

# Monopolos y Vórtices del modelo Yang-Mills-Higgs.

## Resumen.

En el siguiente trabajo se plantea una alternativa en la búsqueda de soluciones para los sistemas de ecuaciones que modelan los campos escalares y vectoriales tanto para el Vórtice de Nielsen-Olesen como el del Monopolo de 'tHooft-Polyakov. Para ello se pide la presencia de potenciales más generales que el tradicional Sombrero Mejicano, a los que solo se les exige la presencia de mínimos degenerados con caída espontánea a vacíos no triviales.

La intención es proponer funciones para los campos con las características requeridas por cada modelo, desarrollar con ellas el sistema de ecuaciones obtener el potencial y estudiar su factibilidad.

Debido a las dificultades inherentes para conseguir soluciones, se explora la posibilidad de relajar las condiciones de frontera del campo vectorial en el origen y sus consecuencias para los modelos. Así se consigue una solución limitada con energía finita para el vórtice.

# Monopolos y Vórtices del modelo Yang-Mills-Higgs



Universidad Centroccidental “ Lisandro Alvarado”  
Decanato de Ciencias y Tecnología  
Coordinación de Postgrado

Monopolos y Vórtices del modelo Yang-Mills-Higgs

**Presentado por:** Lic. Joel E. Lamazares M.

Trabajo Especial de Grado para optar al título de:  
Magister Scientiarum en Ciencias  
Mención Física Matemática

**Tutor:** Dr. Rafael S. Torrealba S.

**Área de Conocimiento:** Teoría de Campos



# Índice

Índice . . . . .	5
<b>1 Introducción . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>2 Preliminares . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 U(1) como el Grupo de Simetría del Electromagnetismo . .	11
2.2 Acción de Yang-Mills . . . . .	15
2.3 Ruptura Espontanea de Simetría. . . . .	18
2.3.1 Potencial de Ruptura de Simetría. . . . .	18
2.3.2 Sub-Grupo no Roto. . . . .	19
<b>3 Vórtice de Nielsen-Olesen. . . . .</b>	<b>21</b>
3.1 Vórtice de Nielsen -Olesen . . . . .	21
<b>4 Monopolo de 'tHooft - Polyakov. . . . .</b>	<b>29</b>
4.1 Monopolo de 'tHooft - Polyakov . . . . .	29
4.2 Tensor del Campo Electromagnético y Carga Magnética . . . . .	35
4.2.1 Tensor del Campo Electromagnético. . . . .	35
4.2.2 Carga Magnética. . . . .	36
4.3 Cota Bogomol'nyi . . . . .	36
4.4 Solución de Prasad-Sommerfield. . . . .	37
<b>5 Buscando Soluciones a Vórtice y Monopolo. . . . .</b>	<b>39</b>
5.1 Procedimiento a seguir para la Búsqueda de Soluciones. . . . .	39
5.2 Buscando Soluciones al Vórtice . . . . .	40
5.2.1 Relajación de las Condiciones de Borde . . . . .	40
5.2.2 Forma Esperada para el Potencial $V_c$ . . . . .	43
5.2.3 Solución Propuesta para el Campo Escalar. . . . .	45
5.3 Buscando Soluciones al Monopolo . . . . .	48

5.3.1 Relajación del valor de $f$ en $r=0$ . . . . .	48
<b>6 Conclusiones.</b> . . . . .	51
<b>Apéndice A Elementos de Homotopía</b> . . . . .	53
<b>Bibliografía</b> . . . . .	55

# Capítulo 1

## Introducción

Desde que Dirac propuso la existencia del Monopolo Magnético [1] hace casi 90 años, este se convirtió en uno de los objetos principales de estudio tanto de la física teórica como experimental, ya que explicaría, por medio de la condición de cuantización de Dirac, la razón por la cual la carga eléctrica se encuentra cuantizada en unidades elementales de carga, es decir, la carga del electrón [1][2]. El impacto del Monopolo ha sido tan grande, que ha trascendido el ámbito de la física y ha provocado grandes desarrollos tanto en ecuaciones diferenciales como en geometría diferencial y topología debido a que es una solución singular a las ecuaciones de Maxwell que debe ser explicada recurriendo a varias cartas locales en una topología no trivial. Esta característica topológica de los Monopolos abrió el campo de estudio de los llamados "defectos topológicos" que junto con las teorías de Yang-Mills impulsó el desarrollo matemático de las teorías de partículas, lo que culminó con gran éxito en la creación del Modelo Estándar.

Entre los años 1973 y 1975 se descubrió, que en las teorías de Yang-Mills con rompimiento de simetría se obtienen soluciones topológicas no triviales tipo Monopolos. Inicialmente esto se obtuvo a partir del modelo Higgs abeliano en 2 dimensiones (Vórtices de Nielsen-Olesen) [3] y del modelo Higgs no abeliano en 3 dimensiones (Monopolos de 'tHooft-Polyakov) [4][5]. Posteriormente, durante la década de los años 1980-90, se hizo evidente la relación entre el rompimiento de simetría con la aparición de Monopolo en las teorías de unificación [6].

Otra razón fundamental para estudiar los defectos topológicos es que la teoría del Big Bang, predice la creación de gran cantidad de Monopolos previamente a la aparición de las primeras partículas. Uno de los resultados más importantes de la Cosmología Estándar es la bajísima densidad de

Monopolos y otros defectos topológicos que predice la teoría de la inflación cósmica presentes en el momento actual del universo [7]. Que hasta el momento no han sido detectadas, supone un grave problema para la cosmología teórica.

Actualmente el interés en conseguir soluciones exactas para los Vórtices y Monopolos ha resurgido, debido a que se ha mostrado numéricamente que es posible confinar la gravedad sobre ellos [8]. Estas soluciones en principio, permitirían construir escenarios como los de Randall-Sundrum [9] en más de (5+1) dimensiones. Gran parte del desarrollo en esta área de la física teórica, se debe al conocimiento de soluciones exactas tipo "Pared de Dominio".

Los Vórtices y los Monopolos surgen como soluciones particulares de las ecuaciones de campo de Yang-Mills (en (2+1) y (3+1) dimensiones respectivamente) con presencia de potenciales con Ruptura Espontanea de Simetría. Es sorprendente que a pesar de todo el desarrollo de casi 40 años en teorías de defectos topológicos, solo se conoce una solución exacta para los Monopolos de 'tHooft-Polyakov el límite de Prasad-Sommerfield [10] y solamente una familia de soluciones en el límite superconductor para los vórtices [11]. Lo conocido hasta ahora de las soluciones para los campos tanto de los Monopolos como los Vórtices, descansa en las soluciones asintóticas e integraciones numéricas. Solo recientemente se ha dado una prueba matemática de la existencia de solución a las ecuaciones diferenciales que modelan al Monopolo de 'tHooft-Polyakov [12].

En este trabajo se presenta un procedimiento para obtener nuevas soluciones de las ecuaciones tanto de los Monopolos de 'tHooft-Polyakov (3+1) como de los vórtices del modelo Higgs abeliano (2+1) usando potenciales más generales que el "sombbrero mejicano", a estos potenciales solo se exige la presencia de mínimos degenerados que permitan el rompimiento de la simetría. La intención es proponer soluciones con las características requeridas por los modelos estudiados, desarrollar con ellas las ecuaciones de evolución y estudiar la factibilidad de los potenciales asociados.

El trabajo está estructurado en seis capítulos: el primero es introductorio, el segundo capítulo contiene los elementos necesarios para la construcción del modelo Yang-Mills-Higgs tanto abeliano como el no abeliano para los Vórtices y Monopolos, en el tercero y cuarto capítulo se desarrolla el modelos del Vórtice de Nielsen-Olesen como el modelo del Monopolo de 'tHooft-Polyakov respectivamente, en el quinto capítulo se detalla el pro-

cedimiento a seguir para la búsqueda de nuevas soluciones, se presentan y se discuten los resultados obtenidos y finalmente en el sexto capítulo se dan las conclusiones.

A lo largo de este trabajo se utiliza signatura negativa (+ - -), los índices en griego van de 0 a 3 y los escritos en letras arábicas de 1 a 3 además se utiliza el sistema de unidades naturales ( $c = 1$  y  $\hbar = 1$ ).



# Capítulo 2

## Preliminares

Para entender como surgen los modelos para los monopolos y vórtices, es necesario comprender el papel que juega las simetrías en la física, en particular en la teoría del electromagnetismo. En este capítulo se construye el Lagrangeano bajo el grupo de simetría Abeliano  $U(1)$ , siguiendo como extensión natural a grupos no abelianos donde se siguen los pasos en la construcción del Lagrangeano de Yang-Mills y finalmente se trata la ruptura espontanea de simetría.

### 2.1 $U(1)$ como el Grupo de Simetría del Electromagnetismo

La simetría es un concepto que involucra a un objeto y sus condiciones; el objeto es simétrico respecto a cierta condición si este no cambia cuando varía la condición, matemáticamente las simetrías son modeladas a través de la teoría de grupos, por ejemplo la simetría de rotación alrededor de un eje es modelada con el grupo  $SO(2)$ , la simetría de rotación alrededor de un punto, son representados por el grupo  $SO(3)$ , etc. En física una simetría es un grupo de transformaciones  $G$  sobre los grados de libertad del sistema que deja invariante la acción  $S$  y por ende las ecuaciones de movimiento

$$S'(\varphi', \partial_\mu \varphi') = S(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

o escrito en términos del Lagrangeano:

$$\mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi') = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

donde el acento representa la función transformada bajo la acción de  $G$ .

Tomando en cuenta lo antes dicho, se pretende construir un Lagrangeano invariante bajo la acción del grupo Abeliano  $U(1)$  para describir al campo escalar complejo  $\varphi$  a y su complejo conjugado  $\varphi^*$ , esta configuración permite dotar de carga al campo.

Partiendo del lagrangeano  $\mathcal{L}_0$  más simple posible para campos escalares sometidos a un potencial  $V$ :

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu(\varphi)\partial_\mu(\varphi^*) - V(\varphi\varphi^*) \quad \mu=0,1,2 \quad (2.1)$$

puede verse que el Lagrangeano (2.1) es invariante bajo una transformación de fase global  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha} \varphi(\mathbf{r}) \quad y \quad \varphi'^*(\mathbf{r}) = e^{-i\alpha} \varphi^*(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L}'_0 = \partial^\mu(\varphi')\partial_\mu(\varphi'^*) - V(\varphi'\varphi'^*) = \mathcal{L}_0.$$

Para transformaciones locales bajo el grupo  $U(1)$ ,  $\alpha$  depende de la posición.

$$\alpha = \alpha(\mathbf{r}) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con lo cual los campos transforman:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

$$\varphi'^* = e^{-i\alpha(\mathbf{r})} \varphi^*(\mathbf{r})$$

esto genera cambios en la parte cinética del Lagrangeano (2.1) pero no en el potencial  $V(\varphi\varphi^*)$ . Derivando (2.2) se tiene

$$\partial^\mu \varphi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})} [\partial^\mu - i\partial^\mu \alpha(\mathbf{r})] \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

la presencia del factor  $i\partial^\mu\alpha(\mathbf{r})$  en (2.3) hace que la teoría no sea invariante ya que  $\mathcal{L}'_0$  difiere de (2.1). Para obtener la invariancia se debe modificar el Lagrangeano (2.1); la opción para ello es cambiar el operador derivada  $\partial^\mu$  por un nuevo operador  $D^\mu$  llamado derivada covariante. Exigiendo que  $D^\mu$  cumpla:

$$D^\mu \varphi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})} D^\mu \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

el nuevo Lagrangeano será:

$$\mathcal{L}_1 = D^\mu(\varphi) D^\dagger_\mu(\varphi^*) - V(\varphi\varphi^*) \quad (2.5)$$

el cual tendrá la invariancia deseada.

Definiendo la Derivada Covariante como

$$D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

donde  $e$  es una constante de acoplamiento y  $A^\mu(\mathbf{r})$  un cuadvivector definido en todo el espacio. Aplicado la derivada covariante sobre (2.2) se comprueba que se cumple (2.4) siempre que el campo  $A^\mu(\mathbf{r})$  transforme de la siguiente manera

$$A^\mu(\mathbf{r}) \rightarrow A^{\mu'}(\mathbf{r}) = A^\mu(\mathbf{r}) - \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

es decir, el nuevo Lagrangeano (2.5) es invariante bajo la transformación definida por (2.7) y (2.4).

Inicialmente se tienen solo dos campos ( $\varphi$  y  $\varphi^*$ ) como variables dinámicas del sistema sin embargo, aparece ahora un campo adicional: el cuadvivector  $A^\mu(\mathbf{r})$ . El campo  $A^\mu(\mathbf{r})$  surge a consecuencia de introducir grados de libertad adicionales al ser ahora la fase local  $\alpha(\mathbf{r})$ . La introducción de  $A^\mu(\mathbf{r})$  obliga a agregar al Lagrangeano (2.5) un término cinético correspondiente a dicho campo, este término debe poseer como característica:

- 1) Ser construido con el producto de las derivadas del campo  $\partial_\nu A_\mu$
- 2) Ser tanto invariante de Lorentz como de U(1).

Esto se logra adicionando al Lagrangeano (2.5) un término de la forma:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico de las derivadas del campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.8)$$

la invariancia de Lorentz se logra en el Lagrangeano, mediante la contracción de todos los índices de Lorentz, faltando solo comprobar que  $F_{\mu\nu}$  es invariante bajo (2.7)

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(\partial_\nu A'_\mu, \partial_\nu A'_\mu) &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu \left[ A_\nu(\mathbf{r}) - \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(\mathbf{r}) \right] - \\ &- \partial_\nu \left[ A_\mu(\mathbf{r}) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(\mathbf{r}) \right] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu, \partial_\nu A_\mu) \end{aligned}$$

En conclusión, el Lagrangeano localmente invariante U(1) es:

$$\mathcal{L} = D^\mu(\varphi) D_\mu^\dagger(\varphi^*) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\varphi\varphi^*) \quad (2.9)$$

Haciendo variaciones con respecto al campo  $\varphi^*$  e integrando por partes se obtiene la ecuación de Euler Lagrange para  $\varphi$

$$\begin{aligned} \left( D^\mu D_\mu + \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} \right) \varphi &= 0 \\ \left( D^\mu D_\mu + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \varphi^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde se ha hecho uso explícito de que el potencial  $V(\varphi\varphi^*)$  es función del producto de  $\varphi\varphi^*$ . Las ecuaciones (2.10) corresponden a ecuaciones de movimiento tipo Klein-Gordon, para los campos escalares.

Haciendo variaciones con respecto al campo vectorial  $A_\mu$  se obtiene la ecuación de Maxwell no homogénea:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu \quad (2.11)$$

donde  $J_\mu$  es una cantidad real que llamaremos densidad de corriente

$$J_\mu = ie(\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi D_\mu^\dagger \varphi^*) \quad (2.12)$$

Debido a que  $F_{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico, es fácil demostrar que  $J_\mu$  es una cantidad conservada

$$\begin{aligned} \partial^\mu (J_\mu) &= \partial^\mu (\partial^\nu F_{\mu\nu}) = 0 \\ \partial^\mu J_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

El conjunto de ecuaciones (2.11) y (2.13) forma las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell escritas en forma covariante.

En resumen, la hipótesis de que la teoría es invariante local U(1) llevan de forma directa a obtener un conjunto de ecuaciones que poseen la estructura del electromagnetismo; por ello, cualquier teoría que pretenda incluir dentro de su ámbito el electromagnetismo necesariamente debe tener al grupo U(1) como parte del grupo de simetría.

## 2.2 Acción de Yang-Mills

En esta sección se quiere encontrar el Lagrangiano mas simple posible, invariante bajo la acción un grupo  $G$  de transformaciones de simetría que dependen de parámetros locales como la posición y por lo tanto es un Grupo de Lie. Los elementos del grupo,  $g \in G$  se representarán mediante operadores adecuados a la característica tensorial del campo sobre el cual actúan, de forma tal que la representación sea fiel, es decir uno a uno y que preserve los productos del grupo.

Haciendo actuar un elemento del grupo sobre un campo escalar  $\varphi$ , este transforma localmente de acuerdo a

$$\varphi \rightarrow \varphi' = g(\theta) \varphi \quad (2.14)$$

donde  $g(\theta) = \exp(-\theta.T)$  con  $T = T^a$  una representación de los generadores del algebra adecuada a la característica tensorial del elemento sobre el que actúan y  $\theta = (\theta_1(\mathbf{r}), \dots, \theta_n(\mathbf{r}))$  los parámetros del algebra que generalizan  $\alpha(\mathbf{r})$  en (2.2) para un grupo de dimensión  $n$ .

Para el caso en que  $\varphi$  es un campo escalar con grupo de calibre  $G = \text{SO}(2)$  entonces  $g(\theta)\varphi = \exp(-\theta.[x\partial_y - y\partial_x])\varphi = \exp(-\theta.L_z)\varphi$ . Para en el caso de un doblete de  $\text{SO}(2)$  es decir:  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$  se puede tomar una representación matricial de los generadores, que también es equivalente a una representación compleja de U(1).

En particular en 2 dimensiones

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con lo cual} \quad g(\theta) = \exp(-\theta.L_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Se llamará acción Yang Mills a aquella que sea invariante bajo el grupo  $G = \text{SU}(N)$  el grupo de las transformaciones especiales unitarias representadas por matrices  $N \times N$ . Para el caso de transformaciones reales el grupo invariante, es el grupo de las transformaciones ortogonales  $G = \text{SO}(N)$ .

Tomando la derivada de  $\varphi$  transformada aparece un término no invariante en el Lagrangeano

$$\partial^\mu \varphi \rightarrow g(\theta) \partial^\mu \varphi + \partial^\mu g(\theta) \varphi. \quad (2.15)$$

siguiendo el procedimiento mostrado en la sección 2.1, para eliminar el segundo término no deseado se introduce el campo de calibre  $A^\mu$  al que se escribe en términos de los generadores del algebra de Lie  $T^a$ ,  $a = 1, 2, \dots, d$  donde  $d$  es el número de generadores del grupo, así:

$$A^\mu = A_a^\mu T^a \in L(G) \quad (2.16)$$

el producto en el algebra que corresponde al producto del grupo viene dada por

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del algebra de Lie del grupo.

La transformación de la conexión que generaliza (2.7)

$$A^\mu \rightarrow g A^\mu g^{-1} + \frac{i}{e} (\partial^\mu g) g^{-1} \quad (2.17)$$

acá  $g = g(\theta) = \exp(-\theta_a T^a)$

permite definir la derivada covariante  $D^\mu$  según:

$$D^\mu = \partial^\mu + i e A^\mu \quad (2.18)$$

que transforma teniendo en cuenta (2.14, 2.17) como

$$D^\mu \varphi \rightarrow g(\theta) D^\mu \varphi \quad (2.19)$$

la derivada covariante conserva la simetría requerida tal como en la sección (2.1).

Ahora conociendo como se transforman  $A_\mu$  y  $\varphi$  es el momento de construir el nuevo Lagrangeano invariante localmente, primeramente el trabajo realizado permite cambiar la derivada parcial  $\partial_\mu$  por la derivada convariante  $D_\mu$ , sin embargo necesitamos el término cinético para el campo  $A_\mu$ ; se requiere que construir el tensor  $F_{\mu\nu}$  para el grupo no Abeliano. Se comienza suponiendo que  $F_{\mu\nu}$  puede ser una extensión del tensor construido para el caso Abeliano ya que  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  no es invariante a la acción de  $G$ .

Se requiere que  $F_{\mu\nu}$  transforme usando la misma representación que se usa en  $A_\mu$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1} \quad (2.20)$$

Esto se logra definiendo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ie[A^\mu, A^\nu]$$

y usando (2.16) se obtiene

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.21)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$$

Para construir el término cinético del campo  $A_\mu$  invariante en el Lagrangeano calculamos

$$\frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2e^2} (-ie)^2 \text{Tr}(T^a T^b) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

donde se hizo uso de  $\text{Tr}(T^a T^b) = 1/2$  lo cual puede obtenerse en la representación adjunta  $T^a = -ie^{aij}$  de matrices  $n \times n$  con índices  $i, j$ .

El Lagrangeano invariante bajo el grupo de calibre  $G$  resulta

$$\mathcal{L} = D^\mu(\varphi) D_\mu^\dagger(\varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - V(|\varphi|) \quad (2.22)$$

donde se ha agregado un potencial escalar invariante como en la sección 2.1

## 2.3 Ruptura Espontanea de Simetría.

Se entiende por Ruptura Espontanea de Simetría (RES) cuando la solución de vacío no es invariante al grupo de simetrías que presenta la acción. Esta diferencia ocurre cuando el sistema es sometido a un potencial  $V$  que posee mínimos degenerados (pudiendo ser continuos o discretos) entre los cuales se interpola la solución del vacío. Mientras la acción es invariante bajo el efecto de un grupo  $G$ , la solución del vacío es invariante bajo un grupo  $H \subset G$ .

### 2.3.1 Potencial de Ruptura de Simetría.

Considere un sistema físico modelado por un Lagrangeano como se presentó en la sección (2.22)

$$\mathcal{L} = D^\mu(\varphi)D_\mu^\dagger(\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - V(|\varphi|)$$

posee invariancia bajo un grupo de simetrías  $G$  y el funcional de energía

$$E = \int d^3x \left( \|D_\mu(\varphi)\|^2 + \frac{1}{2}(B^2 + E^2) + V(|\varphi|) \right)$$

en el estado base los campos se encuentran en equilibrio, lo que equivale a

$$D_\mu\varphi|_{\text{equilibrio}} = 0 \quad y \quad F_{\mu\nu}^a|_{\text{equilibrio}} = 0$$

aquí la energía  $E$  consigue su mínimo valor cuando  $V(|\varphi|)$  es mínimo y por simplicidad se toma como nulo

$$V(|\varphi|)|_{\text{equilibrio}} = 0 \tag{2.23}$$

Si se quiere una solución no trivial es necesario que (2.23) se logre para  $|\varphi| \neq 0$ . A esta configuración de campo se le conoce como Vacío de Higgs, siendo común la utilización del potencial renormalizable tipo Sombrero Mexicano

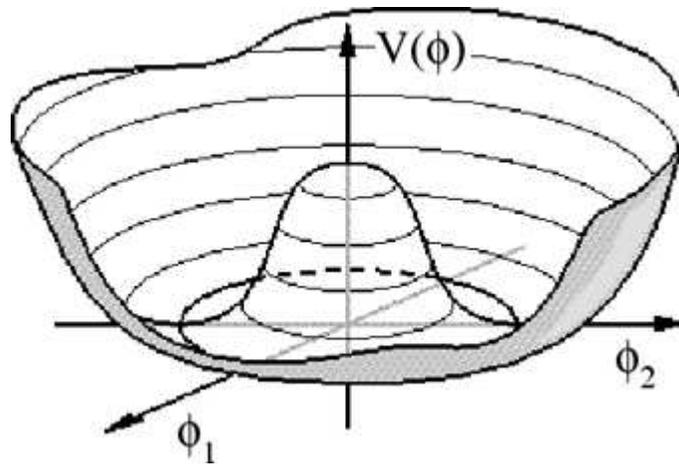
$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{4}(|\varphi|^2 - v^2)^2 \tag{2.24}$$

con  $v \in \mathbb{R}$ , (2.24) define una variedad del campo  $\varphi$  llamada variedad del vacío  $\mathcal{M}_o$  formada por la n-superficie que cumple

$$|\varphi|^2 = v^2 \quad (2.25)$$

además posee su valor máximo cuando  $|\varphi|^2 = 0$ .

Si por ejemplo se tiene un campo bidimensional  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , la grafica de  $V$  vs  $\varphi$  puede verse en la figura 2.1 mostrando como su nombre lo indica, la forma de un sombrero Mexicano. para este ejemplo  $V$  posee mínimos continuamente degenerados en el círculo ( $|\varphi| = v, \theta$ ).



**Figura 2.1.** Grafica del potencial  $V$  en función del campo  $\varphi$  donde se muestra la forma de Sombrero Mexicano. El círculo en el punto más bajo representa los mínimos degenerados

### 2.3.2 Sub-Grupo no Roto.

Si el Lagrangeano (2.22) en ausencia del potencial  $V$ , es invariante bajo la acción de un grupo  $G$ . En la presencia de  $V$ , la invariancia se mantendrá solo si

$$V(g(\theta)\varphi) = V(\varphi)$$

con  $V$  de la forma (2.24) se logra cuando el campo  $\varphi$  es nulo; allí, el Lagrangeano es completamente simétrico, sin embargo en general para otros valores del campo  $\varphi$ , la simetría del Lagrangeano es la simetría  $G' \subset G$  que presenta el potencial.

Si el vacío de Higgs es invariante a un sub-grupo  $H \subset G$  (2.25) define una variedad  $\varphi_0$  donde el campo es invariante, este grupo  $H$  recibe el nombre de Sub-grupo No Roto o Pequeño Grupo de  $G$  respecto a  $\varphi_0$ .

Los estados de un sistema físico se establecen tomando perturbaciones alrededor del estado de equilibrio de los campos, por lo tanto la simetría del estado de equilibrio es, la simetría que presenta los estados derivados del modelo, de allí la importancia de conocer el grupo de invariancia  $H$  del vacío de Higgs.

# Capítulo 3

## Vórtice de Nielsen-Olesen.

En este capítulo se trabaja con las ideas desarrolladas en el capítulo 2, usando un campo escalar sometido a la acción de un potencial con mínimos degenerados que tiene una solución solitónica (*kink*) que interpola entre los mínimos del potencial y rompe la simetría U(1) del Lagrangeano.

### 3.1 Vórtice de Nielsen -Olesen

El modelo más sencillo para el vórtice surge como una adaptación, a la teoría de partículas del vórtice de la teoría de superconductor[3]. Este consiste en un simple solitón del campo escalar, que se obtiene en modelos de calibre U(1) tipo Yang-Mills en dimensión (2+1) y en presencia de un potencial radialmente simétrico que permite la ruptura de simetría. En esta teoría el campo electromagnético adopta una configuración con topología no trivial en dos dimensiones. Dado que el grupo U(1) actúa de manera natural como el grupo de rotación en 2 dimensiones, el modelo se desarrolla en un plano espacial, que denotaremos en coordenadas polares  $(r, \theta)$  más la dimensión temporal.

Para comenzar se toma el Lagrangeano invariante de calibre U(1) (2.9) de acuerdo a la sección 2.1

$$\mathcal{L} = D^\mu(\varphi)D_\mu^\dagger(\varphi^*) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\varphi\varphi^*) \quad (3.1)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$$

y ecuaciones de movimiento:

$$D^\mu D_\mu \varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^*} \varphi, \quad D^\nu F_{\mu\nu} = ie(\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi D_\mu \varphi^*) \quad (3.2)$$

siendo  $A_\mu$  el campo calibre,  $F_{\mu\nu}$  su tensor de campo,  $e$  es la constante de acoplamiento y  $\mu = 0, 1, 2$ .

Se escoge el potencial  $V$  de manera tal que para los efectos se mantenga su simetría original  $G$  cuando  $|\varphi| = 0$  pero con caída al vacío de Higgs circularmente degenerado para cualquier otro valor. Se propone un potencial del tipo Sombrero Mejicano como en (2.24)

$$V(\varphi^* \varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi \varphi^* - v^2)^2 \quad (3.3)$$

El funcional de energía para los campos  $A_\mu$  y  $\varphi$  es

$$E = \int d^2x \left[ B^k B_k + \mathbb{E}^k \mathbb{E}_k + D_\mu^\dagger(\varphi^*) D^\mu(\varphi) + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi - v^2)^2 \right]$$

$$\mathbb{E}^k = -F_{0k}, \quad B^k = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij}$$

donde se busca una solución independiente del tiempo con campo eléctrico nulo  $\mathbb{E}^k = 0$  y energía  $E$  finita

$$E = \int d^2x \left[ B^k B_k + D_k^\dagger(\varphi^*) D^k(\varphi) + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - v^2)^2 \right], \quad k = 1, 2 \quad (3.4)$$

del tercer término de (3.4), se observa que una condición necesaria, pero no suficiente, para que la energía  $E$  sea finita es imponer al potencial se anule para cuando  $r \rightarrow \infty$

$$\varphi \varphi^* \rightarrow v^2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi| = v \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

(3.5) definen dos círculos: uno de radio  $v$  en el espacio de  $\varphi$  al que identificaremos como la variedad del vacío  $\mathcal{M}_0$  y también un círculo de radio infinito en el espacio físico al que identificaremos  $S_\infty$ .

Dos círculos cada uno de ellos en espacios bidimensionales, pueden ser relacionados a través de dos mapeos de  $I = [0, 1] = (0, 1) \cup \partial(0, 1)$  en subconjunto de  $\mathbb{R}^2$

$\theta: (0, 1) \rightarrow S_\infty$  para el intervalo abierto, que explícitamente se escoge

$$\theta = \theta(t) = 2\pi t, \quad (3.6)$$

y se identifican los extremos  $\theta(0) = \theta(1) = 0$  con lo cual se barre completamente el círculo  $S_\infty$ .

Mientras que para  $\mathcal{M}_o$  la función se puede definir mediante la composición  $\varphi_o: S_\infty \rightarrow \mathcal{M}_o$

$$\varphi_o(\theta) = v e^{i\sigma(\theta)}, \quad \text{con} \quad \varphi_o(\theta_o) = \varphi_o(\theta_1) \quad (3.7)$$

a través de  $\sigma(\theta)$ , siendo  $\sigma$  una función real arbitraria, permite efectuar diferentes tipos de barridos al círculo  $\mathcal{M}_o$ , si se escoge:

$$\sigma(\theta(1)) = \sigma(\theta(0)) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

Este tipo de mapeo círculo a círculo está caracterizado por el número entero  $n$  llamado número de enrollamiento o *winding number*. Aquí los valores de  $n > 0$  marcan un sentido de recorrido que a su vez, es contrario para los valores  $n < 0$  y cuando  $n = 0$  se corresponde con un mapeo trivial de  $S_\infty$  a un punto de  $\mathcal{M}_o$ .

El número de enrollamiento  $n$ , es el número total de veces que se pasa por el punto  $\varphi_o(\theta_o)$  cuando se hace un recorrido completo por  $S_\infty$ . Este número de enrollamiento es un invariante topológico y todo mapeo (3.7) de  $S_\infty \rightarrow \mathcal{M}_o$  corresponde a una clase de equivalencia diferente para cada número  $n$  (3.8). Esto define un espacio de *loop* (lazos) ó bucles con un punto fijo o punto base correspondiente a  $\theta(0)$ . El conjunto formado por los representantes de cada clase junto con el producto de lazo (Apendice A) forma el primer grupo de homotopía.

Que el campo posea grupo fundamental de homotopía no trivial, requiere del valor no nulo la expresión

$$n = \frac{1}{2\pi v^2 i} \oint d^j x \varphi_o^* \partial_j \varphi_o \quad (3.9)$$

llamada número de enrollamiento o *winding number* la cual está adaptada al mapeo (3.7)[13]. Al ser calculada (3.9) toma forma equivalente a despejar  $n$  de (3.8).

$$\frac{1}{2\pi v^2 i} \oint d^j x \varphi_o * \partial_j \varphi_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma = n$$

Que  $n$  sea un número entero es de fundamental importancia porque, fijado el número de enrollamiento para una configuración, no es posible cambiarla continuamente a otra con *winding number* diferente de estar presente alguna singularidad.

A fin de darle esta estructura topológica a la solución buscada, se propone al campo escalar  $\varphi$  como en (3.7) en el límite  $r \rightarrow \infty$ .

En la ecuación para la energía (3.4), también se observa otra condición necesaria para que  $E$  sea finita para ello se requiere que la derivada covariante  $D_k$  decrezca más rápido que  $1/r$ , a fin de asegurar su convergencia para  $r$  grande.

Desarrollando  $D_k \varphi$  utilizando (3.7) y  $\sigma = n\theta$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$D_k \varphi = n v i e^{in\theta} (\partial_k \theta + \frac{e}{n} A_k) \quad \text{con} \quad \partial_k \theta = \epsilon_{kj} \frac{u^j}{r}, \quad n \neq 0$$

$$\epsilon_{kj} \frac{u^j}{r} + \frac{e}{n} A_k \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty$$

muestra la forma asintótica de  $A_k$

$$A_k = -\epsilon_{kj} \left(\frac{n}{e}\right) \frac{u^j}{r} + O(1/r^2) \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

$A_k$  como en (3.10) también asegura la convergencia del primer término de (3.4) al contener solo factores de  $(A_k)^2$ .

La escogencia de (3.7) como límite asintótico para el campo escalar  $\varphi$  impone por razones energéticas un campo vectorial asintótico de la forma

$$A_k = -\epsilon_{kj} \left(\frac{n}{e}\right) \frac{u^j}{r}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

Calculando la circulación con (3.11) en  $r = \infty$  se consigue el flujo de campo  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  en todo el espacio

$$\Phi_B = \int_{S^2} \vec{ds} \cdot \vec{B} = \oint_{S_\infty} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_\infty} A_\theta d\theta = \frac{n}{e} \oint_{S_\infty} d\theta = \frac{2\pi}{e} n$$

donde se hace uso del teorema de Stokes

$$\Phi_B = \int_{S^2} \vec{ds} \cdot (\text{rot } \vec{A}) = \oint_{S_\infty} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

resaltando la cuantización  $\Phi_B$ .

Volviendo a la estructura topológicas de  $\mathcal{M}_o$ , si se busca una solución para  $\varphi$ , apropiada en todo el espacio interior a  $\mathcal{M}_o$  (espacio de configuración) es necesario que:

- 1.-  $\varphi$  y tienda asintóticamente a  $\varphi_o$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Lo mismo para  $A_k$
- 2.- Mantenerse regular en todo el espacio de configuración de  $\varphi$  (energía finita)
- 3.- El espacio donde vive  $\varphi$  debe tener primer grupo de homotopia no trivial.

Aprovechando que el Lagrangiano 3.1 permite el ajuste simultáneo de  $\varphi \rightarrow \varphi/v$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/v$  y  $r \rightarrow vr$  se propone el siguiente ansatz (Nielsen y Olesen[3]) para el campo escalar  $\varphi$  y campo vectorial  $A_\mu$  :

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = \rho(r) e^{in(\theta)} & n \neq 0 \\ A_i(r, \theta) = -n \frac{\epsilon_{ij}}{er} u^j f(r) & r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ A_o(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

con  $\rho(r)$  y  $f(r)$  funciones regulares de  $r$  con valores a tomar entre 0 y 1.  $A_o = 0$  se corresponde con  $E^k = 0$ . Las funciones  $\rho(r)$  y  $f(r)$  ambas deben tomar el valor uno en el límite de  $r$  grande.

El hacer al espacio de configuración de las  $\varphi$  presente alguna singularidad se consigue haciendo  $\rho(r) = 0$  para algún  $r$ , permitiendo a  $\theta$  ser indeterminado en dicho punto. Además por razones de minimizar la energía es conveniente que el punto donde  $\rho(r) = 0$  sea uno solo, que por simetría se escoge en  $r = 0$ .

La energía (3.4) escrito utilizando el ansatz (3.12) y donde se sustituye el potencial de Sombrero Mejicano por  $V_c(\rho)$ , se tiene

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{n^2}{r^2} [\rho^2 (f-1)^2 + \frac{1}{2e^2} (\partial_r f)^2] + (\partial_r \rho)^2 + V_c(\rho) \right\} r dr \quad (3.13)$$

como el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo,  $\mathcal{L} = -E$  por lo tanto, para conseguir las ecuaciones de movimiento se hace variaciones de  $E$  respecto a  $\rho$  y  $f$ . Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sobre  $E$ . Para el campo  $\rho$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial E}{\partial_r \rho}\right) - \frac{\partial E}{\partial \rho} = 2(r\rho'' + \rho') - [2\frac{n^2}{r}[\rho(f-1)^2 + r\frac{\partial}{\partial \rho}V_c]] = 0$$

para el campo  $f$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial E}{\partial_r f}\right) - \frac{\partial E}{\partial f} = [\frac{n^2}{2e^2}\left(\frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2}\right)] - [2\frac{n^2}{r}\rho^2(f-1)] = 0$$

donde las primas se refieren a derivadas respecto a  $r$ . En resumen se tiene:

$$f'' - \frac{1}{r}f' - 2e^2\rho^2(f-1) = 0 \quad (3.14)$$

$$\rho'' + \frac{1}{r}\rho' - \frac{n^2}{r^2}\rho(f-1)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (3.15)$$

(3.14) y (3.15) forman un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no homogéneas y no lineales; que deben ser resueltas con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \rho(r) \rightarrow 1 \\ f(r) \rightarrow 1 \end{cases} \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \rho(r) \rightarrow 0 \\ f(r) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

Las soluciones de (3.14) y (3.15) depende del valor de  $n$ . Aquí  $n$  define un sector de campo que se encuentra desconectado de los otros sectores con diferentes número de enrollamiento por causa de la singularidad en el origen, lo que garantiza a la solución de campo que se encuentra en una configuración caracterizada por un *winding number* dado, permanecerá allí. En especial, cualquier configuración con  $n \neq 0$  no puede decaer hasta una solución trivial, lo que brinda estabilidad.

Bajo las condiciones de borde (3.16) y (3.17), las ecuaciones (3.14) y (3.15) no se han encontrado aún soluciones de forma analítica. Solo para el caso límite de potencial (3.3) nulo[14] ( $\lambda \rightarrow 0$ ) existe una solución dada en términos de series cuyos coeficiente se deben determinar en forma numérica[11][15] (figura 3.1).

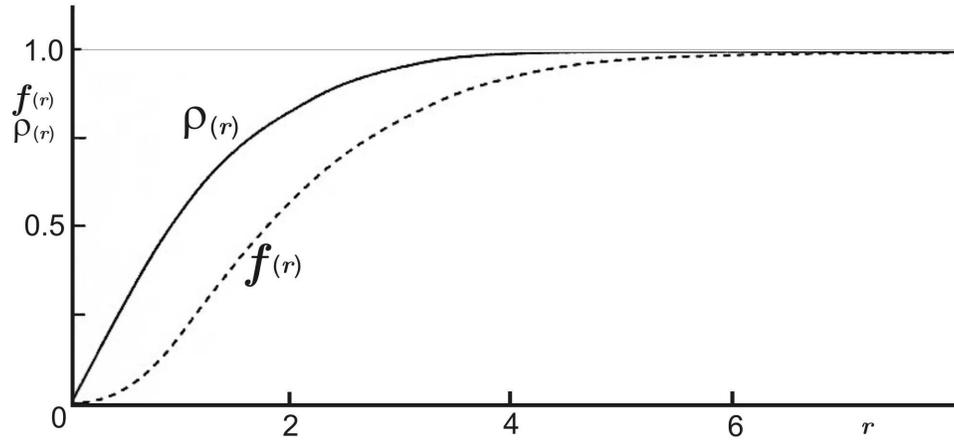


Figura 3.1. Gráfico tomado de [15]. Las funciones  $\rho$  y  $f$  fueron obtenidas bajo acoplamiento crítico  $\lambda \rightarrow 0$ .

Con (3.15) y (3.16) se puede explorar el comportamiento asintótico de las soluciones  $f$  y  $\rho$  compatible con (3.16) y (3.17) para lo cual tenemos:

$$f \approx 1 - rK_1(\sqrt{2}er) \text{ y } \rho \approx 1 - K_0(\sqrt{\lambda}r) \text{ para } r \rightarrow \infty$$

ambas funciones se aproximan exponencialmente a su valor asintótico  $\rho = 1$  y  $f = 1$  para  $r$  grande. Las funciones  $\rho$  y  $f$  tienen comportamiento tipo potencial para  $r \rightarrow 0$

$$f \sim r^n \text{ y } \rho \sim r \text{ para } r \rightarrow 0 \text{ } n \neq 0.$$



## Capítulo 4

# Monopolo de 'tHooft - Polyakov.

En el año 1974 Gerardus 'tHooft [4] e independientemente Alexander Polyakov [5] propusieron una solución (estática tipo solitón de energía finita y estabilidad topológica) a las ecuaciones de campo de Yang-Mills con simetría  $SO(3)$  en  $(3+1)$  dimensiones; con un potencial de autointeracción que rompe espontáneamente la simetría hasta  $U(1)$ . Esta configuración posee carga monopolar magnética distinta de cero y asintóticamente cuantizada.

### 4.1 Monopolo de 'tHooft - Polyakov

Comencemos con la parte bosónica del modelo de Geordi-Glashow (1.972) que consiste en un triplete de campo de calibre  $A_\mu^a$  bajo el grupo de simetría  $SO(3)$  interactuando con un triplete de campo escalar  $\varphi^a$  formando un isovector al que, sometemos a la acción de un potencial  $V(|\varphi|)$  con ruptura de simetría para que actúe el mecanismo de Higgs y la simetría de el Lagrangeano se rompa hasta  $U(1)$  en el estado base.

Para el caso  $G = SO(3)$  se puede definir una representación llamada triplete ya que el algebra de este grupo tiene 3 generadores

$$T^a = \{T^1, T^2, T^3\}$$

que satisfacen el álgebra de Lie

$$[T^i, T^j] = i \epsilon^{ijk} T^k$$

En la representación adjunta formada por las constantes de estructura (de dimensionalidad  $i \times j = 3 \times 3$ )

$$T^a = -i \epsilon^{aij} \quad (4.1)$$

que actúan sobre un campo vectorial de 3 componentes, llamado isovector.

$$\varphi^a = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

El Lagrangeano de Yang Mills para este caso, según la sección 2.2, viene dada por:

$$\mathcal{L} = D_\mu(\varphi^a) D^\mu(\varphi^a) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi^a - v^2)^2 \quad (4.3)$$

$a = 1, 2, 3$ . Siendo  $F_{\mu\nu}^a$  es el tensor del campo de calibre (2.21) y  $D_\mu$  la derivada covariante (2.18). El campo de calibre  $A_\mu$  de la ecuación (2.16) viene dado por la contracción de un tensor covariante de lorentz (índice  $\mu$ ) y contravariante bajo transformaciones del grupo  $SO(3)$

El Lagrangeano (4.3) es invariante bajo las transformaciones del grupo  $SO(3)$  de los campos definidas para el isovector como

$$\delta\varphi^i = \theta^j \epsilon^{ijk} \varphi^k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

mientras que para la conexión de acuerdo a (2.17) usando (4.1) se tiene:

$$\delta A_\mu^i = -1/e \partial_\mu \theta^i + \epsilon_{ijk} \theta^j A_\mu^k$$

y el tensor de campo de acuerdo a (2.20) y usando (4.1) transforma como:

$$\delta F_{\mu\nu}^i = \epsilon_{ijk} \theta^j F_{\mu\nu}^k$$

donde  $\theta_j$  corresponden a los tres parámetros asociados a los tres generadores del algebra.

Utilizando la representación (4.1) se obtiene:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.4)$$

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e \epsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c \quad (4.5)$$

para una configuración estática y con  $F_{oi}^a = 0$  el Lagrangeano toma la forma:

$$\mathcal{L} = D_i(\varphi^a)D^i(\varphi^a) - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a - \frac{\lambda}{4}(\varphi^a \varphi^a - v^2)^2$$

donde  $i$  y  $j$  toman valores 1, 2, 3. Las ecuaciones para determinar los campos vienen dadas por:

$$D^i D_i \varphi^a = -\lambda \varphi^a (\varphi^b \varphi^b - v^2), \quad D_j F_{ij}^a = e \epsilon^{abc} (D_i \varphi^b) \varphi^c \quad (4.6)$$

La energía  $E$  de la configuración

$$E = \frac{1}{2} \int dx^3 \left[ \mathbf{B}^a \mathbf{B}^a + D_i(\varphi^a) D^i(\varphi^a) + \frac{\lambda}{2} (\varphi^a \varphi^a - v^2)^2 \right] \quad (4.7)$$

siendo todas las contribuciones positivas; la integral sobre todo el espacio (4.7) obliga a que cada una de los términos de la energía tienda a cero como  $1/r^2$  cuando  $r \rightarrow \infty$  a fin de mantenerla acotada.

$$(\varphi^a \varphi^a - v^2) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D_i(\varphi^a) = 0 \quad (4.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B}^a \mathbf{B}^a = 0 \quad (4.10)$$

En (4.8) hay dos superficies, una esfera de radio  $v$ , en el espacio  $\mathbb{R}^3(\varphi^a)$  del isovector, a la que identificaremos como la variedad del vacío  $\mathcal{M}_o \subset \mathbb{R}^3(\varphi^a)$  y otra esfera de radio infinito en el espacio de posición  $\mathbb{R}^3(x^a)$ , a la cual llamaremos  $\mathcal{M}_1 = S_\infty^2$ . Claramente estos dos espacios como espacios topológicos son equivalentes (ambos son esferas) y se pueden establecer mapeos del uno al otro  $\alpha: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_o$  y  $\beta: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_o$  entre los cuales existen clases de equivalencia, de acuerdo a la relación siguiente:

Una Homotopía una relación de equivalencia entre mapeos de un espacio topológico  $\mathcal{M}_1$  a otro espacio  $\mathcal{M}_o$  de forma tal, que sea continuo con respecto a un parámetro (entre 0 y 1 por convención)

$$\mathcal{H}: \mathcal{M}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_o \quad (4.11)$$

tal que

$$\mathcal{H}(x, 0) = \alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(x, 1) = \beta \quad \text{donde } x \in \mathcal{M}_1$$

Vamos a escoger coordenadas esféricas sobre el espacio  $S_\infty^2$  de la forma usual,  $(\theta_1, \phi_1)$  donde  $\theta_1$  es el ángulo medido de un vector sobre la esfera al eje Z mientras que  $\phi_1$  es el ángulo polar medido entre la proyección del vector en el plano (X,Y) y el eje X. De manera semejante se escogen coordenadas esféricas en  $\mathcal{M}_o$  que denotaremos  $(\theta_2, \phi_2)$ . Se pueden establecer los siguientes mapeos

$$\alpha: S_\infty^2 \rightarrow \mathcal{M}_o$$

$$\alpha: = (\theta_1(u) = u, \phi_1(w) = w) \quad \text{donde} \quad u \in [0, \pi] \quad y \quad w \in [0, 2\pi] \quad (4.12)$$

y

$$\beta: S_\infty^2 \rightarrow \mathcal{M}_o$$

$$\beta: = (\theta_2(u) = u, \phi_2(w) = kw) \quad \text{donde} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.13)$$

Claramente el mapeo  $\beta$  cubre a  $\mathcal{M}_o$  varias veces (de hecho k veces) mientras que  $\alpha$  lo cubre solamente una vez. No existe una deformación continua (4.11) que permita pasar de manera CONTINUA de  $S_\infty^2$  a  $\mathcal{M}_o$ . Por ejemplo es facil ver que  $k = 2$  cubre dos veces el espacio  $\mathcal{M}_o$ , una forma de visualizar la homotopía (4.11) es que el mapeo  $\beta$  se extiende hacia adentro de la esfera  $\mathcal{M}_o$  de forma tal que la segunda vuelta o enrollamiento pueda colapsar a un punto, tal como se desinfla un globo, convirtiendose en el mapeo  $\alpha$  que hace un cubrimiento simple. El problema es que para hacer tal cosa la homotopía deja de ser continua, ya que está obligada a pasar por un punto singular, en particular por el centro de la esfera donde los ángulos no están definidos.

Tomando un representante de cada clase de equivalencia el conjunto de ellos forma el segundo grupo de homotopía  $\Pi_2(S_\infty^2) = \Pi_2(\mathcal{M}_o)$ . El segundo grupos de homotopía se caracteriza por cantidad de veces  $k \in \mathbb{Z}$  que se barre una superficie en relación a la otra.

$$\Pi_2(S_\infty^2) = \Pi_2(\mathcal{M}_o) = \mathbb{Z}$$

Resumiendo: será una condición general para la existencia de monopolos en modelos donde se rompe la simetría que la variedad del vacio  $\mathcal{M}_o$  debe ser una variedad de topología no trivial, con soluciones de vacio clasificadas por un número entero.

La forma más sencilla para realizar el mapeo  $S^2_\infty \rightarrow \mathcal{M}_o$  se obtiene cuando  $k = 1$  y se forma una especie de alineación entre el isovector  $\varphi$  y  $r$  (cada uno de ellos en sus respectivos espacios) para ello se escoge  $\hat{n}$  de (4.15) como  $\hat{r}$

$$\varphi^a = v \left( \frac{r^a}{r} \right) = v \hat{r}^a \in \mathcal{M}_o \quad \text{cuando } r \in S^2_\infty \quad (4.14)$$

$\hat{r}^a$  es un vector unitario en la dirección de  $r^a$ .

También es necesario para mantener finita la energía (4.7) que el segundo término  $D_i(\varphi^a)$  se anule en el infinito

$$D_i(\varphi^a) = \partial_i \varphi^a + e \epsilon^{abc} A_i^b \varphi^c = 0 \quad \text{cuando } r^a \in S^2_\infty \quad (4.15)$$

actuando sobre 4.14 tenemos:

$$\partial_i \varphi^a = \frac{v}{r} (\delta^{ai} - r^i r^a) = e v \epsilon^{abc} A_i^b \hat{r}^c$$

permite extraer  $A_i^a$  con la ayuda de la identidad:

$$\begin{aligned} \epsilon^{abc} \epsilon^{bij} &= \delta^{aj} \delta^{ci} - \delta^{ai} \delta^{cj} \\ A_i^b &= - \left( \frac{1}{er} \right) \epsilon^{bij} \hat{r}^j \end{aligned} \quad (4.16)$$

con este resultado (4.12) no representa ningún problema al momento de calcular la energía, también se mantiene acotado por ser combinaciones de  $(A_i^a)^2$ .

Teniendo la solución asintótica tanto para  $\varphi^a$  como para  $A_i^a$ , se sugiere (Ansatz de 'tHooft) extender (4.14) y (4.16) para todo  $r$  las soluciones para los campos tengan la forma:

$$\varphi^a = \frac{r^a}{r} \rho(r) \quad (4.17)$$

$$A_i^a = \left( \frac{1}{er^2} \right) \epsilon^{aij} r^j [1 - f(r)] \quad (4.18)$$

$$A_o^a = 0$$

donde se utilizó la posibilidad de re-escalamiento sobre (4.5) para cambiar  $\varphi^a \rightarrow \varphi^a/v$ ,  $A^a \rightarrow A^a/v$  y  $r \rightarrow vr$  así  $f(r)$  y  $\rho(r)$  son funciones sin dimensiones a conseguir entre 0 y 1. A causa de (4.14) y (4.16) por construcción, es necesario que (4.17) y (4.18) cumplan para  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} \rho(r) \rightarrow 1 \\ f(r) \rightarrow 0 \end{cases} \quad r \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

En la discusión sobre la estabilidad de las soluciones, se dió énfasis en la necesidad de que la variedad del vacío  $\mathcal{M}_o$  no se pueda contraer continuamente hasta un punto, esto es posible lograrlo en el ansatz (4.17) si  $\rho(r)$  toma valor nulo en algún lugar. Por razones de energía, regularidad y simetría se pide que  $\rho(r) = 0$  coincida en  $r = 0$ . Extendiendo esta petición a (4.18) tenemos como condiciones de borde en  $r = 0$

$$\begin{cases} \rho(r) \rightarrow 0 \\ f(r) \rightarrow 1 \end{cases} \quad r \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

Desarrollando las ecuaciones de movimiento (4.6) para los campos escalar y vectorial donde se utiliza el ansatz de 'tHooft (ecuaciones 4.17 y 4.18) se consigue que  $f(r)$  y  $\rho(r)$  deben cumplir:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) - \left[ f^2(r) - 1 \right] \frac{f(r)}{r^2} - e^2 f \rho^2(r) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho(r) + \left( \frac{2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \rho(r) - \left( \frac{2}{r^2} \right) f^2(r) \rho(r) = \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (4.22)$$

aquí se utilizó un potencial  $V$  en lugar  $\frac{\lambda}{2}(\varphi^a \varphi^a - v^2)^2$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales (4.21) y (4.22) son un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no homogéneas y no lineales, donde la existencia de solución analíticas para dicho sistema son un problema abierto muy difícil de resolver para las condiciones de borde (4.19) y (4.20) y hasta ahora solo se conocen soluciones numéricas y una solución en un caso límite [10].

## 4.2 Tensor del Campo Electromagnético y Carga Magnética

### 4.2.1 Tensor del Campo Electromagnético.

Este modelo describe el prototipo de la teoría más simple y sencillo para una teoría unificada GTU con grupo de simetría  $SO(3)$ , donde la estructura radial 4.14 para  $\varphi_0$  lleva implícito una combinación de simetrías que hacen posible la existencia de carga monopolar magnética.

Consideremos el conjunto de las rotaciones en el espacio tridimensional que dejan invariante a  $\varphi_0$ ; o las rotaciones alrededor del eje que contiene a  $\varphi_0$ . Este conjunto forma un subgrupo  $\mathfrak{R}_\varphi$  de  $SO(3)$  y es isomorfo  $SO(2)$ , siendo esta la simetría exacta que queda al romperse completamente la simetría inicial  $SO(3)$ . En principio es posible asociar  $\mathfrak{R}_\varphi$  como el grupo que genera la teoría electromagnética de Maxwell si se asocia cada una de las variables dinámicas del modelo no abeliano y que se encuentra en el vacío de Higgs, con las variables dinámicas del electromagnetismo (sección 2.1).

Hagamos que el tensor de campo electromagnético  $F^{ij}$  sea la proyección en dirección  $\varphi$  del tensor de campo de calibre no abeliano (2.22) cuando  $r \rightarrow \infty$ :

$$F^{ij} = \varphi^a F_a^{ij} \quad (4.23)$$

Solo en el vacío de Higgs donde  $U(1)$  es la simetría exacta del modelo es posible tener en forma, clara la expresión para el tensor de campo electromagnético  $F_{ij}$  sin embargo, cualquier propuesta de  $F_{ij}$  para el interior de la esfera debe de ser:

- 1) Invariante bajo la acción del grupo  $SO(3)$  y
- 2) Coincidir con la forma  $(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)$  en el infinito.

Una propuesta para ello fue dada por 'tHooft[4]:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{e} \hat{\varphi} \cdot (D_\mu \hat{\varphi} \times D_\nu \hat{\varphi}) + \hat{\varphi} \cdot F_{\mu\nu} , \quad \hat{\varphi} = \frac{\varphi}{|\varphi|} \quad (4.24)$$

la cual posee la propiedad de concentrar la carga magnética en los lugares donde el campo  $\varphi = 0$ .

En otra propuesta dada por Bogomol'nyi [16] y de forma independiente por Faddeev [17] se sugiere:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\hat{\varphi}}{|\varphi|} \cdot F_{\mu\nu} \quad (4.25)$$

siendo su principal característica, la presencia de una corriente conservada de origen topológico independiente de las soluciones para los campos involucrados.

### 4.2.2 Carga Magnética.

El campo  $\mathbf{B}$  se extrae usando (4.14) y (4.16) en (4.23)

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} = \frac{1}{er^2}\hat{r}_i$$

lo que permite calcular el flujo total sobre una esfera de radio infinito  $S_\infty^2$ .

Para conseguir la carga total encerrada, se calcula el flujo total del campo  $\mathbf{B}$  sobre la superficie esférica que por la ley de Gauss:

$$g = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_\infty^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{e} \quad \Rightarrow \quad ge = 4\pi$$

que se corresponde con la condición de cuantización de Dirac para  $k=1$ .

## 4.3 Cota Bogomol'nyi

Observando el funcional de energía (4.7) notamos que los tres términos que lo componen son positivos, pedir una solución donde (4.7) no posea el término de potencial  $V=0$  sería una solución para lo cual la energía está en su mínimo. Sabiendo que no es posible hacer  $\lambda = 0$  sin destruir el modelo sin embargo se puede considerar el caso límite  $\lambda \rightarrow 0$ , de esta forma se puede anular el término del potencial pero manteniendo  $\mathcal{M}_o$  como la variedad del vacío. con esto (4.7) se escribe

$$E_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \int d^3x [\mathbf{B}^a \mathbf{B}^a + D_i(\varphi^a) D_i(\varphi^a)] \quad (4.26)$$

el que podemos acotar reescribiendo 4.26 (siguiendo a [15])

$$E_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \int d^3x \{ [B^a \pm D_i(\varphi^a)]^2 \mp 2B^a D_i(\varphi^a) \} \quad (4.27)$$

$$E_{\lambda \rightarrow 0} \geq \left| \int d^3x [B^a D_i(\varphi^a)] \right| = \frac{4\pi}{e} v$$

$$E_{\lambda \rightarrow 0} \geq \frac{4\pi}{e} v \quad (4.28)$$

este resultado es conocido como la cota de Bogomol'nyi [14].

## 4.4 Solución de Prasad-Sommerfield.

El límite  $\lambda \rightarrow 0$  ofrece la posibilidad de obtener soluciones exactas para las funciones  $f(r)$  y  $\rho(r)$  cuando la energía (4.27) se encuentra en su valor más bajo, esta situación se corresponde con el valor límite de la cota de Bogomol'nyi (4.28) y cuando el primer término de (4.27) se anula [10]:

$$B^a \pm D(\varphi^a) = 0$$

quedando un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que puede ser reescrita usando el Ansatz (4.17) y (4.18) como:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \rho f$$

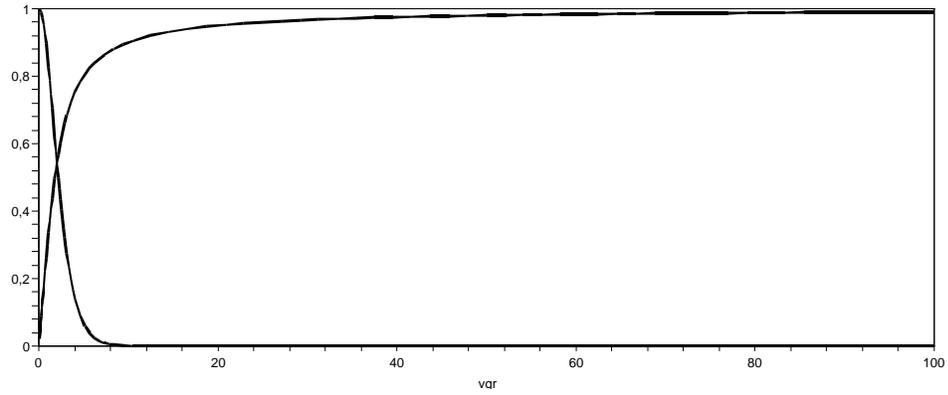
$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{r^2} (1 - f^2)$$

sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución compatible con las condiciones de borde 4.19

$$f(r) = \frac{r}{\sinh(r)}$$

$$\rho(r) = \text{ctgh}(r) - \frac{1}{r}$$

la gráfica de ellas se muestra en la figura (4.2).



**Figura 4.1.** Solución de Prasad-Sommerfield para  $\rho(r)$  y  $f(r)$ . Se puede diferenciar la rápida llegada al límite asintótico del campo vectorial en relación al campo escalar.

## Capítulo 5

# Buscando Soluciones a Vórtice y Monopolo.

### 5.1 Procedimiento a seguir para la Búsqueda de Soluciones.

Este trabajo tiene como objetivo encontrar soluciones analíticas a los sistemas de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento espacial tanto para el Vórtice de Nielsen-Olesen como para el Monopolo de 'tHooft-Polyakov. Cada uno de estos sistemas tiene dos funciones a conseguir  $f$  y  $\rho$  condicionadas espacialmente por un potencial  $V_c$  que permite la ruptura de la simetría original del espacio.

El procedimiento a seguir para la búsqueda de soluciones en los sistemas formados por (3.14) y (3.15) para el Vórtice y (4.21) y (4.22) para el Monopolo, se deja como función libre su respectivo potencial  $V_c$  con la finalidad de proponer soluciones analíticas para  $f$  y  $\rho$  inspiradas en el comportamiento mostrado por los estudios numéricos y asintóticos realizados. Con las soluciones propuestas, se calcula el potencial  $V_c$  para hacerle un estudio de factibilidad.

Cada una de las funciones  $f$  y  $\rho$  propuestas, deben resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, es decir: de deben satisfacer en la siguiente secuencia: a) la ecuación diferencial del campo vectorial, b) desarrollar la ecuación del campo escalar para obtener  $\partial_\rho V_c$ , c) integrar  $\partial_\rho V_c$  para conseguir  $V_c(\rho)$  y finalmente d) se hará un estudio a fin determinar si permite la ruptura espontanea de simetría. De verificarse la factibilidad de  $V_c$  se considera a las funciones propuestas para  $f$  y  $\rho$  como la solución del sistema, de lo contrario se descartan y se comienza nuevamente el ciclo.

Para poder aplicar el método descrito, se requiere que las funciones escogidas para  $\rho(r, f(r))$  y  $f(r)$  se puedan invertir explícitamente en todo su dominio a fin de obtener  $r(\rho)$ . A continuación se presenta la secuencia de los pasos a seguir:

- i. Proponer soluciones para  $f$  y  $\rho$  acorde con las condiciones exigidas por el modelo (funciones entre 0 y 1 y cumplir las condiciones de borde), que satisfagan la primera ecuación diferencial y donde podamos invertir explícitamente a  $\rho$ :

$$r = r(\rho) \quad (5.1)$$

- ii. Del desarrollo de la parte izquierda de las ecuaciones del campo escalar obtenemos  $\frac{\partial}{\partial \rho} V_c$
- iii. Con la ayuda de (5.1) podremos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial r} V_c = \left( \frac{\partial}{\partial \rho} V_c \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \rho(r) \right) \quad (5.2)$$

- iv. Integrando (5.2) respecto a  $r$  para conseguir  $V_c(r)$

$$V_c(r) = \int \left( \frac{\partial}{\partial r} V_c \right) dr + C \quad (5.3)$$

siendo  $C$  constante.

- v. Sustituir (5.1) en (5.3) obteniendo  $V_c(\rho)$
- vi. Análisis de  $V_c(\rho)$  a fin de comprobar si produce ruptura espontánea de simetría.

## 5.2 Buscando Soluciones al Vórtice

### 5.2.1 Relajación de las Condiciones de Borde

En la búsqueda de soluciones para el vórtice, se empezará comentando una propuesta hecha en [18]. Allí se propone flexibilizar las condiciones de borde para las funciones  $f$  y  $\rho$  que describen el comportamiento espacial del Vórtice de Nielsen-Olesen en  $r = 0$  pero manteniendo las condiciones  $f=1$  y  $\rho=1$  en el infinito como en (3.16). Con ello obtiene una solución analítica al sistema de ecuaciones formado por (3.14) y (3.15) con energía finita.

Dicha propuesta, permite tomar la solución particular  $f(r) = 1$  para todo  $r \geq 0$  como la solución a la primera de las ecuaciones diferenciales del sistema (ecuación 3.14), siendo  $f(r)$  de esta manera, independiente del valor de  $r$  y a su vez permite simplificar considerablemente (3.15) al eliminar su tercer término, quedando la ecuación a resolver de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} V_c \quad (5.4)$$

Igualmente en [18] se escoge el potencial de autointeracción  $V_c(\rho)$  de la forma:

$$V_c(|\varphi|) = \frac{\lambda}{2} (|\varphi| - 1)^2 = \frac{\lambda}{2} (|\rho| - 1)^2 \quad (5.5)$$

que difiere del tradicional sombrero Mejicano (2.24), sin embargo ambos potenciales poseen la misma forma asintótica que permite una solución con caída al vacío estable (fig. 5.1). Sin embargo (5.5) posee un salto en la primera derivada en  $\rho=0$ , por lo que es necesario a fin de hacer el potencial  $V_c$  operativo, separar dos posibles situaciones dependiendo del signo que tome  $\rho$ , de las ecuaciones (5.4) y (5.5) se tiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho - \lambda(\rho - 1) = 0 & \text{si } \rho \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho - \lambda(\rho + 1) = 0 & \text{si } \rho < 0 \end{cases}$$

las dos, son ecuaciones del tipo Bessel y tienen soluciones:

$$\rho(r) = c_1 I_0(\lambda r) + c_2 K_0(\lambda r) + 1 \quad \rho \geq 0 \quad (5.6)$$

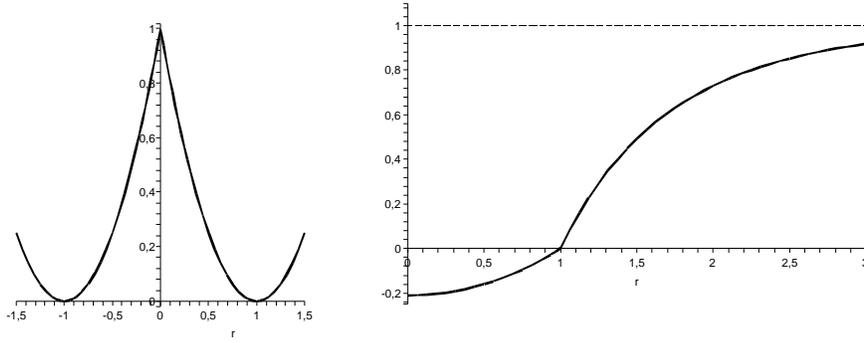
$$\rho(r) = c_3 I_0(\lambda r) + c_4 K_0(\lambda r) - 1 \quad \rho < 0 \quad (5.7)$$

donde las soluciones compatibles con la condición de borde en el infinito ( $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho = 1$ ) obliga a hacer una combinación de las soluciones (5.6) y (5.7) a fin de que la solución  $\rho(r)$  para todo  $r \geq 0$  se mantenga finita en el origen. Tomando  $r_k \neq 0$  como el valor donde se anula la solución, se hizo el ajuste de las constantes  $C1$  y  $C2$  en (5.6) y (5.7), imponiendo como condición únicamente la continuidad de la función  $\rho$  en  $r_k$ . Pedir adicionalmente la continuidad de la primera derivada solo es posible para  $r_0 = \infty$  solución que está fuera de nuestro interés.

La imposibilidad de cumplir simultáneamente las condición de continuidad y derivabilidad para un valor de  $r_k$  finito, puede entenderse por la presencia de un salto en la derivada del potencial (5.5) en  $\rho(r_k) = 0$ . La forma de las soluciones obtenidas para  $\rho(r)$  (5.8) y  $f(r)$  (5.9) así como el potencial (5.5) se muestran en la figura (5.1)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho(r) = (C1) K_o(\lambda r) + 1 & \rho \geq 0 \\ \rho(r) = (C2) I_o(\lambda r) - 1 & \rho < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$f \equiv 1 \quad \text{para } r \geq 0 \quad (5.9)$$



**Figura 5.1.** El gráfico izquierdo muestra  $V_c$  vs  $\rho$ . El gráfico derecho muestra la solución  $\rho(r)$  vs  $r$  en línea continua, en él se escogió  $\lambda = 1$  y el punto  $r_k = 1$  donde la primera derivada es discontinua, además en líneas segmentadas la solución  $f(r)$  para  $r \geq 0$

La escogencia de  $f = 1$  para  $r \geq 0$  obliga al ansatz (3.12) del campo vectorial  $\mathbf{A}$  mantenerse como un **calibre puro** en todo el espacio

$$\mathbf{A} = \frac{n}{e r} \hat{u}_\theta \quad (5.10)$$

trayendo como consecuencia la ausencia de campo magnético en la región  $r \geq 0$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = 0 \Rightarrow \Phi_B = 0 \quad \forall r \geq 0 \quad (5.11)$$

sin embargo se mantiene carga topológica cuantizada

$$\oint_{S_\infty} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi}{e} n \quad n \in \{\mathbb{Z} - 0\} \quad (5.12)$$

recordando que  $n$  es el número de enrollamiento.

Note que no se puede establecerse relación entre la carga topológica (5.11) y el flujo magnético que cruza el plano  $xy$  (5.12). Matemáticamente no se cumple todas las condiciones para la validez del teorema de Stokes [19] que permite igualar estos dos resultados, en particular (5.10) no es derivable en  $r = 0$  (se requiere que la función sea por lo menos  $C^1$ ). Al seleccionar un contorno de integración cerrado donde la superficie encerrada por dicho contorno, contiene al origen. Así, se tiene que:

$$\Phi_B = \iint B^3 r dr d\theta \quad \text{no necesariamente igual} \quad \oint_{S_\infty} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.13)$$

lo que reduce el Vórtice de Nielsen-Olesen a un vórtice puramente topológico.

### 5.2.2 Forma Esperada para el Potencial $V_c$

Los intentos infructuosos para conseguir solucionar analíticamente el sistema (3.12) para el vórtice de Nielsen-Olesen usando el procedimiento descrito en la sección (5.1) bajo las condiciones de borde (3.16 y 3.17), llevó a considerar la búsqueda de una solución utilizando la idea propuesta en [18].

Se considera flexibilizar la condición de borde en el origen para el campo vectorial y resolver (3.14) usando  $f = 1$  para todo  $r \geq 0$ , pero a diferencia de [18], se exigirá se respete ambas condiciones de borde para  $\rho$  (3.16 y 3.17) al resolver la ecuación (3.15).

La solución propuesta para  $f$  trae como consecuencia la ausencia del flujo de campo magnético en el espacio y por ende, se considera la solución como un vórtice solamente topológico como se explicó en la sección anterior (5.2.1).

Con las consideración sobre  $f$  descrita anteriormente, se exige dos condiciones demandadas por el modelo para  $\rho$  y el potencial  $V_c$ :

1.- El Campo  $\rho$  debe ser univaluada en  $r \geq 0$  y cumplir con las condiciones de borde (3.16 y 3.17) a fin de generar un buen mapeo entre las variedades del campo escalar y del espacio.

2.-Por consideraciones de simetría, que el potencial  $V_c$  posea extremos en  $r = 0$  y en  $r = \infty$ .

Ambas condiciones restringe la forma del potencial de manera que, no es posible conseguir que  $\frac{\partial}{\partial \rho} V_c$  sea negativa para todo  $\rho \in (0,1)$  (forma típica del Sombrero Mejicano).

Notando que la ecuación (5.4) a resolver, es la parte radial de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas con el término no homogéneo  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} V_c$ . Por la condición  $2 \frac{\partial}{\partial \rho} V_c$ , tiende a cero cuando  $r \rightarrow 0$  y cuando  $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} V_c \right) = 0 \quad (5.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} V_c \right) = 0 \quad (5.15)$$

una posibilidad para satisfacer (5.14) y (5.15), ocurre cuando los dos términos en el paréntesis se anulen entre sí en los límites señalados; para ello  $\rho$  debe de ser asintóticamente proporcional al  $\ln(r)$  en los límites considerados, descartando la solución por no cumplir con la condición (i.).

La otra posibilidad se da cuando ambos términos entre parentesis de (5.14) y de (5.15) son asintóticamente nulos simultáneamente para cuando  $r \rightarrow 0$  y cuando  $r \rightarrow \infty$  respectivamente, es decir estos extremos y son puntos de inflexión para  $\rho$ .

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho \right) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho \right) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho \right) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho \right) = 0$$

Con estos límites y la condición (i.) se asegura la existencia de al menos un punto de inflexión entre  $r = 0$  y en  $r = \infty$  (configuración de menor energía). Siendo  $r_o$  el punto donde la derivada segunda de  $\rho$  se anula:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho(r_o) = 0$$

teniendo en cuenta que:  $\frac{\partial}{\partial r} \rho \geq 0$  para todo  $r \geq 0$  y que para  $0 \leq r \leq r_o$   $\rho(r)$  es una función cóncava,  $\frac{\partial}{\partial \rho} V_c > 0$  cerca del origen y por ende  $V_c$  es una función creciente con  $r$ . De seleccionarse una función  $\rho(r)$  apropiada, eventualmente podría revertirse el crecimiento de  $V_c$  a manera de tener un vacío estable (mínimo) en el infinito. Por lo anterior expuesto, el mejor escenario

para la búsqueda de una solución  $\rho$  con las restricciones señaladas es conseguir un potencial con forma de sombrero mejicano pero con una depresión cerca del origen, a esta forma de potencial se le conoce como potencial tipo volcán y posee dos mínimos degenerados, uno en el origen y el otro en el infinito.

### 5.2.3 Solución Propuesta para el Campo Escalar.

Al aplicar el algoritmo descrito en la sección (5.1), se propone como funciones de ensayo a  $f = 1$  para todo  $r$  y para  $\rho$

$$\begin{cases} \rho(r) = \exp(-1/r) & \text{si } r > 0 \\ \rho(0) = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

la cual cumple con la condición (i.) y los valores de ambas fronteras y es invertible:

$$\begin{cases} r(\rho) = -\frac{1}{\ln(\rho)} & \text{si } 0 < \rho < 1 \\ r(0) = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

usando (5.16) en (3.15) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} V_c(r) = 2 \frac{\exp(-1/r)}{r^3} (1/r - 1)$$

procediendo como en (5.2)

$$\frac{\partial}{\partial r} V_c(r) = 2 \frac{\exp(-2/r)}{r^5} (1/r - 1)$$

e integrando respecto a  $r$  y añadiendo una constante de ajuste:

$$V_c(r) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{r^4} \left(1 + r + \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{2}r^3 + \frac{3}{4}r^4\right) \exp(-2/r) \quad (5.18)$$

sustituyendo (5.17) en (5.18) se consigue la función  $V_c(\rho)$ :

$$V_c(\rho) = \rho^2 \left[ (\ln \rho)^4 - (\ln \rho)^3 + \frac{3}{2}(\ln \rho)^2 - \frac{3}{2} \ln \rho + \frac{3}{4} \right] - \frac{3}{4} \quad (5.19)$$

su gráfica se muestra en la figura (5.3), allí se puede apreciar la forma de tipo Volcán esperada con dos mínimos, siendo el mínimo del origen mucho más pronunciado y de valor negativo; en cuanto al mínimo en el infinito ocurre en  $\rho = 1$  como se esperaba. Un desarrollo en serie de Taylor de (5.19):

$$V_c(\rho = 1) = \frac{1}{4}(\rho - 1)^4 + O(\rho^5)$$

alrededor de  $\rho = 1$  muestra un comportamiento del mismo orden que el potencial tipo Sombrero Mejicano para valores muy cercanos.

Se ha de resaltar la forma creciente de  $V_c$  para  $\rho > 1$  necesario para mantener las soluciones confinadas al espacio físico.

El valor para la energía del Vórtice (3.4) escrita en términos del ansatz de Nielsen-Olesen y del potencial  $V_c$ :

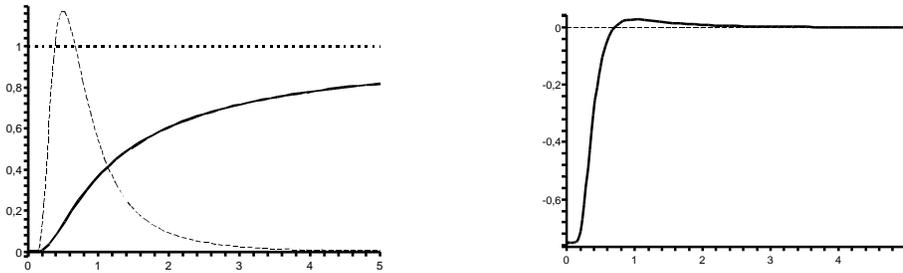
$$E = 2\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{n^2}{r^2} [\rho^2 (f-1)^2 + \frac{1}{2e^2} (\partial_r f)^2] + (\partial_r \rho)^2 + V_c(\rho(r)) \right\} r dr$$

$$E = 2\pi \int_{\lim_{r \rightarrow 0}}^\infty [(\partial_r \rho)^2 + V_c(\rho(r))] r dr$$

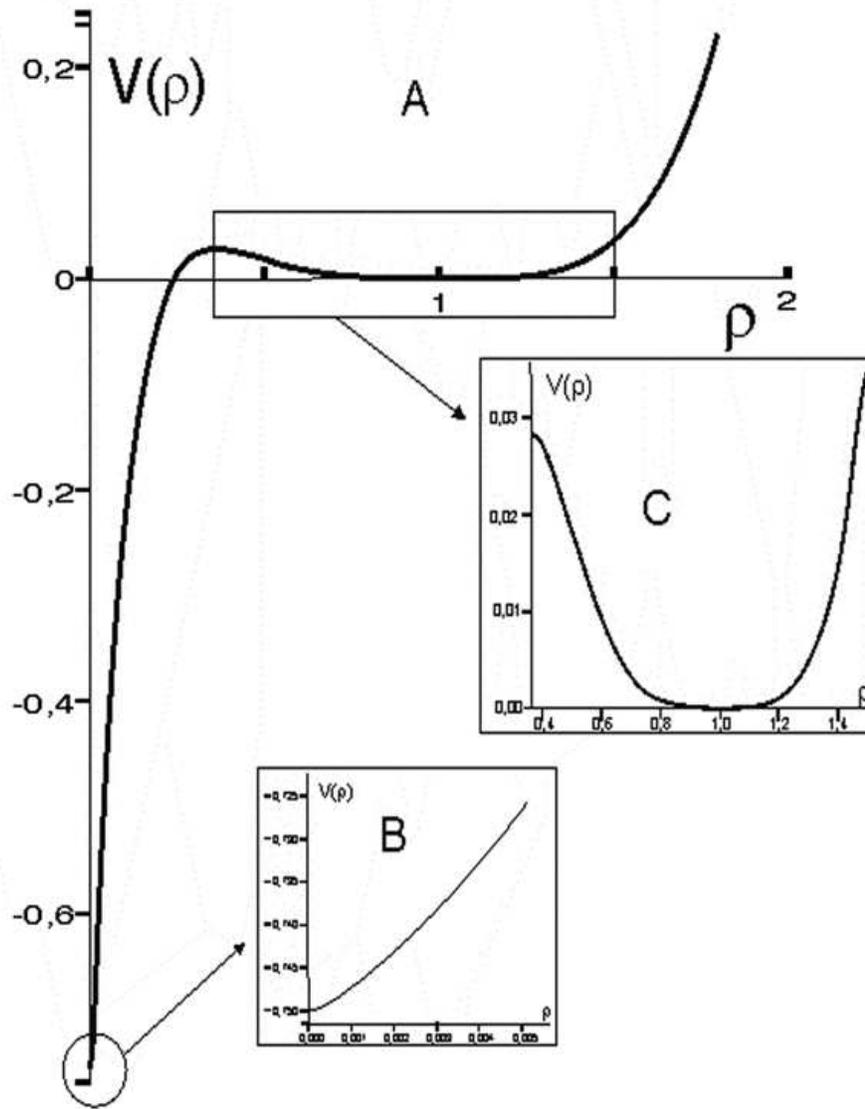
la integral del término correspondiente al potencial se anula al usar (5.18) quedando:

$$E = 2\pi \int_{\lim_{r \rightarrow 0}}^\infty (\partial_r \rho)^2 r dr = \pi/2$$

La figura (5.2) muestra la densidad de energía del vórtice, esta se encuentra concentrada alrededor de  $r = 1/2$  siendo notorio la ausencia total de  $E$  cerca del origen.



**Figura 5.2.** La gráfica de la izquierda muestra a  $\rho$ ,  $f$  y la densidad de energía  $E$  (curva continua, recta punteada y curva segmentada respectivamente) como función de  $r$ . La figura de la derecha es la gráfica del potencial  $V_c$  vs  $r$



**Figura 5.3.** La imagen A muestra la gráfica de  $V_c$  vs  $\rho$ . La gráfica B muestra una ampliación de  $V_c$  cerca de  $\rho=0$ . La imagen C es una ampliación cerca de  $\rho=1$  a fin de resaltar la caída al vacío del potencial en esta región.

## 5.3 Buscando Soluciones al Monopolo

### 5.3.1 Relajación del valor de $f$ en $r = 0$

Al igual que para conseguir soluciones al Vórtice se utilizó el algoritmo descrito en la sección (5.1) para tratar de obtener solución al sistema de ecuaciones formado por (4.21) y (4.22) probando sin éxito varios pares de funciones para  $f$  y  $\rho$ , con los cuales ni siquiera se logró satisfacer la ecuación del campo vectorial (4.21), llevándonos a considerar la idea de flexibilizar la condición de borde en  $r = 0$  para  $f$  a manera de considerar  $f = 0$  para todo  $r$  como solución, quedando satisfecha automáticamente (4.21) y así enfocándonos en proponer funciones para  $\rho$  en (4.22) para estudiar el potencial  $V_c$  respectivo.

Tomar  $f = 0$  como solución simplifica (4.22) al punto de quedar por resolver la parte radial de la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rho + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\rho = \frac{\partial}{\partial \rho}V_c \quad (5.20)$$

donde la parte no homogénea corresponde a la derivada parcial del potencial  $V_c$  respecto a  $\rho$ .

En el modelo del Monopolo de 'tHooft-Polyakov no es tan sencillo considerar que  $f = 0$  para todo  $r$  representa un campo vectorial de calibre puro ya que la estructura del tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  fuera de la variedad del vacío  $S_\infty$  no está del todo clara; La forma de  $F_{\mu\nu}$  para todo  $r$  propuesta por 'tHooft (4.24) [4] solo presenta la carga monopolar magnética en los puntos donde  $\rho = 0$  a pesar de que el modelo mantiene una distribución espacial uniforme para el campo escalar. Con la otra forma de  $F_{\mu\nu}$  propuesta por Bogomol'nyi y también por Faddeev (4.25) [20] se consigue una corriente conservada de origen topológico independiente de  $f$  y  $\rho$ .

Volviendo a la ecuación (5.20), por su similitud con (5.4) podemos aplicar el razonamiento de la sección (5.2.2) referente a la forma esperada para el potencia  $V_c$  al aceptar como solución a  $f = 0$  e imponer las condiciones 1 y 2 compatibles con el modelo del monopolo de 'tHooft-Polyakov, es decir en el mejor de los casos la forma de  $V_c$  es de tipo volcán.

Lamentablemente con los intentos por solucionar (5.20) no se consiguió un potencial apropiado para el Monopolo. Podemos mostrar como ejemplo: tomar la misma propuesta de  $\rho$  hecha para el Vórtice (5.16), con la cual obtenemos un potencial:

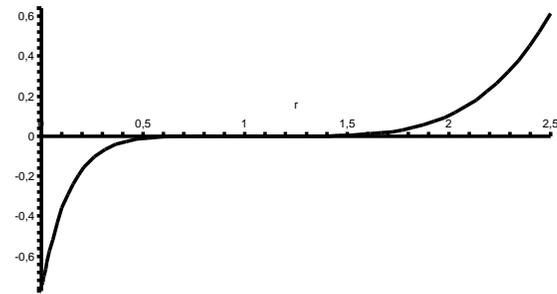
$$V_c(\rho) = \rho^2 \left[ \frac{1}{2}(\ln \rho)^4 - (\ln \rho)^3 + \frac{3}{2}(\ln \rho)^2 - \frac{3}{2}\ln \rho + \frac{3}{4} \right] - \frac{3}{4}$$

que no posee rompimiento de simetría en  $\rho = 1$ , como se puede ver en la figura (5.4 A),  $V_c(\rho)$  en  $\rho = 1$  presenta un punto de inflexión.

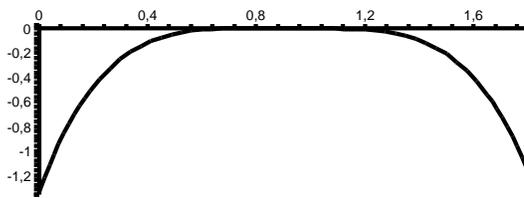
Otro ejemplo se obtiene al considerar a  $f = 1$  y a  $\rho(r)$  de la forma

$$\rho = 1 - \frac{1}{1+r^2}, \quad V_c(\rho) = 2(1-\rho)^3(\rho - 2/3)$$

con ello se consigue un potencial  $V(\rho)$  como se muestra en la imagen B de la figura (5.4)



A



B

**Figura 5.4.** Gráficas  $V_c$  vs  $\rho$  para dos de los ensayos para el Monopolo.



# Capítulo 6

## Conclusiones.

Para concluir podemos resaltar que con el método seguido en este trabajo (sección 5.1) para conseguir tanto soluciones a los sistemas de ecuaciones formados por (3.14) y (3.15) para del Vórtice de Nielsen-Olesen como para el sistema (4.21) y (4.22) del Monopolo de 'tHooft-Polyakov, en principio no se vislumbra un procedimiento apropiado para abordar dichos problemas que no sea el de ensayar soluciones a priori; así se logró conseguir una solución para el caso del Vórtice (sección 5.2.3), más no fue el caso para las ecuaciones del Monopolo.

En la consecución de la solución al sistema del Vórtice se tomó la decisión liberar la restricción impuesta por el modelo sobre el valor del campo vectorial en el origen, a fin de utilizar como solución  $f = 1$  para todo  $r$ . Desde el punto de vista matemático esta decisión no representa ninguna dificultad, recordando que para la construcción del modelo (3.1) se estableció de antemano la estructura topológica contenida en las soluciones ( $n \in \mathbb{Z} - 0$ ) apoyadas en los valores de los campos en el infinito:  $f(\infty) = 1$  y  $\rho(\infty) = 1$  esto garantiza la estabilidad topológica de cualquier solución que las cumpla, si  $\rho$  toma valor nulo en algún lugar, y ese es nuestro caso.

La condición de frontera en el origen se impone para satisfacer regularidad, por lo tanto al relajar dicha condición y hacer  $f = 1$  en el vórtice se perdió tanto la posibilidad de obtener campo magnético, así como también la dependencia de  $\rho$  con el número de enrollamiento  $n$ .

En cuanto a la energía, que  $f$  tome el valor 1 para todo  $r$  mantiene al campo  $\mathbf{A}$  como un calibre puro (5.10) por lo que, el término electromagnético  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  no dio contribución a la energía.

Siguiendo con las consecuencias físicas para el caso del vórtice: el hecho de haber tomado  $f = 1$  como solución a (3.13) hizo incompatible al potencial tipo Sombrero Mexicano (2.24) con la solución de  $\rho$  regular en el origen; lo que lleva a aceptar la presencia de al menos dos mínimos para el potencial  $V_c$ , uno de ellos en el origen y el otro en el infinito (5.2.2).

También ocurre que en  $r = 0$  y  $r = \infty$  la densidad de energía del campo  $\rho$  es nula (5.2.2).

La solución encontrada para el sistema de ecuaciones del Vórtice:

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = \exp(-1/r) \exp(in\theta) & n \neq 0 \\ A_i(r, \theta) = -n \frac{\epsilon_{ij}}{er} \hat{x}_j & r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ A_0(r, \theta) = 0 \end{cases}$$

con el potencial  $V_c$  (5.19):

$$V_c(|\varphi|) = |\varphi|^2 [(\ln |\varphi|)^4 - (\ln |\varphi|)^3 + \frac{3}{2}(\ln |\varphi|)^2 - \frac{3}{2} \ln |\varphi| + \frac{3}{4}] - \frac{3}{4}$$

con valor finito de la energía

$$E = \pi/2$$

La solución encontrada cumplió con las condiciones pautadas en este trabajo, para ser considerada como solución al sistema formado por las ecuaciones (3.13) y (3.14).

Adicional a esto, la solución no presentó campo magnético, es un Vórtice puramente topológico.

Para el caso del Monopolo las consecuencias sobre el flujo magnético de hacer  $f = 0$  como parte del sistema de soluciones, no está del todo clara, como se comentó en la sección (5.3.1) al no conocer en forma precisa el comportamiento espacial del tensor  $F^{\mu\nu}$ .

En los ensayos de búsqueda de soluciones a las ecuaciones del monopolo, con ninguna de ellas se consiguió un potencial con mínimos que permitiera la ruptura de simetría. Al final del capítulo 5 se muestran dos ejemplos de ello.

# Apéndice A

## Elementos de Homotopía

Una idea básica para entender las propiedades globales, locales y clasificar las soluciones en teoría de campo, es la noción de homotopía, en ella se encuentra la idea de deformación continua

**Definición:** Sea  $X$  un espacio topológico e  $I = [0, 1]$  un intervalo cerrado. un mapa continuo  $\alpha: I \rightarrow X$  se llama **camino** con punto inicial  $x_o$  y punto final  $x_1$  si  $\alpha(0) = x_o$  y  $\alpha(1) = x_1$ . Si  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_o$  el **camino** se llama **bucle** con punto base  $x_o$ . Si  $\alpha: I^n \rightarrow X$  y en los extremos de  $I^n$ ,  $\partial I^n$  se tiene  $\alpha(\partial I^n) = x_o$  se llama **n-bucle**.

El conjunto de n-bucles en un espacio topológico se puede dotar de una estructura algebraica, al dividir  $I$  en partes y recorrer del punto inicial al punto final con diferentes bucles.

**Definición:** Dado un espacio topológico  $X$ , y  $\beta, \gamma: I^n \rightarrow X$  dos n-bucles continuos a  $x_o$ ,  $x_o \in X$  se dicen **homotópicas** si existe una deformación continua que permita llevar a  $\beta$  sobre  $\gamma$ . De otra manera, si existe una función  $F(s, t): I^n \times [0, 1] \rightarrow X$  continua, tal que

$$F(s, 0) = \beta(s) \quad \wedge \quad F(s, 1) = \gamma(s) \quad \forall s \in I^n$$

$$F(0, t) = F(\partial I^n, t) = x_o \quad \forall t \in I$$

La homotopía establece una relación de equivalencia, esta equivalencia es llamada **Clases de Homotopía de  $\beta$**  y se escribe  $[\beta]$

**Definición: Grupos de Homotopía** son grupos cuyos elementos son todas las clases de homotopía de n-bucles con punto base  $x_o \in X$  y  $1 < n < \dim X$ . El producto del grupo se define mediante la aplicación consecutiva de n-bucles con punto base  $x_o$ .

**Tipos de Homotopía:** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos.  $X$  y  $Y$  son del mismo **Tipo de Homotopía**, si existen mapas continuos  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g \sim \text{id}_Y$  y  $g \circ f \sim \text{id}_X$ . el mapa  $f$  se llama Equivalencia Homotópica. Que sean del mismo **Tipo de Homotopía** es una relación de equivalencia. De aquí se sigue que dos círculos ( $S^1$ ) o dos esferas ( $S^2$ ) de diferentes espacios topológicos, poseen el mismo tipo de homotopía.

**Clasificación de los Grupos de Homotopía:**

**Primer Grupo de Homotopía:** es el grupo formado por las diferentes clases 1-bucles (bucles) con punto base  $x_o$  y se denota  $\Pi_1(X, x_o)$  también es llamado **Grupo Fundamental**. Es un grupo formado por las clases de homotopía de camino cerrado respecto a  $x_o$ .

**Segundo Grupo de Homotopía:** es el grupo formado por las clases 2-bucles (superficies cerradas) con punto base  $x_o$ . se denota  $\Pi_2(X, x_o)$ . Es el grupo de clases de homotopía de superficies cerradas y de punto base  $x_o$ .

**Propiedades de los Grupos de Homotopía:**

- El grupo fundamental es un invariante topológico.
- Si  $S^n$  no es contraíble a un punto entonces, el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $S^n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ,  $\Pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

# Bibliografía

- [1] P.M.A. Dirac, Magnetic monopoles over topologically non trivial Riemann Surfaces, Proc. Roy. Soc. London, A133 (1931).
- [2] J.D. Jackson, Classical electrodynamics, John Wiley & Son, Inc. (1999). C. Gomez, R. Hernandez. Electric-Magnetic Duality And Effective Field Theories, hep-th/9510023 v1, (1995).
- [3] N. Nielsen & P. Olesen, Nucl Phys. B144 (1973). 45.
- [4] G. 'tHooft, Nucl. Phys., B79 (1974) 276.
- [5] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B59 (1975) 82, A. M. Polyakov Nuc. Phys.B 120 (1977) 429
- [6] J. Preskill, Vortices and Monopoles, 1985 Les Houches Summer School of Theoretical Physics.
- [7] A.H. Guth, The inflationary Universe: a posible solution to the horizon and flatness problems, Phys. Rev D23(1981)347.
- [8] E. Roessl & N. Shaposnikov. Phys.Rev.D66.(2002):084008. M. Giovannini, H. Meyer. & N.Shaposnikov. Nucl.Phys.B619. (2001).615.
- [9] L. Randall & R. Sundrum. Phys.Rev.Lett. 83 (1999) 4690 L. Randall & R.Sundrum. . Phys.Rev.Lett. 83 (1999) 3370 8.
- [10] M. Prasad & C. Sommerfield. Exact classical solution for the 'tHooft monopole and the Julia-Zee dyon, Phys., Rev.Lett, 35 (1975) 760
- [11] H. de Vega & F. Shaposnick. Phys., Rev., D14 (1976) 276. H. de Vega & F. Shaposnick. Phys., Rev.Lett, 56 (1986) 2564
- [12] J. B. McLeod & C. B. Wang. Existence of the solutions for the 'tHooft-Polyakov Monopoles, math- ph/9902002v1, (1999)
- [13] V. A. Rubakov, Classical theory of gauge fields, Traducido por Stephen S. Wilson, (Princeton University Press), 2002.
- [14] E. B. Bogomol'nyi, Yad. Fiz. 24, 861 (1976) [Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976)].

- [15] Vilenkin, A. & Shellard, E.P.S. [2000], Cosmic Strings and other Topological Defects, 2nd edition, (Cambridge: Cambridge University Press).
- [16] Bogomol'nyi, E. B. Sov. J. Nucl. Phys., 24 449-54 (1975).
- [17] Faddeev, L. D. Lett. Matt. Phys., 7 1218-25(1976)
- [18] R. Torrealba. Buscando soluciones exactas a monopolos y vórtices, Memorias de las V Jornadas de Investigación y Postgrado. Ucla, DCyT (2007). R. Torrealba. Topological Abelian Higgs Vortices as 6D Brane Worlds, arXiv:hep-th/ 0803.0313v3
- [19] Apostol, T. M, Calculus V2, John Wiley & Son, Inc. Second Edition. (1967).
- [20] P. Goddard and D. I. Olive, Reports on Progress in Physics, 41, 1357 (1978).
- [21] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics
- [22] Arfken, Mathematical Methods for Physicists. Associated Press. 3rd Ed. (1985).