) $\mathbb{R}^n$ para todo entero positivo n.

c) Las rectas y planos.

d) Los hiperplanos y semiespacios.

2. **Estrategia para dibujar un semiplano:**

   a) Se dibuja la recta $< B, X >= a$ (o plano según sea el caso).

   b) Se sustituye un valor (se sugiere el origen al menos que el origen esté en la recta ó el plano) en la desigualdad. Si la proposición resultante es verdadera, entonces el semiplano esta formado por la mitad donde esta el punto. Si es abierto, la recta no es parte del semiplano; si es cerrado la recta es parte del semiplano.

3. La unión de conjuntos convexos no necesariamente es un conjunto convexo, pero la intersección de conjuntos convexos (incluso si la intersección infinita) es un conjunto convexo (por supuesto, los conjuntos a intersectar deben estar en el mismo espacio $\mathbb{R}^n$).

4. Una función f puede tener a $f(a,b)$ y $f(c,d)$ como valor máximo (mínimo) siendo $(a,b) \neq (c,d)$, pero obviamente debe ser $f(a,b) = f(c,d)$.

5. Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x,y) = ax + by$ (es decir, es una función lineal) y D es un conjunto convexo poligonal cerrado acotado; para encontrar los valores máximos y mínimos de f en D, buscamos todos los puntos extremos de D. Luego evaluamos f en cada uno de estos puntos, y el mayor de estos es el valor máximo de f en D; por otro lado, el menor de ellos será el valor mínimo de f en D.

4.4. Ejemplo

Cierta refinería produce dos tipos de gasolina, A y B. Su capacidad de producción es de 10000 barriles diarios (puede combinar o producir un sólo tipo). La refinería suministra sus productos a dos estaciones de servicio. La primera está a 30 kms. de la refinería y consume, diariamente, por lo menos 2000 barriles de gasolina tipo A. La segunda está 10 kms. de la refinería y su

consumo mínimo diario es de 1000 barriles de gasolina tipo B.
La capacidad de transporte de los camiones-cisternas de la refinería es de 180000 kmxbarril/día diariamente.
El beneficio que deja cada barril de gasolina es de 20 dolares el tipo A y 25 dolares el tipo B. Determinar la cantidad de barriles, de cada tipo, que la refinería debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio.

Solución:

Si x es la cantidad de barriles de gasolina de tipo A que la refinería produce diariamente y y es la cantidad de barriles de gasolina de tipo B que la refinería produce diariamente, entonces la función ganancia (beneficio) viene dada por:

$$f(x, y) = 20x + 25y$$

La cantidad de barriles máximo que puede producir en un día la refinería es de 10000 barriles, por lo tanto

$$x + y \leq 10000$$

Como la primera estación consume mínimo 2000 barriles del tipo A, entonces,

$$2000 \leq x$$

Como la segunda estación consume mínimo 1000 barriles del tipo B, por lo tanto,

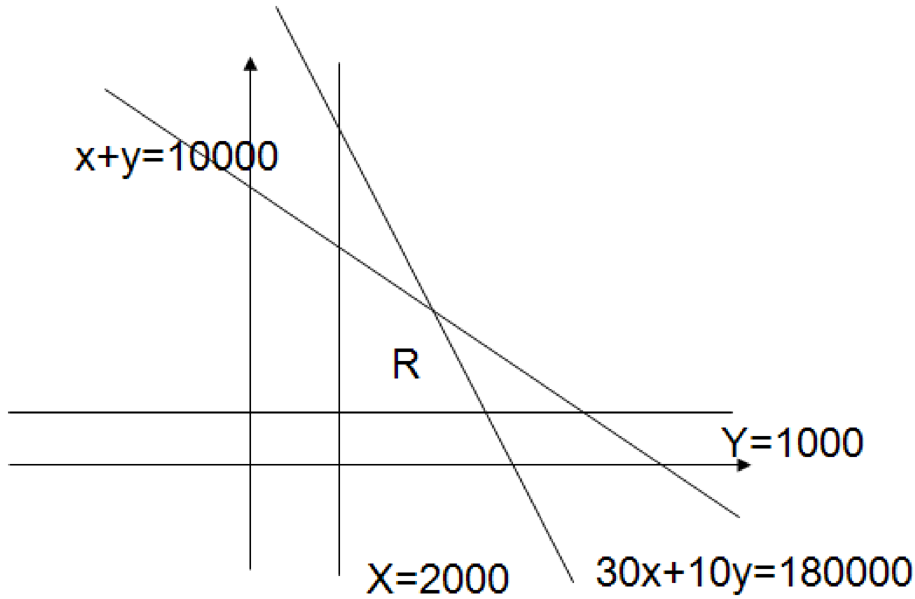
$$1000 \leq y$$

x barriles de tipo A viajan 30 km hasta la primera estación, y barriles de tipo B viajan 10 km hasta la segunda estación, por lo tanto

$$30x + 10y \leq 180000$$

Así que f toma valores en la región dada por:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 \\ 2000 \leq x \\ 1000 \leq y \\ 30x + 10y \leq 180000 \end{cases}$$



Buscamos los puntos extremos como en el ejemplo anterior. Estos vienen dados por:

$$(4000, 6000), (2000, 8000), (2000, 1000), (17000/3, 1000)$$

Evaluamos f en cada uno de estos puntos y tenemos
$f(4000, 6000) = 230000$
$f(2000, 8000) = 240000$
$f(2000, 1000) = 65000$
$f(17000/3, 1000) = 138333, 33$
Entonces el valor máximo de f es $f(2000, 8000) = 240000$, por lo tanto para obtener mayor beneficio la refinería debe producir diariamente 2000 barriles de gasolina del tipo A y 8000 barriles de gasolina del tipo B.

□

4.5. Autoevaluación

Para cada una de las siguientes proposiciones, identifica cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F).

1. Los segmentos de rectas abiertos son convexos. ( )

2. Los segmentos de rectas cerrados son convexos. ( )

3. Los conjuntos acotados son convexos. ( )

4. La unión de conjuntos convexos es un conjunto convexo. ( )

5. Los hiperplanos son semiespacios abiertos y cerrados. ( )

6. Todo conjunto convexo tiene puntos extremos. ( )

7. Ningún conjunto convexo tiene infinito puntos extremos. ( )

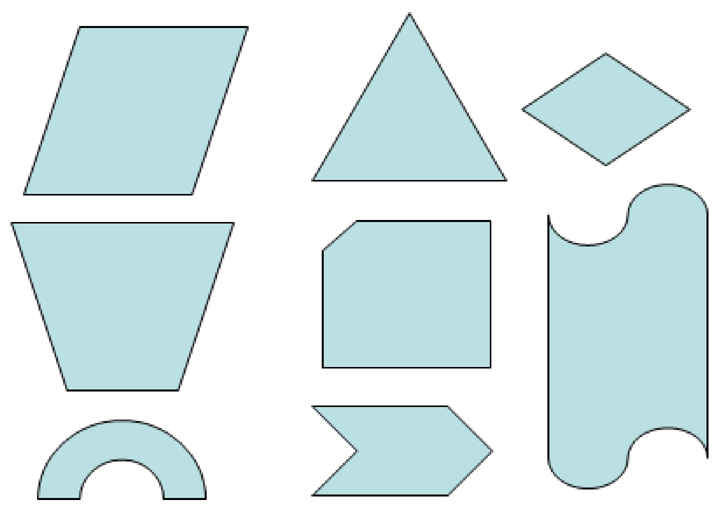
8. Todo conjunto poligonal convexo cerrado es acotado. ( )

9. Los hiperplanos son conjuntos acotados. ( )

10. Un punto es un conjunto convexo. ( )

4.6. Ejercicios propuestos

1. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son convexos.



2. En cada uno de los siguientes casos, encuentre los valores extremos de la función f, sujeta a las restricciones correspondientes.

   a) $f(x, y) = 3x + 9y; \qquad 3x + 2y \geq 6, x - y \leq 2, x + y \leq 3$

b) $f(x,y) = 5x + 2y; \qquad 2x + 3y \leq 6, x + y \geq 2, x - y \leq 3$

c) $f(x,y) = 2x + y; \qquad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$

3. Dados $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^n$, demuestre que los siguientes conjuntos son convexos

   - $\{x \in \mathbb{R}^n / < B, X >< a\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n / < B, X >> a\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n / < B, X >= a\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n / < B, X >\leq a\}$
   - $\{x \in \mathbb{R}^n / < B, X >\geq a\}$

4. Demuestre que los siguientes conjuntos son convexos. Dibuje los conjuntos.

   - $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y \leq 4\}$
   - $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 4y > 3\}$
   - $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -5x + 2y < 1\}$
   - $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 7x + 5y = -2\}$

5. Dibuje el conjunto convexo poligonal cerrado dado por el siguiente sistema de inecuaciones; encuentre además sus puntos extremos.
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \leq 2 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$

6. Dibuje el conjunto convexo poligonal cerrado dado por el siguiente sistema de inecuaciones; encuentre además sus puntos extremos.
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ y \leq 4 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

7. Dibuje el conjunto convexo poligonal cerrado dado por el siguiente sistema de inecuaciones; encuentre además sus puntos extremos.
$$\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

8. Dibuje el conjunto convexo poligonal cerrado dado por el siguiente sistema de inecuaciones; encuentre además sus puntos extremos.
$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

9. Dibuje el conjunto convexo poligonal cerrado dado por el siguiente sistema de inecuaciones; encuentre además sus puntos extremos.
$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + 4y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

10. Los siguientes ejercicios de aplicaciones pertenecen al libro: **Álgebra Lineal** de Bernard Kolman.

    a) Un fundidor produce dos clases de acero: regular y especial. Una tonelada de acero regular necesita 2 horas en el horno a hogar abierto y 5 horas en el foso de recalentamiento; una tonelada de acero especial necesita 2 horas en el horno a hogar abierto y 3 horas en el foso de recalentamiento. El horno a hogar abierto esta disponible 8 horas al día y el foso de recalentamiento 15 horas. La ganancia en una tonelada de acero regular es de 120 dólares y es de 100 dólares en una tonelada de acero especial. Determine cuántas toneladas de cada clase de acero deben fabricarse para maximizar la ganancia.

    b) Un fideicomiso planea invertir hasta 6000 dólares en dos series de bonos: A y B. El bono A tiene dividendos del ocho por ciento, mientras que los de B son del diez por ciento. Si no se pueden invertir más de 4000 dólares en el bono B y al menos deben invertirse

1500 dólares del tipo. Determine cuánto dinero debe invertirse en cada serie para maximizar la ganancia.

c) Una compañía de recolección de basura transporta camiones de desechos en contenedoras sellados, los de Smith Corporation (SC) pesan 6 libras y tienen volumen de 3 pies cúbicos cada uno; por otro lado, los de Jonson Corporation (JC) pesan 12 libras y tienen un volumen de un pie cúbico cada uno. La compania cobra a SC 30 centavos por contenedor transportado en un viaje 60 centavos por contenedor transportado en un viaje a JC. Si un camión no puede transportar más de 18000 libras ni más de 1800 pies cúbicos de volumen, determine cuántos contenedores de cada cliente debe transportar en un camión, en cada viaje, para maximizar los ingresos por carga.

d) Un productor de TV prepara un programa con un comediante y tiempo para comerciales. El publicista insiste en al menos dos minutos de tiempo para publicidad, la estación insiste en no más de cuatro minutos para publicidad, el comediante insiste en al menos 24 minutos de programa. El tiempo de publicidad más la comedia no puede exceder los 30 minutos. Se ha determinado que cada minuto de publicidad atrae 40000 espectadores y cada minuto del programa a 45000. Determine cómo debe dividirse el tiempo entre publicidad y programa para atraer el máximo número de espectadores por minuto.

e) Un generador quema dos clases de combustible: A (bajo contenido de azufre) y B (alto contenido de azufre) para producir electricidad. Por cada hora de uso, cada galón de A emite 5 unidades de bióxido de azufre, genera 4 kilovatios y cuesta 50 centavos, mientras que B emite 3 unidades de bióxido de azufre, genera 4 kilovatios y cuesta 60 centavos. La oficina de protección ambiental insiste en que la máxima cantidad de bióxido de azufre que puede emitirse por hora es de 15 unidades. Si se deben generar 16 kilovatios por hora, determine cuántos galones de A y de B deben quemarse por hora para minimizar el costo del combustible utilizado.

f) Se sirve en un club un almuerzo formado por dos platillos, A con un gramo de grasa, un gramo de carbohidratos y cuatro gramos de proteína; el otro plato B, tiene dos gramos de grasa, un gramo de carbohidratos y seis de proteína. Si la persona que planeo el almuerzo no quiere proporcionar más de 10 gramos de grasas ni más de 7 gramos de carbohidratos, determine cuántas unidades de A y B deben servirse para maximizar la cantidad de proteína consumida.

g) Un productor de alimento para animales fabrica dos clases de grano: A y B. Cada unidad del grano A contiene 2 gramos de grasa, un gramo de proteína. Cada unidad del grano B contiene 3 gramos de grasa, 3 de gramos de proteína. Suponga que el productor desea que cada unidad del producto final tenga menos de 18 gramos de grasa,y al menos 12 gramos de proteína. Si cada unidad de A cuesta 10 centavos y cada unidad de B cuesta 12 centavos, determine cuántas unidades de cada clase de grano debe usar para minimizar el costo.

11. Una fábrica produce dos modelos $M1, M2$ de cierto artículo. Cada uno de los modelos producidos es procesado por dos máquinas, $MAQ1, MAQ2$. Para completar un ejemplar del modelo $M1$ se requieren dos horas de $MAQ1$ y cuatro horas de $MAQ2$, mientras que para un ejemplar de $M2$ se requieren cuatro y dos horas de $MAQ1$ y $MAQ2$, respectivamente. Ninguna de las dos máquinas funciona más de 12 horas diarias. Si el beneficio que se obtiene es de 5100 Bs por artículo tipo $M1$ y 6800 Bs por artículo tipo $M2$, ¿cuántos ejemplares de cada modelo deben ser fabricados diariamente para obtener el máximo beneficio?

4.7. Referencias bibliográficas

1. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.
2. Gutiérrez, Ronald. Guía Didáctica de Álgebra Lineal. 2011.
3. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.
4. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.

Capítulo 5

ESPACIOS VECTORIALES

Pasaremos ahora al estudio de los espacios vectoriales, el cual en pocas palabras podriamos decir que es un conjunto con dos operaciones (suma y multiplicación), operaciones las cuales satisfacen ciertas propiedades, por ejemplo $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{M}_{nxm}$ con sus respectivas operaciones (usuales) de suma y multiplicación son espacios vectoriales. Definiremos los espacios vectoriales y luego los subespacios de estos, estudiaremos conjuntos (l.i., generadores, bases) de los espacios vectorial que nos arrojan información sobre estos (los espacios). Terminaremos el capítulo con la definición de suma de espacios vectoriales.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Espacios vectoriales.
2. Vector nulo.
3. Cerradura bajo suma.
4. Cerradura bajo producto.
5. Subespacio vectorial.
6. Subespacio nulo.
7. Subespacio propio.
8. Combinación trivial.
9. Combinación lineal.

10. Independencia lineal.
11. Dependencia lineal.
12. Conjuntos generadores.
13. Base
14. Dimensión.
15. Suma de espacios.

5.1. Objetivos específicos

1. Determinar si un conjunto V con dos operaciones $+, \cdot$es un espacio vectorial.
2. Determinar, si un subconjunto W de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.
3. Determinar si un vector v es combinación lineal de vectores $v_1, ..., v_n$ (todos elementos de un espacio vectorial).
4. Determinar si un conjunto de vectores $v_1, ..., v_n$ es l.i. ó l.d.
5. Determinar si un conjunto de vectores $v_1, ..., v_n$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ genera a dicho espacio.
6. Determinar el espacio vectorial que genera un conjunto de vectores $v_1, ..., v_n$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. genera a dicho espacio.
7. Determinar si un conjunto de vectores $v_1, ..., v_n$ es base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.
8. Calcular la suma de los subespacios $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

5.2. Resúmen teórico

1. Un **espacio vectorial** (sobre $\mathbb{R}$), denotado por $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, es un conjunto $\mathbb{V}$ no vacío junto con dos operaciones:

$$+ : \mathbb{V}x\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$$

$$(u, v) \rightarrow u + v \text{ (suma de } u \text{ más } v)$$

$$\cdot : \mathbb{R}x\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$$

$$(\alpha, u) \rightarrow \alpha u \text{ (multiplicación del escalar } \alpha \text{ por el vector } u)$$

tales que $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple con los siguientes axiomas:

A1) $u + v = v + u$ (propiedad conmutativa)

A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (propiedad asociativa)

A3) $\exists \mathbb{O}_{\mathbb{V}}, \forall u \in \mathbb{V} : u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (elemento neutro)

A4) $\forall u \in \mathbb{V}, \exists u' \in \mathbb{V} : u + u' = u' + u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (elemento simétrico)

M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributiva)

M2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributiva)

M3) $\alpha(\beta u) = \beta(\alpha u) = (\alpha\beta)u$

M4) $1.u = u$

2. El vector $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ de A3 es único, por tal motivo se la llama **vector nulo** del espacio $\mathbb{V}$

3. Para cada u del espacio existe un único u' que cumple con A4, por ello se le llama a u' **vector simétrico** de u, y se demuestra que viene dado por $(-1)u$.

4. Se suele escribir $-\alpha u$, en lugar de $(-\alpha)u$, así se escribe $-u$ en lugar de $(-1)u$.

5. Si $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, entonces:

   a) $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

1) $0.u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$; $\alpha\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$
2) $u + v = u + w \Rightarrow v = w$ (ley de cancelación)
3) $\alpha u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$

b) $\forall u_1, ..., u_k \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\alpha(u_1 + ... + u_k) = \alpha u_1 + ... + \alpha u_k$$

c) $\forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{V}$ se tiene que:

$$(\alpha_1 + ... + \alpha_k)u = \alpha_1 u + ... + \alpha_k u$$

6. Sean $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, y $S \subset \mathbb{V}$ no vacío. Diremos que S es un **subespacio** (vectorial) de $\mathbb{V}$; Si $(S, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

7. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subset \mathbb{V}$ no vacío. Entonces, S es subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si y sólo si se cumple que:

   a) $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$
   b) $\forall u, v \in S$ se tiene que $u + v \in S$ (cerrado bajo suma)
   c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u \in S$ se tiene que $\alpha u \in S$ (cerrado bajo producto)

8. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S \subset \mathbb{V}$ no vacío. Entonces S es subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si y sólo si se cumple que:

$$\forall u, v \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u + v \in S$$

9. Si $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $u, u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$, u es una **combinación lineal**, **c.l.**, de los vectores $u_1, ..., u_n$ si

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

   para ciertos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en $\mathbb{R}$.

10. Una **combinación lineal trivial** de vectores $u_1, ..., u_n$, es aquella donde todos los escalares son cero.

11. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$. Se dice que $u_1, ..., u_n$ son **linealmente independientes** ($\{u_1, ..., u_n\}$ es **linealmente independiente**), l.i., si el vector nulo $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ no puede escribirse cómo combinación lineal no trivial de los vectores $u_1, ..., u_n$. En caso contrario, decimos que $u_1, ..., u_n$ son **linealmente dependientes** ($\{u_1, ..., u_n\}$ es **linealmente dependiente**), l.d.

12. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$. Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $u_1, ..., u_n$ lo denotaremos por:

$$CL(\{u_1, ..., u_n\})$$

13. Si $u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$ ($\mathbb{V}$ espacio vectorial), entonces $CL(\{u_1, ..., u_n\})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

14. Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial y $u, u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$, entonces

    a) Si $\{u_1, ..., u_n\}$ contiene a $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$, entonces es l.d.

    b) $\{u_1, ..., u_n\}$ es l.i si y sólo si

    $$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$$

    c) $\{u_1, ..., u_n\}$ es l.d si uno de los elementos del conjunto es combinación lineal de los otros.

    d) $\{u\}$ es l.i. si y sólo si $u \neq \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.

    e) todo subconjunto no vacío de un conjunto l.i. es l.i.

    f) Si $U \subset W \subset \mathbb{V}$ y U es l.d., entonces W es l.d.

    g) En $\mathbb{R}^n$ cualquier conjunto (finito) con más de n elementos es l.d.

    h) En $\mathbb{M}_{mxn}$ cualquier conjunto (finito) con más de mxn elementos es l.d.

    i) En $\mathbb{P}_n(S)$ cualquier conjunto (finito) con más de n+1 elementos es l.d.

15. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ subespacio vectorial y $u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$. Se dice que $u_1, ..., u_n$ **generan** ($\{u_1, ..., u_n\}$ **genera**) a $\mathbb{W}$ si

    $$\mathbb{W} = CL(\{u_1, ..., u_n\})$$

    Como $CL(\{u_1, ..., u_n\})$ siempre es subespacio, si $S = CL(\{u_1, ..., u_n\})$, decimos que $\{u_1, ..., u_n\}$ **genera** S. También se acostumbra decir que S es el **espacio generado** por $\{u_1, ..., u_n\}$.

5.3. Observaciones

1. Debe estar claro que antes de ver si un conjunto V con unas operaciones de suma y producto cumple con las (ocho) propiedades, se debe verificar en primer lugar que
   $u+v$ y αu estén en V (cerrado bajo suma y producto respectivamente), para todo $u, v \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Si S es subespacio de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{O}_S = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.

3. Debe estar claro que si $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ y $S \subset \mathbb{V}$ es un espacio vectorial pero con otras operaciones de suma y producto, entonces no podemos decir que S es subespacio de $\mathbb{V}$.

4. La intersección (hasta infinita) de subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

5. Si $\mathbb{U}$ es subespacio de $\mathbb{V}$; $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$; $u_1, ..., u_n \in \mathbb{U}$, entonces

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in \mathbb{S}$$

6. Las combinaciones lineales de un conjunto se suele escribir de varias formas, cómo: $CL(\{u_1, ..., u_n\})$, $sg(\{u_1, ..., u_n\})$, $gen(\{u_1, ..., u_n\})$.

7. En todo espacio vectorial el vector nulo es combinación lineal de todo conjunto de vectores (finito) del espacio, es decir siempre se cumple que:

$$\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in CL(\{u_1, ..., u_n\})$$

8. La definición de espacio generado no se reduce sólo a subespacios de un espacio $\mathbb{V}$, también un conjunto puede generar al espacio $\mathbb{V}$ (recordemos que un subespacio es un espacio vectorial).

9. Conjuntos distintos pueden generar el mismo espacio.

10. **PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN VECTOR u ES COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES $v_1, ..., v_n$.**

    a) Se escribe la ecuación $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = u$.

    b) Se encuentra el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación anterior, de la cual $\alpha_1, ..., \alpha_n$ serán las incognitas.

c) Si el sistema tiene solución, el vector u es c.l. de los vectores $v_1, ..., v_n$ (el conjunto solución de dicho sistema nos dará los valores $\alpha_1, ..., \alpha_n$ que mantienen la igualdad de la ecuación). Si el sistema no tiene solución, u no es c.l. de los vectores $v_1, ..., v_n$.

11. **PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN CONJUNTO DE VECTORES $\{v_1, ..., v_n\}$ ES L.I Ó L.D.**

    a) Se escribe la ecuación $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.

    b) Se encuentra el sistema homogéneo asociado a la ecuación anterior, de la cual $\alpha_1, ..., \alpha_n$ serán las incognitas.

    c) Se busca la solución del sistema del paso anterior. Si la solución es única el conjunto es l.i., si las soluciones son infinitas el conjunto es l.d.

12. **PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN CONJUNTO DE VECTORES $\{v_1, ..., v_n\}$ GENERA UN ESPACIO $\mathbb{V}$.**

    a) Se toma un vector arbitrario u del espacio $\mathbb{V}$ y se escribe la ecuación
    $$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = u$$

    b) Se encuentra el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación anterior, de la cual $\alpha_1, ..., \alpha_n$ serán las incognitas.

    c) Si el sistema siempre tiene solución, el conjunto genera al espacio. Si existe u para el cual el sistema no tenga solución, entonces el conjunto no genera al espacio.

13. Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial, y $u_1, ..., u_n \in \mathbb{V}$. Se dice que $\{u_1, ..., u_n\}$ es **base** de $\mathbb{V}$, si $\{u_1, ..., u_n\}$ es l.i. y genera $\mathbb{V}$.

14. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{u_1, ..., u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Entonces cualquier otra base de $\mathbb{V}$ tendrá n elementos.

15. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{u_1, ..., u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Entonces para todo x en $\mathbb{V}$, existe números reales únicos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que:
$$x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

Es decir si $x = \beta_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, entonces

$$\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$$

16. Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial no nulo con una base de n elementos, diremos que la dimensión de $\mathbb{V}$, denotada por $dim(\mathbb{V})$, es n. Si $\mathbb{V}$ es un espacio nulo, entonces diremos que su dimensión es 0.

17. Para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión $n \geq 1$ (es decir no nulo) se tiene:

    a) Todo conjunto l.i. de $\mathbb{V}$ tiene un número menor o igual a n elementos.

    b) Todo conjunto generador de $\mathbb{V}$ tiene un número mayor o igual a n elementos.

    c) Todo conjunto l.i. de $\mathbb{V}$ de n elementos es base de $\mathbb{V}$.

    d) Todo conjunto generador de $\mathbb{V}$ de n elementos es base de $\mathbb{V}$.

    e) Todo subespacio de $\mathbb{V}$, tiene dimensión menor o igual a n (será 0 si y sólo si es el subespacio nulo y será n si y sólo si es $\mathbb{V}$ mismo).

    f) Para todo k entero con $0 \leq k \leq n$, existe un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$, con $dim(\mathbb{W}) = k$.

18. Los espacios con base finita se dice que son espacios de **dimensión finita**. Aquellos que no poseen base finita (sino infinita) se les llama espacios de **dimensión infinita** (un ejemplo de tales espacios es $\mathbb{P}(S)$).

19. $dim(\mathbb{R}^n) = n$

20. $dim(\mathbb{M}_{nxm}) = nm$

21. $dim(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$

22. **PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN CONJUNTO DE VECTORES $\{v_1, ..., v_n\}$ ES BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{V}$.**

    a) Se toma un vector arbitrario u de $\mathbb{V}$ y se escribe la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = u$$

b) Se encuentra el sistema de ecuaciones lineales asociado a la ecuación anterior, de la cual $\alpha_1, ..., \alpha_n$ serán las incognitas.

c) Si el sistema tiene solución única para cada u, entonces el conjunto es base de $\mathbb{V}$ (si la matriz del sistema es cuadrada, basta con conocer si el sistema homogéneo asociado a la ecuación tiene solución única para concluir que el conjunto es base de $\mathbb{V}$).

23. **PROCEDIMIENTO PARA HALLAR** $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

a) Se encuentra una base de $\mathbb{W}_1 \bigcap \mathbb{W}_2$, digamos β.

b) Se completa β para encontrar una base de $\mathbb{W}_1$, digamos β_1.

c) Se completa β para encontrar una base de $\mathbb{W}_2$, digamos β_2.

d) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = CL(\beta_1 \bigcup \beta_2)$.

5.4. Ejercicios resueltos

1. Demuestre que $\mathbb{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x+z = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Demostración:

$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ está en $\mathbb{V}$ ya que su primera y tercera componente y así $x + z = 0 + 0 = 0$

Sean $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{V}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$.Entonces $x_1 + z_1 = 0$, $x_2 + z_2 = 0$ y

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= \alpha(x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)\\ &= (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2, \alpha w_1 + w_2)\end{aligned}$$

Ahora,

$$x + z = (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha z_1 + z_2) = \alpha(x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = \alpha 0 + 0 = 0$$

Entonces, $\alpha(x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{V}$, así que $\mathbb{V}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

$\square$

2. Determine si $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es c.l de las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & 4\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3\lambda & 9\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \lambda & \alpha - \gamma \\ 3\lambda & 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 9\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando componente a componente tenemos:

$$\begin{cases} 2\alpha + \lambda = 1 \\ \alpha - \gamma = 2 \\ 3\lambda = 3 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 9\lambda = 4 \end{cases}$$

Veamos si el sistema tiene solución única.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to \frac{1}{3} f_3]{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4 \to f_4 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como vemos el rango de la matriz es cuatro, que es igual al rango de la matriz ampliada, por lo tanto el sistema tiene solución. Concluimos así que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es c.l de las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Más aún como el sistema tiene solución única, existe sólo una c.l. (pedimos al lector que busco tal combinación lineal como ejercicio).

□

5.5. Autoevaluación

1. Un espacio vectorial tiene un único vector nulo. ( )
2. Todo subconjunto de un conjunto l.i. es l.i. ( )
3. Todo subconjunto de un conjunto l.d. es l.d. ( )
4. Todo subconjunto de una base es base. ( )
5. El vector nulo está en todo conjunto base. ( )
6. El vector nulo de un espacio vectorial, está en todo subespacio de dicho espacio. ( )
7. El vector nulo de un espacio vectorial, está en el conjunto de c.l. de cualquier conjunto de vectores del espacio. ( )
8. La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita es el número de elementos de una base de tal espacio. ( )
9. En un espacio vectorial de dimensión n, todo conjunto l.i. debe tener n elementos. ( )
10. En un espacio vectorial de dimensión n, todo conjunto generador del espacio debe tener n elementos. ( )

5.6. Ejercicios propuestos

1. Si en $\mathbb{R}^3$ definimos las operaciones de suma y multiplicación por escalares (respectivamente) cómo:

$$v \bigoplus w = v - w$$

$$\alpha \bigodot v = -\alpha v$$

donde las operaciones $v-w$, $-\alpha v$ son las operaciones usuales de suma y multiplicación en $\mathbb{R}^3$. Determine si $(\mathbb{R}^3, \bigoplus, \bigodot)$ es un espacio vectorial.

2. Si en $\mathbb{R}^+$ (reales positivos) definimos las operaciones de suma y multiplicación por escalares (respectivamente) cómo:

$$a \bigoplus b = ab$$

$$\alpha \bigodot a = a^\alpha$$

donde las operaciones ab, a^α son las operaciones usuales de multiplicación y exponenciación de $\mathbb{R}$ respectivamente. Determine si $(\mathbb{R}^+, \bigoplus, \bigodot)$ es un espacio vectorial.

3. Demuestre el teorema 5.1.1 del texto.

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos (de $\mathbb{R}^n$) son subespacios (de $\mathbb{R}^n$, operaciones usuales).Para aquellos que lo sean encuentreles una base y su respectiva dimensión.

   a) $W_1 = \{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 = x_2 = 0\}$
   b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$
   c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = z + 1\}$
   d) $W_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x = y, z = 0\}$
   e) $W_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x - 5z = 0\}$
   f) $W_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z + w = 0\}$
   g) $W_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^2\}$
   h) $W_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$

i) $W_9 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x = 1\}$

j) $W_{10} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x = -3y = 4z = -\dfrac{w}{2}\}$

5. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{M}_{nxm}$ son subespacios (de $\mathbb{M}_{nxm}$, operaciones usuales). Para aquellos que lo sean encuentreles una base y su respectiva dimensión.

   a) $A_1 = \{A \in \mathbb{M}_{2x2} / A \text{ no es invertible}\}$

   b) $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2x2} / a = b \right\}$

   c) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{M}_{2x4} / a = b = e = 0, c = g = h\}$

   d) $A_4 = \{A \in \mathbb{M}_{nxn} / A \text{ es invertible}\}$

   e) $A_5 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2x2} / 2a - d = 0, 3b - c + 5d = 0\}$

6. Consideremos los conjuntos $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x - 5z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z + w = 0\}$.

   a) Demuestre que V y W son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

   b) Encuentre $V \cap W$

7. Determine cuáles de los siguientes conjuntos generan $\mathbb{R}^3$.
   $V_1 = \{(1,1,1), (2,-1,9), (0,0,5)\}$
   $V_2 = \{(1,3,-6), (4,4,5), (1,2,3), (-1,7,7)\}$
   $V_3 = \{(2,0,0), (1,5,11)\}$

8. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son l.i. en $\mathbb{M}_{2x2}$.
   $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
   $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

9. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son l.i en $\mathbb{P}_3$.

   a) $\{1 - x, 2 + 3x^2, 3 - 8x\}$

b) $\{1-7x-4x^3, x^2, 2-x, 1\}$

c) $\{2-x, 3+4x^2, x+4x^2+x^3, 1-x^3\}$

10. Determine cuáles de los siguientes conjuntos generan $\mathbb{P}_2$.

a) $\{1-x, 2+3x^2, 3-8x\}$

b) $\{-4+x-4x^2, x^2, 2-x, 1\}$

c) $\{2-x, 3+4x^2, 7-2x+4x^2\}$

11. Consideremos los conjuntos $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x+5z=0\}$ y $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x-3y+2z+w=0\}$.

a) Demuestre que V y W son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

b) Encuentre $V \cap W$.

c) Encuentre una base para el espacio vectorial $V+W$.

12. Consideremos los conjuntos $A = \{(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2x2} / a = d = 0\}$ y $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2x2} / c+b=0\}$.

a) Demuestre que A y B son subespacios vectoriales de $\mathbb{M}_{2x2}$.

b) Encuentre $A \cap B$.

c) Encuentre una base para el espacio vectorial $A+B$.

5.7. Referencias bibliográficas

1. Apostol, Tom. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté. Segunda edición, 1967.

2. Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.

3. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.

4. Gutiérrez, Ronald. Guía Didáctica de Álgebra Lineal. 2011.

5. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.

6. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.

7. Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

Capítulo 6

TRANSFORMACIONES LINEALES

Pasamos al último capítulo que habla sobre las transformaciones lineales. Comenzaremos con la definición de transformación lineal, seguido de dos importantisimos teoremas que tratan sobre existencia y unicidad de transformaciones lineales bajo ciertas condiciones. Posteriormente se abordará la definición de núcleo e imagen de una transformación lineal, matriz de una transformación lineal y por último isomorfismos.

Los conceptos fundamentales del tema son:

1. Transformación lineal.
2. Teorema de existencia.
3. Teorema de unicidad.
4. Núcleo.
5. Imagen.
6. Nulidad.
7. Rango.
8. Matriz de la transformación.
9. Isomorfismo.

6.1. Objetivos específicos

1. Determinar si una función entre espacios vectoriales es una transformación lineal.

2. Determinar el núcleo e imagen de una transformación lineal.

3. Determinar bases y dimensión para el núcleo e imagen de una transformaciń lineal que tenga como dominio un espacio vectorial de dimensión finita.

4. Construir transformaciones lineales tomando como base el teorema de existencia de transformaciones lineales.

6.2. Resúmen teórico

1. Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales. A una función $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se le llama **transformación lineal** si cumple con las siguientes condiciones:

   a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$; $\forall x, y \in \mathbb{V}$
   b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$; $\forall x \in \mathbb{V}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Si $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ son espacios vectoriales. Entonces:

   a) $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal **si y sólo si**

   $$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   b) Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal, entonces $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$
   c) Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal, entonces

   $$T(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1 T(x_1) + ... + \alpha_n T(x_n), \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{V}$$

3. **Teorema de unicidad:** Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, y sea $\mathbb{W}$ un espacio vectorial que contiene los vectores $w_1, ..., w_n$. Si T_1, T_2 son transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ tales que $T_1(v_i) = T_2(v_i) = w_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $T_1 = T_2$.

4. **Teorema de existencia:** Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{v_1, ..., v_n\}$. Sea $\mathbb{W}$ un espacio vectorial que contiene los vectores $w_1, ..., w_n$. Entonces **existe** una **única** transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que

$$T(v_i) = w_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Más aún T viene dada por

$$T(x) := \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son tales que $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

5. Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces:

   a) El **Núcleo** de T, denotado por $N(T)$, al conjunto:

   $$N(T) = \{x \in \mathbb{V} / T(x) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

   b) **Imagen** de T, denotado por $Im(T)$, al conjunto:

   $$Im(T) = \{y \in \mathbb{W} / \exists x \in \mathbb{V}, T(x) = y\}$$

6. $N(T), Im(T)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ respectivamente. Se define para $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, tal que la dimensión de $\mathbb{V}$ es finita:

   a) La **Nulidad** de T, denotada por $n(T)$, a $n(T) = dim(N(T))$.

   b) El **Rango** de T, denotado por $r(T)$, a $r(T) = dim(Im(T))$.

7. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal y $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces,

   $$dim(\mathbb{V}) = n(T) + r(T)$$

   .

8. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz de mxn, A_T tal que

   $$T(x) = A_T x$$

   para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A la matriz A_T, se le llama matriz de transformación de T.

9. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Decimos que T es un isomorfismo si es invertible.

10. Si una transformación lineal es invertible, entonces su inversa es también una transformación lineal, y en tal caso los espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ tendrán la misma dimensión.

11. Dos espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ se dicen que son isomormos, si existe un isomorfismo de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ (o de $\mathbb{W}$ a $\mathbb{V}$).

12. La relación 'isomorfo a' es una relación de equivalencia.

13. Dos espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son isomormos si y sólo si tienen la misma dimensión.

14. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, con $dim(\mathbb{V}) = n$ y $dim(\mathbb{W}) = m$, entonces:

    a) Si $n > m$, entonces T no es inyectiva.

    b) Si $m > n$, entonces T no es sobreyectiva.

15. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ de igual dimensión, entonces:

    a) Si T es inyectiva, entonces T es un isomorfismo.

    b) Si T es sobreyectiva, entonces T es un isomorfismo.

16. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, entonces:

    a) T es inyectiva si y sólo si $N(T) = \{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}\}$.

    b) T es sobreyectiva si y sólo si $Im(T) = \mathbb{W}$.

6.3. Observaciones

1. El que para una función $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se cumpla que $T(\mathbb{O}_{\mathbb{V}}) = \mathbb{O}_{\mathbb{W}}$ no es suficiente información para concluir que T sea lineal. Si se cumple que $T(\mathbb{O}_{\mathbb{V}}) \neq \mathbb{O}_{\mathbb{W}}$ entonces se puede concluir que T no es lineal.

2. **PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL T DE $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$**

   a) Se evalua T (con el orden natural) en cada uno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

   b) Se forma una matriz cuyas columnas son los vectores encontrados en el paso anterior (colocados con su respectivo orden).

   c) La matriz del paso anterior es la matriz de la transformación T.

3. El que dos espacios vectoriales sean isomorfos, indica que en cierto sentido los espacios son 'iguales' (por lo menos desde el punto de vista algebraico). Por ejemplo si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es un isomorfismo, entonces T transforma conjuntos generadores, l.i., l.d., bases de $\mathbb{V}$ en conjuntos generadores, l.i., l.d., bases de $\mathbb{W}$ respectivamente.

4. No toda transformación lineal entre espacios de igual dimensión es un isomorfismo.

5. Si una transformación lineal tiene dominio y conjunto de llegada con dimensiones distintas, entonces no puede ser un isomorfismo.

6.4. Autoevaluación

1. Toda función constante entre espacios vectoriales es una transformación lineal. ( )

2. Una función invertible entre espacios vectoriales es una transformación lineal. ( )

3. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una función tal que $T(\mathbb{O}_{\mathbb{V}}) = \mathbb{O}_{\mathbb{W}}$, entonces T es una transformación lineal. ( )

4. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una función, entonces $Im(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{W}$. ( )

5. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces $N(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$. ( )

6. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, $N(T)$ no puede ser el subespacio nulo de $\mathbb{V}$. ( )

7. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, $Im(T)$ no puede ser el subespacio nulo de $\mathbb{W}$. ( )

8. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, y $\mathbb{V}$ tiene dimensión finita entonces $n(T) = dim(\mathbb{V})$. ( )

9. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, y $\mathbb{W}$ tiene dimensión infinita entonces $Im(T)$ tiene dimensión infinita. ( )

10. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, y $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ tienen dimensión finita entonces $n(T) = r(T)$. ( )

6.5. Ejercicios propuestos

1. Determine cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales. Para las que lo sean, encuentreles su núcleo, imagen, nulidad, rango y verifique que la nulidad más el rango es igual a la dimensión del dominio. Además determine cuáles son isomorfismos. Para aquellas que aplique encuentre su matriz de transformación.

   a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T_1(x, y, z) = (x, y + z + 1, 0, 0)$

   b) $T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_2(x, y, z, w) = (x, y + z + w)$

   c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_3(x, y, z) = (0, 2x - 4z)$

   d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T_4(x, y) = (0, x + 5y, x, 0)$

   e) $T_5 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ dada por $T_5(a + bx + cx^2) = a - c + bx$

   f) $T_6 : \mathbb{M}_{2x2} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_6 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b - d, a)$

   g) $T_7 : \mathbb{M}_{2x2} \to \mathbb{M}_{2x2}$ dada por $T_7 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b + 3a \\ c - 7d & c \end{pmatrix}$

   h) $T_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_{2x2}$ dada por $T_8(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & (x + y)/2 \\ -y & 0 \end{pmatrix}$

   i) $T_9 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2$ dada por $T_9(a, b, c, d) = a + (-b + d)x - 5cx^2$.

j) $T_{10} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{M}_{2x2}$ dada por $T_{10}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & \frac{a_3}{4} \\ -a_0 & a_1-a_3 \end{pmatrix}$

k) $T_{11} : \mathbb{M}_{2x2} \rightarrow \mathbb{M}_{2x2}$ dada por $T_{11}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+a \\ c-d & 1 \end{pmatrix}$

l) $T_{12} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{M}_{2x2}$ dada por $T_{12}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & \frac{a_3}{4} \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$

m) $T_{13} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T_{13}(x, y) = (y, x)$

n) $T_{14} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T_{14}(x, y, z, w) = (x - y, y + z, w, 2w - 6y + 7x - 5z)$$

2. Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ tal que su núcleo sea igual al conjunto $gen\{(2, 0, 4), (-4, 1, 3)\}$.

3. Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ tal que su imagen sea igual al conjunto $gen\{(2, 0, 0, 1), (0, -4, 1, 3)\}$.

4. Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ que tenga cómo núcleo el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -3x+y+z = 0\}$ y cuya imagen sea generada por $\{(1, -1, 0)\}$.

5. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:
$T(1, 0, 0) = (2, 3, 0)$
$T(1, 6, -8) = (-1, 4, 5)$

6. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{M}^{2x2} \rightarrow \mathbb{M}^{2x3}$ tal que:

a) $T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $T(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

6.6. Referencias bibliográficas

1. Apostol, Tom. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté. Segunda edición, 1967.
2. Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. McGraw-Hill. Quinta edición, 1996.
3. Guedez, Edgar. Notas de Álgebra Lineal.
4. Gutiérrez, Ronald. Guía Introduccin al Álgebra Lineal. 2011.
5. Kolman, Bernard. Álgebra Lineal. Prentice Hall.
6. Rodríguez, Jesús. Notas de Álgebra Lineal.
7. Romero, Neptalí. Fascículos de Álgebra Lineal.

6.7. Respuestas de las autoevaluaciones

6.7.1. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 1

Verdaderas: 2, 5, 7, 8 y 10.
Falsas: 1, 3, 4, 6 y 9.

6.7.2. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 2

1. Verdaderas: c, h, j.

   Falsas: a, b, d, e, f, g, i.

2. Diagonales: B_2

   Escalares: Ninguna.

   Triangulares superiores: B_2 y B_4

   Triangulares inferiores: B_7

   Simétricas: B_2, B_3 y B_5

   Antisimétricas: Ninguna.

6.7.3. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 3

1. Verdaderas: a, b.

   Falsas: c, d, e.

2. Lineales: a, b, d, f.

   No lineales: c, e, g.

6.7.4. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 4

Verdaderas: 1, 2, 10.
Falsas: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6.7.5. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 5

Verdaderas: 1, 2, 6, 7, 8.
Falsas: 3, 4, 5, 9, 10.

6.7.6. Respuestas de la autoevaluación del capítulo 6

Solamente 5 es verdadera.