UNIVERSIDAD CENTRO-OCCIDENTAL
«LISANDRO ALVARADO»

ESCUELA DE CIENCIAS

AUTOMORFISMOS INFINITESIMALES DE UNA f-VARIEDAD COMPACTA

Jorge Sáenz

INDICE

1. INTRODUCCION

Es bien conocido el resultado de que el álgebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una estructura compleja en una variedad compacta, tiene dimensión finita [2] . Igual conclusión obtuvo Ogawa para una estructura de casi-contacto normal [4] . Nuestra intensión es probar este resultado para el caso más general de las f-estructuras; es decir, el objetivo del presente trabajo es probar que:

El álgebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una f-estructura normal en una variedad compacta, tiene dimensión finita.

La importancia del álgebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de una G-estructura cualquiera, radica en el hecho de que está intimamente relacionada con el grupo de automorfismos de la G-estructura correspondiente. Es de especial importancia saber cuando este grupo tiene la estructura de grupo de Lie. Un resultado conocido [2] nos asegura que, efectivamente, así sucede si el álgebra de Lie correspondiente es finito-dimensional.

El presente trabajo está dividido en 5 secciones. En la sección 2 presentamos rápidamente los aspectos generales de la teoría de las f-estructuras. En las secciones 3 y 4 encontramos interrelaciones entre f-estructuras a través de fibrados toroidales: Si $P(M, T^r, \pi)$ es un fibrado toroidal, en cuyo espacio base M está definida una f-estructura, entonces probamos que sobre el espacio total P se puede definir otra f-estructura, la cual, en un caso especial, es una estructura casi-compleja. Estos resultados han sido tomados directamente de otro trabajo previo del presente autor [5]. En la sección 5 probamos el teorema que nos hemos fijado como objetivo (Teorema 5.6). La idea clave de la demostración consiste en lograr considerar el álgebra de Lie de la f-estructura en M como una subalgebra del álgebra de Lie de una estructura compleja en P (P compacto). Como esta última es de dimensión finita, la primera también lo será.

Todas las variedades y tensores que aparecen a lo largo del desarrollo, són de clase C^∞. Además, todas las variedades que mencionaremos son conexas.

Nuestra referencia general es el excelente texto de Kobayashi y Nomizu, *Foundations of Differencial Geometry* [3].

2. f-ESTRUCTURAS

En esta sección presentamos algunos resultados conocidos sobre f-estructuras.

Una variedad M^{2n+s}, $n \geqslant 1$, tiene una f-estructura, si el grupo estructural de su fibrado tangente es reductible a $U(n)\times O(s)$. Esto es equivalente a la existencia de un campo tensorial f de tipo $(1,1)$ y rango $2n$ que satisface $f^3+f=0$, [6]. Las estructuras casi-complejas $(s=0)$ y las estructuras de casi-contacto $(s=1)$ son dos ejemplos de f-estructuras. Si además existen s campos E_i y s 1-formas η^i tales que, $\forall\, i,j=1,\ldots,s$, se cumple que

1) $f(E_i)=0$ **2)** $\eta^i(E_j)=\delta^i_j$

3) $\eta^i \circ f = 0$ **4)** $f^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes E_i$

se dice que M^{2n+s} tiene una f-estructura con referencias, o, simplemente, que M tiene una (f, E_i, η^i)-estructura.

Una f-estructura con referencias, (f, E_i, η^i), $1\leqslant i\leqslant s$, es normal si el tensor

$$S_f = [f,f] + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes E_i$$

es identicamente nulo, donde $[f,f]$ es el tensor de Nijenhüis de f:

$$[f,f](X,Y) = [fX, fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y]$$

En este caso se tiene que [1], para $i,j=1,\ldots,s$,

5) $L_{E_i}\eta^i = 0$, **6)** $[E_i, E_j] = 0$

7) $L_{E_i} f = 0$ **8)** $d\eta^i(fX,Y) = -d\eta^i(X,fY)$

Observar que en el caso particular de que f es una estructura casi compleja $(s = 0)$, $S_f = [f,f]$ y que, por un teorema de Newlander-Nirember, $S_f = [f,f] = 0$ si y sólo si f es una estructura compleja.

3. FIBRADOS TOROIDALES Y f-ESTRUCTURAS

Sea $P(M, T^r, \pi)$ un fibrado principal con grupo estructural el toro T^r, de dimensión r. Identificamos al algebra de Lie de T^r con $\mathbb{R}^r$. Denotamos con $e_1,\ldots,e_r$ a la base canónica de $\mathbb{R}^r$. $\mathfrak{X}(P)$ es el conjunto formado por todos los campos diferenciables de P, y $\mathfrak{X}^*(P)$ es el subconjunto de $\mathfrak{X}(P)$ formado por todos los campos invariantes por la acción del grupo T^r.

$F(P)$ es conjunto de todas las funciones reales diferenciable de P y $F^*(P)$ es subconjunto de $F(P)$ formado por todas las funciones de la forma $\pi^*h = h \circ \pi$, donde $h \in F(M)$.

Fijemos una conexión en $P(M, T^s, \pi)$ con forma de conexión

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{r} \bar{\omega}_i \otimes e_i$$

LEMA 3.1 $X \in \mathfrak{X}^*(P)$ si y sólo si X es proyectable y $\bar{\omega}_i(X) \in F^*(P)$, $\forall i = 1,\ldots,r$.

Demostración.

Supongamos que $X \in \mathfrak{X}^*(P)$; esto es,

$$(R_a)_* \circ X = X \circ R_a$$

Como $\pi \circ R_a = \pi$, tenemos que $\pi_* \circ (R_a)_* = \pi_*$. Luego,

$$\pi_* \circ X \circ R_a = \pi_* \circ (R_a)_* \circ X = \pi_* \circ X$$

La igualdad anterior nos permite definir un campo $X' \in \mathfrak{X}(M)$ del modo siguiente:

$$X'(m) = \pi_*(X(p)), \quad \text{donde} \quad p \in \pi^{-1}(m),$$

el cual satisface:

$$\pi_* \circ X = X' \circ \pi,$$

Esta igualdad nos dice que X es proyectable. Muchas veces, a X' lo denotaremos por πX.

Por otro lado, para demostrar que $\overline{\omega}_i(X) \in F^*(P)$, basta probar que la función $\overline{\omega}(X)$ es invariante por la acción del grupo.

Puesto que T^r es abeliano, la representación adjunta $ad(a)$ es la función identidad. Luego,

$$\begin{aligned} (\overline{\omega}(X)) \circ R_a &= \overline{\omega}(X \circ R_a) = \overline{\omega}((R_a)_* \circ X) \\ &= (R_a^* \overline{\omega})(X) = ad(a^{-1})\,\overline{\omega}(X) \\ &= \overline{\omega}(X) \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que X es proyectable y que $\overline{\omega}_i(X) = g_i \circ \pi$, donde $g_i \in F(M)$, $i = 1, \ldots, r$.

$$\pi_* \circ (R_a)_* \circ X = \pi_* \circ X = X' \circ \pi = X' \circ (\pi \circ R_a)$$
$$= (X' \circ \pi) \circ R_a = (\pi_* \circ X) \circ R_a$$
$$= \pi_* \circ X \circ R_a$$

Luego,

$$(1) \qquad \pi_*((R_a)_* \circ X) = \pi_*(X \circ R_a)$$

Por otro lado,

$$\overline{\omega}_i((R_a)_* \circ X) = (R_a)^* \overline{\omega}_i(X) = \overline{\omega}_i(X) = g_i \circ \pi$$
$$= g_i \circ (\pi \circ R_a) = (g_i \circ \pi) \circ R_a$$
$$= (\overline{\omega}_i(X)) \circ R_a = \overline{\omega}_i(X \circ R_a)$$

Luego,

$$(2) \qquad \overline{\omega}((R_a)_* \circ X) = \overline{\omega}(X \circ R_a)$$

Por último, de (1) y (2) obtenemos que

$$(R_a)_* \circ X = X \circ R_a . \quad \blacksquare$$

COROLARIO 3.2 Si $X \in \mathfrak{X}^*(P)$, entonces, para todo $i=1,\dots,r$, existe una única función $\omega_i(X) \in F(M)$ tal que

$$\overline{\omega}_i(X) = \pi^* \omega_i(X)$$

Demostración.

Sigue inmediatamente del lema. $\blacksquare$

Supongamos ahora, que la dimensión de M es $2n+s$, $n \geq 1$, y que en M^{2n+s} tenemos una f-estructura con referencias:

$$(f, E_i, \eta^i), \quad i = 1,\dots,s$$

Sean k y s' los números definidos por

$$k = \min\{r, s\} \qquad\qquad s' = |r - s|$$

Ahora definimos un tensor $\bar{f}$ de tipo (1,1) en P. En primer lugar definimos $\bar{f}(X)$ para $X \in \mathfrak{X}^*(P)$, del modo siguiente:

1) $\pi(\bar{f}X) = f(\pi X) + \sum_{i=1}^{k} \omega_i(X) E_i$

2) $\bar{\omega}(\bar{f}X) = -\sum_{i=1}^{k} \pi^* \eta^i(X) e_i$

Es fácil ver que $\bar{f}$ es lineal sobre $F^*(P)$.

LEMA 3.3 $\bar{f}$ puede extenderse a

$$\bar{f} : \mathfrak{X}(P) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$

Demostración. Puesto que cada campo en $\mathfrak{X}(P)$ es la suma de un campo vertical y un horizontal, bastará definir $\bar{f}$ para:

a. Campos verticales y **b.** Campos horizontales.

a. Sean $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_r$ los campos fundamentales correspondientes a $e_1,\dots,e_r$. Como T^r es abeliano, $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_r \in \mathfrak{X}^*(P)$.

Aún más, éstos forman una base, sobre $F(P)$, del espacio formado por los campos verticales. Luego, si X es un campo vertical, tenemos que

$$X = \sum_{i=1}^{r} h_i \bar{e}_i$$

En consecuencia, definimos

$$\bar{f}(X) = \sum_{i=1}^{r} h_i \bar{f}(\bar{e}_i)$$

b) Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M tal que, para todo α, $P/_{U_\alpha}$ es trivial y (U_α, x_α) es un sistema de coordenadas de M. Si $X_{\alpha i}$ es el levantamiento de $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ respecto a la conexión $\bar{\omega}$, tenemos que $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{X}^*(P)$ y $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_{2n+s}}$ forman una base, sobre $\mathcal{F}(P)$, para el espacio de campos horizontales de $P/_{U_\alpha}$. Luego, si $X \in \mathfrak{X}(P)$ es horizontal, tenemos

$$X = \Sigma\, h_i\, X_{\alpha_i}\,, \quad \text{en } P/_{U_\alpha}$$

y definimos

$$\bar{f}(X) = \Sigma\, h_i\, \bar{f}(X_{\alpha_i}), \quad \text{en } P/_{U_\alpha}$$

Un simple cómputo no muestra que $\bar{f}(X)$ es independiente de los sistemas de coordenadas, en consecuencia $\bar{f}(X)$ queda globalmente definido.

LEMA 3.4 Si $X \in \mathfrak{X}^*(P)$, entonces

$$\bar{\omega}_i(\bar{f}X) = \begin{cases} -\pi^*\eta^i(X), & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ 0, & \text{si, } i > k \end{cases}$$

Demostración. Sigue inmediatamente de

1) $\bar{\omega}(\bar{f}X) = -\sum_{i=1}^{k} \pi^*\eta^i(X)e_i$ 2) $\bar{\omega}(\bar{f}X) = \sum_{i=1}^{r} \bar{\omega}_i(\bar{f}X)e_i$. ∎

Definimos en P las 1-formas $\bar{\eta}^i$ y los campos $\bar{E}_i$, $i = 1,\dots,s'$:

a. Si $r \leq s$, entonces $\bar{\eta}^i = \pi^*\eta^{r+i}$ y $\bar{E}_i$ es levantamiento de E_{r+i} . Esto es, $\bar{E}_i$ es el campo horizontal tal que $\pi\bar{E}_i = E_{r+i}$.

b. Si $s \leq r$, entonces $\bar{\eta}^i = \bar{\omega}_{s+i}$ y $\bar{E}_i$ es el campo fundamental correspondiente a e_{s+i} .

Notar que si $r = s$, esta definición es vacía.

LEMA 3.5 Los tensores $\bar{f}$, $\bar{\eta}^i$, $\bar{E}_i$, $i = 1,\dots,s'$ satisfacen:

a. $\bar{\eta}^i(\bar{E}_j) = \delta^i_j$ b. $\bar{f}(\bar{E}_i) = 0$ c. $\bar{\eta}^i \circ \bar{f} = 0$

d. $\bar{\eta}^i$ y $\bar{E}_i$, $i = 1,\dots,s'$, son horizontales si $r < s$, y son verticales si $s < r$.

e. $\bar{f}$, $\bar{\eta}^i$, $\bar{E}_i$ son invariantes.

Demostración. Las partes a, b, c y d son obvias. También es obvia la invarianza de $\bar{\eta}^i$ y $\bar{E}_i$. Veamos la de $\bar{f}$. Debemos probar que $R_a \circ \bar{f} = \bar{f} \circ R_a$, $\forall\, a \in T^r$. Si $X \in \mathfrak{X}^*(P)$, puesto que $\bar{f}(X) \in \mathfrak{X}^*(P)$, tenemos,

$$R_a(\bar{f}X) = \bar{f}(R_a X)$$

Ahora, si $h \in F(P)$ y $X \in \mathfrak{X}^*(P)$, entonces

$$R_a(\bar{f}(hX)) = R_a(h\bar{f}(X)) = (R_a^*h)(R_a(\bar{f}X)) = (R_a^*h)(\bar{f}(R_a X))$$

$$= \bar{f}((R_a^*h)(R_a X)) = \bar{f}(R_a(hX)). \quad \blacksquare$$

TEOREMA 3.6 $(\bar{f}, \bar{\eta}^i, \bar{E}_i)$, $i = 1,\dots,s'$, es una f-estructura con referencias, invariante definida en P.

Demostración. Para ser una f-estructura con referencias debemos probar que

1) $\bar{f}(\bar{E}_i) = 0$, $i = 1,\dots,s'$ 2) $\bar{\eta}^i(\bar{E}_j) = \delta^i_j$

3) $\bar{\eta}^i \circ \bar{f} = 0$, $i = 1,\dots,s'$ 4) $\bar{f}^2 = -I + \sum_{i=1}^{s'} \bar{\eta}^i \otimes \bar{E}_i$

Las tres primeras igualdades están dadas en el lema anterior.

4) Es suficiente probar esta igualdad para los campos invariantes $X \in \mathfrak{X}^*(P)$:

$$\pi(\bar{f}^2X) = f(\pi(\bar{f}X)) + \sum_{i=1}^{k} \omega_i(\bar{f}X)E_i$$

$$= f(f(\pi X) + \sum_{i=1}^{k} \omega_i(X)E_i) - \sum_{i=1}^{k} \eta^i(\pi X)E_i$$

$$= -\pi X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(\pi X)E_i - \sum_{i=1}^{k} \eta^i(\pi X)E_i$$

Si $r \leqslant s$, entonces

$$\pi(\bar{f}^2X) = -\pi X + \sum_{i=k+1}^{s} \eta^i(\pi X)E_i$$

$$= - \pi X + \sum_{i=k+1}^{s} \eta^{i}(\pi X)(\pi \overline{E}_i)$$

$$= \pi(-X + \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X)\overline{E}_i)$$

Si $s \leqslant r$, considerando que $\overline{E}_i$ es vertical, tenemos

$$\pi(\overline{f}^2 X) = - \pi X$$

$$= \pi(-X + \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X)\overline{E}_i)$$

En ambos casos hemos logrado:

$$(5) \qquad \pi(\overline{f}^2 X + X - \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X)\overline{E}_i) = 0$$

Por otro lado,

$$\overline{\omega}(\overline{f}^2 X) = - \sum_{i=1}^{k} \pi^* \eta^{i}(\overline{f}X) e_i$$

$$= - \sum_{i=1}^{k} \pi^*[\eta^{i}(f(\pi X) + \sum_{j=1}^{k} \omega_j(X)E_j)] \, e_i$$

$$= - \sum_{i=1}^{k} \overline{\omega}_i(X) e_i$$

Si $r \leqslant s$, considerando que $\overline{E}_i$ es horizontal, tenemos

$$\overline{\omega}(\overline{f}^2 X) = - \sum_{i=1}^{r} \overline{\omega}_i(X) e_i = \overline{\omega}(X) = \overline{\omega}(-X + \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X)\overline{E}_i)$$

Si $s \leqslant r$

$$\overline{\omega}(\overline{f}^2 X) = - \sum_{i=1}^{s} \overline{\omega}_i(X) e_i = - \overline{\omega}(X) + \sum_{i=s+1}^{r} \overline{\omega}_i(X) e_i$$

$$= - \overline{\omega}(X) + \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X) \, \overline{\omega}(\overline{E}_i) = \overline{\omega}(-X + \sum_{i=1}^{s'} \overline{\eta}^{i}(X)\overline{E}_i)$$

Nuevamente, en ambos casos hemos logrado:

$$(6) \quad \bar{\omega}(\bar{f}^2X + X - \sum_{i=1}^{s'} \bar{\eta}^i(X)\bar{E}_i) = 0$$

Finalmente, de (5) y (6) tenemos

$$\bar{f}^2(X) = -X + \sum_{i=1}^{s'} \bar{\eta}^i(X)\bar{E}_i$$

COROLARIO 3.7 Si $r = s$, entonces $\bar{f}$ es una estructura casi-compleja invariante.

4. NORMALIDAD

Surge, ahora, una pregunta natural. ¿Cuándo $(\bar{f}, \bar{\eta}^i, \bar{E}_i)$ es normal?. O, en el caso de que $r = s$, ¿cuándo la estructura casi-compleja $\bar{f}$ es compleja?. La respuesta lo da el próximo teorema. Antes necesitamos los siguientes lemas, cuya demostración no es difícil.

Sean Ω_i $i = 1,\dots,r$ las 2-formas en M tales que

$$d\,\bar{\omega}_i = \pi^*\,\Omega_i$$

LEMA 4.1 Para $X, Y \in \mathfrak{X}^*(P)$ se tiene

$$\pi(S_{\bar{f}}(X, y) = S_f(\pi X, \pi Y) + \sum_{i=1}^{k} \{\omega_i(X)(L_{E_i} f)(\pi Y) - \omega_i(Y)(L_{E_i} f)(\pi X))\}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{k} \omega_i(X)\omega_j(Y)\,[\,E_i, E_j\,] + \sum_{i=1}^{k} \{\,\Omega_i(\pi\bar{f}X, \pi Y)$$

$$+ \Omega_i(\pi X, \pi\bar{f}Y)\,\}\,E_i$$

LEMA 4.2 Para $X, Y \in \mathfrak{X}^*(P)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}(S_{\bar{f}}(X, Y)) = {} & d\bar{\omega}(X, Y) - d\omega(\bar{f}X, \bar{f}Y) \\
& - \sum_{i=1}^{k} \pi^* \{ d\eta^i (f\pi X, \pi Y) + d\eta^i(\pi X, f\pi Y) \} e_i \\
& + \sum_{i,j=1}^{k} \pi^* \{ \omega_j(Y)(L_{E_i}\eta^i)(\pi X) - \omega_j(X)(L_{E_j}\eta^i)(\pi Y) \} e_i
\end{aligned}
$$

TEOREMA 4.3 Dos cualesquiera de las siguientes tres proposiciones implican la otra.

1) (f, E_i, η^i) es normal

2) $d\bar{\omega}(\bar{f}X, Y) = -d\bar{\omega}(X, \bar{f}Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$

3) $(\bar{f}, \bar{E}_i, \bar{\eta}^i)$ es normal

Demostración.

1) y 2) $\Rightarrow$ 3)

De 1) obtenemos:

a. $S_f = 0$ b. $L_{E_i} f = 0$ c. $[E_i, E_j] = 0$

d. $L_{E_i}\eta^j = 0$ e. $d\eta^i(f\pi X, \pi Y) = -d\eta^i(\pi X, f\pi Y)$

De 2) obtenemos:

f. $\Omega_i(\pi \bar{f}X, \pi Y) = -\Omega_i(\pi X, \pi \bar{f}Y)$

De estas igualdades, reemplazadas en los lemas 4.1 y 4.2, nos dan $S_{\bar{f}} = 0$.

2) y 3) $\Rightarrow$ 1)

De 3) tenemos $S_{\bar{f}} = 0$ y de 2) tenemos nuevamente f. Si $\bar{e}_j$ es el campo fundamental correspondiente a e_j, tenemos que

$$\bar{\omega}_i(\bar{e}_j) = \delta^i_j \quad , \quad \omega_i(\bar{e}_j) = \delta^i_j$$

Si en el lema 4.1 reemplazamos X por $\bar{e}_i$ y Y por $\bar{e}_j$, tenemos que $[E_i, E_j] = 0$. Ahora, la igualdad del lema 4.1 queda reducida a

$$0 = S_f(\pi X, \pi Y) + \sum_{i=1}^{k} \{\omega_i(X)(L_{E_i} f)(\pi Y) - \omega_i(Y)(L_{E_i} f)(\pi X)\}$$

Si en esta igualdad reemplazamos X por $\bar{e}_i$, tenemos $L_{E_i} f = 0$. En consecuencia $S_f = 0$.

1) y 3) $\Rightarrow$ 2)

De 1) obtenemos:

a. $L_{E_i} \eta^j = 0$ b. $d\eta^i(f\pi X, \pi Y) = -d\eta^i(\pi X, f\pi Y)$

De 3) obtenemos $S_{\bar{f}} = 0$

Estas igualdades, reemplazadas en el lema 4.2 nos dan

$$d\bar{\omega}(\bar{f}X, \bar{f}Y) = d\bar{\omega}(X, Y),$$

que es equivalente a 2).

COROLARIO 4.4 Si $r = s$, (f, E_i, η^i) es normal y

$d\bar{\omega}(\bar{f}X, Y) = -d\bar{\omega}(X, \bar{f}Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, entonces la estructura casi -compleja $\bar{f}$ de P es una estructura compleja.

5. AUTOMORFISMOS INFINITESIMALES

En esta sección consideramos una variedad M dotada de una f-estructura con referencias:

$$(f, E_i, \eta^i), \; i = 1, \ldots, s.$$

DEFINICION. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es llamado un *automorfismo infinitesimal* de la (f, E_i, η^i)-estructura si se cumple que

$$L_X f = 0 \quad \text{y} \quad L_X \eta^i = 0, \; i = 1, \ldots, s.$$

donde L_X es derivada de Lie respecto al campo X.

Denotaremos con $\mathfrak{M}$ el conjunto de todos los automorfismos infinitesimales de la (f, E_i, η^i)-estructura. De la siguiente igualdad

$$L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y] \; ,$$

se concluye inmediatamente que $\mathfrak{M}$ es una subalgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

LEMA 5.1 Si $X \in \mathfrak{M}$, entonces

$$[X, E_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, s$$

Demostración.

Tenemos que

$$f([X, E_i]) = [X, f(E_i)] - (L_X f)(E_i) = 0 - 0 = 0$$

$$\eta^j([X, E_i]) = L_X(\eta^j(E_i)) - (L_X \eta^j)(E_i) = 0 - 0 = 0$$

Luego, $[X, E_i] = 0$. ∎

Tomemos, ahora, un fibrado principal $P(M, T^s, \pi)$, con grupo estructural el toro T^s y con una conexión $\overline{\omega}$. El corolario 3.7, nos asegura que tenemos una estructura casi-compleja J definida en P. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de los automorfismos infinitesimales de la estructura casi-compleja J; es decir

$$X \in \mathfrak{g} \iff L_X J = 0$$

Nuestro objetivo inmediato es encontrar relaciones entre los álgebras de Lie $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{g}$. El siguiente Lema será de gran ayuda. Recordar que Ω_i es la z-forma sobre M tal que

$$d\,\overline{\omega}_i = \pi^* \Omega_i, \quad 1 = 1, \ldots, s$$

LEMA 5.2 Si X e $Y \in \mathfrak{X}^*(P)$ y $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ son las proyecciones de X e Y respectivamente, entonces

a) $$\pi((L_X J)Y) = (L_{X'} f)Y' + \sum_{i=1}^{s} \omega_i(Y)[X', E_i] + \sum_{i=1}^{s} \{\Omega_i(X', Y') + Y'(\omega_i(X))\} E_i$$

b) $$\omega((L_X J)Y) = -\sum_{i=1}^{s} \{d\overline{\omega}(X, JY) + L_{JY}(\overline{\omega}_i(X)) + \pi^*((L_{X'} \eta^i)Y')\} e_i$$

Demostración.

a) $$\pi((L_X J)Y) = \pi([X, JY] - J[X, Y])$$

$$= [X', fY' + \Sigma\,\omega_i(Y)E_i] - f([X', Y'])$$

$- \Sigma\, \omega_i([X,Y])\, E_i$

$= [X', fY'] - f([X', Y']) + \Sigma\, \omega_i(Y)[X', E_i]$

$+ \Sigma\, \{X'(\omega_i(Y)) - \omega_i([X,Y])\}\, E_i$

$= (L_{X'} f)Y' + \Sigma\, \omega_i(Y)[X', E_i]$

$+ \Sigma\{\Omega_i(X', Y') + Y'(\omega_i(X))\}\, E_i$

b) $\overline{\omega}_i((L_X J)Y) = \overline{\omega}_i([X, JY] - \overline{\omega}_i(J[X,Y])$

$= \overline{\omega}_i([X, JY]) + \pi^*\eta^i([X,Y])$

$= -d\overline{\omega}_i(X, JY) + X(\overline{\omega}_i(JY)) - (JY)(\overline{\omega}_i(X)) + \pi^*\eta^i([X,Y])$

$= -d\overline{\omega}_i(X, JY) - X(\pi^*\eta^i(Y)) - L_{J\cdot Y}(\overline{\omega}_i(X)) + \pi^*\eta^i([X,Y])$

$= -d\overline{\omega}_i(X, JY) - L_{JY}(\overline{\omega}_i(X)) = -\pi^*(X'(\eta^i(Y') - \eta^i([X', Y']))$

$= -d\overline{\omega}_i(X, JY) - L_{JY}(\overline{\omega}_i(X)) - \pi^*((L_{X'}\eta^i)Y')$. ∎

Ahora vamos a imponer la condición adicional de que la conexión $\overline{\omega}$ es integrable; esto es, se cumple que,

$$d\,\overline{\omega} = 0$$

y, por tanto, $\Omega_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$.

TEOREMA 5.3 Sea $P(M, T^s, \pi)$ un fibrado principal que tiene una conexión $\overline{\omega}$ integrable y cuyo espacio base M^{2n+s} tiene una f-estructura (f, η^i, E_i) $i = 1, \ldots, s$. Si $X \in \mathfrak{X}^*(P)$ y si $X' \in \mathfrak{X}(M)$ es la proyección de X, entonces dos cualesquiera de las tres siguientes proposi ciones implican la otra.

(1) $\overline{\omega}(X) =$ constante

(2) $X \in \mathfrak{g}$

(3) $X' \in \mathfrak{m}$

Demostración.

(1) y (2) $\Rightarrow$ (3)

Si $Y \in \mathfrak{X}^*(P)$, aplicando el lema anterior tenemos

(4) $(L_{X'} f)Y' + \sum_{i=1}^{s} \omega_i(Y)[X', E_i] = 0$

(5) $(L_{X'} \eta^i)Y' = 0, \quad i = 1, \ldots, s.$

La igualdad (5) nos dice que

$$L_{X'} \eta^i = 0$$

Si en (4) tomamos $Y = Z_j$, donde Z_j es el campo fundamental correspondiente a e_j, obtenemos que $[X', E_j] = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Luego

$$L_{X'} f = 0$$

y, por tanto, $X' \in \mathfrak{m}$

(1) y (3) $\Rightarrow$ (2)

El lema 5.1 nos dice que $[X', E_i] = 0$, $i = 1, \ldots, s$.
Si $Y \in \mathfrak{X}^*(P)$, aplicando el lema 5.2 tenemos que,

$$\pi((L_X J)Y) = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\omega}((L_X J)Y) = 0,$$

lo que nos dice que

$$L_X J = 0$$

y, por tanto, $X \in \mathfrak{g}$

(2) y (3) $\Rightarrow$ (1)

Del lema 5.1 y de la parte a) del lema 5.2 se tiene para $i=1,\dots,s$,

$$Y'(\omega_i(X)) = 0, \quad \forall\, Y' \in \mathfrak{X}(M)$$

En consecuencia $\omega_i(X) = \text{const.}$, $i = 1,\dots,s$; y, por tanto,

$$\overline{\omega}(X) = \text{const.} \quad \blacksquare$$

El siguiente conjunto

$$\mathfrak{g}_\circ = \{ X \in \quad / \; X \in \mathfrak{X}^*(P) \;\; y \;\; \overline{\omega}(X) = \text{const.} \}$$

es un subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. En efecto, si X e Y están $\mathfrak{g}_\circ$, se tiene que

$$\overline{\omega}_i([X,Y]) = X(\overline{\omega}_i(X)) - Y(\overline{\omega}_i(X)) - d\overline{\omega}_i(X,Y) = 0,$$

y, por tanto, $[X,Y]$ también está en $\mathfrak{g}_\circ$.

El siguiente corolario es obvio.

COROLARIO 5.4 Si $P(M,T^s,\pi)$ es el fibrado del teorema 5.3, entonces

$$X \in \mathfrak{g}_\circ \Rightarrow X' \in \mathfrak{m}.$$

COROLARIO 5.5 Si $P(M,T^s,\pi)$ es el fibrado teorema 5.3 y si $\overline{X}$ es el levantamiento de $X \in \mathfrak{X}(M)$ respecto a la conexión $\overline{\omega}$, entonces

$$X \in \mathfrak{m} \Rightarrow \overline{X} \in \mathfrak{g}_\circ$$

Demostración.

Tenemos que $\overline{X} \in \mathfrak{X}^*(P)$, $\overline{\omega}(\overline{X}) = 0$, y, por tanto, $\overline{X} \in \mathfrak{g}$. $\blacksquare$

Ya estamos en condiciones de probar el teorema que nos habiamos propuesto como objetivo del presente trabajo.

TEOREMA 5.6 Sea M^{2n+s} una variedad compacta que posee una (f,η^i,E_i) - estructura normal. El álgebra de Lie $\mathfrak{m}$ de los automorfismos infinitesimales de esta f-estructura tiene dimensión finita.

Demostración.

Sea $P(M,T^s,\pi)$ el fibrado trivial y sea la conexión plana canónica de este fibrado. Tenemos que $d\overline{\omega}=0$.

Si J es la estructura casi-compleja sobre P determinada por la f-estructura (f,η^i,E_i) y la conexión $\overline{\omega}$, el corolario 4.4 nos asegura que J es una estructura compleja.

Como M y T^s son compacto, $P=M\times T^s$ también lo es. Luego, $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de los automorfismos de J, tiene dimensión finita. La dimensión de $\mathfrak{g}_\circ$, por ser subalgebra de $\mathfrak{g}$, también es finita.

El álgebra de Lie de T^s lo identificamos con el subalgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_\circ$ generada por los vectores fundamentales de $e_1,\dots,e_s$.

Los corolarios 5.4 y 5.5 nos permiten definir los siguientes homomorfismos:

a) $\pi : \mathfrak{g}_\circ \longrightarrow \mathfrak{m}$ b) $1 = \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}_\circ$

$X \longrightarrow X'$ $X \longrightarrow \overline{X}$

Ahora, tenemos la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}_\circ \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

Se prueba fácilmente que ésta sucesión es exacta. Además, como $\pi \circ 1 = I_{\mathfrak{m}}$, esta sucesión se parte y, por tanto,

$$\mathfrak{g}_\circ \approx \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

Como la dimensión de $\mathfrak{g}_\circ$ es finita, la de $\mathfrak{m}$ también lo es . ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] GOLDBERG, S. I. and YANO, K. *"On normal globally framed manifolds"*, Tôhoku Mathematical Journal, 22 (1970), 362-370.

[2] KOBAYASHI, S. *"Transformations Grups in Differential Geometry"*, New York; Springer-Verlag, 1972.

[3] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K. *"Foundation of Differential Geometry"*, New York; John Wiley & Sons, Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969.

[4] OGAWA, Y. *"Some properties on manifolds with almost contact structures"*, Tôhoku Mathematical Journal, 15 (1963), 148-161.

[5] SAENZ, J. *"f-estructuras en fibrados toroidales"*, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Venezuela.

[6] YANO, K. *"On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$," Tensor*, N.S., 14 (1963), 99-109.