Enfoque algebraico de las Variedades diferenciables y su equivalencia con el sentido usual

Erik Alexander Caseres González

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2009

Enfoque algebraico de las Variedades diferenciables y su equivalencia con el sentido usual

Por

Erik Alexander Caseres González

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Asistente en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2009

Dedicado a MI AMIGO JESUCRISTO, a la vida,
a Clarita y a todos mis seres queridos.

Agradecimientos

- Quiero agradecer primeramente a Dios, nuestro Padre, porque sin él, nada de esto sería posible. A pesar de mis errores, yo se que siempre él ha estado conmigo.

- Al Dr. Ángel Mastromartino, por ser el gran profesor que es, de una excelente calidad humana y por haber puesto su confianza en mí para el logro de este trabajo..Qué Dios siempre le bendiga y le dé salud y prosperidad.

- A mi Mamá por su amor incomparable, la guía, que Dios me ha dado..nunca habrá otra mujer como tú!!

- A mi Papá porque nunca se ha mirado las manos para ayudarme..Que Dios nos permita seguir en el camino de la vida.

- A Rossibel, imposible dejarte por fuera, mi preciosa..tu comprensión y amor fueron y son unos de mis motivos para seguir adelante..Te adoro!!

- A mis hermanos, porque son un gran regalo de Dios!!..Dios los Bendiga siempre

- A la Profesora Isabel Marquez, una gran persona, una ayuda y un consejo en todo momento..Que Dios le Colme de bendiciones!!

- Al Dr. Javier Hernández, una gran persona, honesta y gran apoyo en este trabajo..Muchas gracias por todo!!

- Quiero agradecer de una manera muy especial, y me quedo corto, al Licenciado y gran amigo Ives Nogier por su valiosa ayuda desinteresada en este trabajo..que Dios le traiga prosperidad a él y sus seres más queridos..Gracias, amigo y que Dios te bendiga!!

- Un agradecimiento muy especial, y también me quedo corto, a la Profesora Dilcia Pérez, por sus consejos, por su apoyo en circunstancias que fueron muy fuertes y sobretodo por su ayuda tan generosa en todo momento..que Dios la bendiga a usted

y a sus hijas!!

- A mis compañeros de la maestría, en especial, al Licenciado Elvis Aponte por los buenos momentos compartidos!!

- A mis amigos: Dixa, Sra. Dixa, Las Marías, Silvana, Francis y por supuesto Albannis por su apoyo y ánimo..Que Dios les guíe siempre en todo momento.

- A las Profesoras Enedina y Adalys Alvarez, por sus consejos y especialmente a las Profesoras Yelitza Yépez y Marleny Carrero por los grandes y buenísimos momentos vividos en la UNA.

- A todas aquellas personas que de alguna u otra manera contribuyeron al logro de esta gran meta..A todos mil gracias y la Bendición de Dios!!

Enfoque algebraico de las Variedades diferenciables y su equivalencia con el sentido usual

Resumen

Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}-$álgebra cualquiera. En primer lugar, definiremos lo que se entenderá como espacio dual de $\mathcal{F}$. Posteriormente, sobre $\mathcal{F}$ vamos a introducir tres condiciones fundamentales que serán estudiadas y nos permitirán construir herramientas, las cuales nos permitirán presentar las definiciones algebraicas de variedades diferenciables y funciones diferenciables. Estas condiciones son: Geométrica, Completa y $C^{\infty}-$cerrada. Finalmente enunciaremos y probaremos la equivalencia entre estas definiciones de variedades diferenciables y funciones diferenciables, en los que, por cierto, hemos llamado teoremas fundamentales.

Contenido

Introducción

El estudio de las variedades diferenciables bajo un enfoque algebraico tiene su origen en el transcurso del año 1969 cuando el matemático Alexander Vinogradov inicia un seminario junto a sus estudiantes de matemática acerca de la teoría cuántica de campos, pero tal seminario con un carácter orientado hacia una perspectiva matemática. En el desarrollo de este seminario, Vinogradov junto a sus alumnos logran captar ciertas dificultades en cuanto a los planteamientos físicos con los planteamientos matemáticos que se van produciendo en la teoría. Entonces pone de manifiesto la necesidad de crear o mejorar estructuras matemáticas que puedan servir para contribuir a solventar tales dificultades.

Por tal motivo, en 1971 se da inicio al estudio sobre la estructura del Cálculo Diferencial tratando de establecer analogías entre la Geometría Algebraica y el Álgebra Conmutativa. Por ello, 10 años después de un considerable tiempo de investigación, el grupo Jet Netruev conformado por varios matemáticos, entre ellos A. Vinogradov, comienzan a publicar material con los resultados obtenidos en sus investigaciones en una serie de libros cuya temática principal son los "Elementos del Cálculo Diferencial" pero bajo una noción netamente algebraica.

Ahora bién, para el estudio del Cálculo diferencial como aspecto particular del Cálculo Diferencial sobre álgebras conmutativas es necesario desarrollar una teoría previa acerca del tratamiento de las variedades diferenciables en el sentido algebraico y cuya construcción son propias del álgebra conmutativa. Para ello, partiremos de una $\mathbb{R}-$álgebra $\mathcal{F}$ cuyos elementos serán llamados funciones. A esta álgebra le pediremos tres condiciones que estudiaremos en el desarrollo de este trabajo; dichas condiciones son: Geométrica, completa y $C^{\infty}-$cerrada. Todo lo anterior nos proporcionará las bases para construir nuevas herramientas, entre ellas, la función dual, el álgebra restricción, que nos conducirán a la definición algebraica de variedades diferenciables y así mismo a la noción de funciones diferenciables entre variedades.

El propósito de este trabajo es mostrar que la definición de variedades diferenciables en el sentido algebraico es equivalente a la definición clásica estudiada en los cursos de geometría diferencial y de igual manera, establecer la equivalencia entre las nociones de funciones diferenciables en estas dos perspectivas.

De esta manera, el presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se hace una revisión general de la teoría de variedades diferenciables en el sentido usual y se presentan algunos teoremas y resultados clásicos. En el capítulo 2 comenzamos a desarrollar la teoría de álgebras y $\mathbb{R}-$puntos que es en donde se estudiarán las tres condiciones mencionadas en el tercer párrafo junto con otros aspectos de importancia; luego en el capítulo 3 presentamos las definiciones algebraicas de variedades y funciones diferenciables y finalmente en el capítulo 4 se enuncian y demuestran los teoremas fundamentales que prueban la equivalencia entre las definiciones presentadas en el capítulo 1 y 3.

Cabe destacar que nuestra presentación está fundamentada principalmente en el libro del grupo Jet Netruev (ver [3]) quienes recogen en la citada referencia resultados obtenidos en las investigaciones realizadas en este tema.

Es importante resaltar que una parte fundamental en el desarrollo del cálculo diferencial sobre álgebras conmutativas es la noción algebraica de las variedades. Por ello, actualmente existe una escuela, conocida como Diffiety School, que cuenta entre sus integrantes con el matemático Alexander Vinogradov, quienes continúan realizando estudios en esta área totalmente innovadora y cuyo objetivo es dar solución a muchos problemas que se presentan en otras áreas como las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, áreas afines a la física y que quizás pueden ser resueltos mediante estructuras matemáticas más fuertes fundamentada en principios propios del álgebra conmutativa. Es muy oportuno mencionar, que una de las metas que persigue este grupo de investigadores es la de reescribir toda la teoría conocida de la geometría, del cálculo y análisis actual en términos del álgebra conmutativa, ya que bajo este nuevo enfoque es posible dar respuesta a variados problemas abiertos en investigaciones matemáticas.

Capítulo 1

Preliminares

§ 1.1. Cartas y Atlas

En este primer capítulo haremos una revisión general de la teoría de variedades diferenciables en el sentido clásico y presentaremos algunos ejemplos conocidos con el fín de ilustrar los resultados que se enunciarán en este capítulo.

Definición 1.1.1. Sea M un conjunto cualquiera. Una carta $(\mathcal{U}, x)$ sobre M es una función biyectiva $x : \mathcal{U} \longrightarrow x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ donde $\mathcal{U} \subset M$ es un subconjunto cualquiera de M y $x(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El entero $n > 0$ se denomina dimensión de la carta.

Ejemplo 1.1. Si $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ entonces la función identidad id define una carta $(\mathcal{U}, id)$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1.2. Si T^2 es el espacio de configuración del péndulo plano doble, entonces $(\mathcal{U}, s)$ es una carta sobre T^2 donde

$$\mathcal{U} = \{(\varphi, \psi) \in T^2 \ / \ -\frac{\pi}{4} < \varphi, \psi < \frac{\pi}{4}\}$$

y s es la función $s : \mathcal{U} \longrightarrow s(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$s(\varphi, \psi) = (\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\psi)$$

En efecto:

Veamos que s es biyectiva: sean φ_i, ψ_i en $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ con $i = 1, 2$. Entonces:

$$\begin{aligned} s(\varphi_1,\psi_1)=s(\varphi_2,\psi_2) &\implies (\operatorname{sen}\varphi_1,\operatorname{sen}\psi_1)=(\operatorname{sen}\varphi_2,\operatorname{sen}\psi_2)\\ &\implies \operatorname{sen}\varphi_1=\operatorname{sen}\varphi_2 \ \wedge\ \operatorname{sen}\psi_1=\operatorname{sen}\psi_2\\ &\implies \varphi_1=\varphi_2 \ \wedge\ \psi_1=\psi_2\\ &\implies (\varphi_1,\psi_1)=(\varphi_2,\psi_2) \end{aligned}$$

En consecuencia, s es inyectiva. La sobreyectividad es inmediata puesto que s está definida de $\mathcal{U}$ en $s(\mathcal{U})$. Por tanto, según la definición 1.1.1, s es una carta para T^2

Ejemplo 1.3. Si $\mathbf{S}$ es la silla de montar $z = 1 + x^2 - y^2$, entonces la proyección vertical:

$$\mathbf{S} \ni (x,y,z) \quad\longmapsto\quad pr((x,y,z)) \in \mathbb{R}^2$$

en un entorno $\mathcal{U} \subset \mathbf{S}$ del punto $(0,0,1)$ define una carta $(\mathcal{U}, pr)$ sobre $\mathbf{S}$

Observación 1.1. Dada una carta $(\mathcal{U}, x)$ y un punto $a \in \mathcal{U}$ entonces de acuerdo a la definición 1.1.1 tenemos que $x(a) \in \mathbb{R}^n$, esto es, $x(a) = (r_1, ..., r_n)$.

El número r_i es llamado la i-ésima coordenada de a y la función correspondiente enviando cada $a \in \mathcal{U}$ a su i-ésima coordenada se denomina la i- ésima función coordenada. Esta función es denotada por $x_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. En consecuencia una carta está completamente determinada por sus funciones coordenadas.

Definición 1.1.2. Dos cartas $(\mathcal{U}, x)$ y $(\mathcal{V}, y)$ sobre un conjunto M cualquiera son *compatibles* si la función:

$$y \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

llamada *función cambio de coordenadas* es un difeomorfismo de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o si $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Observación 1.2. Debido a las propiedades de los difeomorfismos se sigue que la relación de compatibilidad es una relación de equivalencia, por lo que la familia de todas las cartas sobre un conjunto dado M particiona en clases de equivalencia (el conjunto de cartas compatibles).

Ejemplo 1.4. Todas las cartas $(\mathcal{U}, id)$ donde $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $n > 0$ es un entero fijo son compatibles.

Ejemplo 1.5. La carta $(\mathcal{U}, s)$ sobre el péndulo doble T^2 del ejemplo 1.2 no es compatible con la carta $(\mathcal{U}, c)$ dada por:

$$\begin{aligned} c : \mathcal{U} &\longrightarrow c(\mathcal{U}) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto (\operatorname{sen}\varphi, g(\psi)) \end{aligned}$$

donde $g(\psi) = \operatorname{sen}\psi$ si $\psi < 0$ y $g(\psi) = 1 - \cos\psi$ si $\psi \geq 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} (c \ \circ \ s^{-1})(x, y) &= (\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} \ x), g(\operatorname{sen}^{-1} \ y)) \\ &= (x, g(\operatorname{sen}^{-1} \ y)) \end{aligned}$$

donde $g(\operatorname{sen}^{-1} \ y) = y$ si $\operatorname{sen}^{-1} \ y < 0$ y $g(\operatorname{sen}^{-1} \ y) = 1 - \cos(\operatorname{sen}^{-1} \ y)$ si $\operatorname{sen}^{-1} \ y \geq 0$. Ahora bien, estudiemos la diferenciabilidad de $c \circ s^{-1}$ en $(0, 0)$. Para ello calculemos el jacobiano de $c \ \circ \ s^{-1}$.

Al calcular el jacobiano obtenemos:

$$J(c \ \circ \ s^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Centremos nuestra atención en $\frac{\partial g}{\partial y}$. Observemos que esta función depende sólo de y por lo que podemos hablar de $\frac{dg}{dy}$. Entonces:

- $y \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow sen^{-1} \ y \longrightarrow 0$ a través de valores positivos. En este caso:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = y . \frac{1}{1 - y^2}$$

Luego, $\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0} = 0$

- $y \longrightarrow 0^- \Longrightarrow sen^{-1} \ y \longrightarrow 0$ a través de valores negativos. En este caso:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Luego, $\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0} = 1$

En consecuencia, $\frac{\partial g}{\partial y}|_{y=0}$ no existe y por tanto $c \circ s^{-1}$ no es diferenciable en $(0, 0)$. Así $(\mathcal{U}, s)$ y $(\mathcal{U}, c)$ no son compatibles.

Definición 1.1.3. Una familia $\mathcal{A}$ de cartas compatibles $x_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un conjunto M donde $n \geq 0$ es fijo y α varía sobre un conjunto de índices J es llamada un *atlas* sobre M si los $\mathcal{U}_\alpha$ cubren a M, esto es, $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{U}_\alpha = M$. El entero n se define como la dimensión de $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.4. Un atlas $\mathcal{A}$ es *maximal* si no está contenido en cualquier otro atlas. En otras palabras, si $\mathcal{B}$ es un atlas que contiene a $\mathcal{A}$ entonces se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Teorema 1.1.1. *Cualquier atlas está contenido en un único atlas maximal.*

Demostración. Ver referencia [4] ∎

Definición 1.1.5. Dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *compatibles* si cualquier carta de una de ellas es compatible con cualquiera de las cartas del otro atlas. En otras palabras, la unión de estos dos atlas es también un atlas (ya que la unión sería precisamente una familia de cartas compatibles, y al unir sus dominios cubren a M).

Observación 1.3. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son atlas compatibles, entonces están contenidas en un mismo atlas maximal. En efecto:

Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son compatibles entonces de acuerdo con la definición 1.1.5 se tiene que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas para M. Ahora bién, por el teorema 1.1.1 existe un único atlas maximal $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Pero sabemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. En consecuencia, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$, esto es, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están contenidas en un mismo atlas maximal $\mathcal{H}$.

Observación 1.4. Debido a las propiedades que poseen los difeomorfismos en $\mathbb{R}^n$ se puede demostrar que la relación de compatibilidad es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.6. $\mathbb{R}^n$ posee un atlas formado por una única carta: $(\mathbb{R}^n, id)$, donde id es la función identidad.

Ejemplo 1.7. S^n posee un atlas conformado por dos cartas al cual llamaremos *atlas estereográfico*. El mismo está dado por: $\mathcal{A} = \{(V, \pi), (V', \pi')\}$ donde $V = S^n \setminus \{N\}$ con

$$\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida como $\pi(p) = (\frac{p_1}{1-p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1-p_{n+1}})$ y $V' = S^n \setminus \{S\}$ con

$$\pi' : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida como $\pi(p) = (\frac{p_1}{1+p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1+p_{n+1}})$. Acá N y S representan el polo norte y sur respectivamente. Es inmediato que la unión de los dominios de estas dos cartas cubre a S^n. Más aún, al considerar $\pi' \circ \pi^{-1}$ y $\pi \circ \pi'^{-1}$ se tiene que estos cambios de coordenadas son difeomorfismos.

Ejemplo 1.8. El doble péndulo también posee un atlas descrito de la siguiente manera: $\mathfrak{A} = (U_p, s)$ donde

$$U_p = \{(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in T^2 \ / -\theta_2 \leq \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \leq \theta_2\}$$

Es decir, este atlas está conformado por todo el conjunto de posiciones del doble péndulo para un valor de θ_2 fijo. Hacemos variar estos ángulos y así obtenemos un conjunto de posiciones que cubren a todo el doble péndulo.

Ahora observemos los siguientes ejemplos muy particulares:

a. La línea discreta: este es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ con el atlas discreto que consiste de todas las cartas de la forma (r, v) donde $r \in \mathbb{R}$ y $v(r) = 0 \in \mathbb{R}^0$

b. La línea con un doble punto: esta consiste de la recta real a la cual se le agrega un punto θ. Formamos el atlas constituído de dos cartas (U, x) y (V, y) donde $U = \mathbb{R}$ con $x = id$ y $V = \theta \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $y(\theta) = 0$ y $y(r) = r$ para $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es decir, la recta real con un doble punto puede ser obtenida si dos copias de $\mathbb{R}$ son identificadas en todos los puntos con las mismas coordenadas excepto para el cero.

Definición 1.1.6. Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre M. Diremos que $\mathcal{A}$ cumple la *condición de numerabilidad* si ésta consiste de una cantidad finita o numerable de cartas o si todas sus cartas son compatibles entre si.

Definición 1.1.7. Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre M. Diremos que $\mathcal{A}$ satisface la *condición de Hausdorff* si para cualquier par de puntos $a, b \in M$ existen cartas (U, x) y (V, y) cuyos dominios son disjuntos conteniendo estos puntos, es decir, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y dichas cartas son compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$.

Notemos que en el ejemplo de la línea discreta no se satisfacen la condición de numerabilidad y en el ejemplo de la línea con un doble punto falla la condición de Hausdorff. Por tanto, estos casos no serán considerados en nuestro estudio de las variedades diferenciables.

Ahora se presenta la definición de variedades diferenciables.

Definición 1.1.8. Un conjunto provisto de un atlas maximal $\mathcal{A}_{max} = (U_\alpha, x_\alpha)$ con $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 0$, satisfaciendo la condición de numerabilidad y Hausdorff se denomina *variedad diferenciable n- dimensional.*

Observación 1.5. Sabemos por el teorema 1.1.1 que cualquier atlas para una variedad M está contenida en un único atlas maximal, esto es, si $\mathcal{A}$ es un atlas para M entonces existe un único $\mathcal{A}_{max}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{max}$. Luego cuando se escriba $(M, \mathcal{A})$, se indicará que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable sobre M. Es decir, para presentar una variedad diferenciable solo basta mostrar un atlas diferenciable para M puesto que éste siempre estará contenido en un único atlas maximal.

Observación 1.6. Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciabe donde $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, x_\alpha)\}$ Entonces $\mathcal{A}$ determina una estructura topológica sobre el conjunto M. Para esto definamos una topología tomando todos los conjuntos de la forma $x_\alpha^{-1}(V)$ donde V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ como una base. Recordemos que para poder demostrar que estos conjuntos forman una base para una topología, se necesita demostrar que para cualquier punto p en la intersección de dos conjuntos básicos $x_\alpha^{-1}(V)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ existe un tercer conjunto básico que contiene a p y está contenido en $x_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$. Ya sabemos que $p \in x_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ por lo que basta mostrar que $x_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ es por si mismo un conjunto básico. En efecto, como la función

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo entonces implica que $(x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(W)$ es un subconjunto abierto de $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y por tanto un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. De aquí se sigue que

$$x_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W) = x_\alpha^{-1}(V \cap (x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(W))$$

Como $x_\alpha^{-1}(V \cap (x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(W))$ es abierto básico entonces $x_\alpha^{-1}(V) \cap x_\beta^{-1}(W)$ también es un abierto básico como se quería demostrar.
De la definición 1.1.8 se sigue M es un espacio topológico Hausdorff y segundo

enumerable. Cuando al conjunto M se le dota de un atlas, se entenderá a la variedad diferenciable con esta estructura topológica. Por otra parte, notemos que $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. En efecto, sabemos por definición 1.1.1 que x_α es una biyección. Además es continua pues al considerar un abierto U en $\mathbb{R}^n$, éste se puede escribir como $U = x_\alpha^{-1}(x_\alpha(U))$ el cual es un abierto en M (en la topología de M). Además x_α es abierta pues por definición la imágen directa de cualquier subconjunto de M es un abierto de $\mathbb{R}^n$. En particular, la imágen directa de cualquier abierto de M es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, x_α es un homeomorfismo.

Antes de presentar algunos ejemplos clásicos de variedades diferenciables (de manera muy breve), es necesario recordar algunos resultados acerca de la topología cociente.

§ 1.2. Espacios cocientes

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto cualquiera y sea $\pi : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. Entonces la topología cociente sobre Y determinada por π está definida de la siguiente manera: un subconjunto $U \subset Y$ es abierto en Y si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición 1.2.2. Si X y Y son espacios topológicos, una función $\pi : X \longrightarrow Y$ se llama *función cociente* si π es sobreyectiva y continua y además Y tiene la topología cociente determinada por π.

Observación 1.7. Supongamos que X es un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Denotemos como $X/\sim$ al conjunto de clases de equivalencia en X. Para cada $x \in X$ la clase de equivalencia será denotada como $[x]$.

Definición 1.2.3. Sea $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ la proyección natural que envía a cada $x \in X$ a su clase de equivalencia $[x]$. Si dotamos al conjunto $X/\sim$ de la topología cociente determinada por π, $X/\sim$ es llamado el *espacio cociente* de X determinado por la relación de equivalencia dada.

Definición 1.2.4. Sea $\pi : X \longrightarrow Y$ una función. Un subconjunto U de X es llamado *saturado* con respecto a π si U es la imágen inversa de su imágen directa, esto es, $U = \pi^{-1}(\pi(U))$

Teorema 1.2.1. *Supongamos que $\pi : X \longrightarrow Y$ es una función cociente. Entonces:*

a. Para cualquier espacio topológico B , una función $f : Y \longrightarrow B$ es continua si y sólo si $f \circ \pi$ es continua.

b. La topología cociente es la única topología sobre Y para la cual la propiedad anterior es cierta.

c. Un subconjunto $K \subset Y$ es cerrado en Y si y solo si $\pi^{-1}(K)$ es cerrado en X

d. La restricción de π a cualquier subconjunto abierto o cerrado saturado de X es una función cociente.

e. La composición de π con cualquier función cociente es también una función cociente.

Demostración. Ver referencia [2] ■

A continuación se mostrará de manera breve algunos ejemplos clásicos de variedades diferenciables clasificados en ejemplos de la geometría diferencial como tal, y ejemplos de variedades diferenciables con estructura algebraica.

§ 1.3. Variedades diferenciables en geometría

Ejemplo 1.9. *El espacio real proyectivo n-dimensional* denotado por $\mathbb{RP}^n$ el cual está definido como el conjunto de los subespacios lineales 1- dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$. Veamos de manera breve su construcción. Para ello, dotemos a $\mathbb{RP}^n$ de la topología cociente determinada por la función

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$$

Usando resultados de topología se puede probar que $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff y 2º enumerable (para detalles ver referencia [4]). Para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, sea $[x] = \pi(x)$ la clase de equivalencia en $\mathbb{RP}^n$ Para cada $i = 1, ..., n+1$, sea $\widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ el conjunto donde $x^i \neq 0$ y sea $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$. Como $\widetilde{U}_i$ es un abierto saturado, se sigue por teorema 1.2.1 que U_i es abierto y por el mismo teorema 1.2.1 se tiene que $\pi \mid_{\widetilde{U}_i} : \widetilde{U}_i \longrightarrow U_i$ es una función cociente. Ahora definamos una función $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$\varphi_i[x^1, ..., x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

Como $\varphi_i \circ \pi$ es continua, se sigue del teorema 1.2.1 que φ_i es continua. Se puede probar que φ_i es biyectiva y que su inversa es continua. En consecuencia, φ_i es un homeomorfismo. Además los U_i cubren a $\mathbb{RP}^n$. Por tanto, hemos construído un atlas, a saber, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$. Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad que $i > j$ y analicemos el cambio de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Entonces por cálculos rutinarios se obtiene

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u^1, ..., u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, ..., \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, ..., \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, ..., \frac{u^n}{u^j}\right)$$

el cual es un difeomorfismo de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. En consecuencia, de acuerdo a la definición 1.1.8 se tiene que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.10. El hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ posee un atlas conformado por cuatro cartas, esto es, $\mathcal{A} = \{(U_+, p_{zy}), (U_-, p_{zy}), (V_+, p_{zx}), (V_-, p_{zx})\}$ donde

$$U_+ = \{(x, y, z)/x = \sqrt{1 + z^2 - y^2}, x > 0\}$$

$$U_- = \{(x, y, z)/x = -\sqrt{1 + z^2 - y^2}, -x > 0\}$$

$$V_+ = \{(x, y, z)/y = \sqrt{1 + z^2 - x^2}, y > 0\}$$

$$V_- = \{(x, y, z)/y = -\sqrt{1 + z^2 - x^2}, -y > 0\}$$

y las funciones p_{zy} y p_{zx} son las proyecciones sobre los planos zy y zx respectivamente. En consecuencia el hiperboloide es una variedad 2-dimensional.

Ejemplo 1.11. La esfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad diferenciable de dimensión n con el atlas estereográfico, a saber, $\mathcal{A} = \{(V, \pi), (V', \pi')\}$ donde $V = S^n \setminus \{N\}$ con $\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\pi(p) = (\frac{p_1}{1-p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1-p_{n+1}})$ y $V' = S^n \setminus \{S\}$ con $\pi' : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\pi(p) = (\frac{p_1}{1+p_{n+1}}, ..., \frac{p_n}{1+p_{n+1}})$

También se tiene un atlas para S^n dada por $\mathcal{B} = \{(U_i, x_i), (U_{i+n+1}, x_{i+n+1})\}$ con $i = 1, ..., n + 1$ donde

$$U_i = \{(p_1, ..., p_{n+1}) \in S^n/p_i > 0\}$$

y $x_i : U_i \longrightarrow x_i \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ es la carta definida como

$$x_i(p_1, ..., p_{n+1}) = (p_1, ..., p_{i-1}, \widehat{p_i}, p_{i+1}, ..., p_{n+1})$$

Acá la notación $\widehat{p_i}$ indica suprimir la componente p_i. Por otra parte,

$$U_{i+n+1} = \{(p_1, ..., p_{n+1}) \in S^n / p_i < 0\}$$

y $x_{i+n+1} : U_{i+n+1} \longrightarrow x_i \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ es la carta definida como

$$x_{i+n+1}(p_1, ..., p_{n+1}) = (p_1, ..., p_{i-1}, \widehat{p_i}, p_{i+1}, ..., p_{n+1})$$

Ejemplo 1.12. El *espacio de Grassmann*, denotado como $G_{n,m}$ es el conjunto de todos los planos $m-$dimensional en $\mathbb{R}^n$ que pasan a través del orígen O. Para construir una carta escojamos en $\mathbb{R}^n$ un sistema cartesiano $(x_1, ..., x_n)$ y tomemos como U al conjunto formado por todos los planos $m-$dimensional dados en esas coordenadas por el sistema de ecuaciones

$$x_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad , \quad i = 1, ..., n-m$$

Ahora consideremos la función $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m(n-m)}$ la cual toma un plano de U y lo envía al conjunto de $m(n-m)-$uplas cuyas componentes son precisamente los coeficientes a_{ij} del sistema de ecuaciones anterior. Cambiando el orden de las coordenadas del sistema cartesiano seleccionado se puede cubrir a $G_{n,m}$. Para la compatibilidad de estas cartas basta con notar simplemente la dependencia diferenciable de las soluciones de un sistema lineal sobre el sistema de coeficientes. Así hemos obtenido una variedad $m(n-m)-$dimensional que generaliza el ejemplo 1.9 para $m = 1$. Para una discusión más detallada se recomienda ver referencias [2] y [4]

Ejemplo 1.13. Cualquier conjunto abierto $N \neq \emptyset$ de una variedad diferenciable M de dimensión n es una variedad de la misma dimensión que M. Efectivamente, si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es un atlas de M entonces $\widetilde{\mathcal{A}} = \{(V_\alpha, y_\alpha)\}$ con $V_\alpha = U_\alpha \cap N$ y $y_\alpha = x_\alpha \mid_{V_\alpha}$ es un atlas para N

§ 1.4. Variedades con estructura algebraica

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de variedades diferenciables relacionadas con el algebra.

Ejemplo 1.14. Sea $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las matrices reales de orden $m \times n$. Resulta pues, que este conjunto es una variedad diferenciable de dimensión $m \times n$. En efecto, si extendemos las entradas de cada matriz en una sola fila, entonces se puede identificar $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{m \times n}$ (en algunos textos suelen escribir $\mathbb{R}^{mn}$), específicamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, ..., a_{n1}, ..., a_{1m}, ..., a_{nm})$$

Ejemplo 1.15. Consideremos el grupo lineal general formado por todas las matrices reales cuadradas de orden $n \times n$ que son invertibles, el cual será denotado como $Gl(n, \mathbb{R})$. Tal conjunto es una variedad diferenciable de orden n^2 pues basta notar que $Gl(n, \mathbb{R}) = (\det)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y como la función determinante es continua se tiene que este es un subconjunto abierto de $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Luego por el ejemplo 1.13 se concluye el resultado.

Ejemplo 1.16. Consideremos ahora el conjunto de matrices de orden $m \times n$ de rango máximo. Supongamos que $m < n$ y denotemos como $\mathbb{M}_m(n \times n, \mathbb{R})$ al subconjunto de $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ de matrices de rango m. Sea $A \in \mathbb{M}_m(n \times n, \mathbb{R})$. Entonces el rango de A es m, luego por un resultado del álgebra lineal se tiene que A posee algún menor no singular de orden $m \times m$. Ahora bien, como la función determinante es continua, el determinante de este menor es no nulo en algún entorno de A en $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ y por tanto en $\mathbb{M}_m(n \times n, \mathbb{R})$. Así $\mathbb{M}_m(n \times n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ y del ejemplo 1.13 nuevamente se concluye el resultado.

Ejemplo 1.17. Una $k-$referencia en $\mathbb{R}^{n+k}$ es un conjunto ordenado $v = \{v_1, ..., v_k\}$ de k vectores de $\mathbb{R}^{n+k}$ linealmente independientes. Denotemos mediante $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+k} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n+k}$ formado por todas las $k-$referencias de $\mathbb{R}^{n+k}$. Tomemos en $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ un elemento $v = \{v_1, ..., v_k\}$. Entonces este elemento puede ser considerado de manera natural como la matriz de orden $(n+k) \times k$ y rango k que se obtiene colocando las componentes de v_i como columna, esto es:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1(n+k)} & \cdots & v_{k(n+k)} \end{pmatrix}$$

Luego identificando a $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ con el conjunto abierto de $\mathbb{M}((n+k)\times k, \mathbb{R})$ formado por todas las matrices de orden $(n+k)\times k$ y rango k se tiene por el ejemplo 1.13 que $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ es una variedad diferenciable de dimensión $(n+k)\times k$. Esta variedad es llamada *variedad de Stiefel*.

§ 1.5. Funciones diferenciables

Recordemos las nociones clásicas de funciones diferenciables entre variedades.

Definición 1.5.1. Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre la variedad M que tiene un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ es llamada *diferenciable* si para cualquier atlas $(U, x) \in \mathcal{A}$ se tiene que la función $f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el conjunto abierto $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable, esto es, $f \circ x^{-1} \in C^\infty(x(U))$

Observación 1.8. El conjunto de todas las funciones diferenciables sobre M será denotado mediante $C^\infty(M)$. Tal conjunto tiene una estructura natural de $\mathbb{R}-$álgebra y lo llamaremos la $\mathbb{R}$-*álgebra de funciones diferenciables sobre M con respecto al atlas* $\mathcal{A}$.

La definición 1.6.1 es generalizada de la siguiente manera:

Definición 1.5.2. Sean M y N variedades diferenciables y sea $F : M \longrightarrow N$ cualquier función entre estas variedades. Entonces F es diferenciable si para cualquier punto $p \in M$ existen cartas diferenciables (U, x) y (V, y) conteniendo a p y a $F(p)$ respectivamente tales que $F(U) \subset V$ y la compuesta $F_{xy} = y \circ F \circ x^{-1}$ es una función diferenciable en el sentido clásico entre los abiertos $x(U)$ y $y(V)$. La función F_{xy} recibe el nombre de representativa de F

Observación 1.9. Nótese que la definición 1.6.1 es un caso particular de la definición 1.6.2 tomando a $N = V = \mathbb{R}$ y tomando como y a la función identidad, esto es, $y = id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Observación 1.10. La definición 1.6.2 es independiente de la representación de F. Esto es, si $F_{x'y'} = y' \circ F \circ x'^{-1}$ es otra representación de F según las cartas (U', x') y (V', y') con $p \in U'$ entonces la siguiente cadena de igualdades muestra que $F_{x'y'}$ es diferenciable en $x'(p)$ si y sólo si F_{xy} lo es en el punto $x(p)$. En efecto:

$$\begin{aligned} y' \circ F \circ x'^{-1} &= y' \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ (x^{-1} \circ x) \circ x'^{-1} \\ &= (y' \circ y^{-1}) \circ F_{xy} \circ (x \circ x'^{-1}) \end{aligned}$$

Ahora veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.18. Si consideramos cualquier variedad diferenciable M y consideramos la función identidad

$$I : M \longrightarrow M$$

entonces resulta que esta función es diferenciable. En efecto, consideremos $p \in M$ y (U, x) una carta para M. Entonces $I(U) = U$ y la función representativa de I es la función identidad de $x(U)$ pues

$$I_{xx} = x \circ I \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = id_{x(U)}$$

donde id es la función identidad de $x(U)$

Ejemplo 1.19. Llamaremos función antípoda de S^n a la función $A : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $A(p) = -p$. Entonces A es diferenciable. En efecto, Consideramos el atlas estereográfico de S^n, a saber, $\{(V, \pi), (V', \pi')\}$. Tomamos $p \in M$. Si p no es el polo norte entonces $p \in V$ por lo que $A(p) = -p \in A(V) \subset V'$ y la función representativa $\pi' \circ A \circ \pi^{-1}$ estaría dada por $a \longmapsto -a$ la cual sabemos que es diferenciable, más aún, de clase C^∞. Se puede probar que si p es el polo norte entonces la representativa coincide con $a \longmapsto -a$. En consecuencia, A es diferenciable.

Ejemplo 1.20. Escojamos una posición fija del doble péndulo (ver ejemplo 1.2) Entonces todas las posiciones suficientemente cercas están caracterizadas por dos ángulos x, y. Podemos considerar entonces la carta dada por: $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como: posición $\in \mathcal{U} \longmapsto (x, y)$ la cual es compatible con el atlas estandar del toro. Entonces la función a puede ser descrita como

$$r_1 = R \cos x + r \cos y; r_2 = R \sin x + r \sin y$$

Consideremos la función identidad de $\mathbb{R}^2$, es decir, $id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Entonces tenemos que la compuesta $id \circ a \circ \Phi^{-1}$ resulta ser diferenciable y por tanto la función a es diferenciable.

§ 1.6. Funciones especiales diferenciables

Finalizamos este capítulo enunciando algunos teoremas conocidos sobre ciertas funciones especiales que se pueden construir y que resultan ser diferenciables los cuales serán utilizados en el desarrollo de la teoría del capítulo 2. Las demostraciones de estos resultados serán omitidas y pueden ser encontradas con gran detalle en las referencias [2], [4] y [3] mencionadas en la bibliografía.

Teorema 1.6.1. *Existe una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ que se anula para todos los valores negativos de la variable y es estrictamente positiva para todos los valores positivos.*

Teorema 1.6.2. *Para cualquier $r > 0$ y para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$ existe una función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ que se anula para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\|x - a\| \geq r$ y es positiva para otro $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.6.3. *Para cualquier conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ existe una función f en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = 0$ si $x \notin U$ y $f(x) > 0$ si $x \in U$.*

Teorema 1.6.4. *Para cualquier par de conjuntos cerrados disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ existe una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in A$, $f(x) = 1$ si $x \in B$ y $0 < f(x) < 1$ para otro $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.6.5. *Supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $f \in C^{\infty}(U)$. Entonces para cualquier punto $x \in U$ existe un entorno $V \subset U$ y una función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f\,|_V \equiv g\,|_V$.*

Teorema 1.6.6. *Para cualquier conjunto abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}^n$ existe una función diferenciable con superficies de nivel compacto, esto es, una función f en $C^{\infty}(U)$ tal que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(\lambda)$ es compacto.*

Teorema 1.6.7. *Sea M una variedad diferenciable, $\mathcal{A}$ su atlas diferenciable y $C^{\infty}(M)$ la $\mathbb{R}$- algebra de funciones diferenciables sobre M con respecto a $\mathcal{A}$. Entonces existe una función $f \in C^{\infty}(M)$ cuyas superficies de nivel son todas compactas, es decir, los conjuntos $f^{-1}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ son conjuntos compactos.*

Capítulo 2

Álgebras y Puntos

§ 2.1. Álgebras y Puntos.

En este capítulo nos planteamos el siguiente problema: Dada una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{F}$ cualquiera (ver [1]) deseamos encontrar un conjunto (Variedad Diferenciable) M cuya $\mathbb{R}$-álgebra de funciones (las cuales deben ser diferenciables) pueda ser identificada con $\mathcal{F}$. Además, supongamos que $\mathcal{F}$ es una álgebra conmutativa, asociativa y con unidad sobre $\mathbb{R}$, es decir, una $\mathbb{R}$-álgebra. Todos los homomorfismos de $\mathbb{R}$-álgebras $\alpha : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ los asumiremos unitarios, esto es, que envían la unidad de $\mathcal{F}_1$ en la unidad de $\mathcal{F}_2$. Resaltamos que los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados "funciones", pero no los son del todo. Estos son objetos de naturaleza abstracta no específica. El objetivo es, de alguna manera, transformarla en funciones reales sobre una variedad. Es por ello que sobre $\mathcal{F}$ debemos imponer ciertas condiciones. Estas condiciones son las que mencionamos a continuación, las cuales serán estudiadas a lo largo de este capítulo:

i) $\mathcal{F}$ debe ser *geométrica*.
ii) $\mathcal{F}$ debe ser *Completa*.
iii) $\mathcal{F}$ debe ser $C^\infty-$*cerrada*.
Para introducirnos en el tema comencemos con el siguiente ejemplo ilustrativo:

Ejemplo 2.1. Suponga que $\mathcal{F}$ es la $\mathbb{R}$ - álgebra de todas las sucesiones infinitas de números reales $\{a_i\}= \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ tal que $a_i = 0$ para todo i, excepto para una cantidad finita de estos índices. Las operaciones de adición y multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ están definidas término a término como sigue:

$$\lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}$$

$$\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}.$$

El producto $\{c_i\}$ de dos sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ está definido mediante la siguiente fórmula:

$c_i = \sum_{k+l} a_k b_l$.

Nos preguntamos lo siguiente: ¿Puede esta álgebra $\mathcal{F}$ ser realizada como una álgebra de funciones adecuadas sobre algún conjunto M?

Consideremos la siguiente asignación:

$\{a_i\} \mapsto \sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

Es claro que esta suma es finita pues $a_i = 0$ para cada i, excepto para una cantidad finita de estos índices. Ahora bien, con esta asignación obtenemos un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ - álgebras, digamos φ, donde $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}[x]$ donde $\mathbb{R}[x]$ es la $\mathbb{R}$ - álgebra de polinomios en x. Específicamente tenemos:

$$\varphi(\{a_0, a_1, a_2, ...\}) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$$

En consecuencia, cualquier sucesión $\{a_i\} \in \mathcal{F}$ puede ser vista como la función sobre M=$\mathbb{R}$ dada por $a \mapsto \sum_{i\geq 0} a_i x^i$. Esto es:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i\}$$

Ahora introduzcamos las siguientes notaciones: consideremos $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}$ - álgebra cualquiera. Sea M=$|\mathcal{F}|$ el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}$. Esto es:

$$M = \{x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}/x \text{ es homomorfismo}\}$$

donde

$$\begin{aligned} x : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto x(f) \end{aligned}$$

Los elementos de M son llamados **$\mathbb{R}$ - puntos** para la álgebra $\mathcal{F}$ (y estos serán los puntos de nuestra futura variedad) y $|\mathcal{F}|$ es llamado el **espacio dual** de los $\mathbb{R}$ - puntos o simplemente el espacio dual de la álgebra $\mathcal{F}$. Ahora bien, consideremos el conjunto siguiente:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{f} : \ M \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \widetilde{f}\,(x) = x(f)\}$$

En $\widetilde{\mathcal{F}}$ definamos las siguientes operaciones:

$$(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)=\widetilde{f}(x)+\widetilde{g}(x)=x(f)+x(g)$$

$$(\widetilde{f}\widetilde{g})(x)=\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)=x(f)x(g)$$

$$(\lambda\widetilde{f})(x)=\lambda\widetilde{f}(x)=\lambda x(f),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Notemos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un anillo conmutativo. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es una $\mathbb{R}$- álgebra. En efecto, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned}\tau:\mathcal{F}&\longrightarrow\widetilde{\mathcal{F}}\\ f&\longmapsto\widetilde{f}\end{aligned}$$

donde $\widetilde{f}:M\longrightarrow\mathbb{R}$ es la función siguiente: $\widetilde{f}(x)=x(f)$. Sean $f,g\in\mathcal{F}$ y tomemos $x\in M$. Luego:

$(\widetilde{f+g})(x)=x(f+g)=x(f)+x(g)=\widetilde{f}(x)+\widetilde{g}(x)=(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)$. Como $x\in M$ es arbitrario entonces tenemos que $\widetilde{f+g}=\widetilde{f}+\widetilde{g}$. Luego:

$$\tau(f+g)=\tau(f)+\tau(g)$$

Por otro lado, $(\widetilde{fg})(x)=x(fg)=x(f)x(g)=\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$. Como $x\in M$ es arbitrario entonces tenemos que $\widetilde{fg}=\widetilde{f}\widetilde{g}$. Luego:

$$\tau(fg)=\tau(f)\tau(g)$$

De manera análoga se verifica que $\tau(\lambda f)=\lambda\tau(f)$, con $\lambda\in\mathbb{R}$. En consecuencia, τ es un homomorfismo. Además τ es sobreyectiva ya que dado $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathcal{F}}$ podemos considerar la función asociada a $\widetilde{f}$, a saber, f y es tal que $\tau(f)=\widetilde{f}$.

Si τ fuera inyectiva entonces se tendría que τ sería un isomorfismo. Sin embargo, esto no siempre es cierto como se mostrará en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la $\mathbb{R}$- algebra isomorfa (como espacio lineal) al plano $\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x,y\in\mathbb{R}\}$ con el producto dado por:

$$(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

Veamos que el espacio dual M=$\mid\mathcal{F}\mid$ está constituído por un único punto.

Observemos que el elemento $(1,0)$ es la unidad del álgebra $\mathcal{F}$. Además cualquier elemento (x,y) en $\mathcal{F}$ tiene un inverso en si $x \neq 0$, el cual denotaremos por $(x,y)^{-1}$ y está dado por: $(x,y)^{-1} = (x^{-1}, -yx^{-2})$. En efecto, sea $(x,y)^{-1}$=(a,b) y supongamos que se cumple la igualdad $(a,b).(x,y) = (1,0)$. Esto implica por definición del producto que $(ax, ay+bx) = (1,0)$. Así $ax = 1$ y $ay + bx = 0$. De aquí tenemos $a = \frac{1}{x}$, y $b = \frac{-y}{x^2}$, pues $x \neq 0$. Ahora bien, al ser $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}$- algebra entonces en particular es un anillo y naturalmente es no nulo. Afirmamos que el único ideal de $\mathcal{F}$ diferentes de los ideales triviales es $\mathcal{I} = \{(0,y)/y \in \mathbb{R}\}$. Efectivamente:
Al considerar $\mathcal{I}$ se tiene que este subconjunto de $\mathcal{F}$ es un ideal de éste pues al considerar un elemento $(x,y) \in \mathcal{F}$ y un elemento $(0,y) \in \mathcal{I}$ entonces por definición se tiene que $(x,y).(0,y) = (0,xy)$, con $xy \in \mathbb{R}$, esto es, $(x,y).(0,y) \in \mathcal{I}$. Así $\mathcal{I}$ cumple la definición de ideal de un anillo.

Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ otro ideal de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{J} = \{0\}$ no hay nada que probar. Si $\mathcal{J} \neq \{0\}$ entonces existe $(0,y_0) \in \mathcal{J}$ con $y_0 \neq 0$. Veamos que $\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Sea $(0,y) \in \mathcal{I}$ y tomemos $(yy_0^{-1}, 0)$ en $\mathcal{F}$. Luego:

$$\mathcal{J} \ni (yy_0^{-1}, 0).(0,y_0) = (0,y)$$

Así $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Luego $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ y por tanto $\mathcal{I}$ es único. Afirmamos que la álgebra cociente $\mathcal{F} \;/\; \mathcal{I}$ es isomorfa a $\mathbb{R}$. En efecto, al considerar la función:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}/\mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \overline{(x,y)} &\longmapsto x \end{aligned}$$

obtenemos un isomorfismo. Por otra parte la función cociente

$$\begin{aligned} q : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{I} \approx \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

es un homomorfismo y es único. Así $M = \{q\}$

Entonces τ no puede ser inyectiva ya que entonces se tendría que $\widetilde{\mathcal{F}}$ sería isomorfa a $\mathbb{R}$ y como sabemos que $\mathcal{F}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ entonces $\mathbb{R}$ sería isomorfo a $\mathbb{R}^2$ lo cual es una contradicción.

Con este ejemplo se puede observar que τ no siempre es un isomorfismo, pues en este caso falla la inyectividad. Ahora nos preguntamos lo siguiente: ¿Bajo que condiciones τ es inyectiva?. La respuesta a esta interrogante se tiene en la siguiente afirmación:

Afirmación τ es inyectiva si y sólo si el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \bigcap_{x\in M} \ker x$ es trivial. En efecto:

$$\begin{aligned} f \in ker\tau &\iff \tau(f) = 0 \\ &\iff \widetilde{f} = 0 \\ &\iff \widetilde{f}(x) = 0, \quad \text{para todo } x \text{ en } M \\ &\iff x(f) = 0, \quad \text{para todo } x \text{ en } M \\ &\iff f \in \bigcap_{x\in M} \ker x = \mathcal{I}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Luego, $\ker\tau = \{f \in \mathcal{F}/\tau(f) = 0\} = \{0\}$ si y sólo si $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ es un ideal trivial, lo cual prueba la afirmación.

De lo anterior surge la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Una $\mathbb{R}$- algebra $\mathcal{F}$ es llamada **geométrica** si:

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \bigcap_{x\in|\mathcal{F}|} \ker x = \{0\}$$

En el ejemplo anterior, la algebra $\mathcal{F}$ dada no es geométrica ya que se puede notar que $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$

Ahora bien, si $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}$- algebra geométrica entonces de la afirmación anterior y del hecho de que τ es un homomorfismo que es sobreyectivo hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 2.1.1. *Cualquier $\mathbb{R}$- algebra $\mathcal{F}$ geométrica es isomorfa a la $\mathbb{R}$- algebra $\widetilde{\mathcal{F}}$ de las funciones definidas sobre el espacio dual $M = |\mathcal{F}|$ de los $\mathbb{R}$- puntos por la regla $f(x) = x(f)$*

Observación 2.1. Teniendo en cuenta el isomorfismo del teorema anterior, en adelante identificaremos la $\mathbb{R}$- algebra $\mathcal{F}$ (la cual asumiremos geométrica, a menos que se indique lo contrario) con la $\mathbb{R}$- algebra $\widetilde{\mathcal{F}}$ de funciones definidas sobre el espacio dual $M = |\mathcal{F}|$. En adelante omitiremos la notación $\widetilde{\mathcal{F}}$ y por tanto los elementos $f \in \mathcal{F}$ serán vistos (o pensados) como funciones definidas de M en $\mathbb{R}$, es decir,

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. El algebra de los polinomios en varias variables $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ es geométrica. En efecto, primero caractericemos la forma que tienen los homomorfismos de M. Sea H el conjunto de las sucesiones en $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$ dadas de la siguiente forma:

$$(a_i, z_i) = (a_1, (z_1, ..., z_n), ..., a_n, (z_1, ..., z_n))$$

Sea $\varphi : H \longrightarrow \mathcal{F}$ dada por:

$$(a_1, (z_1, ..., z_n), ..., a_n, (z_1, ..., z_n)) \longmapsto a_1 z_1 z_2 \cdots z_n + \cdots + a_n z_1^n z_2^n \cdots z_n^n$$

Por la forma como está definida φ, resulta ser un homomorfismo biyectivo y por tanto un isomorfismo. En consecuencia, $H \cong \mathcal{F}$. Luego, M puede ser expresado de la siguiente manera:

$$M = \{x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}/(x_1, ..., x_n)(a_i, z_i) = a_1 x_1 x_2 \cdots x_n + \cdots + a_n x_1^n x_2^n \cdots x_n^n\}$$

Ahora bien, sabemos que $0 \in \ker x$ para todo x en M. Pero:

$$(x_1, ..., x_n)(a_i, z_i) = 0 \Longleftrightarrow a_1 x_1 x_2 ... x_n + ... + a_n x_1^n x_2^n ... x_n^n = 0$$

Derivando mediante un proceso iterativo obtenemos que $a_i = 0$, para todo i. En consecuencia, (ai, z_i) es la sucesión nula en $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$. Luego hemos encontrado un homomorfismo $x \in M$ tal que $\ker x = \{0\}$. Esto implica que

$$\bigcap_{x \in |\mathcal{F}|} \ker\ x = \{0\}$$

Por tanto, de acuerdo a la definición anterior, se tiene que $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ es geométrica.

Proposición 2.1.1. *Para una $\mathbb{R}$- algebra $\mathcal{F}$ arbitraria, se tiene que la $\mathbb{R}$- algebra cociente $\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \bigcap_{p \in |\mathcal{F}|} \ker p$ es geométrica y además se cumple que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$*

Demostración. Para iniciar la demostración, comencemos por definir la función $\varphi : |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})| \longrightarrow |\mathcal{F}|$ que asigna a cada homomorfismo $b : \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ el homomorfismo $\varphi(b) = a = b \circ pr$, donde $pr : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$. Afirmamos que φ es biyectiva. En efecto:

i) Sean b_1 y b_2 en $|\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$, con $b_1 \neq b_2$. Mostremos que $\varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$,esto es, $a_1 \neq a_2$.
Supongamos que $a_1 = a_2$. Entonces, $(b_1 \circ pr)(x) = (b_2 \circ pr)(x),$ para todo x en $\mathcal{F}$,esto es, $b_1(pr(x)) \neq b_2(pr(x)),$ para todo x en $\mathcal{F}$, donde $pr(x) \in \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$.

Como $b_1 \neq b_2$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$ tal que $b_1(x_0) \neq b_2(x_0)$. Ya que pr es sobreyectiva, para $x_0 \in \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$ existe $x \in \mathcal{F}$ tal que $pr(x) = x_0$. Luego: $b_1(x_0) \neq b_2(x_0)$ implica $b_1(pr(x)) \neq b_2(pr(x))$, es decir, $(b_1 \circ \ pr)(x) \neq (b_2 \circ \ pr)(x)$ lo cual es una contradicción. Así, lo supuesto es falso y por tanto se tiene que φ es inyectiva.

ii) Sea $a \in |\mathcal{F}|$. Entonces es claro que $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \subset Ker(a)$. Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} b : \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto b([f]) = a(f) \end{aligned}$$

Observemos que b está bien definida. En efecto:
Sea $g \in [f]$. Luego $[g] = [f]$. Entonces:

$$\begin{aligned} [g] = [f] \quad &\Longrightarrow \quad [g] = g + \mathcal{I}(\mathcal{F}) \wedge \ [f] = f + \mathcal{I}(\mathcal{F}) \\ &\Longrightarrow \quad g - f \in \mathcal{I}(\mathcal{F}) \subset \ker(a) \\ &\Longrightarrow \quad a(g - f) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad a(g) - a(f) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad a(g) = a(f) \end{aligned}$$

Luego, b está bien definida.

Además $a = b \circ pr$ ya que por ser pr sobreyectiva, dado $[f] \in \mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $pr(f) = [f]$. Luego:

$$\begin{aligned} a(f + g) &= (b \circ pr)(f + g) \\ &= b([f + g]) \\ &= b([f] + [g]) \end{aligned}$$

Pero $a(f + g) = a(f) + a(g) = b([f]) + b([g])$. Esto implica que
$b([f] + [g]) = b([f]) + b([g])$ y por tanto $b \in |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$.

Así, dado $a \in |\mathcal{F}|$ existe $b \in |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$ tal que $\varphi(b) = a$. Luego tenemos que φ es sobreyectiva. En consecuencia, φ es biyectiva y por tanto un isomorfismo. Por tanto $|\mathcal{F}| \cong |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$.

Supongamos ahora que $b \in |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|$ y $a = \varphi(b) = b \circ pr$. Afirmamos que $\ker(b) = \ker(a)/\mathcal{I}(\mathcal{F})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
[f] \in \ker(b) &\iff b([f]) = 0 \\
&\iff b(pr(f)) = 0 \\
&\iff a(f) = 0 \\
&\iff f \in \ker(a) \\
&\iff [f] \in \ker(a)/\mathcal{I}(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

ya que $[f] = f + \mathcal{I}(\mathcal{F})$. De aquí

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})) &= \bigcap_{b \in |\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})|} \ker(b) \\
&= \bigcap_{a \in |\mathcal{F}|} (\ker(a)/\mathcal{I}(\mathcal{F})) \\
&= (\bigcap_{a \in |\mathcal{F}|} \ker(a))/\mathcal{F} \\
&= \mathcal{I}(\mathcal{F})/\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \{0\}
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{F}/\mathcal{I}(\mathcal{F})$ es geométrica lo cual concluye la prueba de la proposición. ■

Ahora bien, dada una $\mathbb{R}$- algebra geométrica $\mathcal{F}$, es conveniente introducir una topología en el espacio dual $M = |\mathcal{F}|$. Para ello, recordemos que en la física dos estados s_1, s_2 de un sistema clásico S(dos $\mathbb{R}$- puntos) se encuentran próximos uno del otro si todas las lecturas de los dispositivos de medida relevantes son cerrados, es decir, para todo los dispositivos de medida D se debe tener que:

$$f_D(s_2) \in [f_D(s_1) - \epsilon, f_D(s_1) + \epsilon]$$

Inspirándonos en este hecho de la física, la topología que se introduce en M está dada por los conjuntos abiertos básicos de la forma $f^{-1}(V)$ donde $V \subset \mathbb{R}$ es abierto y $f \in \mathcal{F}$. Nótese que f^{-1} tiene sentido matemático puesto que $\mathcal{F}$ ha sido identificada con el algebra de funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. (Recordar el Teorema 2.1.1). En otras palabras, la topología en M es la más débil para la cual todas las funciones en $\mathcal{F}$ son contínuas.

Proposición 2.1.2. *La topología introducida en M es la de un espacio Haussdorff.*

Demostración. Supongamos que x e y son dos $\mathbb{R}$- puntos distintos en $M = |\mathcal{F}|$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{F}$ para la cual se tiene que

$$x(f) \neq y(f) \tag{2.1}$$

Pero como $\mathcal{F}$ es geométrica entonces por Teorema 2.1.1 tenemos que

$$\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}/\widetilde{f}(x) = x(f), f \in \mathcal{F}\}$$

Luego (2.1) es equivalente a $f(x) \neq f(y)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) < f(y)$. Entonces claramente los conjuntos $f^{-1}[(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2})]$ y $f^{-1}[(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)]$ son vecindades de x e y respectivamente. Además son disjuntas. Efectivamente:

$$w \in f^{-1}\left[(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2})\right] \bigcap f^{-1}\left[(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)\right]$$

$\Longrightarrow w \in f^{-1}\left[(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2}\right] \wedge w \in f^{-1}\left[(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)\right]$

$\Longrightarrow f(w) \in (-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2}) \wedge f(w) \in (\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)$

$\Longrightarrow (-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2}) \bigcap (\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción ya que $(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2})$ y $(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)$ son disjuntos.

Luego los conjuntos $f^{-1}[(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2})]$ y $f^{-1}[(\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty)]$ son disjuntos y por tanto la topología introducida en M es de Hausdorff. ∎

Observación 2.2. En lo que sigue, los siguientes hechos serán de gran utilidad. Consideremos una $\mathbb{R}$- algebra cualquiera $\mathcal{F}_0$ de funciones definidas sobre un conjunto M_0 arbitrario. Esto es:

$$\mathcal{F}_0 = \{f : M_0 \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es función}\}$$

Entonces existe una función natural θ, (llamada homomorfismo evaluación) de M_0 en $|\mathcal{F}_0|$ que hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} \theta : M_0 &\longrightarrow |\mathcal{F}_0| \\ a &\longmapsto \theta(a)f = f(a) \end{aligned}$$

Tomemos $f \in \mathcal{F}_0$ y supongamos que está definida sobre $|\mathcal{F}_0|$ y que $f(x) = 0$, para cada

$$x \in \theta(M_0) \subset |\mathcal{F}_0| \tag{2.2}$$

Afirmación 1 f es el cero de $\mathcal{F}_0$.
En efecto,
Sea $h \in \mathcal{F}_0$ y $a \in M_0$. Por definición de suma usual de funciones sabemos que

$$(h + f)(a) = h(a) + f(a) \tag{2.3}$$

Estudiemos el término $f(a)$ de la igualdad anterior (2.3). Observemos lo siguiente: si $a \in M_0$, entonces $\theta(a) \in |\mathcal{F}_0|$. Por (2.2), sabemos que $f \in \mathcal{F}_0$ puede ser considerado como una función definida sobre $|\mathcal{F}_0|$, es decir, f puede ser pensada como una función perteneciente al siguiente conjunto:

$$\widetilde{\mathcal{F}_0} = \{\widetilde{f} : |\mathcal{F}_0| \longrightarrow \mathbb{R} / \widetilde{f}(x) = x(f), f \in \mathcal{F}_0\}$$

En particular para $\theta(a) \in |\mathcal{F}_0|$ tenemos que $\widetilde{f}(\theta(a)) = \theta(a)(f)$. Pero por definición de θ tenemos que: $\widetilde{f}(\theta(a)) = f(a)$. Así [2] nos queda de la siguiente manera:

$$(h + f)(a) = h(a) + \widetilde{f}(\theta(a))$$

Pero $f(x) = 0$ para cada $x \in \theta(M_0) \subset |\mathcal{F}_0|$. En particular para $\theta(a) \in \theta(M_0)$ se verifica que $\widetilde{f}(\theta(a)) = 0$. Así $(h + f)(a) = h(a)$. Por tanto, $f \equiv 0$ en $\mathcal{F}_0$ lo cual prueba la afirmación 1

Afirmación 2 El algebra $\mathcal{F}_0$ es geométrica.

Efectivamente,

$$\begin{aligned} h \in \bigcap_{x \in |\mathcal{F}_0|} \ker(x) &\implies h \in \ker(x), \forall x \in |\mathcal{F}_0| \\ &\implies x(h) = 0, \forall x \in |\mathcal{F}_0| \\ &\implies \widetilde{h}(x) = 0, \forall x \in |\mathcal{F}_0| \end{aligned}$$

Como $\widetilde{h}(x) = 0,$ para todo x en $|\mathcal{F}_0|$, en particular se tiene que $\widetilde{h}(x) = 0$, para todo x en $\theta(M_0)$. Luego por la afirmación 1 se tiene que $h \equiv 0$. Como h es arbitararia se tiene que $\bigcap_{x \in |\mathcal{F}_0|} \ker(x) = \{0\}$ por lo que $\mathcal{F}_0$ es geométrica lo cual demuestra la afirmación 2.

Esto motiva la siguiente proposición:

Proposición 2.1.3. *Si $\mathcal{F}_0$ es una subalgebra de la $\mathbb{R}$- álgebra de funciones continuas sobre el espacio topológico M_0, entonces la función*

$$\theta : M_0 \longrightarrow |\mathcal{F}_0| \ ; a \longmapsto (f \longmapsto f(a))$$

es continua.

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{F}_0$ es una subalgebra de la $\mathbb{R}$- álgebra de funciones continuas sobre el espacio topológico M_0, es decir:

$$\widetilde{\mathcal{F}_0} = \{f : M_0 \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es contínua}\}$$

Supongamos que $U = f^{-1}(V)$ es un abierto básico en $|\mathcal{F}_0|$. Entonces por definición, U consiste de todos los homomorfismos definidos sobre $\mathcal{F}_0$ a valores en $\mathbb{R}$ que asignan a cada elemento $f \in \mathcal{F}_0$ un elemento del conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}$. Entonces al considerar $\theta^{-1}(U)$ se tiene que este es de la forma

$$\theta^{-1}(U) = \{a \in M_0 \ / \ \theta(a)f = f(a), f \in \mathcal{F}_0\}$$

el cual es abierto en M_0. Por tanto θ es continua. ■

Observación 2.3. En el caso general en que $\mathcal{F}_0$ es cualquier $\mathbb{R}$- algebra geométrica, $M_0 = |\mathcal{F}_0|$, entonces M_0 es un espacio topológico y los elementos de $\mathcal{F}_0$ son funciones continuas. (Recordar la topología introducida en el espacio dual).

Ejemplo 2.4. Sea la $\mathbb{R}$- algebra de polinomios en n variables, $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$. Todo homomorfismo $a : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ está determinado por el vector $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, donde $\lambda_i = a(x_i)$ debido a que:

$$\begin{aligned} a(\sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}) &= \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} (a(x_1))^{k_1} \cdots (a(x_n))^{k_n} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \end{aligned}$$

Más aún, la función

$$\mathcal{F} \ni \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \longmapsto \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} \lambda_1^{k_1}\cdots \lambda_n^{k_n} \in \mathbb{R}$$

es un homomorfismo de la algebra $\mathcal{F}$ a $\mathbb{R}$ para todo $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.
En consecuencia el espacio dual $|\mathcal{F}|$ en este caso queda identificado de manera natural con $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n)\}$

Observación 2.4. Consideremos la álgebra del ejemplo anterior. La topología definida en $|\mathcal{F}|$ coincide con la topología usual de $\mathbb{R}^n$. En efecto, los conjuntos $f^{-1}(V)$ donde f es un polinomio y $V \subset \mathbb{R}$ es abierto son abiertos en $\mathbb{R}^n = |\mathcal{F}| = M$ ya que por ser f un polinomio, es una función continua.

Más aún, una bola de radio r con centro $(b_1, b_2, ..., b_n)$ en $\mathbb{R}^n = |\mathcal{F}|$ es de la forma $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ donde $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los números reales positivos si f es de la forma

$$f(x_1, ..., x_n) = r^2 - \sum_{i=1}^{n}(b_i - x_i)^2$$

Veamos:

$$\begin{aligned} x \in B(r,b) \subset \mathbb{R}^n &\implies \parallel x - b \parallel^2 < r^2 \\ &\implies r^2 - \parallel x - b \parallel^2 < r^2 = f(x) > 0 \end{aligned}$$

Es decir, $f(B(r,b)) \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. Luego por la definición de topología definida en $|\mathcal{F}|$ se tiene que $f^{-1}(f(B(r,b)))$ es un abierto en $\mathbb{R}^n = |\mathcal{F}|$.

Es decir, este abierto coincide con $B(r,b)$ el cual es un abierto en la topología usual de $\mathbb{R}^n$ y dado que las bolas abiertas usuales en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base en la topología usual entonces se tiene que estas dos topologías coinciden.

El siguiente ejemplo es uno de los más importantes de este capítulo ya que nos proporciona un método para determinar el espacio dual de una $\mathbb{R}$- álgebra dada.

Ejemplo 2.5. Sea la $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F} = C^\infty(U)$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Consideremos la función:

$$\begin{aligned} \theta : U &\longrightarrow |\mathcal{F}| \\ x &\longmapsto \theta(x) \end{aligned}$$

donde $\theta(x) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el $\mathbb{R}-$ punto dado por $\theta(x)f = f(x)$. Afirmamos que θ es un homeomorfismo. En efecto:

a. Veamos que θ es inyectiva.

$$\begin{aligned}
\theta(x_1) = \theta(x_2) &\Longrightarrow \forall f \in \mathcal{F},\ \theta(x_1)f = \theta(x_2)f \\
&\Longrightarrow \forall f \in \mathcal{F},\ f(x_1) = f(x_2) \\
&\Longrightarrow \forall f \in \mathcal{F},\ x_1(f) = x_2(f) \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}$$

b. Veamos que θ es sobreyectiva.

Sea p en $|\mathcal{F}|$, es decir, $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo. Seleccionemos una función diferenciable $f_c \in C^\infty(U)$ cuyas superficies de nivel sean compactas (cuya existencia está garantizada por el teorema 1.6.6 de los preliminares). Ahora bién, como las superficies de nivel son compactas para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $f_c^{-1}(\lambda)$ es compacta, entonces en particular para $\lambda = p(f)$ se tiene que $L = f_c^{-1}(\lambda)$ es compacta.

Supongamos que existe $p \in |\mathcal{F}|$ tal que para cualquier $a \in U$ se tiene $\theta(a) \neq p$, esto es, supongamos que θ no es sobreyectiva. Esto equivale a lo siguiente: existe $p \in |\mathcal{F}|$ tal que para cada $a \in U$ existe $f_a \in \mathcal{F}$ tal que $\theta(a)(f_a) \neq p(f_a)$, es decir, $f_a(a) \neq p(f_a)$.

Ahora bien, consideremos los siguientes conjuntos:

$$U_a = \{x \in U / f_a(x) \neq p(f_a)\} \ \text{ con } \ a \in L$$

Notemos que U_a es no vacío ya que $a \in U_a$. Además estos U_a constituyen un cubrimiento abierto para L y como L es compacto podemos escoger un subcubrimiento finito $U_{a_1}, ..., U_{a_m}$ para L.

Consideremos la siguiente función:

$$g = (f_c - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2$$

Observemos que g es diferenciable sobre U por ser suma de funciones diferenciables sobre U. Además g no se anula sobre sobre U. En efecto:

$$a \in U \Longrightarrow a \in L \ o \ a \in U \setminus L$$

Luego si $a \in L$ entonces por lo menos existe un término de la sumatoria que interviene en la función g que no se anula ya que por lo menos existiría un $x \in U_{a_i}$ tal que $f_{a_i}(x) \neq p(f_{a_i})(x)$. Por otra parte, si $a \in U \setminus L$, entonces a no está en $L = f_c^{-1}(\lambda)$. Entonces $f_c(a) \neq \lambda$, es decir, $f_c(a) \neq p(f_c)$. Esto implica que $f_c(a) - p(f_c) \neq 0$ por lo que el primer término de g sería no nulo. Así podemos considerar $\frac{1}{g} \in \mathcal{F}$. Como p es un homomorfismo unitario de $\mathbb{R}$- álgebras tenemos que:

$$1 = p(1) = p(g).p(\frac{1}{g})$$

Por otra parte:

$$p(g) = (p(f_c) - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m}(p(f_{a_i}) - p(f_{a_i}))^2 = 0$$

lo cual nos produce una contradicción. Luego θ es sobreyectiva.

c. De la proposición 1.1.3 sabemos que θ es continua. Solo resta probar que:

$$\theta^{-1} : |\mathcal{F}| \longrightarrow U$$

es continua. En efecto, Sea $\mathcal{H}$ un abierto en U. Entonces por la proposición 1.6.3 existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$, esto es, $\mathcal{H} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Pero $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ es abierto. Así $\mathcal{H}$ es un abierto en la topología de $|\mathcal{F}|$ (ya que es de la forma $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ con $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ abierto y f es continua). En consecuencia, θ^{-1} es continua. Por tanto, θ es un homeomorfismo lo cual culmina la prueba.

Observación 2.5. Del ejemplo anterior se tiene, en particular, que $|C^\infty(\mathbb{R}^n)| \approx \mathbb{R}^n$, es decir,el dual de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.6. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la $\mathbb{R}$- álgebra constituída por todas funciones diferenciables de período 1 sobre $\mathbb{R}$. Entonces como se ha venido desarrollando a lo largo del capítulo, cada punto $a \in \mathbb{R}$ determina el homomorfismo $\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(a)$. Ahora bien, puntos diferentes pueden originar el mismo homomorfismo. Esto ocurre si y sólo si la distancia entre los puntos es un entero.

Afirmamos que no existen otros homomorfismos que los determinados por los puntos $a \in \mathbb{R}$. En efecto:

Si $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ no está determinado por cualquier otro punto, entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe una función $f_a \in \mathcal{F}$ tal que $p(f_a) \neq f_a(a)$. Consideremos un cubrimiento abierto para el intervalo cerrado de conjuntos de la forma:

$$U_a = \left\{ x \in \mathbb{R}/p(f_a) \neq f_a(x) \right\}$$

Como el intervalo $[0,1]$ es compacto podemos escoger un subcubrimiento finito $U_{a_1}, ..., U_{a_m}$. Ahora definimos la función:

$$g = \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))$$

Claramente esta función no se anula sobre $[0,1]$ y por la periodicidad tampoco se anula sobre $\mathbb{R}$. De aquí $\frac{1}{g}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ y usando argumentos análogos a los del ejemplo anterior se obtiene una contradicción. Luego cualquier homomorfismo $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ está determinado por puntos de $\mathbb{R}$.

Observación 2.6. De este ejemplo se observa que $|\mathcal{F}|$ puede ser identificado con el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ es el subgrupo de enteros de $\mathbb{R}$ y sabemos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$. Así hemos probado que las funciones periódicas diferenciables de período 1 sobre $\mathbb{R}$ son en realidad funciones definidas sobre el círculo.

Ejemplo 2.7. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la subálgebra de la álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ conformada por todas las funciones que son menores en valor absoluto que algún polinomio. Entonces el espacio dual $|\mathcal{F}|$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. En efecto:

Consideremos la función:

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow |\mathcal{F}| \\ x &\longmapsto \theta(x) \end{aligned}$$

donde $\theta(x) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$ punto dado por $\theta(x)f = f(x)$. Usando argumentos similares al del ejemplo 1.5 se prueba que θ es inyectiva. Veamos que θ es sobreyectiva. Sea $p \in |\mathcal{F}|$, es decir, $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$- punto. Escojamos una función $f_c \in \mathcal{F}$ cuyas superficies de nivel sean todas compactas y tal que se tenga que $f_c \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$.(Afirmamos que tales funciones existen, por ejemplo, al considerar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \|x\|^2 + 1$, entonces se tiene que $f(x) \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$. Además al considerar $n \in \mathbb{R}$ tenemos que $f^{-1}(\{n\}) = S^n$ la cual sabemos que es compacta. Por otra parte $f \in \mathcal{F}$ puesto que f es un polinomio y su norma puede ser acotada por ella misma). Sea $\lambda = p(f)$. Entonces en particular

$f_c^{-1}(\lambda) = L$ es compacta. Asumamos que $p \in |\mathcal{F}|$ es tal que para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, $\theta(a) \neq p$. Estonces existe una función $f_a \in \mathcal{F}$ tal que $f_a(a) \neq p(f_a)$. Consideramos los conjuntos siguientes

$$U_a = \{x \in \mathbb{R}^n / f_a(x) \neq p(f_a)\}$$

con $a \in L$. Al igual que en el ejemplo 1.5, estos U_a constituyen un cubrimiento abierto para L y como L es compacto podemos escoger un subcubrimiento finito $U_{a_1}, ..., U_{a_m}$ para L. Conideremos la siguiente función

$$g = (f_c - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2$$

Notemos que:

- $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ puesto que es la suma de funciones de clase C^∞
- $g \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y como $g(x) \longrightarrow \infty$ cuando $\|x\| \longrightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{g(x)} \longrightarrow \infty$

conforme $\|x\| \longrightarrow \infty$ por lo que $\frac{1}{g(x)}$ puede ser acotada por un polinomio. Además $\frac{1}{g(x)}$ es de clase C^∞. En consecuencia, $\frac{1}{g(x)} \in \mathcal{F}$. Como p es un homomorfismo unitario de $\mathbb{R}$- álgebras tenemos que:

$$1 = p(1) = p(g).p(\frac{1}{g})$$

Por otra parte:

$$p(g) = (p(f_c) - p(f_c))^2 + \sum_{i=1}^{m} (p(f_{a_i}) - p(f_{a_i}))^2 = 0$$

lo cual nos produce una contradicción. Luego θ es sobreyectiva.

De la proposición 1.1.3 sabemos que θ es continua. Sólo resta probar que:

$$\theta^{-1} : |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es continua. En efecto: Sea $\mathcal{H}$ un abierto en $\mathbb{R}^n$. Entonces por la proposición del capítulo de los preliminares existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) > 0$, para cada $x \in \mathcal{H}$, esto es, $\mathcal{H} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Pero $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ es abierto. Así $\mathcal{H}$ es un abierto en la topología de $|\mathcal{F}|$ (ya que es de la forma $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ con $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ abierto y f es continua). En consecuencia, θ^{-1} es continua por lo que θ es un homeomorfismo.

§ 2.2. La función dual.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos $\mathbb{R}$- álgebras geométricas y $\varphi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ es un homomorfismo entre estas $\mathbb{R}$- álgebras. Entonces para los espacios duales $|\mathcal{F}_1|$ y $|\mathcal{F}_2|$ definamos la siguiente función, la cual será llamada función dual:

$$|\varphi| : |\mathcal{F}_2| \longrightarrow |\mathcal{F}_1|$$

donde $|\varphi|(x) = x \circ \varphi$. Afirmamos que esta función es continua. En efecto, consideremos un abierto básico $U = f^{-1}(V) \subset |\mathcal{F}_1|$ donde $f \in \mathcal{F}_1$ y $V \subset \mathbb{R}$ es abierto. Entonces U es de la forma:

$$U = \{x \in |\mathcal{F}_1| \ / f(x) \in V\}$$

Por otra parte la imágen inversa de U mediante $|\varphi|$ está dada por:

$$\begin{aligned} |\varphi|^{-1}(U) &= \{y \in |\mathcal{F}_2| \ / |\varphi|(y) \in U\} \\ &= \{y \in |\mathcal{F}_2| \ / f(|\varphi|(y)) \in V\} \end{aligned}$$

Ahora observemos que $f(|\varphi|(y)) = f(y \circ \varphi)$. Pero usando el hecho de que $\mathcal{F}_1$ es geométrica tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(|\varphi|(y)) &= f(y \circ \varphi) \\ &= (y \circ \varphi)(f) \\ &= y(\varphi(f)) \end{aligned}$$

Como $\varphi(f) \in \mathcal{F}_2$ y $y \in |\mathcal{F}_2|$, y teniendo en cuenta que $\mathcal{F}_2$ es geométrica entonces $y(\varphi(f)) = (\varphi(f))(y)$. En resúmen, $f(|\varphi|(y)) = (\varphi(f))(y)$. Por lo tanto:

$$|\varphi|^{-1}(U) = \{y \in |\mathcal{F}_2| \ / (\varphi(f))(y) \in V\}$$

En consecuencia, $|\varphi|^{-1}(U)$ es un abierto de $|\mathcal{F}_2|$ y así $|\varphi|$ es contínua.

Veamos alguna propiedades que cumple la función dual.

Si $\varphi_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ y $\varphi_2 : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3$ son homomorfismos de $\mathbb{R}$- álgebras geométricas, entonces $|\varphi_2 \circ \varphi_1| = |\varphi_1| \circ |\varphi_2|$ y $|id_{\mathcal{F}_i}| = id_{|\mathcal{F}_i|}$. En efecto, Sabemos que $|\varphi_1| \circ |\varphi_2| : |\mathcal{F}_3| \longrightarrow |\mathcal{F}_1|$. Sea $x \in |\mathcal{F}_3|$. Entonces:

$$\begin{aligned}(|\varphi_1| \circ |\varphi_2|)(x) &= |\varphi_1|(|\varphi_2|(x)) \\ &= |\varphi_1|(x \circ \varphi_2) \\ &= (x \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 \\ &= x \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) \\ &= |\varphi_2 \circ \varphi_1|(x)\end{aligned}$$

Usando argumentos parecidos, fácilmente se demuestra también que $|id_{\mathcal{F}_i}| = id_{|\mathcal{F}_i|}$.

Es inmediato que si $\varphi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ es invertible, entonces se cumple que:

$$|\varphi^{-1}| = |\varphi|^{-1}$$

Proposición 2.2.1. *Si $\varphi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ es un isomorfismo, entonces $|\varphi|$ es un homeomorfismo*

Demostración. Sabemos que φ es un isomorfismo. Luego φ posee inversa por lo que $|\varphi|$ es invertible y más aún, por el comentario anterior, $|\varphi^{-1}| = |\varphi|^{-1}$ la cual es contínua ya que $|\varphi^{-1}|$ lo es.

Veamos que $|\varphi|$ es biyectiva.

a. *Inyectividad*

$$|\varphi|(x_1) = |\varphi|(x_2) \Longrightarrow x_1 \circ \varphi = x_2 \circ \varphi$$

Pero $x_1 \circ \varphi$ y $x_2 \circ \varphi$ son elementos de $|\mathcal{F}_1|$ y como son iguales entonces se tiene que $(x_1 \circ \varphi)(k_1) = (x_2 \circ \varphi)(k_1)$, para cada $k_1 \in \mathcal{F}_1$. Luego, para cada $k_1 \in \mathcal{F}_1$

$$\begin{aligned}(x_1 \circ \varphi)(k_1) = (x_2 \circ \varphi)(k_1) &\Longrightarrow x_1(\varphi(k_1)) = x_2(\varphi(k_1)) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

b. *Sobreyectividad*

Dado $a \in |\mathcal{F}_1|$, consideremos $b = a \circ \varphi^{-1} : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (nótese que φ^{-1} existe ya que φ es un isomorfismo). Luego:

$$\begin{aligned}|\varphi|(b) &= |\varphi|(a \circ \varphi^{-1}) \\ &= (a \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \\ &= a \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \\ &= a \circ (id_{\mathcal{F}_1}) = a\end{aligned}$$

En consecuencia, $|\varphi|$ es sobreyectiva y como $|\varphi|$ es continua con inversa continua entonces $|\varphi|$ es un homeomorfismo lo cual concluye la prueba. ■

Observación 2.7. La función dual construída anteriomente nos permitirá definir la noción de función diferenciable en el capítulo 2.

§ 2.3. El Álgebra Restricción.

Notemos que hasta los momentos a lo largo de este capítulo hemos considerado una $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F}$, y hemos construído el espacio topológico $M = |\mathcal{F}|$ (espacio de los $\mathbb{R}$- puntos) el cual se probó que era Hausdorff, para el cual $\mathcal{F}$ es la subálgebra del álgebra de todas las funciones continuas. Si $\mathcal{F}$ fuera localmente isomorfa a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces nuestro objetivo de definir una variedad en términos de su $\mathbb{R}$- álgebra de funciones diferenciables estaría logrado. Sin embargo esto no es tan inmediato como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.8. Sea $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales positivos. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida sobre $\mathbb{R}_+$. Es claro que esta función es de clase C^∞, sin embargo no es la restricción de cualquier función $f \in \mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$. Debido a esta situación, necesitamos una manera de definir la álgebra restricción. Motivado por lo anterior, surge la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |\mathcal{F}|$ es cualquier subconjunto del espacio dual. La restricción $\mathcal{F}|_A$ de $\mathcal{F}$ a A es el conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualquier $a \in A$ existe una vecindad $U \subset A$ de a y un elemento $\overline{f} \in \mathcal{F}$ tales que la restricción (en el contexto común) de f a U coincide con la restricción de $\overline{f}$ (vista como función sobre $|\mathcal{F}|$) a U. Debido a que $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}$- álgebra, entonces $\mathcal{F}|_A$ hereda también esta estructura.

Ejemplo 2.9. Consideremos nuevamente $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales positivos. Afirmamos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es un elemento de $C^\infty(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$. En efecto:

Dado cualquier número real $a > 0$, por el teorema 1.6.4 existe una función α en $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\alpha(x) = 0$ para $x \in (-\infty, \frac{a}{3}]$ y $\alpha(x) = 1$ para $x \in [\frac{2a}{3}, +\infty)$. Sea $\overline{f} \in \mathcal{F}$, $\overline{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\overline{f}(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0]$ y $\frac{\alpha(x)}{x}$ si $x \in (0, +\infty)$. Observemos que $\overline{f}$ es diferenciable y coincide con la función $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en el entorno $U = (\frac{2a}{3}, \frac{4a}{3})$ ya que:

- Si $w \in (\frac{2a}{3}, a)$ entonces $f(w) = \frac{1}{w}$
- Si $w \in (a, \frac{4a}{3})$ entonces $f(w) = \frac{1}{w}$

Por otro lado:

- Si $w \in (\frac{2a}{3}, a)$ entonces $\overline{f}(w) = \frac{\alpha(w)}{w} = \frac{1}{w} = f(w)$
- Si $w \in (a, \frac{4a}{3})$ entonces $\overline{f}(w) = \frac{\alpha(w)}{w} = \frac{1}{w} = f(w)$

De manera análoga podemos demostrar que cualquier función definida sobre $\mathbb{R}_+$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$ por lo que se tendría que $C^\infty(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+} = C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Ahora bien, los resultados anteriores se generalizan en la siguiente proposición:

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y no vacío. Si V es abierto en $U = |\mathcal{F}|$, entonces $\mathcal{F}|_V = C^\infty(V)$*

Demostración. Por el ejemplo 1.5 podemos identificar U con $|\mathcal{F}|$. Sea $f \in C^\infty(V)$ y $x \in V$. Por el corolario del capítulo de preliminares, existe un entorno $\mathcal{W} \subset V$ y una función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $g|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$. Por hipótesis tenemos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y como $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ podemos considerar $g|_U$. Llamemos a esta función $\overline{g}$, esto es, $\overline{g} = g|_U$. Naturalmente $\overline{g} \in C^\infty(U)$.

Ahora observemos lo siguiente:

$$\mathcal{W} \subset V \subset U \Longrightarrow \mathcal{W} \subset U$$

En consecuencia:

$$\overline{g}|_{\mathcal{W}} = (g|_U)|_{\mathcal{W}} = g|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$$

Luego, $f \in C^\infty(U)|_V$ por lo que $C^\infty(V) \subset C^\infty(U)|_V$ y como $C^\infty(U)|_V \subset C^\infty(V)$ se sigue que $C^\infty(U)|_V = C^\infty(V)$ ■

Observación 2.8. En el caso general cuando $\mathcal{F}$ es cualquier $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |\mathcal{F}|$ podemos asignar a cada $f \in \mathcal{F}$ su restricción a A obteniendo que $f|_A \in \mathcal{F}|_A$. En efecto, dado $a \in A$, existe $A \subset A$ (A como entorno de a) y existe $f \in \mathcal{F}$ ($\overline{f}$ sería la misma f) tal que $f|_A \equiv f|_A$. Luego $f \in \mathcal{F}|_A$.

De esta manera obtenemos el homomorfismo siguiente llamado *homomorfismo restricción*:

$$\begin{aligned} \rho_A : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}|_A \\ f &\longmapsto f|_A \end{aligned}$$

Proposición 2.3.2. *Supongamos que $i : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ es un isomorfismo de dos $\mathbb{R}$-álgebras geométricas, $A_2 \subset |\mathcal{F}_2|$ y $A_1 = |i|(A_2)$. Entonces la función*

$$\begin{aligned} \psi : &\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \\ f &\longmapsto f(|i||_{A_2}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo

Demostración. En primer lugar veamos que $\psi(f) \in \mathcal{F}_2|_{A_2}$, esto es, veamos que dado $a \in A_2$, existe un entorno de a, digamos $U_a \subset A_2$ y existe $\overline{f} \in \mathcal{F}_2$ tal que $f(|i||_{A_2})|_{U_a} \equiv \overline{f}|_{U_a}$.

Sabemos que si $f \in \mathcal{F}_1|_{A_1}$, entonces de acuerdo a la definición 1.3.1 para cada $a_1 \in A_1$, existe un entorno de a_1, digamos $U_{a_1} \subset A_1$ y existe $\overline{f}_a \in \mathcal{F}_1$ tal que $f|_{U_{a_1}} \equiv \overline{f}_a|_{U_{a_1}}$...[1]

Como $a \in A_2$, entonces $|i|(a) = \widehat{a} \in A_1$ y si $f \in \mathcal{F}_1|_{A_1}$ entonces [1] se cumple en particular para $\widehat{a} \in A_1$. Luego debe existir $U_{\widehat{a}} \subset A_1$ y $\overline{f}_{\widehat{a}} \in \mathcal{F}_1$ tal que se cumple que $f|_{U_{\widehat{a}}} \equiv \overline{f}_{\widehat{a}}|_{U_{\widehat{a}}}$...[A]

Dado que $|i| : A_2 \subset |\mathcal{F}_2| \longrightarrow A_1 \subset |\mathcal{F}_1|$ es un homeomorfismo (ya que i es un isomorfismo), entonces en particular $|i|$ es contínua. Pero $U_{\widehat{a}} \subset A_1 \subset |\mathcal{F}_1|$ por lo que $|i|^{-1}(U_{\widehat{a}})$ es un abierto en $|\mathcal{F}_2|$. Luego al considerar $|i|^{-1}(U_{\widehat{a}}) \bigcap A_2$, obtenemos un abierto de A_2. Notemos que este abierto cumple lo siguiente:

- $|i|^{-1}(U_{\widehat{a}}) \bigcap A_2 \subset A_2$
- $a \in |i|^{-1}(U_{\widehat{a}}) \bigcap A_2$

Así un entorno para a es $U_a = |i|^{-1}(U_{\widehat{a}}) \bigcap A_2$. Ahora debemos encontrar $\overline{f} \in \mathcal{F}_2$ tal que $f(|i||_{A_2})|_{U_a} \equiv \overline{f}|_{U_a}$.

Como $i : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ es un isomorfismo, entonces podemos identificar cualquier $f \in \mathcal{F}_1$ con un elemento de $\mathcal{F}_2$. En particular $\overline{f}_{\widehat{a}} \in \mathcal{F}_1$ puede ser considerado como un elemento de $\mathcal{F}_2$. Por otra parte, al ser $|i|$ un homeomorfismo, entonces $a \in U_a$ puede ser llevado a $U_{\widehat{a}}$ mediante $|i|$. Así se tiene lo siguiente:

Tomemos como $\overline{f} \in \mathcal{F}_2$ a la función $\overline{f}_{\widehat{a}}$ (esto es debido a la identificación entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$). Sea t en U_a. Luego:

$$\begin{aligned} f(|i|(t)) &= \overline{f}_{\widehat{a}} \\ &= \overline{f}_{\widehat{a}}(|i||_{A_2})(t) \\ &= \overline{f}(|i||_{A_2})(t) \end{aligned}$$

En consecuencia, $f(|i||_{A_2})|_{U_a} \equiv \overline{f}|_{U_a}$ por lo que ψ está bien definida.

Por la forma en que está definida la función ψ tenemos que es un homomorfismo. Veamos ahora que es biyectivo.

a. *Inyectividad.* Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_1|_{A_1}$ con $f_1 \neq f_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} f_1 \neq f_2 &\Longrightarrow \exists a_1 \in A_1 \; / f_1(a_1) \neq f_2(a_1) \\ &\Longrightarrow \exists a_2 \in A_2 \; con \; |i|(a_2) = a_1 \; y \; f_1(|i|(a_2)) \neq f_2(|i|(a_2)) \\ &\Longrightarrow \psi(f_1) \neq \psi(f_2) \end{aligned}$$

b. *Sobreyectividad.* Dado $g \in \mathcal{F}_2|_{A_2}$, debemos hallar $f \in \mathcal{F}_1|_{A_1}$ tal que $\psi(f) = g$.

Como $g \in \mathcal{F}_2|_{A_2}$, entonces por definición, para cualquier $a \in A_2$, existe un entorno de este punto, $U_a \subset A_2$ y existe $\overline{g}$ en $\mathcal{F}_2$ tal que $g|_{U_a} \equiv \overline{g}|_{U_a}$

Dado que $|i|$ es un homeomorfismo, entonces para cualquier entorno de $\widehat{a} = |i|(a)$ en A_1, digamos U_{a_1} se tiene que $U_{a_1} \bigcap A_1$ es un abierto de A_1 con $U_{a_1} \bigcap A_1 \subset A_1$ y además $\widehat{a} \in U_{a_1} \bigcap A_1$. Llamemos $U = U_{a_1} \bigcap A_1$

Definamos $f : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f = g \circ |i|^{-1}$

Como i es un isomorfismo, cualquier $g \in \mathcal{F}_2$ puede ser visto como un elemento en $\mathcal{F}_1$. Consideremos entonces $\overline{f} = \overline{g}$. Así para $\widehat{a} \in A_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f(|i||_{A_2})(a) &= f(\widehat{a}) \\ &= (g \ \circ |i|^{-1})(\widehat{a}) \\ &= g(a) \\ &= (g|_{U_a})(a) \\ &= \overline{g}|_{U_a} \\ &= \overline{f}|_U \end{aligned}$$

Observemos que esta cadenas de igualdades prueba la sobreyectividad de ψ y además que la función f encontrada realmente está en $\mathcal{F}_1|_{A_1}$

Luego ψ es sobreyectiva y por tanto se tiene que ψ es un isomorfismo. ■

Particularicemos lo anterior considerando que $A = |\mathcal{F}|$. En este caso, tenemos que el homomorfismo restricción ρ estaría definido de $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}$. Asumamos que $\mathcal{F}$ es geométrica. Bajo estas condiciones, ρ sería inyectiva puesto que elementos diferentes de $\mathcal{F}$ son identificados con funciones diferente definidas sobre $|\mathcal{F}|$. Nuevamente la sobreyectividad no siempre se cumple como podemos apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10. Consideremos la subálgebra del ejemplo 1.7. Como $|\mathcal{F}| \approx \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}^n}$. Entonces $\mathcal{F}|_{\mathbb{R}^n}$ coincidiría con $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que cualquier función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en un entorno de algún punto $a \in \mathbb{R}^n$ coincide con la función $f\mu$ donde μ es una función diferenciable que se anula en fuera de la bola de radio 2 y centro a y es igual a 1 dentro de la bola concéntrica de radio 1 (recordar teorema 1.6.4) y por tanto $f\mu \in \mathcal{F}$. De aquí, $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|} \approx C^\infty(\mathbb{R}^n)$ no puede ser sobreyectiva pues en tal caso ρ sería un isomorfismo. Entonces pensar en una función en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sería equivalente en pensar en una función en $\mathcal{F}$. Pero si consideramos la función e^x ésta no puede ser pensada como una función en $\mathcal{F}$ puesto que ésta en valor absoluto no puede ser menor que un polinomio.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.3.2. Una $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F}$ geométrica es completa si el homomorfismo restricción:

$$\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}$$

es sobreyectivo. Es decir, si cualquier función localmente coincide con elementos de $\mathcal{F}$, entonces ésta es por si misma un elemento de $\mathcal{F}$

Ejemplo 2.11. Es claro que la $\mathbb{R}$- álgebra $C^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto es completa pues al considerar

$$\rho : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)|_{|C^\infty(U)|} = C^\infty(U)|_U = C^\infty(U)$$

se tiene que este es sobreyectivo. La $\mathbb{R}$- álgebra del ejemplo 2.10 no es completa.

§ 2.4. Álgebras cerradas.

Sabemos que si $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y además es completa entonces el homomorfismo resatricción

$$\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}$$

es un isomorfismo por lo que tenemos la siguiente identificación:

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}$$

Ahora bien, si lo anterior es cierto entonces tenemos que:

$$|\mathcal{F}| \cong |\mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}|$$

Ahora consideremos la siguiente situación: Sea $A \subset |\mathcal{F}|$. Entonces nos preguntamos lo siguiente: ¿Será posible establecer una identificación entre A y $|\mathcal{F}|_A|$?, es decir:

$$A \cong |\mathcal{F}|_A|$$

Proposición 2.4.1. *Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica y $A \subset |\mathcal{F}|$. Entonces la función:*

$$\mu : A \longrightarrow |\mathcal{F}|_A|$$
$$a \longmapsto \mu(a)$$

donde $\mu(a)(f) = f(a)$ con $f \in |\mathcal{F}|_A|$ es un homeomorfismo entre A y $\mu(A)$.

Demostración. Dado que todos los elementos de $\mathcal{F}$ pueden ser pensados como funciones definidas sobre el espacio dual $|\mathcal{F}|$ entonces los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones continuas ya que en $|\mathcal{F}|$ se introdujo una topología donde los abiertos son de la forma $f^{-1}(V)$ con $V \subset \mathbb{R}$ abierto y $f \in \mathcal{F}$. En consecuencia, $\mathcal{F}|_A$ es una subálgebra del álgebra de funciones contínuas sobre A y así por la proposición 1.1.3 se tiene que μ es continua.

Además μ es inyectiva. En efecto: sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$. Luego

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 &\implies \exists f_0 \in \mathcal{F}/a_1(f_0) \neq a_2(f_0) \\ &\implies \exists f_0 \in \mathcal{F}/f_0(a_1) \neq f_0(a_2) \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{F}$ es geométrica. Pero estas implicaciones son equivalentes a las siguientes

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 &\implies \exists f_0|_A \in \mathcal{F}|_A \ /f_0|_A(a_1) \neq f_0|_A(a_2) \\ &\implies \exists f_0|_A \in \mathcal{F}|_A \ /\mu(a_1)(f_0|_A) \neq \mu(a_2)(f_0|_A) \\ &\implies \mu(a_1) \neq \mu(a_2) \end{aligned}$$

lo cual prueba la inyectividad de μ.

Por la forma en que esta definida μ se tiene que es sobreyectiva.

Veamos que $\mu^{-1} : \mu(A) \longrightarrow A$ es continua. Para ello consideremos un abierto básico en A de la forma $A \cap f^{-1}(V)$ con $V \subset \mathbb{R}$ abierto y $f \in \mathcal{F}$. Este abierto es mapeado sobre el conjunto $\mu(A) \cap (f|_A)^{-1}(V)$ el cual sabemos que es un subconjunto abierto de $\mu(A)$. Por tanto μ^{-1} es contínua y en consecuencia un homeomorfismo entre A y $\mu(A)$. ■

Ahora bien, ¿bajo que condiciones $\mu : A \longrightarrow |\mathcal{F}|_A|$ es biyectiva?. Para dar respuesta es conveniente introducir nuestra última definición correspondiente a este capítulo.

Definición 2.4.1. Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica. Diremos que es cerrada con respecto a la composición diferenciable o C^∞- cerrada si para cualquier colección finita $f_1, f_2, ..., f_k \in \mathcal{F}$ y para cualquier función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ existe un elemento $f \in \mathcal{F}$ tal que:

$$f(a) = g(f_1(a), ..., f_k(a)), \quad \text{para cada } a \text{ en } |\mathcal{F}|$$

Esta función $f \in \mathcal{F}$ está únicamente determinada ya que $\mathcal{F}$ es geométrica.

Ejemplo 2.12. Apoyándonos en la definición anterior, probaremos que la función $\mu : A \longrightarrow |\mathcal{F}|_A|$ es sobreyectiva, y por tanto un homeomorfismo para álgebras que son C^∞- cerradas en el caso de cualquier conjunto básico A, donde:

$$A = \{a \in |\mathcal{F}| \ /\alpha < h(a) < \beta\} \ , \alpha, \beta \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{F}$$

En efecto, por el teorema 1.6.1 existe $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $g \equiv 0$ en $\mathbb{R} - (\alpha, \beta)$ y $g > 0$ en (α, β). Como $\mathcal{F}$ es C^∞- cerrada, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = g(h(a))$ para cada $a \in |\mathcal{F}|$. Entonces $f(a) > 0$ para cada $a \in A$ pues $f(a) = g(h(a))$ y como $\alpha < h(a) < \beta$ entonces por lo anterior se sigue que $g(h(a)) > 0$. Es decir, $f(a) > 0$, para cada $a \in A$.

Así que $f|_A$ es un elemento invertible del álgebra $\mathcal{F}|_A$. Más aún, supongamos que $b' \in |\mathcal{F}|$ es la imágen de algún punto $b \in |\mathcal{F}|_A|$ mediante la función

$$|\rho_A| : |\mathcal{F}|_A| \longrightarrow |\mathcal{F}|$$

Si $b' \notin A$ entonces $f(b') = g(h(b')) = 0$ implica $f(b') = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} 0 = f(b') &= f(|\rho|_A|(b)) \\ &= (|\rho_A|(b))(f) \\ &= b(\rho_A(f)) \\ &= b(f|_A) \\ &= (f|_A)(b) \end{aligned}$$

lo cual contradice la invertibilidad de $f|_A$. En consecuencia, $b' \in A$ y por tanto $(\mu \circ |\rho_A|)(b) = \mu(|\rho_A|(b)) = \mu(b \circ \rho_A)$.

Pero $b \circ \rho_A \in |\mathcal{F}|$. Consideremos $f \in \mathcal{F}$. Entonces:

$$\begin{aligned} (\mu \circ |\rho_A|)(b)(f) &= \mu(b \circ \rho_A)(f) \\ &= f(b \circ \rho_A) \\ &= b(\rho_A(f)) \\ &= b(f|_A) \\ &= b(f) \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos $|\rho_A| : |\mathcal{F}|_A| \longrightarrow A \subset |\mathcal{F}|$ y $\mu : A \longrightarrow |\mathcal{F}|_A|$. Sean $a \in A$ y $f \in |\mathcal{F}|_A|$. Entonces:

$$\begin{aligned}(|\rho_A| \circ \mu)(a)(f) &= |\rho_A|(\mu(a)(f)) \\ &= (\mu(a) \circ \rho_A)(f) \\ &= \mu(a)(f|_A) \\ &= (f|_A)(a) \\ &= f(a) \\ &= a(f)\end{aligned}$$

Luego μ tiene como inversa a $|\rho_A|$ por lo que μ es invertible y por tanto biyectiva. En consecuencia, $\mu(A) = |\mathcal{F}|_A|$ y así μ es sobreyectiva (y por tanto un homeomorfismo).

Teniendo en cuenta los resultados del ejemplo anterior, estamos interesados en la manera de como obtener una $\mathbb{R}$- álgebra C^∞- cerrada $\overline{\mathcal{F}}$ a partir de una $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F}$ dada. La forma más directa de hacerlo es la siguiente: en principio identificar $\mathcal{F}$ con su correspondiente álgebra de funciones definidas sobre $|\mathcal{F}|$ y considerar el conjunto $\overline{\mathcal{F}}$ de funciones definidas sobre $|\mathcal{F}|$ que pueden ser representadas como:

$$g(f_1, ..., f_l), \text{ con } l \in \mathbb{N}, f_1, ..., f_l \in \mathcal{F}, g \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$$

es decir:

$$\overline{\mathcal{F}} = \{f : |\mathcal{F}| :\longrightarrow \mathbb{R} f = g(f_1, ..., f_l),\ con\ l \in \mathbb{N}, f_1, ..., f_l \in \mathcal{F}, g \in C^\infty(\mathbb{R}^l)\}$$

El conjunto $\overline{\mathcal{F}}$ hereda estructura de $\mathbb{R}$- álgebra y $\mathcal{F}$ es una subálgebra de $\overline{\mathcal{F}}$. Sea $i_{\mathcal{F}}$ la inclusión natural $\mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$.

Afirmación $\overline{\mathcal{F}}$ es C^∞- cerrada. En efecto, sean $\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n \in \overline{\mathcal{F}}$ y $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideremos la función

$$h : |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $h(a) = g(\overline{f}_1(a), ..., \overline{f}_n(a))$. Veamos que $h \in \overline{\mathcal{F}}$. Como cada $\overline{f_i} \in \overline{\mathcal{F}}$ entonces cada una de éstas puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\overline{f_i} = g_i(f_{i1}, ..., f_{in})$$

con $i = 1, 2, ..., n$ y $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_{ij} \in \mathcal{F}$.

Consideremos $p : |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ y $q : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dadas respectivamente por:

$$p(a) = ((f_{11}(a), ..., f_{1n}(a)), ..., (f_{n1}(a), ..., f_{nn}(a))) \text{ y}$$

$$q((x_{11}, ..., x_{1n}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nn})) = (g_1(x_{11}(a), ..., x_{1n}(a)), ..., g_n(x_{n1}(a), ..., x_{nn}(a)))$$

Luego:

$$\begin{aligned}
(g \circ q)(p(a)) &= (g \circ q)((f_{11}(a), ..., f_{1n}(a)), ..., (f_{n1}(a), ..., f_{nn}(a))) \\
&= g(g_1(f_{11}(a), ..., f_{1n}(a)), ..., g_n(f_{n1}(a), ..., f_{nn}(a))) \\
&= g(\overline{f}_1(a), ..., \overline{f}_n(a)) \\
&= h(a)
\end{aligned}$$

Pero $g \circ q \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por lo que $h \in \overline{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ es C^∞- cerrada lo cual prueba la afirmación.

Observación 2.9. Temporalmente esta $\mathbb{R}$- álgebra $\overline{\mathcal{F}}$ será llamada C^∞- *clausura de* $\mathcal{F}$. Esta álgebra posee la siguiente propiedad:

Proposición 2.4.2. *Cualquier homomorfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ de una $\mathbb{R}$- álgebra geométrica $\mathcal{F}$ a una $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F}'$ que es C^∞- cerrada puede ser extendida de manera única a un homomorfismo $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}'$ de su C^∞- clausura $\overline{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Vamos a suponer en primer lugar que la extensión $\overline{\alpha}$ existe. Esto es, $\alpha = \overline{\alpha} \circ i_{\mathcal{F}}$, donde $i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$ es la inclusión natural. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{F}} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \mathcal{F}' \\
\mathcal{F} \arrow[u, "i_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Por propiedades de la función dual sabemos que $|\alpha| = |i_{\mathcal{F}}| \circ |\overline{\alpha}|$.

Afirmación Si $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}$- álgebras geométricas, entonces se cumple que $\alpha(f)(a) = f(|\alpha|(a))$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\alpha(f)(a) &= a(\alpha(f)) \\
&= (a \circ \alpha)(f) \\
&= f(a \circ \alpha) \\
&= f(|\alpha|(a))
\end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

Luego para cada $a \in |\mathcal{F}'|$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(f)(a) &= \overline{\alpha}(g(f_1, ..., f_l))(a) && (2.4)\\
&= g(f_1, ..., f_l)(|\overline{\alpha}|(a)) && (2.5)\\
&= g(i_{\mathcal{F}}(f_1), ..., i_{\mathcal{F}}(f_l))(|\overline{\alpha}|(a)) && (2.6)\\
&= g(i_{\mathcal{F}}(f_1)(|\overline{\alpha}|(a)), ..., i_{\mathcal{F}}(f_l)(|\overline{\alpha}|(a))) && (2.7)\\
&= g(f_1(|i_{\mathcal{F}}|(|\overline{\alpha}|(a)), ..., f_1(|i_{\mathcal{F}}|(|\overline{\alpha}|(a))) && (2.8)\\
&= g(f_1, ..., f_l)(|i_{\mathcal{F}}|(|\overline{\alpha}|(a))) && (2.9)\\
&= g(f_1, ..., f_l)(|\alpha|(a)) && (2.10)\\
&= g(f_1(|\alpha|(a)), ..., f_l(|\alpha|(a))) && (2.11)\\
&= g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l))(a) && (2.12)
\end{aligned}$$

donde (2.3), (2.6) y (2.10) se justifican por la afirmación anterior. Como $\mathcal{F}'$ es geométrica, se tiene que: $\overline{\alpha}(g(f_1, ..., g(f_l))) = g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l))$.
Ahora supongamos que existe $\widetilde{\alpha} : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}'$ tal que:

$$\widetilde{\alpha}(g(f_1, ..., f_l)) = g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l))$$

Como $\mathcal{F}'$ es C^∞- cerrada entonces por unicidad que implica la definición se sigue que:

$$\widetilde{\alpha}(g(f_1, ..., f_l)) = \overline{\alpha}(g(f_1, ..., f_l))$$

Probemos la existencia de la extensión $\overline{\alpha}$. Definamos

$$\overline{\alpha}(g(f_1, ..., g(f_l))) = g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l))$$

Veamos que está bien definida. En efecto:

$$g(f_1, ..., (f_l) = g'(f_1', ..., f_l') \Longrightarrow g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l)) = g(\alpha(f_1'), ..., \alpha(f_l'))$$

Como $\mathcal{F}'$ es geométrica, consideremos $a' \in \mathcal{F}'$. Así:

$$\begin{aligned}
g(\alpha(f_1), ..., \alpha(f_l)) &= g(\alpha(f_1'), ..., \alpha(f_l'))\\
&= g(f_1(|\alpha|(a')), ..., f_l(|\alpha|(a')))\\
&= g(f_1(a), ..., f_l(a)) \textit{ donde } a = |\alpha|(a')\\
&= g(f_1, ...f_l)(a)
\end{aligned}$$

Ánalogamente se tiene que

$$g(\alpha(f_1'), ..., \alpha(f_l')) = g'(f_1', ..., f_l')(a)$$

Comparando las dos fórmulas anteriores y recordando que estamos suponiendo que $g(f_1, ..., (f_l) = g'(f_1', ..., f_l')$ tenemos que $\overline{\alpha}$ está bien definida. ■

De todo lo anterior se desprende la siguiente definición

Definición 2.4.2. Supóngamos que $\overline{\mathcal{F}}$ es una $\mathbb{R}-$álgebra geométrica y C^{∞}- cerrada; consideremos $i : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$ un homomorfismo. Entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es llamada la envoltura diferenciable de la $\mathbb{R}$- álgebra $\overline{\mathcal{F}}$ si para cualquier homomorfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ donde $\mathcal{F}'$ es una $\mathbb{R}$-álgebra geométrica C^{∞}- cerrada, existe un único homomorfismo $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}'$ que extiende a α (esto es, $\alpha = \overline{\alpha} \circ i$). En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}' \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & \\
 & \overline{\mathcal{F}} \arrow[uu, "\overline{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que de la proposición anterior se sigue que la C^{∞}- clausura es una envoltura diferenciable de $\mathcal{F}$.

Terminamos este capítulo con la siguiente proposición

Proposición 2.4.3. *La envoltura diferenciable de cualquier $\mathbb{R}$- álgebra $\mathcal{F}$ es única, salvo isomorfismo. Específicamente, si los pares $(i_k, \overline{\mathcal{F}}_k)$ con $k = 1, 2$ son envolturas diferenciables de $\mathcal{F}$, existe un único isomorfismo $j : \overline{\mathcal{F}}_1 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_2$ tal que $i_2 = j \circ i_1$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathcal{F}}_2 \\
\overline{\mathcal{F}}_1 \arrow[ur, "j"] & \\
 & \overline{\mathcal{F}} \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uu, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. En principio notemos que para cualquier envoltura diferenciable $(i, \overline{\mathcal{F}})$ de $\mathcal{F}$ tenemos que cualquier homomorfismo $\alpha : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$ satisfaciendo $\alpha \circ i = i$

es el homomorfismo identidad, esto es, $\alpha = id_{\mathcal{F}}$. Efectivamnete, de acuerdo a la definición anterior,la "solución" de la "ecuación" $\alpha \circ i = i$ es única. Pero sabemos que esta ecuación tiene una solución inmediata, a saber, $id_{\overline{\mathcal{F}}}$. Entonces por la unicidad que implica la definición 1.4.2 se sigue lo afirmado...[1]

Por tanto, para $(i_1, \mathcal{F}_1)$ el homomorfismo $i_2 : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_2$ puede ser representado únicamente como $i_2 = j_1 \circ i_1$, donde $j_1 : \overline{\mathcal{F}}_1 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_2$ es un homomorfismo, es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{F}}_2 \\ \mathcal{F} \arrow[ur, "i_2"] \arrow[dr, "i_1"'] & \\ & \overline{\mathcal{F}}_1 \arrow[uu, "j_1"'] \end{tikzcd}$$

De manera análoga, $i_1 = j_2 \circ i_2$, donde $j_2 : \overline{\mathcal{F}}_2 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$ es un homomorfismo. Es decir:

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{F}}_1 \\ \mathcal{F} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \\ & \overline{\mathcal{F}}_2 \arrow[uu, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

Componiendo los dos diagramas anteriores resulta:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_1"] & \\ \overline{\mathcal{F}}_1 \arrow[r, "j_1"'] & \overline{\mathcal{F}}_2 \arrow[r, "j_2"'] & \overline{\mathcal{F}}_1 \end{tikzcd}$$

Esto es, $i_1 = j_2 \circ i_2 = j_2 \circ (j_1 \circ i_1) = (j_2 \circ j_1) \circ i_1$.

En consecuencia, $j_2 \circ j_1 = id_{\overline{\mathcal{F}}_1}$ (por [1]). Así que j_1 y j_2 son isomorfismos inversos uno del otro. Pongamos $j = j_1$ y así establecemos la proposición. La unicidad de j se sigue de la definición 1.4.2 ■

Capítulo 3

Variedades en sentido algebraico

En este capítulo comenzamos el estudio de las variedades diferenciables y de las funciones diferenciables en el sentido algebraico apoyándonos en los nuevos conceptos y resultados estudiados en el capítulo 2, los cuales servirán de base y fundamento para el desarrollo de la teoría.

§ 3.1. Las variedades en el sentido algebraico

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}-$álgebra geométrica y completa. Diremos que $\mathcal{F}$ es *diferenciable* si existe un cubrimiento finito o numerable $\{U_k\}$ de conjuntos abiertos del espacio dual $|\mathcal{F}|$ tales que las álgebras $\mathcal{F}\ |_{U_k}$ son isomorfas a la álgebra de funciones diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. El entero positivo fijo n se define como la *dimensión* de la álgebra. Considerando a $\mathcal{F}$ y $M = |\mathcal{F}|$ simultáneamente diremos que estamos en presencia de una variedad diferenciable y diremos que $\mathcal{F}$ es la álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad $M = |\mathcal{F}|$.

Observación 3.1. Una definición algo más general se corresponde a las algebras diferenciables con fronteras. En este caso para cada elemento del cubrimiento $\{U_k\}$ se requiere que el álgebra $\mathcal{F}\ |_{U_k}$ sea isomorfa a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o a $C^\infty(\mathbb{R}^n_H)$ donde

$$\mathbb{R}^n_H = \{(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n / r_1 \geq 0\}$$

y $C^\infty(\mathbb{R}^n_H)$ es el conjunto formado por todas las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ restrictas (en el sentido común) al conjunto $\mathbb{R}^n_H$. Los puntos del espacio dual $|\mathcal{F}|$ que corresponde a la frontera del semiespacio $\mathbb{R}^n_H$ en la identificación $U_k = \mathbb{R}^n_H$ son llamados puntos fronteras. En este trabajo las álgebras con fronteras no serán objeto de estudio por no estar dentro de los objetivos y alcances del mismo.

Ahora presentamos los siguientes resultados:

Lema 3.1.1. *Si una $\mathbb{R}-$álgebra geométrica $\mathcal{F}$ es isomorfa a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}$ es $C^\infty-$cerrada.*

Demostración. Afirmación 1 Sea $i : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ un isomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras geométricas. Supongamos que $\mathcal{F}_2$ es $C^\infty-$cerrada. Entonces también lo es $\mathcal{F}_1$. En efecto, sean $\widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_k$ en $\mathcal{F}_2$. Como i es un isomorfismo, entonces para cada una de las $\widetilde{f}_j \in \mathcal{F}_2$ existe $f_1, ..., f_k$ en $\mathcal{F}_1$ tales que $i(f_1) = \widetilde{f}_1, ..., i(f_k) = \widetilde{f}_k$; sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Como $\mathcal{F}_2$ es $C^\infty-$cerrada entonces por definición 2.4.1 existe $\overline{f} \in \mathcal{F}_2$ tal que

$$\overline{f}(\widehat{a}) = g(i(f_1)(\widehat{a}), ..., i(f_1)(\widehat{a})), \qquad \text{para todo } \ \widehat{a} \text{ en } |\mathcal{F}_2| \cong |\mathcal{F}_1|$$

Luego por demostración de la proposición 2.4.2 se tiene que

$$i(f)(\widehat{a}) = \overline{i}(g(f_1, ..., f_k))(\widehat{a})$$

donde $i(f) = \overline{f}$ para algún $f \in \mathcal{F}_1$. Como $\widehat{a} \in |\mathcal{F}_2| \cong |\mathcal{F}_1|$ es arbitrario se concluye que

$$i(f) \;\; = \;\; \overline{i}(g(f_1, ..., f_k)) \tag{3.1}$$

Ahora bien, si $\overline{i}$ fuera inyectiva, en particular lo sería $\overline{i}\mid_{\mathcal{F}_1}$ con $\overline{i}\mid_{\mathcal{F}_1} \equiv i$ y por tanto en (3.1) se tendría que

$$\overline{i}\mid_{\mathcal{F}_1}(f) = i(f) = \overline{i}(g(f_1, ..., f_k))$$

implicando que $f = g(f_1, ..., f_k)$ y por tanto $\mathcal{F}_1$ sería $C^\infty-$cerrada.

Veamos que en efecto $\overline{i}$ es inyectiva. Para ello consideremos $g(f_1, ..., f_k), h(\overline{f_1}, ..., \overline{f_1})$ en $\mathcal{F}_1$. Supongamos que $\overline{i}(g(f_1, ..., f_k)) = \overline{i}(h(\overline{f_1}, ..., \overline{f_1}))$. Luego para cualquier $\widehat{a}$ en $|\mathcal{F}_2|$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{i}(g(f_1, ..., f_k))(\widehat{a}) =& \overline{i}(h(\overline{f_1}, ..., \overline{f_1}))(\widehat{a}) \\
&\Longrightarrow g(i(f_1, ..., f_k))(\widehat{a}) = h(i(\overline{f_1}), ..., i(\overline{f_k}))(\widehat{a}) \\
&\Longrightarrow g(i(f_1)(\widehat{a}), ..., i(f_k)(\widehat{a})) = h(i(\overline{f_1})(\widehat{a}), ..., i(\overline{f_k})(\widehat{a})) \\
&\Longrightarrow g(f_1(|i|(\widehat{a})), ..., f_k(|i|(\widehat{a}))) = h(\overline{f_1}(|i|(\widehat{a})), ..., \overline{f_k}(|i|(\widehat{a})))
\end{aligned}$$

Afirmación 2 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es $C^{\infty}-$ cerrada. En efecto, sean $f_1, ..., f_l$ en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^l)$. Definamos la aplicación f como

$$f(a) = g(f_1(a), ..., f_l(a))$$

Claramente se tiene que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ya que es la composición de las siguientes funciones diferenciables $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ dada por $\varphi(a) = (f_1(a), ..., f_l(a))$ y $g : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(\varphi(a)) = g(f_1(a), ..., f_l(a))$. Esto prueba la afirmación 2.

Ahora probemos el lema en cuestión: sabemos por la afirmación 2 que $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es $C^{\infty}-$ cerrada. Como $\mathcal{F}$ es isomorfa a $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces por la afirmación 1 obtenemos que $\mathcal{F}$ es $C^{\infty}-$ cerrada lo cual prueba el lema. ■

Proposición 3.1.1. *Las álgebras diferenciables son $C^{\infty}-$cerradas.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}-$algebra diferenciable. Consideremos $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^l)$ y $f_1, ..., f_l$ en $\mathcal{F}$ con $l \in \mathbb{N}$. Consideremos el cubrimiento abierto $\{U_k\}$ que se tiene del hecho de que $\mathcal{F}$ es una álgebra diferenciable. Consideremos la función

$$\begin{aligned} h : |\mathcal{F}| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto h(a) \end{aligned}$$

donde: $h(a) = g(f_1(a), ..., f_l(a))$. Afirmamos que $h \in \mathcal{F}$. En efecto, por ser $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}-$algebra diferenciable se tiene por la definición 3.1.1 que $\mathcal{F} |_{U_k} \cong C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Luego por el lema 3.1.1, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $h_k \in \mathcal{F} |_{U_k}$ tal que

$$h_k = g(f_1(a), ..., f_l(a)), \quad \text{para cada } a \text{ en } U_k$$

Así en un entorno de cada punto de $|\mathcal{F}|$ se tiene que la función h coincide con una función de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es completa se sigue que $h \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es $C^{\infty}-$cerrada. ■

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la álgebra de funciones periódicas diferenciables sobre $\mathbb{R}$ de período 1:

$$\mathcal{F} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)/ \ f(r+1) = f(r), \quad \text{para cada } r \text{ en } \mathbb{R}\}$$

Por la forma que presenta $\mathcal{F}$ se tiene que ésta es completa (esto lo garantiza el hecho de que los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones 1-periódicas). Ahora bién, por la observación 2.5 sabemos que $|\mathcal{F}|$ es homeomorfo a S^1, esto es, $|\mathcal{F}| \approx S^1$. Ahora consideremos en $\mathcal{F}$ las siguientes funciones:

$$g_1(r) = \operatorname{sen}^2 \pi r,\ \ g_2(r) = \cos^2 \pi r$$

Consideremos

$$U_i = \{r \in |\mathcal{F}| / g_i \neq 0\}, i = 1, 2$$

Nótese que $\{U_i\}_{i=1}^2$ forman un cubrimiento abierto para S^1. Observemos que entre U_i y el intervalo $(0,1)$ podemos establecer biyecciones. Sea $\psi : (0,1) \longrightarrow U_i$ una de esas biyecciones. Definamos la función $\varphi : \mathcal{F}\mid_{U_i} \longrightarrow C^\infty((0,1))$ con $\varphi(f)(x) = f(\psi(x))$. Consideremos

$$\begin{aligned} \beta : C^\infty((0,1)) &\longrightarrow \mathcal{F}\mid_{U_i} \\ f &\longmapsto \beta(f) \end{aligned}$$

con $\beta(f)(a) = f(\psi^{-1}(a))$. Veamos que efectivamente β está bien definida. Afirmamos que dado cualquier $a \in U_i$ existe $V_i \subset M$ y $\widetilde{f} \in \mathcal{F} \approx \widetilde{\mathcal{F}}$ tal que

$$\widetilde{f}\mid_{V_i}(t) = \beta(f)\mid_{V_i}(t) = f(\psi^{-1}(t)) \text{ para todo } t \text{ en } V_i$$

En efecto, dado cualquier elemento $f \in C^\infty((0,1))$, sabemos que es posible extenderla diferenciablemente a una función $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$. Tomemos como V_i a los abiertos U_i que se tienen inicialmente. Como $\mathcal{F}$ es una subálgebra de $C^\infty(\mathbb{R})$ entonces los únicos homomorfismos $x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ están determinados por elementos $t \in \mathbb{R}$, es decir, $t : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $t(f) = f(t)$. Luego

$$\widetilde{f}\mid_{V_i}(t) = \tau(\widetilde{f})\mid_{V_i}(t) = t(\tau(\widetilde{f})) = t(\widetilde{f}) = \widetilde{f}(t)$$

En particular para $\psi^{-1}(t) \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\psi^{-1}(t)(\widetilde{f}) = \widetilde{f}(\psi^{-1}(t))$. Ahora bién, para $t \in V_i$ y usando el hecho de que $\widetilde{f}$ es una extensión de f tenemos

$$\widetilde{f}(\psi^{-1}(t)) = f(\psi^{-1}(t)) = \beta(f)\mid_{V_i}(t)$$

lo que prueba que β está bien definida. Ahora consideremos la siguiente compuesta:

$$\beta \ \circ\ \varphi : \mathcal{F}\mid_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}\mid_{U_i}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
[(\beta \circ \varphi)(f)](a) &= [\beta(\varphi(f))](a) \\
&= \varphi(f)(\psi^{-1}(a)) \\
&= f(\psi(\psi^{-1}(a))) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la siguiente compuesta

$$\varphi \circ \beta : C^{\infty}((0,1)) \longrightarrow C^{\infty}((0,1))$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
[(\varphi \circ \beta)(f)](a) &= [\varphi(\beta(f))](a) \\
&= \beta(f)(\psi(a)) \\
&= f(\psi^{-1}(\psi(a))) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

En consecuencia, φ es invertible lo cual implica que es biyectiva y como φ es un homomorfismo se sigue que φ es un isomorfismo. Por tanto,

$$\mathcal{F} \mid_{U_i} \cong C^{\infty}((0,1)) \cong C^{\infty}(\mathbb{R})$$

Así, $\mathcal{F}$ es un álgebra diferenciable de dimensión 1 y la variedad está determinada por $|\mathcal{F}| \approx S^1$.

Ejemplo 3.2. Consideremos la siguiente álgebra

$$\mathcal{F} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)/\ f(r_1, r_2) = f(r_1 + 1, -r_2), \quad \text{para cada } (r_1, r_2) \text{ en } \mathbb{R}^2\}$$

Veamos el siguiente análisis:

Consideremos $U = (-\epsilon, 1-\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f_c \in C^{\infty}(U)$ una función cuyas curvas de nivel sean compactas (la existencia de esta función esta garantizada por el teorema 1.6.6 del capítulo 1). Definamos una función $\overline{f_c} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\overline{f_c}(x,y) = f_c(x,y)$ si $(x,y) \in U$ y $\overline{f_c}(x,y) = f_c(x+n, -y)$ si $(x,y) \notin U$ donde $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $(x+n, -y) \in U$. Notemos que si $(x,y) \in U$ entonces $(x+1, -y) \notin U$. Luego

$$\overline{f_c}(x+1, -y) = f_c(x+1+n, -(-y)) = f_c(x+1+n, y)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $-\epsilon < x + 1 + n < 1 - \epsilon$. Como $(x, y) \in U$ se tiene que $-\epsilon < x < 1 - \epsilon$. Por tanto $n = -1$ y así

$$\overline{f_c}(x + 1, -y) = f_c(x, y) = \overline{f_c}(x, y)$$

Supongamos ahora que $(x, y) \notin U$. Entonces puede ocurrir que $(x + 1, -y) \in U$ o $(x + 1, -y) \notin U$. Consideremos que $(x + 1, -y) \in U$. Sabemos que $\overline{f_c}(x, y) = f_c(x + n, -y)$ donde $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $(x + n, -y) \in U$; luego tiene que ser $n = 1$ ya que $(x + 1, -y) \in U$. Así tenemos

$$\overline{f_c}(x, y) = f_c(x + n, -y) = f_c(x + 1, -y) = \overline{f_c}(x + 1, -y)$$

El caso en que $(x + 1, -y) \notin U$ ya fue probado. Por tanto, $\overline{f_c} \ : \ \mathbb{R}^2 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ pues verifica las condiciones de dicha álgebra.

Ahora bién, cada punto $p = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ determina un homomorfismo

$$p \ : \ \mathcal{F} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

dado por $p(f) = f(a_1, a_2)$. Sea en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia: para $p = (a_1, a_2)$ y $q = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ se tiene que $p \sim q \Longleftrightarrow b_1 - a_1 = k \in \mathbb{Z}$ y $b_2 = -a_2$. Si $p \sim q$ entonces $p(f) = q(f)$ para cada $f \in \mathcal{F}$. En efecto, usando la relación de equivalencia y el hecho de que $f \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$q(f) = f(b_1, b_2) = f(a_1 + k, -a_2) = f(a_1, a_2) = p(f)$$

Ahora veamos que estos homomorfismos son únicos; para ello, supongamos que $p \ : \ \mathcal{F} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ es tal que no está determinado por ningún $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Esto implica que para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ existe $f_{(a_1,a_2)} \in \mathcal{F}$ tal que

$$p(f_{(a_1,a_2)}) \neq f_{(a_1,a_2)}(a_1, a_2)$$

Consideremos un cubrimiento abierto del compacto $L = \overline{f_c}^{-1}(\lambda)$ con $\lambda = p(f_c)$ de la forma

$$U_{(a_1,a_2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / p(f_{(a_1,a_2)}) \neq f_{(a_1,a_2)}(x, y)\}$$

con $(a_1, a_2) \in L$. Nótese que $U_{(a_1,a_2)} = [f^{-1}_{(a_1,a_2)}(p(f_{(a_1,a_2)}))]^c$, esto es, $U_{(a_1,a_2)}$ es el complemento del cerrado $f^{-1}_{(a_1,a_2)}(p(f_{(a_1,a_2)}))$; así $U_{(a_1,a_2)}$ es abierto. Siguiendo un esquema similar como en el ejemplo 2.6 se obtiene una contradicción. Luego se sigue que $|\mathcal{F}| \approx \mathbb{R}^2/\sim$. El espacio dual de $\mathcal{F}$ es llamada *la Banda de Moebius Abierta.* Usando funciones similares y los cubrimientos anteriores a las del ejemplo 3.1 se puede probar que $\mathcal{F}$ es una álgebra diferenciable de dimensión 2.

§ 3.2. Subvariedades diferenciables

Definición 3.2.1. Supongamos que $\mathcal{F}$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M y $N \subset M = |\mathcal{F}|$ un subconjunto cualquiera. Si el álgebra $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}\mid_N$ es una $\mathbb{R}-$álgebra diferenciable, entonces N se denomina subvariedad diferenciable de la variedad diferenciable M y $\mathcal{F}_N$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre la subvariedad N. Por otra parte, si al considerar el homomorfismo $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_N$ llamado homomorfismo restricción, se tiene que éste es sobreyectivo, entonces la subvariedad diferenciable N se dice que es cerrada.

Proposición 3.2.1. *Supóngase que $\mathcal{F}$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M y que $N \subset M = |\mathcal{F}|$ es una subvariedad diferenciable cerrada. Entonces:*

i) N (como un subconjunto) es cerrado en el espacio topológico M

ii) $N \approx |\mathcal{F}_N|$

Demostración. i) Sea $a \in M - N$ un punto límite de N y $U \subset M$ un entorno de a tal que $\mathcal{F}\mid_U$ sea isomorfo a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Este isomorfismo puede ser escogido tal que los elementos de $\mathcal{F}\mid_U$ correspondiente a las funciones coordenadas $r_1, ..., r_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se anulen en el punto a. En efecto, consideremos φ el isomorfismo que se tiene del hecho de que $\mathcal{F}\mid_U \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definamos $\widetilde{\varphi} = \varphi - \psi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}\mid_U$ donde $\psi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}\mid_U$ es tal que $\psi(f) = \widetilde{h}$, donde $\widetilde{h} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\widetilde{h}(q) = h$, para cada q en U. Luego $\widetilde{\varphi}(r_i) = \varphi(r_i) - \psi(r_i)$. Así:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(r_i)(a) = \varphi(r_i)(a) - \psi(r_i)(a) &\implies \widetilde{\varphi}(r_i)(a) = h - \widetilde{h}(a) \\ &\implies \widetilde{\varphi}(r_i)(a) = h - h = 0 \end{aligned}$$

donde $a \in U$.

Consideremos la función definida sobre $\mathcal{F}\mid_{U\setminus\{a\}}$ correspondiente a $\frac{1}{\sum_{i=1}^n r_i^2}$. Esta función puede ser extendida de $U \setminus \{a\}$ a una función diferenciable g sobre la subvariedad $M\setminus\{a\}$. Observemos que $g|_N$ pertenece a la álgebra $\mathcal{F}_N$ pero no pertenece a la imágen del homomorfismo restricción $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_N$ lo cual es una contradicción. Así tenemos que $a \in N$ y por tanto N es cerrado en M.

ii) Consideremos el $\mathbb{R}-$punto $b : \mathcal{F}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos la compuesta dada por $c = b \circ i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$. Asumamos que $c \notin N$. Entonces, del teorema 1.6.4, existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f|_N \equiv 0$ y $f(c) \neq 0$. Así $i(f) = 0$ y por tanto $f(c) = 0$ lo cual es una contradicción. En consecuencia, si consideramos la función $\Psi : |\mathcal{F}_N| \longrightarrow N \subset M$ definida como $\Psi(b) = b \circ i = c$, se tiene que ésta es una sobreyección. Luego por la proposición 2.4.1 se sigue que $N \approx |\mathcal{F}_N|$. ∎

Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3. En $\mathbb{R}^2$ consideremos el conjunto de puntos verificando la ecuación $r_1^2 + r_2^2 - 1 = 0$, esto es, puntos de S^1. Sea $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}^2)$; veamos que la $\mathbb{R}-$álgebra $\mathcal{F}_{S^1} = C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{S^1}$ es isomorfa a la álgebra de funciones periódicas de período 1 sobre $\mathbb{R}$ (ver ejemplo 2.6). En efecto, observemos que $\mathcal{F}_{S^1} = C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{S^1} = C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})|_{S^1}$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ r &\longmapsto (\cos 2\pi r, \operatorname{sen} 2\pi r) \end{aligned}$$

Consideremos también la función

$$\begin{aligned} |w| : \mathcal{F}|_{S^1} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto |w|(f) \end{aligned}$$

donde $|w|(f)(r) = f(w(r)) = f(\cos 2\pi r, \operatorname{sen} 2\pi r)$ con $r \in \mathbb{R}$. Es claro que $|w|$ es un homomorfismo. Además $|w|$ es inyectiva, pues:

$$\begin{aligned} |w|(f_1) = |w|(f_2) &\implies \forall r \in \mathbb{R},\ |w|(f_1)(r) = |w|(f_2)(r) \\ &\implies \forall r \in \mathbb{R},\ f_1(w(r)) = f_2(w(r)) \\ &\implies \forall r \in \mathbb{R},\ f_1(\cos 2\pi r, \operatorname{sen} 2\pi r) = f_2(\cos 2\pi r, \operatorname{sen} 2\pi r);\ \forall r \in \mathbb{R} \\ &\implies f_1 = f_2 \end{aligned}$$

y notemos que $|w|(\mathcal{F}|_{S^1})$ es un subconjunto de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ donde $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ es la subálgebra de funciones 1-periódicas sobre $\mathbb{R}$. Probemos que $|w|$ es sobreyectiva. Consideremos el homomorfismo $i : C^\infty_{per}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ dado por $i(f)(r_1, r_2) = f(\frac{\arg z}{2\pi})$ con

$z = r_1 + ir_2$. Luego:

$$\begin{aligned} |w|(i(f)|_{S^1})(r) &= i(f)(w(r)) \\ &= i(f)(\cos 2\pi r, \operatorname{sen} 2\pi r) \\ &= f(\frac{2\pi r}{2\pi}) \\ &= f(r) \end{aligned}$$

De aqui, $|w|$ es un isomorfismo, es decir, se tiene que $\mathcal{F}|_{S^1} \cong C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$. De este ejemplo se desprende lo siguiente: Observemos que $S^1 \subset |C^{\infty}(\mathbb{R}^2)| \approx \mathbb{R}^2$. Sabemos que $\mathcal{F}|_{S^1} \cong C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ lo cual implica que $|\mathcal{F}|_{S^1}| \approx |C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})|$ y como $|C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})| \approx S^1$, entonces $|\mathcal{F}|_{S^1}| \approx S^1$ ilustrándose así la proposición 3.2.1.

Sea $\mathcal{F}$ una $\mathbb{R}-$álgebra y $N \subset |\mathcal{F}|$ una subvariedad diferenciable cerrada; entonces existe un hecho netamente algebraico para determinar el álgebra $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}|_N$. Veamos: supongamos que $A_N \subset \mathcal{F}$ es el conjunto de elementos de $\mathcal{F}$ que se anulan sobre N, donde

$$A_N = \{f \in \mathcal{F} / \text{ para cada } a \text{ en } N, f(a) = 0\}$$

Obviamente A_N es un ideal de $\mathcal{F}$ por lo que tiene sentido considerar el álgebra cociente $\mathcal{F}/A_N$. Consideremos ahora la siguiente sucesión de módulos:

$$O \longrightarrow A_N \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}|_N \longrightarrow O$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\rho \circ i)(f)(a) &= \rho(i(f))(a) \\ &= \rho(f)(a) \\ &= (f|_N)(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, de acuerdo a la definición se tiene que Im $\rho \subset \ker i$. Por otra parte, consideremos $f \in \ker i$. Entonces, $\mathbf{O} = i(f) \in \mathcal{F}$, donde $\mathbf{O}$ es la función nula. Así, para cualquier $a \in |\mathcal{F}|$ tenemos

$$o = \mathbf{O}(a) = i(f)(a) = f(a)$$

En particular para $a \in N$ se tiene que $f(a) = 0$. Así $f \in \mathcal{F}|_N$ por lo que se verifica que $\ker i \subset$ Im ρ y por lo tanto se tiene que Im ρ=$\ker i$. En consecuencia la sucesión

$$O \longrightarrow A_N \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}|_N \longrightarrow O$$

es exacta. De aquí, por propiedades de las sucesiones exactas se deduce que i es un monomorfismo y ρ es un epimorfismo. Como la sucesión anterior es exacta entonces por proposición se cumple

$$\mathcal{F}/i(A_N) = A_N \cong \mathcal{F}|_N$$

es decir, $\mathcal{F}/A_N \cong \mathcal{F}|_N$. Es decir, existe una identificación entre $\mathcal{F}|_N$ y $\mathcal{F}/A_N$. Esto trae como consecuencia que la función cociente $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/A_N$ se transforme en el homomorfismo restricción $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_N$. Esto puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}|_N \arrow[dd, equal] \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & \mathcal{F}/A_N
\end{tikzcd}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4. Si S^1 es el círculo del ejemplo del 3.3 entonces A_{S^1} es el ideal principal en $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ generado por la función $r_1^2 + r_2^2 - 1$, esto es, $A_{S^1} = \langle r_1^2 + r_2^2 - 1 \rangle$. En efecto, sea $f \in A_{S^1}$ donde

$$A_{S^1} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) / \text{ para cada } a \text{ en } S^1, f(a) = 0\}$$

con $S^1 \subset |C^\infty(\mathbb{R}^2)| \approx \mathbb{R}^2$. Debemos ver que: $f(r_1, r_2) = g(r_1, r_2)(r_1^2 + r_2^2 - 1)$ para alguna $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como la álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es completa, es suficiente construir g en un entorno de S^1, digamos $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para ello introduzcamos las siguientes funciones auxiliares:

$$u(t, r_1, r_2) = t + \frac{1-t}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

$$h(t, r_1, r_2) = f(r_1.u(t, r_1, r_2), r_2.u(t, r_1, r_2))$$

Luego:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 1}{r_1^2 + r_2^2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

Además se tiene que $h(0, r_1, r_2) = 0$. En efecto, notemos que $r_1.u(0, r_1, r_2) = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ y $r_2.u(0, r_1, r_2) = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ por lo que $(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}})^2 + (\frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}})^2 = 1$. Esto implica que $(r_1.u(0, r_1, r_2), r_2.u(0, r_1, r_2)) \in S^1$ y como $f \in A_{S^1}$ entonces

$$f(r_1.u(0, r_1, r_2), r_2.u(0, r_1, r_2)) = 0$$

Por lo tanto: $h(0,r_1,r_2)=0$. Por otra parte tenemos que $h(1,r_1,r_2)=f(r_1,r_2)$. De aquí:

$$\begin{aligned} f(r_1,r_2) &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t,r_1,r_2)dt \\ &= \left(\frac{\int_0^1 r_1.\frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1u,r_2u)+r_2.\frac{\partial f}{\partial r_2}(r_1u,r_2u)dt}{r_1^2+r_2^2+\sqrt{r_1^2+r_2^2}}\right)(r_1^2+r_2^2-1) \end{aligned}$$

Definamos a la función g como:

$$g(r_1,r_2)=\frac{\int_0^1 r_1.\frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1u,r_2u)+r_2.\frac{\partial f}{\partial r_2}(r_1u,r_2u)dt}{r_1^2+r_2^2+\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$$

Por construcción se tiene que $g\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En consecuencia, $A_{S^1}=\langle r_1^2+r_2^2-1\rangle$. Por tanto se puede concluir de acuerdo a la discusión hecha antes del presente ejemplo que

$$C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{S^1}\cong C^\infty(\mathbb{R}^2)/\langle r_1^2+r_2^2-1\rangle$$

§ 3.3. Órbitas y Variedad cociente

Definición 3.3.1. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M. Consideremos la acción de un grupo sobre esta variedad diferenciable, es decir, una familia Γ de automorfismos $\gamma:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ tales que:

- $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma\Longrightarrow\gamma_1\circ\gamma_2\in\Gamma$
- $\gamma\in\Gamma\Longrightarrow\gamma^{-1}\in\Gamma$

Se define la subálgebra de funciones invariantes por esta acción al siguiente conjunto:

$$\mathcal{F}^\Gamma=\{f\in\mathcal{F}/\ \gamma(f)=f,\ \text{para cada } \gamma \text{ en } \Gamma\}$$

Proposición 3.3.1. *Suponga que $\mathcal{F}^\Gamma$ es la subálgebra de funciones invariantes por una acción Γ sobre $M=|\mathcal{F}|$. Si $\mathcal{F}^\Gamma$ contiene una función cuyas superficies de nivel sean compactas entonces la álgebra $\mathcal{F}^\Gamma$ es geométrica. En particular, si el conjunto $|\mathcal{F}^\Gamma|$ es compacto, entonces $\mathcal{F}^\Gamma$ es geométrica.*

A manera de visualizar el álgebra $\mathcal{F}^\Gamma$ de las funciones $\Gamma-$invariantes sobre una variedad $M = |\mathcal{F}|$, consideremos la órbita $\mathcal{O}_a = \{|\gamma|(a)/\ \gamma \in \Gamma\}$ para cada $a \in M$. Sea N el conjunto de todas las órbitas. Observemos que los elementos de $\mathcal{F}^\Gamma$ pueden ser considerados como funciones definidas sobre N. Para ello, mostremos que si $b = |\gamma|(a) \in \mathcal{O}_a$ y $f \in \mathcal{F}$ es una función $\Gamma-$invariante entonces $f(b) = f(a)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
b = |\gamma|(a) \quad &\Longrightarrow \quad f(b) = f(|\gamma|(a)) && (3.2)\\
&\Longrightarrow \quad f(b) = f(a \ \circ \ \gamma) && (3.3)\\
&\Longrightarrow \quad f(b) = (a \ \circ \ \gamma)(f) && (3.4)\\
&\Longrightarrow \quad f(b) = a(\gamma(f)) && (3.5)\\
&\Longrightarrow \quad f(b) = a(f) && (3.6)\\
&\Longrightarrow \quad f(b) = f(a) && (3.7)
\end{aligned}$$

donde (3.4) y (3.7) son justificadas usando el hecho de que $\mathcal{F}$ es geométrica mientras que (3.6) se debe a que f es $\Gamma-$invariante. En otras palabras, cada elemento de N determina un $\mathbb{R}-$punto del álgebra $\mathcal{F}^\Gamma$. Así que se puede considerar la función

$$\begin{aligned}
\varphi : N &\longrightarrow |\mathcal{F}^\Gamma|\\
\mathcal{O}_a &\longmapsto \varphi(\mathcal{O}_a)
\end{aligned}$$

donde $\varphi(\mathcal{O}_a)(f) = f(a)$. Esta función φ será biyectiva si las siguientes condiciones son válidas:

(i) Cualquier homomorfismo $a : \mathcal{F}^\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ es extendible a otro homomorfismo $\overline{a} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$

(ii) Si $b \notin \mathcal{O}_a$ entonces existe una función $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ tal que $f(b) \neq f(a)$

En efecto:

Dado $a \in |\mathcal{F}^\Gamma|$, debemos ver que existe $\mathcal{O}_b \in N$ tal que $\varphi(\mathcal{O}_b) = a$. Como $a \in |\mathcal{F}^\Gamma|$ entonces por la condición (i) existe $\overline{a} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{a}|_{\mathcal{F}^\Gamma} = a$. Consideremos entonces $\mathcal{O}_{\overline{a}} \in N$ y $f \in \mathcal{F}^\Gamma$. Luego:

$$\varphi(\mathcal{O}_{\overline{a}})(f) = f(\overline{a}) = \overline{a}(f) = a(f)$$

En consecuencia, φ es sobreyectiva.

Ahora tomemos $\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in N$ con $\mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_b$. Entonces si $\mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_b$ tenemos por la condición (ii) que $b \notin \mathcal{O}_a$ y además existe $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ tal que $f(b) \neq f(a)$ o equivalentemente, $\varphi(\mathcal{O}_a) \neq \varphi(\mathcal{O}_b)$ lo cual muestra que φ es inyectiva y por tanto se tiene que φ es una biyección.

Proposición 3.3.2. *El álgebra $\mathcal{F}^\Gamma$ de funciones $\Gamma-$invariantes sobre una variedad diferenciable $M = |\mathcal{F}|$ es completa si las condiciones (i) y (ii) anteriores y las hipótesis de la proposición 3.3.1 son ciertas.*

Demostración. Como las condiciones (i) y (ii) anteriores se cumplen entonces podemos establecer una identificación entre N y $|\mathcal{F}^\Gamma|$. Ahora bién, cada función $f : |\mathcal{F}^\Gamma| \longrightarrow \mathbb{R}$ determina a través de la proyección $M \longrightarrow N$ la cual asigna a cada $a \in M$ su órbita $\mathcal{O}_a \in N$ una función $\widetilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f} = f \circ Pr$ donde Pr es la proyección. Ahora supongamos que f coincide en un entorno de $b \in \mathcal{O}_a$ con alguna función $\overline{f} \in \mathcal{F}^\Gamma$, esto es, existe un entorno $U_{\mathcal{O}_a}$ de b tal que

$$f|_{U_{\mathcal{O}_a}} \equiv \overline{f}|_{U_{\mathcal{O}_a}}$$

Entonces $\widetilde{f}$ coincide con alguna función diferenciable (de $\mathcal{F}$) en un entorno U_a de a en $|\mathcal{F}|$. Para esto definamos $\widehat{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\widehat{f} = \overline{f} \circ Pr$. Por construcción tenemos que $\widehat{f} \in \mathcal{F}$. Definamos $U_a = Pr^{-1}(U_{\mathcal{O}_a})$. Es claro que U_a es abierto pues es la imagen inversa de un abierto mediante una función contínua y además $a \in U_a$ por lo que U_a es un entorno de a en M. Entonces para $w \in U_a = Pr^{-1}(U_{\mathcal{O}_a})$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}|_{Pr^{-1}(U_{\mathcal{O}_a})} &= (f \circ Pr)(w) \\
&= f(\mathcal{O}_w) \\
&= \overline{f}(\mathcal{O}_w) \\
&= \overline{f}(Pr(w)) \\
&= (\overline{f} \circ Pr)(w) \\
&= \widehat{f}(w) \\
&= \widehat{f}|_{Pr^{-1}(U_{\mathcal{O}_a})}
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\widetilde{f}$ coincide con alguna función diferenciable (de $\mathcal{F}$) en un entorno U_a de a en $|\mathcal{F}|$. De aquí se tiene que $\widetilde{f}$ coincide localmente con una función de $\mathcal{F}$ la cual es un álgebra completa por lo que $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$

Más aún, notemos que $\widetilde{f}$ es $\Gamma-$invariante. En efecto, sabemos que a y $|\gamma|(a)$ son elementos de $\mathcal{O}_a$ por lo que $Pr(a) = Pr(|\gamma|(a))$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\gamma(\widetilde{f})(a) &= (f \circ Pr)(|\gamma|(a)) \\
&= f(Pr(|\gamma|(a))) \\
&= f(Pr(a)) \\
&= (f \circ Pr)(a) \\
&= \widetilde{f}(a)
\end{aligned}$$

Así se tiene que $\gamma(\widetilde{f}) = \widetilde{f}$ y por tanto $\widetilde{f} \in \mathcal{F}^\Gamma$. Ahora consideremos el homomorfismo restricción $\rho : \mathcal{F}^\Gamma \longrightarrow \mathcal{F}^\Gamma|_{|N|}$. Sabemos que este es inyectivo. Ahora consideremos $f \in \mathcal{F}^\Gamma|_{|N|}$ y consideremos a la función $\widetilde{f} \in \mathcal{F}^\Gamma$. Luego

$$\begin{aligned}
\rho(\widetilde{f})(\mathcal{O}_a) &= \widetilde{f}|_N(\mathcal{O}_a) \\
&= (f \circ Pr)|_N(\mathcal{O}_a) \\
&= f(\mathcal{O}_a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el homomorfismo restricción es sobreyectivo y así un isomorfismo. Luego $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ y así $\mathcal{F}^\Gamma$ es completa. ■

Es claro que el conjunto de las órbitas N de la acción de un grupo sobre la variedad $M = |\mathcal{F}|$ es el conjunto cociente por una relación de equivalencia la cual es: $f(a) = f(b)$ si y sólo si a y b están en la misma órbita. Todo lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 3.3.2. Supongamos que N coincide con $|\mathcal{F}^\Gamma|$ y que la álgebra $\mathcal{F}^\Gamma$ es diferenciable. Diremos que $\mathcal{F}^\Gamma$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad cociente de M por la acción del grupo Γ. Como es usual, denotaremos la variedad cociente como M/Γ.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.5. En el ejemplo 2.6 del capítulo 2 en realidad se estaba trabajando con la variedad cociente de $\mathbb{R}$ con el grupo cíclico discreto $\mathbb{Z}$ de las isometrías. En efecto, consideremos $\gamma : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ dada por $\gamma(f)(r) = f(r+1)$ donde $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$. Es claro que $\mathcal{F}^\Gamma$ es el conjunto de funciones que tienen la propiedad de ser 1-periódicas sobre $\mathbb{R}$. Ahora bién, para $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ y $a \in M$ tenemos

$$\begin{aligned} |\gamma|(a)(f) &= f(|\gamma|(a)) \\ &= \gamma(f)(a) \\ &= f(a) \\ &= a(f) \end{aligned}$$

Así podemos concluir que $|\gamma|(a)|_{\mathcal{F}^\Gamma} = a\,|_{\mathcal{F}^\Gamma}$. Esto nos indica que si $f(a) = f(b)$ para cada $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ entonces $|\gamma|(a)|_{\mathcal{F}^\Gamma} = |\gamma|(b)|_{\mathcal{F}^\Gamma}$ para cada γ en Γ.

Ahora bién, si $b \notin \mathcal{O}_a$ entonces $b \notin |\gamma|(a)$ para cada γ en Γ. En consecuencia, debe existir $f_\gamma \in \mathcal{F}$ tal que $b(f_\gamma) \neq |\gamma|(a)(f_\gamma)$ o equivalentemente, $f_\gamma(b) \neq \gamma(f_\gamma)(a)$. En particular, para $\gamma = id$, donde id es el automorfismo identidad tenemos que $b \neq a$. Por tanto existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(b) \neq f(a)$. Por otra parte, es posible hallar una función $g \in \mathcal{F}^\Gamma$, es decir, que sea 1- periódica, y tal que $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(b)$. Pero si esto es así, entonces $g(a) \neq g(b)$. Por otro lado, si $a \in |\mathcal{F}^\Gamma|$ entonces para $f \in \mathcal{F}^\Gamma$ tenemos que

$$a(f) = f(a) = \gamma(f)(a) = |\gamma|(a)(f)$$

Así, $a|_{\mathcal{F}^\Gamma} = |\gamma|(a)|_{\mathcal{F}^\Gamma}$ por lo que $a = |\gamma|(a)|_{\mathcal{F}^\Gamma}$ para cada $\gamma \in \Gamma$. En consecuencia, a es extendible a $\mathcal{F}$. Por tanto podemos identificar N con $|\mathcal{F}^\Gamma|$. Finalmente:

$$|\mathcal{F}^\Gamma| = |C^\infty(\mathbb{R})|/\Gamma = \mathbb{R}/\Gamma = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$$

§ 3.4. Funciones diferenciables

Ahora presentamos un enfoque algebraico acerca de las funciones diferenciables. Es importante mencionar que este aspecto lo abordaremos de una manera breve debido a lo extenso de este tópico.

Definición 3.4.1. Suponga que $\mathcal{F}_1$ es la álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad M_1 y $\mathcal{F}_2$ es otra álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad M_2. Consideremos una función $f : M_1 \longrightarrow M_2$. Diremos que f es diferenciable si $f = |\varphi|$ donde $\varphi : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras.

Observación 3.2. φ es inyectiva siempre que f sea inyectiva. En efecto, consideremos dos elementos $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_2$ y supongamos que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$. Debemos probar que $f_1 = f_2$. Veamos: dado $y \in M_2$, existe $x \in M_1$ tal que $f(x) = y$ debido a que f es sobreyectiva. Usando el hecho de que f es diferenciable y la afirmación de la proposición 2.4.2 tenemos lo siguiente:

$$f_1(y) = f_1(f(x)) = f_1(|\varphi|(x)) = \varphi(f_1)(x)$$

$$f_2(y) = f_2(f(x)) = f_2(|\varphi|(x)) = \varphi(f_2)(x)$$

Pero como $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ tenemos que $\varphi(f_1)(x) = \varphi(f_2)(x)$ para cada $x \in M_1$. Entonces $f_1(y) = f_2(y)$ y como $y \in M_2$ es arbitario se sigue que $f_1 = f_2$. En consecuencia, φ es sobreyectiva.

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.6. Supóngase que $\mathcal{F}$ es la álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad M y Γ es la acción de un grupo sobre M. Entonces afirmamos que la función $|i| : M \longrightarrow M/\Gamma$ es diferenciable ya que es el dual de la inclusión $i : \mathcal{F}^{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{F}$

Ejemplo 3.7. Consideremos el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}$ actuando sobre $\mathbb{R}$ identificando puntos r_1 y r_2 siempre que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$. Denotemos por S^1 el conjunto de las clases de equivalencias, y sea $\mathcal{F}$ el álgebra de funciones 1-periódicas diferenciables sobre $\mathbb{R}$. Entonces la proyección natural $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ es una función diferenciable ya que coincide con $|i|$, donde i es la inclusión $\mathcal{F} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$

Ahora veamos el siguiente ejemplo un poco más elaborado:

Ejemplo 3.8. Sea $\mathcal{F}$ la álgebra de funciones diferenciables sobre la variedad M y $N \subset M$ una subvariedad diferenciable cerrada de M. Afirmamos que la inclusión $i : N \longrightarrow M$ es una función diferenciable ya que coincide con $|\rho|$ que se corresponde a $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_N = \mathcal{F}_N$ que es el homomorfismo restricción. En efecto, consideremos $|\rho| : N \longrightarrow M$. Acá tenemos que $|\mathcal{F}_N| = N$ ya que N es una subvariedad cerrada. Ahora observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\rho|(r)(f) &= (r \circ \rho)(f) \\ &= r(f|_N) \\ &= (f|_N)(r) \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que i es una función definida de N en M definida como $r \longmapsto i(r)$. Luego:

$$i(r)(f) = f(i(r)) = (f|_N)(i(r)) = (f|_N)(r)$$

En consecuencia, $i = |\rho|$ y por tanto i es diferenciable.

Capítulo 4

Teoremas Fundamentales

En este capítulo enunciamos y demostramos tres teoremas fundamentales que se corresponden al objetivo principal de este trabajo, y que prueban la equivalencia entre la definición 3.1.1 de variedades diferenciables en el sentido algebraico presentada en el capítulo 3 y la definición 1.1.8 de variedades diferenciables en el sentido clásico presentada en el capítulo 1 de los preliminares. De igual manera probaremos la equivalencia correspondiente a las definiciones de funciones diferenciables en los enfoques algebráico y clásico.

§ 4.1. Equivalencia en la Definición de Variedades

Teorema 4.1.1. *Sea $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad M definida por su atlas diferenciable $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}-$álgebra diferenciable y la función*

$$\theta : M \longrightarrow |\mathcal{F}|$$
$$p \longmapsto \theta(p)$$

con $\theta(p)(f) = f(p)$ es un homeomorfismo.

Demostración. • *$\mathcal{F}$ es geométrica y completa.* En efecto, por la observación 2.2 del capítulo 2 tenemos que $\mathcal{F}$ es geométrica.

Afirmación Cualquier función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que es diferenciable en un entorno de cada punto de M, es diferenciable en la variedad entera M.

Para ello, tomemos un punto $p \in M$ y una carta (U_k, x_k) alrededor de p. Sea U_p un entorno de p y consideremos una función $f : U_p \longrightarrow \mathbb{R}$ en $C^\infty(U_p)$. Tomemos

$\overline{U}_p = U_p \cap U_k$ y consideremos el atlas $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{U}_p, \widetilde{x}\}$ con $\widetilde{x} = x_k|_{\overline{U}_p}$. Entonces al considerar la restricción $f|_{\overline{U}_p} : \overline{U}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que ésta es diferenciable ya que la representativa $f \circ \widetilde{x}^{-1} : x_k(\overline{U}_p) \longrightarrow \mathbb{R}$ coincide con la función $f \circ x_k^{-1} : x_k(U_p) \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual sabemos por hipótesis del enunciado de la afirmación que es diferenciable. Como $p \in M$ es arbitrario, entonces f es diferenciable en todo M lo cual prueba la afirmación.

Luego por la afirmación anterior se tiene que $\mathcal{F}$ es completa.

- $\theta : M \longrightarrow |\mathcal{F}|$ *es un homeomorfismo.*

Para probar que θ es inyectiva, notemos que si $p, q \in M$ son puntos distintos, entonces existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $f(p) \neq f(q)$. En efecto, como M es paracompacta, se sigue que es normal por lo que M sería regular. Por tanto, dado cualquier $p \in M$ y un entorno U_p de p, existe un entorno V_p de p con $\overline{V}_p \subset U_p$. Ahora bién, como $\overline{V}_p$ es cerrado y como está contenido en el abierto U_p, entonces por resultados de la partición de la unidad existe una función bump $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ para $\overline{V}_p$ tal que $Supp(f) \subset U_p$ con f diferenciable, $0 \leq f \leq 1$ y $f \equiv 1$ en $\overline{V}_p$. Pero la inclusión $Supp(f) \subset U_p$ implica que $f > 0$ para cada $x \in U_p$. Observemos que por ser M un espacio Hausdorff podemos considerar U_p de tal manera que $q \notin U_p$. Sabemos que $f \equiv 1$ en $\overline{V}_p \subset U_p$. En particular, $f(p) = 1 > 0$ y como $q \notin U_p$ entonces $q \notin Supp(f)$. Luego $f(q) = 0$. Así, $f(p) \neq f(q)$ y por tanto $\theta(p)(f) \neq \theta(q)(f)$ lo cual prueba la inyectividad de θ.

Para probar la sobreyectividad supongamos que existe $p \in |\mathcal{F}|$ tal que para cualquier $a \in M$ se tiene que $\theta(a) \neq p$ con $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos cualquier función $f \in C^\infty(M)$ con superficies de nivel compactas cuya existencia la garantiza el teorema 1.6.1 y sea $\lambda = p(f)$. Supongamos que ninguno de los puntos del compacto $L = f^{-1}(\lambda)$ se corresponden al homomorfismo p. Entonces para cada $x \in L$ existe $f_x \in \mathcal{F}$ tal que $\theta(x)(f_x) = p(f_x)$, o equivalentemente, $f_x(x) \neq p(f_x)$. Esto nos permite considerar la familia $\{f_x / x \in L\}$ con $f_x(x) \neq p(f_x)$. Ahora consideremos los conjuntos $U_x = \{q \in M / f_x(q) \neq p(f_x)\}$. Notese que $U_x \neq \emptyset$ pues $x \in U_x$. Además estos U_x son abiertos pues

$$U_x = f^{-1}(-\infty, p(f_x)) \cup f^{-1}(p(f_x), +\infty)$$

y por tanto forman un cubrimiento abierto para L. Como L es compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito $U_{x_1}, ..., U_{x_m}$. Consideremos la función

$$g = (f - \lambda)^2 + \sum_{k=1}^{m} (f_{x_k} - p(f_{x_k}))^2$$

Notemos que g es diferenciable sobre M ya que es la suma de funciones diferenciables sobre M. Además, g no se anula sobre M. En efecto,

$$x \in M \Longrightarrow x \in L \ o \ x \in M \setminus L$$

Si $x \in L$ debe existir por lo menos $q \in M$ tal que $f_{x_k}(q) \neq q(f_{x_k})$ por lo que la sumatoria nunca es cero. Por el contrario, si $x \in M \setminus L$ entonces $x \notin L$. Esto implica que $f(x) \neq \lambda$ con $\lambda \neq p(f)$ por lo que $f(x) - \lambda \neq 0$. Así, g es no nula y por tanto podemos considerar $\frac{1}{g} \in \mathcal{F}$. Luego

$$p(g) = (p(f) - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^{m} (p(f_{x_k}) - p(f_{x_k}))^2 = 0$$

Así:

$$1 = p(1) = p(g).p(\frac{1}{g})$$

lo cual es una contradicción y por tanto θ es sobreyectiva.

Ahora bién, sea U un conjunto abierto en $|\mathcal{F}|$. Entonces de acuerdo a la topología de $|\mathcal{F}|$ se tiene que U es unión de conjuntos de la forma $f^{-1}(V)$ donde $V \subset \mathbb{R}$ es abierto. Como $f \in \mathcal{F} = C^{\infty}(M)$ es diferenciable y por tanto continua, tenemos que los conjuntos $f^{-1}(V)$ son abiertos en la topología de M. Por otra parte, para cualquier conjunto abierto U en la topología de M existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $U = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$. En efecto, por resultados de la partición de la unidad existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in U$. Por lo tanto, tenemos que $U = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Pero $R^+ \subset \mathbb{R}$ es abierto por lo que U es un abierto en la topología de $|\mathcal{F}|$. Así, θ es una función biyectiva, continua y con inversa continua, en decir, θ es un homeomorfismo.

- $C^{\infty}(M)$ *es una* $\mathbb{R}-$*álgebra diferenciable*

Para probar esto, construyamos un atlas numerable $\mathcal{A}_2 = \{(U_k, x_k)\}$ tal que $x_k(U_k) = \mathbb{R}^n$. Para ello comencemos con un atlas numerable $\mathcal{A}_0 = \{(V_l, y_l)\}$ que sea compatible con el atlas $\mathcal{A} = \{(U_m, x_m)\}$ de la hipótesis. Como $\mathcal{A}_0$ es compatible con $\mathcal{A}$ entonces la función cambio de coordenadas $y_l \circ x_m^{-1}$ es un difeomorfismo. Sabemos que $y_l(V_l) \subset \mathbb{R}^n$ puede ser representada como la unión de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$, esto es, $y_l(V_l) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_{li}$ donde

$$G_{li} = \{r \in \mathbb{R}^n / \ \|r - a_{li}\| \ < r_{li}\}$$

Al considerar la familia

$$\mathcal{A}_1 = \{(y_l^{-1}(G_{li}), y_l|_{y_l^{-1}(G_{li})})/l, i \in \mathbb{N}\}$$

se tiene que ésta es un atlas numerable sobre M y además es compatible con $\mathcal{A}_0$. En efecto, sea $p \in y_l(V_l \cap y_l^{-1}(G_{li}))$. Entonces

$$(y_l|_{y_l^{-1}(G_{li})} \ \circ \ y_l^{-1})(p) = y_l|_{y_l^{-1}(G_{li})}(y_l^{-1}(p))$$

Pero $y_l^{-1}(p) \in V_l \cap y_l^{-1}(G_{li})$. Esto implica que $(y_l|_{y_l^{-1}(G_{li})} \ \circ \ y_l^{-1})(p) = p$. En otras palabras, $y_l|_{y_l^{-1}(G_{li})} \ \circ \ y_l^{-1}$ se comporta como la función identidad en espacios euclidianos, y sabemos que ésta es un difeomorfismo. En consecuencia, tenemos que $\mathcal{A}_1$ es compatible con $\mathcal{A}_0$ y como $\mathcal{A}_0$ es compatible con $\mathcal{A}$, se sigue que $\mathcal{A}_1$ es compatible con $\mathcal{A}$ (recordemos que la relación de compatibilidad es una relación de equivalencia).

Ahora consideremos cualquier carta (U, x) sobre M y tal que $x(U)$ sea una bola abierta en $\mathbb{R}^n$. Ahora bién, para cualquier carta (U, x) sobre M donde $x(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ podemos construir la carta $(U, \eta \ \circ \ x)$ tal que $(\eta \ \circ \ x)(U) = \mathbb{R}^n$ siendo η cualquier difeomorfismo de $x(U)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $x(U)$ es la bola de radio ρ y centro a podemos tomar $\eta : \mathbb{R}^n \longrightarrow x(U)$ dada por

$$\eta(s) = a + \frac{s\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|s\|^2}}$$

Nótese que $\eta(s) \in x(U)$, en efecto: sea $s_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|\eta(s_0) - s_0\|^2 &= \left\| \frac{s_0\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|s_0\|^2}} \right\|^2 \\
&= \frac{\rho^2}{\rho^2 + \|s_0\|^2}\|s_0\|^2 \\
&< \rho^2 \frac{1}{\|s_0\|^2}\|s_0\|^2 \\
&= \rho^2
\end{aligned}$$

ya que $\|s_0\|^2 + \rho^2 > \|s_0\|^2$ implica $\frac{1}{\|s_0\|^2+\rho^2} < \frac{1}{\|s_0\|^2}$

Como $s_0 \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, entonces tenemos que $\eta(s) \in x(U)$ para cada $s \in \mathbb{R}^n$.

Ahora consideremos la función

$$h(r) = \frac{\rho(r-a)}{\sqrt{\rho^2 + \|r-a\|^2}}$$

Sea $r_0 \in x(U)$. Se puede probar que $(\eta \circ h)(r_0) = r_0$. Por otra parte si tomamos $t_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces también se puede verificar que $(h \circ \eta)(t_0) = t_0$. En consecuencia se tiene que η es invertible y $h = \eta^{-1}$. Ahora notemos que η es diferenciable para cada $s \in \mathbb{R}^n$ pues posee derivadas parciales contínua de todos los órdenes. Por otra parte, observemos que $\|r-a\|^2 < \rho^2$ implica que $\rho^2 - \|r-a\|^2 > 0$ por lo que η^{-1} también posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Luego η^{-1} también es diferenciable. Por tanto, η es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $x(U)$.

Afirmamos que la carta $(U, \eta^{-1} \circ x)$ es compatible con (U, x). Para ver esto, estudiemos la función

$$(\eta^{-1} \circ x) \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow (\eta^{-1} \circ x)(U)$$

Sea $s \in x(U)$. Entonces $[(\eta^{-1} \circ x) \circ x^{-1}](s) = \eta^{-1}(s)$. En consecuencia, se tiene que $(\eta^{-1} \circ x) \circ x^{-1}$ coincide con η^{-1} que sabemos es un difeomorfismo.

Así tenemos que $(\eta^{-1} \circ x) \circ x^{-1}$ es un difeomorfismo entre los subconjuntos abiertos $x(U)$ y $(\eta^{-1} \circ x)(U)$ por lo que la carta $(U, \eta^{-1} \circ x)$ es compatible con (U, x) como se quería verificar.

Finalmente observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\eta^{-1} \circ x)(U) &= \eta^{-1}(x(U)) \\ &= \eta^{-1}(\eta(\mathbb{R}^n)) \\ &= \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

En resúmen, $(U, \eta^{-1} \circ x)$ es una carta que es compatible con (U, x) donde $x(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ cumpliendo que $(\eta^{-1} \circ x)(U) = \mathbb{R}^n$. Si repetimos esta misma construcción para cada carta de $\mathcal{A}_1$ obtenemos la carta $\mathcal{A}_2$ requerida.

Tomemos ahora cualquier carta $(U_k, x_k) \in \mathcal{A}_2$. Obviamente U_k es abierto en M pues $U_k = x^{-1}(x(U_k))$ donde $x(U_k)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y x es continua por ser un homeomorfismo. Consideremos el conjunto $C^\infty(M)|_{U_k}$ el cual consiste de todas las funciones $f : U_k \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \circ x_k^{-1}$ es diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces al considerar la función $\varphi : C^\infty(M)|_{U_k} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\varphi(f) = f \circ x_k^{-1}$ se tiene que ésta es un isomorfismo. En efecto, es inmediato que φ es un homomorfismo. Tomemos ahora $f_1, f_2 \in C^\infty(M)|_{U_k}$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1) = \varphi(f_2) &\Longrightarrow \varphi(f_1)(t) = \varphi(f_2)(t), \forall t \in \mathbb{R}^n \\
&\Longrightarrow (f_1 \circ x_k^{-1})(t) = (f_2 \circ x_k^{-1})(t), \forall t \in \mathbb{R}^n \\
&\Longrightarrow f_1(x_k^{-1}(t)) = f_2(x_k^{-1}(t)), \forall t \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Como $x_k^{-1}(t) \in U_k$ para cada $t \in \mathbb{R}^n$ entonces $f_1 = f_2$. En consecuencia, φ es inyectiva.

Ahora consideremos $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; veamos que existe $f \in C^\infty(M)|_{U_k}$ tal que $\varphi(f) = g$. Observemos lo siguiente:

$$g = g \circ I_d = g \circ (x_k \circ x_k^{-1}) = (g \circ x_k) \circ x_k^{-1}$$

Ahora bién, $g \circ x_k$ es una función definida de U_k en $\mathbb{R}$ la cual es diferenciable ya que su representativa $(g \circ x_k) \circ x_k^{-1}$ lo es. Así, $g \circ x_k \in C^\infty(M)|_{U_k}$ y se tiene que

$$\varphi(g \circ x_k) = (g \circ x_k) \circ x_k^{-1} = g$$

Por tanto, φ es sobreyectiva y así un isomorfismo. En consecuencia se tiene que $C^\infty(M)|_{U_k} \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, de acuerdo a la definición 3.1.1 se concluye que $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}-$álgebra diferenciable lo cual prueba el teorema. ■

Teorema 4.1.2. *Sea $\mathcal{F}$ cualquier $\mathbb{R}-$ álgebra diferenciable. Entonces existe un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ sobre el espacio dual $|\mathcal{F}|$ tal que la función*

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \longmapsto \varphi(p)$$

con $\varphi(f)(p) = p(f)$ es un isomorfismo, donde $C^\infty(M)$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre M con respecto a $\mathcal{A}$.

Demostración. En primer lugar construyamos una carta $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donde U es un conjunto abierto perteneciente a algún cubrimiento abierto para $|\mathcal{F}|$. Veamos:

Como $\mathcal{F}$ es una $\mathbb{R}-$ álgebra diferenciable, entonces de acuerdo a la definición 3.1.1 existe un cubrimiento abierto Ω de $|\mathcal{F}|$ por conjuntos abiertos U para el cual $\mathcal{F}|_U \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, existe una función $i : \mathcal{F}|_U \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la cual es un isomorfismo. Tomemos uno de los abiertos U del cubrimiento Ω y con éste construyamos la carta deseada. Ahora bién, si consideramos la composición

$$U \xrightarrow{\mu} |\mathcal{F}|_U| \xrightarrow{|\rho|} |\mathcal{F}|$$

donde μ es la inclusión y $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}|_U$ es la función restricción entonces se tiene que dicha composición coincide con la inclusión $U \longrightarrow |\mathcal{F}|$. En efecto, nótese que la inclusión μ puede ser pensada como $\mu(x) = x$. Ahora tomemos $x \in U$. Entonces $(|\rho| \circ \mu)(x) = |\rho|(\mu(x)) \in |\mathcal{F}|$ por lo que al considerar $f \in \mathcal{F}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\rho|(\mu(x))(f) &= (\mu(x) \circ \rho)(f) \\
&= f(\mu(x) \circ \rho) \\
&= f(|\rho|(\mu(x))) \\
&= \rho(f)(\mu(x)) \\
&= (f|_U)(\mu(x)) \\
&= f(x) \\
&= x(f)
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{F}$ es arbitrario tenemos que $(|\rho| \circ \mu)(x) = x$. Luego $|\rho| \circ \mu$ se comporta como la inclusión.

Afirmación La inclusión $\mu : U \longrightarrow |\mathcal{F}|_U|$ es un homeomorfismo sobre $|\mathcal{F}|_U|$.
En efecto,
claramente μ es inyectiva. Ahora supongamos que μ no es sobreyectiva, esto es, asumamos que existe un punto $a \in |\mathcal{F}|_U| \setminus \mu(U)$. Sea $\overline{a} = |i|^{-1}(a)$, donde i es el isomorfismo que se tiene. Consideremos dos casos dependiendo si $a \in \overline{\mu(U)}$ o si $a \notin \overline{\mu(U)}$.

`Caso 1:` $a \in \overline{\mu(U)}$

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\|x - \overline{a}\|}$$

y la compuesta

$$U \xrightarrow{\mu} |\mathcal{F}|_U| \xrightarrow{|i|^{-1}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Designemos por g a tal composición, es decir, $g = f \circ |i|^{-1} \circ \mu$ definida sobre U. Entonces $g \in \mathcal{F}|_U$. Efectivamente, cualquier punto $r \in \mathbb{R}^n \backslash \{\overline{a}\}$ posee un entorno V_r sobre el cual f coincide con una función diferenciable definida en todo $\mathbb{R}^n$ (ver teorema 1.6.5 del capítulo 1). Ahora consideremos $A_r = (|i|^{-1} \circ \mu)^{-1}(V_r)$. Observemos que A_r es un entorno del punto $\widetilde{r} \in U$ tal que $(|i|^{-1} \circ \mu)(\widetilde{r}) = r$. Para $q \in U$ tenemos:

$$\begin{aligned} (g|_{A_r})(q) &= (f \circ |i|^{-1} \circ \mu)|_{(|i|^{-1} \circ \mu)^{-1}(V_q)}(q) \\ &= (f \circ |i|^{-1} \circ \mu)|_{(|i|^{-1} \circ \mu)^{-1}(V_q)}((|i|^{-1} \circ \mu)^{-1}(\widetilde{q})) \\ &= f(\widetilde{q}) \end{aligned}$$

donde $\widetilde{q}$ es la imagen de q por $|i|^{-1} \circ \mu$. En otras palabras, $g|_{A_r}$ actúa sobre q como f actúa sobre $\widetilde{q} \in V_{\widetilde{q}} \subset \mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{F}|_U \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que para cualquier $q \in U$ existe un entorno para el cual g coincide con una función $\mathcal{F}|_U$. Por definicición de $\mathcal{F}|_U$ tenemos que g localmente coincide con funciones de $\mathcal{F}$. En consecuencia, $g \in \mathcal{F}|_U$.

Ahora consideremos la función $i(g)$ la cual pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado que g es un elemento de $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{F}|_U \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces g puede ser pensada como una función de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, esto es, existe una única $\widetilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $i(g)$ puede ser considerada como la misma $\widetilde{g}$. Pero $i(g)$ coincide con f en $\mathcal{H} = |i|^{-1}(\mu(U))$ y como $a \in \overline{\mu(U)}$ entonces $\overline{a} = |i|^{-1}(a) \in \overline{\mathcal{H}}$. Esto implica la existencia de una sucesión $\{\overline{a}_n\} \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{a}_n \to \overline{a}$ conforme $n \to \infty$. Luego:

$$\begin{aligned} f(\overline{a_n}) = i(g)(\overline{a_n}) &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(\overline{a_n}) \equiv \lim_{n\to\infty} i(g)(\overline{a_n}) \\ &\Longrightarrow f(\lim_{n\to\infty} \overline{a_n}) \equiv i(g)(\lim_{n\to\infty} \overline{a_n}) \\ &\Longrightarrow f(\overline{a}) = i(g)(\overline{a}) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

`Caso 2:` $a \notin \overline{\mu(U)}$

Consideremos las siguientes funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$: la función nula a la cual denotaremos como f, esto es,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto f(a) = 0 \end{aligned}$$

y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in |i|^{-1}(\overline{\mu(U)}) \\ \\ 1 \quad si \quad\quad x = \overline{a} \end{cases}$$

Notemos que la existencia de g está garantizada por lo siguiente: observemos que $|i|^{-1}(\overline{\mu(U)}) = \overline{|i|^{-1}(\mu(U))}$ y $\{\overline{a}\}$ son cerrados y disjuntos. Luego por el teorema 1.6.4 del capítulo 1 tenemos garantizada la existencia de g.

Además f y g son funciones distintas. Consideremos ahora la siguiente composición:

$$\begin{aligned} i^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{F}|_U \\ f &\longmapsto i^*(f) \end{aligned}$$

donde $i^*(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida como $i^*(f) = f \circ |i|^{-1} \circ \mu$

Notemos que $i^*(f) \in \mathcal{F}|_U$. En efecto, si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $i^{-1}(f) \in \mathcal{F}|_U$ por lo que dado cualquier $a \in U$ existe un entorno V_a de a en U y un elemento $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ tal que $i^{-1}(f)|_{V_a} \equiv \widetilde{f}|_{V_a}$. Tomemos $a \in U$ y consideremos el entorno $V_a \subset U$ el cual se tiene por el hecho de que $i^{-1}(f) \in \mathcal{F}|_U$. Entonces:

$$\begin{aligned} i^*(f)(a) &= (f \circ |i|^{-1} \circ \mu)(a) \\ &= f(|i|^{-1}(\mu(a))) \\ &= f(|i^{-1}|(\mu(a))) \\ &= i^{-1}(f)(\mu(a)) \\ &= \widetilde{f}(\mu(a)) \end{aligned}$$

En resúmen, $i^*(f)|_{V_a} \equiv \widetilde{f}|_{V_a}$ por lo que $i^*(f) \in \mathcal{F}|_U$. Por otra parte, si $f \neq g$ entonces $i^*(f) \neq i^*(g)$. De esto se tiene que $i^*(f)$ y $i^*(g)$ son elementos diferentes de $\mathcal{F}|_U$. Ahora para $u \in U$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u \in U &\Longrightarrow u = \mu(u) \in \mu(U) \subset \overline{\mu(U)} \\ &\Longrightarrow |i^{-1}|(\mu(u)) \in |i|^{-1}(\overline{\mu(U)}) \\ &\Longrightarrow g(|i^{-1}|(\mu(u))) \\ &\Longrightarrow i^*(g) = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} u \in U &\implies u = \mu(u) \in \mu(U) \subset |\mathcal{F}|_U| \\ &\implies |i^{-1}|(\mu(u)) \in \mathbb{R}^n \\ &\implies f(|i^{-1}|(\mu(u))) = 0 \\ &\implies i^*(f) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, $i^*(f)$ y $i^*(g)$ se anulan en todo U lo cual es una contradicción. Así, μ es sobreyectiva y por la proposición 2.4.1 del capítulo 2 se tiene que es un homeomorfismo lo cual prueba la afirmación.

Retomemos la demostración del teorema en cuestión. Recordemos que $|\rho| \circ \mu$ se comporta como la inclusión, la cual es un homeomorfismo sobre su imagen y por la afirmación anterior sabemos que μ es un homeomorfismo. Entonces $|\rho|$ es un homeomorfismo sobre $U \subset |\mathcal{F}|$. Efectivamente:

$$\begin{aligned} |\rho| &= |\rho| \circ Id \\ &= |\rho| \circ (\mu \circ \mu^{-1}) \\ &= (|\rho| \circ \mu) \circ \mu^{-1} \end{aligned}$$

Luego, $|\rho|$ es composición de homeomorfismos por lo que $|\rho|$ es un homeomorfismo de U en $|\rho|(U) \subset |\mathcal{F}|$.

Consideremos ahora $h : \mathcal{F} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida como $h = i \circ \rho$. Sabemos que su función dual $|h| : \mathbb{R}^n \longrightarrow |\mathcal{F}|$ está dada por $|h| = |\rho| \circ |i|$. Como i es un isomorfismo entonces $|i| : \mathbb{R}^n \longrightarrow |\mathcal{F}|_U|$ es un homeomorfismo. Recordemos que $|\rho| : |\mathcal{F}|_U| \longrightarrow |\mathcal{F}|$ es un homeomorfismo sobre $U \subset |\mathcal{F}|$. En realidad $|\rho|$ asigna al conjunto U su imagen directa, a saber, $|\rho|(U) = |\mathcal{F}|$. Como $|\rho|$ es un homeomorfismo, entonces U y $|\mathcal{F}|$ son topológicamente equivalentes por lo que podemos pensar a $|\rho|$ como una función definida de $|\mathcal{F}|_U|$ en U, esto es, $|\rho| : |\mathcal{F}|_U| \longrightarrow U$. Luego, $|h| : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ es un homeomorfismo. Entonces al considerar su función inversa $x = |h|^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ obtenemos la carta deseada.

Ahora probemos que estas cartas construídas son compatibles. Supongamos que $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son un par de cartas y consideremos los correspondientes isomorfismos de $\mathbb{R}-$álgebras $i : \mathcal{F}|_U \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $j : \mathcal{F}|_V \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $U \cap V = \emptyset$ es inmediato por lo que vamos a suponer que $U \cap V \neq \emptyset$. Llamemos W a esta intersección, esto es, $W = U \cap V$. Notemos que W es homeomorfo a $x(W) \subset \mathbb{R}^n$ y $x(W)$ es homeomorfo a $|i|(x(W))$, ya que $|i|$ es un homeomorfismo. Luego por la proposición 2.3.2 tenemos que $i|_W : (\mathcal{F}|_U)|_W \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)|_{x(W)}$ es un isomorfismo, o equivalentemente: $i|_W : \mathcal{F}|_W \longrightarrow C^\infty(x(W))$. Análogamente tenemos que $j|_W$ es un isomorfismo. En consecuencia, se tiene que $|t| : y(W) \longrightarrow x(W)$ es un difeomorfismo ya que es el dual del isomorfismo $t : C^\infty(x(W)) \longrightarrow C^\infty(y(W))$ lo cual prueba la compatibilidad de las cartas construídas.

Finalmente demostremos que $f \in \mathcal{F}$ si y sólo si $f \in C^\infty(M)$ siendo f un elemento abstracto de $\mathcal{F}$ que es identificado con $f : |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(p) = p(f)$. Veamos: supongamos que $f \in \mathcal{F}$. Para mostrar que $f \in C^\infty(M)$ se debe probar que la función cambio de coordenadas $f \circ x^{-1}$ es una función diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ para cada una de las cartas $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ construidas al comienzo de la demostración. Ahora bién:

$$\begin{aligned} f \circ x^{-1} &= f \circ |h| \\ &= f \circ |\rho| \circ |i| \\ &= i(\rho(f)) \end{aligned}$$

En efecto: sea $r \in x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Luego:

$$\begin{aligned} (f \circ x^{-1})(r) &= (f \circ |\rho| \circ |i|)(r) \\ &= f(|i \circ \rho|(r)) \\ &= (i \circ \rho)(f)(r) \\ &= i(\rho(f))(r) \end{aligned}$$

Como $r \in x(U)$ es arbitrario entonces $f \circ x^{-1} = i(\rho(f))$ y como $\rho(f) \in \mathcal{F}|_U$ se sigue que $i(\rho(f)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Así que $f \circ x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ahora supongamos que $f \in C^\infty(M)$. Entonces para cualquier carta (V, x) se tiene que la función $f \circ x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En particular para una de las cartas (U, x) construídas y para $r \in x(U) \approx U$ tenemos:

$$\begin{aligned} (f \circ x^{-1})(r) &= f((|\rho| \circ |i|)(r)) \\ &= f(|i \circ \rho|(r)) \\ &= i(\rho(f)(r)) \\ &= i(f(|\rho|(r))) \\ &= i((f \circ |\rho|)(r)) \end{aligned}$$

Como $f \circ x^{-1} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y la función $i : \mathcal{F}|_U \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo tenemos que $f \circ x^{-1}$ es la imagen por i de un elemento de $\mathcal{F}|_U$ que es precisamente $f \circ |\rho|$. Luego para cada $a \in U$, existe un entorno V_a de a contenido en U y un elemento $\widetilde{f} \in \mathcal{F}$ tal que

$$(f \circ |\rho|)|_{V_a} \equiv \widetilde{f}|_{V_a}$$

Es decir,

$$f|_{|\rho|(V_a)} \equiv (f \circ |\rho|)|_{V_a} \equiv \widetilde{f}|_{V_a}$$

En consecuencia, f localmente coincide con elementos de $\mathcal{F}|_U$ y de aquí de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es completa entonces $f \in \mathcal{F}$.

§ 4.2. Equivalencia en Funciones Diferenciables

A continuación enunciamos y demostramos el teorema que prueba la equivalencia de la definición clásica de funciones diferenciables con la definición presentada en el sentido algebraico.

Teorema 4.2.1. *Sean M y N variedades con atlas diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y álgebra de funciones diferenciables $\mathcal{F}_M$ y $\mathcal{F}_N$ respectivamente. Una función $\varphi : M \longrightarrow N$ es diferenciable con respecto a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si y sólo si $\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M$ donde*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{F}_N &\longrightarrow \mathcal{F}_M \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos $f \in \mathcal{F}_N$ y $a \in M$. Escojamos una carta (V, y) en un entorno de $\varphi(a)$ y una carta (U, x) en un entorno de a tales que (V, y) y (U, x) sean compatibles con las cartas de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ respectivamente y satisfaciendo que $\varphi(U) \subset V$. Entonces:

$$\varphi^*(f) \circ x^{-1} = (f \circ \varphi) \circ x^{-1} = (f \circ y^{-1}) \circ (y \circ \varphi \circ x^{-1})$$

Esto es, $\varphi^*(f) \circ x^{-1}$ se puede expresar como la composición de dos funciones diferenciables en espacios euclidianos. Como $\varphi^*(f)|_U = H = \varphi^*(f) \circ x^{-1} \circ x \equiv F|_U$ siendo $F \in \mathcal{F}_M$ su extensión diferenciable en M, entonces localmente la función $\varphi^*(f)$

coincide con una función diferenciable que localmente coincide con un elemento de $\mathcal{F}_M$. Puesto que $\mathcal{F}_M$ es completa se sigue que $\varphi^*(f) \in \mathcal{F}_M$.

Supongamos ahora que $\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M$. Tomemos un par de cartas arbitrarias $(U, x) \in \mathcal{A}$ y $(v, y) \in \mathcal{B}$ tales que $\varphi(U) \subset V$. Debemos probar que las coordenadas locales del punto $\varphi(a)$ son funciones diferenciables de las coordenadas locales $a \in U$. En otras palabras, las funciones $y^i \circ \varphi = \varphi^*(y^i)$ deben ser diferenciables. Ahora bién, para cada función y^i seleccionemos una función $f_i \in \mathcal{F}_N$ tal que $y^i = f_i|_V$. Como $\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M$ entonces las funciones $\varphi^*(f_i) = f_i \circ \varphi$ son diferenciables y así las funciones $y^i \circ \varphi|_U = \varphi^*(f_i)|_U$ también son funciones diferenciables. ■

Observación 4.1. $\varphi^*(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_M \Longleftrightarrow \varphi$ es diferenciable en el sentido algebraico. En efecto, sabemos que $\varphi^* : \mathcal{F}_N \longrightarrow \mathcal{F}_M$. Consideremos la función dual $|\varphi^*|$ y sean $x \in M$, $f \in \mathcal{F}_N$. Luego $|\varphi^*|(x) \in \mathcal{F}_M$. Consideremos φ la función del teorema 4.2.1. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\varphi^*|(x)(f) &= (x \circ \varphi^*)(f) \\
&= x(\varphi^*(f)) \\
&= x(f \circ \varphi) \\
&= f(\varphi(x)) \\
&= \varphi(x)(f)
\end{aligned}$$

En consecuencia, $|\varphi^*| = \varphi$ por lo que φ es diferenciable en el sentido algebraico.

Bibliografía

[1] M Atiyah. *Introducción al álgebra Conmutativa.* REVERTÉ, Barcelona, 1973.

[2] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York, 2000.

[3] Jet Nestruev. *Smooth Manifolds and Observables.* Springer, New York, 2002.

[4] Jorge Sáenz. *Variedades Diferenciables.* Escuela de Ciencias, UCLA, Barquisimeto, 1988.