

**DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL PARA UN FLUJO  
BIFÁSICO AGUA-PETRÓLEO**

WILFREDO ANTONIO ANGULO SANCHEZ

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencia y Tecnología

Barquisimeto, Febrero de 2009

**DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL PARA UN FLUJO  
BIFÁSICO AGUA-PETRÓLEO**

Por

WILFREDO ANTONIO ANGULO SANCHEZ

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría de Agregado en el

Escalafón del personal Docente y de Investigación de la UCLA

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencia y Tecnología

Barquisimeto, Febrero de 2009

**DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL PARA UN FLUJO  
BIFÁSICO AGUA-PETRÓLEO**

Por

WILFREDO ANTONIO ANGULO SANCHEZ

TRABAJO APROBADO

Dr. Hugo Lara   Dr. Freddy Torrealba   Dr. Rómulo Castillo

Barquisimeto, FEBRERO de 2009.

## **Agradecimiento**

*A Dios, por acompañarme todo el tiempo dándome fuerzas para seguir adelante  
y por colocar en mi camino a personas maravillosas que irradian luz.*

*A mis padres y hermanos por darme siempre todo el apoyo incondicional*

*A todos mis buenos amigos y colegas*

*A mis ex-tesistas de pre y post-grado que han compartido conmigo la inquietud de  
investigar en el área de dinámica de fluido computacional y sistemas complejos*

*....a todos MIL GRACIAS*

**DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL PARA UN FLUJO  
BIFÁSICO AGUA-PETRÓLEO**

**Autor:** Wilfredo Angulo

**RESUMEN**

En este trabajo se presentan los aspectos de la dinámica de fluido computacional (DFC) para la simulación de un flujo bifásico agua-petróleo en un trozo de tubería horizontal. Gracias a la diferencia de viscosidad y densidad similar entre el agua y el petróleo, el flujo bifásico se consideró incompresible para ambos fluidos no miscibles, viajando de forma adyacente bajo un patrón centro-anular que los separa por una interfaz. La evolución de este flujo bifásico se estudió solo en dos dimensiones de espacio, de manera tal que, geoméricamente, fue abstraído como un dominio de  $\mathbb{R}^2$  y el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes fue utilizado sobre este dominio para modelar el flujo bifásico. Como estrategia DFC se propuso una semidiscretización temporal, basada en la combinación del método de las características y el método ALE (*Arbitrary Eulerian-Lagrangian*), que condujo a un sistema generalizado de Stokes con condiciones no estándar de frontera en cada paso de tiempo. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales fue escrito en términos de una formulación variacional equivalente y se demostró que es un problema bien planteado en el sentido de distribuciones. A partir de esta formulación variacional, se realizó una discretización de elementos finitos basada en el elemento de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$  como segunda estrategia DFC. De esta discretización se obtuvo un sistema de ecuaciones algebraicas lineales bien planteado y cuya solución es estable ya que satisface una condición inf-sup discreta. Estos aspectos de la DFC permitieron establecer un método confiable para simular el flujo bifásico agua-petróleo en una tubería horizontal, el cual se verificó en un paso de tiempo para un problema de prueba específico.

Palabras claves: dinámica de fluido computacional, flujo bifásico, sistema generalizado de Stokes, elemento finito.

# Índice general

<b>I. Modelo no lineal del flujo bifásico y problema generalizado de Stokes</b>	<b>10</b>
1. Modelo no lineal de flujo bifásico agua-petróleo . . . . .	11
2. Semidiscretización en tiempo . . . . .	15
<b>II. Formulación variacional y buen planteamiento</b>	<b>17</b>
1. Preliminares. . . . .	17
2. Formulación variacional . . . . .	19
2.1. Equivalencia. . . . .	22
3. Buen planteamiento . . . . .	26
<b>III. Estudio numérico de la estrategia DFC</b>	<b>31</b>
1. Discretización del dominio y formulación variacional discreta . . .	31
2. Análisis de estabilidad uniforme . . . . .	34
3. Resultados de existencia y unicidad de la solución discreta $(\mathbf{u}_h, p_h)$	38
<b>IV. Implementación de la estrategia DFC</b>	<b>40</b>
1. Sistema de ecuaciones tipo Galerkin . . . . .	41
2. El elemento mixto conforme de Taylor-Hood . . . . .	46

2.1.	Definición de las funciones de forma $\phi_j$ y $\psi_k$ para la velocidad y la presión . . . . .	47
2.2.	Contribución de elemento finito para el ensamblaje del sistema global . . . . .	48
3.	El ensamblaje del sistema global . . . . .	51
4.	Transformaciones de coordenadas y expresiones integrales . . . . .	53
<b>V. Resultados de la DFC para un flujo bifásico agua-petróleo</b>		<b>58</b>
<b>VI. Conclusiones y perspectivas</b>		<b>62</b>

## Introducción

En muchas aplicaciones dentro de la ciencia y la tecnología, el flujo de dos fluidos no miscibles e incompresibles en tuberías, o *flujo bifásico*, juega un rol importante [29], [30]. En particular, las técnicas de *transporte lubricado* se usan frecuentemente para facilitar el movimiento de aceites viscosos a través de una tubería lubricada con un líquido de baja viscosidad tal como lo es el agua. Para que este proceso sea exitoso el fluido de baja viscosidad debe introducirse y mantenerse entre el aceite viscoso y la pared de la tubería, formando una *cápsula* entre la pared y el fluido de alta viscosidad [10]. Este *patrón de flujo* es llamado *centro-anular*, y el modelo físico propuesto para estudiarlo considera que en tal configuración ambos fluidos viajan en el *espacio* y el *tiempo* de manera *adyacente*, siendo la interfaz una *superficie* natural de separación entre los dos fluidos.

En este trabajo se presenta el estudio de algunos aspectos relacionados con la *dinámica de fluido computacional* (DFC) de un flujo bifásico agua-petróleo, en un trozo de tubería horizontal. Para esto, se realiza un análisis teórico y numérico de las ecuaciones obtenidas en cada paso de tiempo cuando se discretiza el término de convección no lineal del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que modela el transporte de petróleo y agua. En el trozo de tubería completo, el flujo centro-anular agua-petróleo se consideró suficientemente suave (laminar) de manera tal que este patrón se mantiene hasta cierto tiempo  $T$ , la interfaz entre ambos fluidos nunca es adyacente a la pared de la tubería y se puede parametrizar de manera adecuada mediante una función bien regular. Con esto, la evolución de la interfaz, como superficie libre, se modela mediante la ecuación de transporte y las condiciones de transmisión sobre esta se establecen mediante la continuidad del campo de velocidad y el balance del esfuerzo normal con la tensión superficial.

Bajo las consideraciones señaladas arriba, en este trabajo se tomó como caso de estudio el flujo bifásico bidimensional en una configuración no axisimétrica. De esta manera, geoméricamente, el flujo bifásico agua-petróleo fue abstraído como



un dominio de  $\mathbb{R}^2$  válido para el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. Como estrategia DFC, en una primera etapa se propuso una semidiscretización temporal, basada en la combinación del método de las características y el método ALE (*Arbitrary Eulerian-Lagrangian*), que condujo a un sistema generalizado de Stokes con condiciones no estándar de frontera en cada paso de tiempo. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales fue escrito en términos de una formulación variacional equivalente y se demostró que es un problema bien planteado en el sentido de distribuciones. A partir de esta formulación variacional, se realizó una discretización de elementos finitos basada en el elemento de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$  como segunda estrategia DFC. De esta discretización se obtuvo un sistema de ecuaciones algebraicas lineales bien planteado y cuya solución es estable ya que satisface una condición inf-sup discreta. Estos aspectos de la DFC permitieron establecer un método confiable para simular el flujo bifásico agua-petróleo en una tubería horizontal, el cual se verificó en un paso de tiempo para un problema de prueba específico.

El trabajo está organizado como sigue. En el Capítulo I se presentan las ecuaciones no lineales que modelan el flujo bifásico no axisimétrico y el problema generalizado de Stokes que debe ser resuelto en cada paso de tiempo. El Capítulo II está dedicado a la formulación variacional del problema generalizado de Stokes y a su buen planteamiento en el sentido de distribuciones. En el Capítulo III se realiza el estudio numérico de la estrategia DFC propuesta. Una implementación detallada de la estrategia DFC se presenta en el Capítulo IV. Posteriormente en el Capítulo V se presenta una simulación para el problema de prueba elegido y se da una interpretación desde el punto de vista físico. Finalmente las conclusiones y algunas perspectivas para trabajos futuros son dadas en el Capítulo VI.

# CAPÍTULO I

## Modelo no lineal del flujo bifásico y problema generalizado de Stokes

En este estudio se considera que los dos componentes del fluido, el agua y el petróleo, son no miscibles e incompresibles de manera que las ecuaciones de *Navier-Stokes* modelan el comportamiento del flujo en la tubería tal como lo establece Maury *et al.* en [33].

En una sección longitudinal de un trozo de tubería, el fluido de baja viscosidad (agua) es adyacente a la pared de la misma y está envolviendo al fluido de alta viscosidad (petróleo); en patrón tipo centro-anular [29]. Se supone que el flujo es suficientemente suave, Reynolds bajos, de tal manera que esta situación se tiene hasta cierto tiempo  $T$ . Es decir, si  $\mu$  es la viscosidad del fluido (propiedad de los fluidos que mide la *resistencia al flujo*),  $\rho$  la densidad,  $\bar{v}$  la velocidad promedio del fluido en una tubería de diámetro  $D$  y por definición el *número adimensional de Reynolds* viene dado por la expresión

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu},$$

entonces la suposición de que el régimen de flujo sea *suave* o *laminar* es equivalente a decir que  $Re < 2000$  [41]. Por lo tanto, en el tiempo inicial puede considerarse que las interfaces entre los dos fluidos son líneas rectas, que nunca son adyacentes a las paredes de la tubería y que siempre hay una distancia suficientemente considerable entre ellas que minimiza la posibilidad de choques entre si [18].

Las ecuaciones de las superficies libres están dadas por la *ecuación de transporte* y las condiciones de transmisión sobre cada interfaz son:

- 1) la continuidad de la velocidad y

2) el balance de esfuerzos normal con la tensión superficial.

## 1. Modelo no lineal de flujo bifásico agua-petróleo

Considere el flujo bifásico 2 –  $D$  ilustrado en la figura I.1 que muestra el dominio físico,  $\Omega$ , formado por un trozo de sección transversal de la tubería.

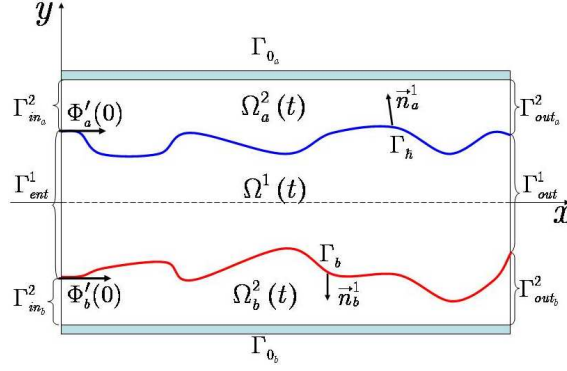


Figura I.1: Dominio  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$

Para cada tiempo  $t \in [0, T]$ , el dominio  $\Omega$  se descompone en dos subdominios  $\Omega^1(t)$  y  $\Omega^2(t)$ . Aquí, el subdominio  $\Omega^1$  es la región ocupada por el fluido pesado (el petróleo) y  $\Omega^2$  es la región ocupada por el agua. Esta última región,  $\Omega^2$ , está dividida en dos subregiones: una *superior* y otra *inferior* que se denotará por  $\Omega_a^2$  y  $\Omega_b^2$ , respectivamente, y tales que

$$\Omega^2(t) = \Omega_a^2(t) \cup \Omega_b^2(t).$$

Por otro lado la frontera de  $\Omega^i$ , respectivamente para cada  $i = 1, 2$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} \partial\Omega^1(t) &= \Gamma_{in}^1 \cup \Gamma_{out}^1 \cup \Gamma_a(t) \cup \Gamma_b(t), \\ \partial\Omega^2(t) &= \Gamma_{in}^2 \cup \Gamma_{out}^2 \cup \Gamma_a(t) \cup \Gamma_b(t) \cup \Gamma_{0a} \cup \Gamma_{0b}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $\Gamma_{in}^1$  y  $\Gamma_{in}^2 = \Gamma_{in_a}^2 \cup \Gamma_{in_b}^2$  representan las fronteras de entrada para cada  $\Omega^i$ ,  $\Gamma_{out}^1$  y  $\Gamma_{out}^2 = \Gamma_{out_a}^2 \cup \Gamma_{out_b}^2$  representan las fronteras de salida para cada subdominio  $\Omega^i$ . Se denotaran, entonces, por  $\Gamma_{in} = \Gamma_{in}^1 \cup \Gamma_{in}^2$  y  $\Gamma_{out} = \Gamma_{out}^1 \cup \Gamma_{out}^2$  las fronteras de entrada y de salida, respectivamente, para todo el dominio  $\Omega$ . Por otro lado  $\Gamma_{0a}$  y  $\Gamma_{0b}$  representan las fronteras correspondientes a las paredes rígidas de la

tubería, y finalmente las interfaces de separación entre ambos componentes dadas por:  $\Gamma_a(t) = \bar{\Omega}^1(t) \cap \bar{\Omega}_a^2$  y  $\Gamma_b(t) = \bar{\Omega}^1(t) \cap \bar{\Omega}_b^2$  en la parte superior y en la parte inferior respectivamente.

En vista de que en el tiempo inicial las interfaces de separación entre ambos componentes son líneas rectas y el flujo es suave durante un cierto tiempo, la parametrización conveniente de estas interfaces viene dada por:

$$\begin{aligned}\Gamma_a &: (x, t) \mapsto \Phi_a(x, t), \\ \Gamma_b &: (x, t) \mapsto \Phi_b(x, t),\end{aligned}$$

de manera tal que la condición de que ambas interfaces no se tocan puede ser expresada matemáticamente de la siguiente manera: existen números  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ , tales que:

$$0 \leq x \leq L, \quad \Phi_a(x, t) - \Phi_b(x, t) > \delta_1 > 0, \quad \Phi_b(x, t) > -D + \delta_2, \quad \Phi_a(x, t) < D - \delta_3; \quad (1.2)$$

y los subdominios están definidos por:

$$\Omega^1(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_b(x, t) < y < \Phi_a(x, t)\}, \quad (1.3)$$

$$\Omega_a^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_a(x, t) < y \leq D\}, \quad (1.4)$$

$$\Omega_b^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad -D \leq y < \Phi_b(x, t)\}, \quad (1.5)$$

donde  $D > 0$  es el radio de la tubería y  $L$  es la longitud.

Para describir la *densidad* y la *viscosidad* en todo  $\Omega$ , se introducen las cantidades  $\rho$  y  $\mu$  dadas por:

$$\rho = \sum_{i=1}^2 \chi^i \rho^i \quad \text{y} \quad \mu = \sum_{i=1}^2 \chi^i \mu^i, \quad (1.6)$$

donde  $\chi^i$  es la función característica del subdominio  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , con  $\chi^2$  definida por  $i = 2$

$$\chi^2 = \chi_{\Omega_a^2 \cup \Omega_b^2} = \chi_{\Omega_a^2} + \chi_{\Omega_b^2}.$$

Aquí  $\rho^i$  y  $\mu^i$  son las densidades y las viscosidades dadas constantes para cada  $i = 1, 2$ .

Los campos de velocidad y de presión se denotan de la forma siguiente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^i(\mathbf{x}, t) = (u_x^i(\mathbf{x}, t), u_y^i(\mathbf{x}, t)), \quad p = p^i(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo} \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega^i \times [0, T], \quad i = 1, 2.$$

Entonces, para cada tiempo  $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$  el problema de Navier-Stokes en este caso se escribe como

$$\begin{cases} \rho^i \left( \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \right) - \mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{g} & \text{en cada } \Omega^i, \ i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{g}$  es la gravedad y

$$\mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i = u_x^i \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x} + u_y^i \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial y}, \quad i = 1, 2.$$

Este sistema de EDP's se complementa con una condición inicial adecuada

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0^i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^i, \ i = 1, 2, \quad (1.8)$$

en donde  $\mathbf{U}_0^i$  es una función suave tal que  $\nabla \cdot \mathbf{U}_0^i = 0$  en  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , y tal que  $\mathbf{U}_0^i(\Gamma_{0_j} \cap \Gamma_{in}^2) = \mathbf{0}$ ,  $j = a, b$ . Por otro lado, las condiciones de frontera que se imponen son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{U} & \text{sobre } \Gamma_{in} \\ \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_{0_j} \text{ para } j = a, b, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{out} \mathbf{n} & \text{sobre } \Gamma_{out}, \end{cases} \quad (1.9)$$

y las condiciones en las interfaces (continuidad de la velocidad y el balance de esfuerzos con la tensión superficial, en las interfaces):

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -\frac{\kappa_j}{R_j} \mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = a, b, \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^i$  sobre  $\Gamma_{in}^i$  para  $i = 1, 2$  denota el vector de velocidad de entrada, dado e independiente del tiempo,  $p_{out}$  es la presión exterior dada en el borde de salida,  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior principal a  $\Omega^i$ ,  $\mathbf{n}_j^1$  denota el vector normal a  $\Gamma_j$ ,  $j = a, b$ , exterior a  $\Omega^1$ ,  $[\cdot]_{\Gamma_j}$  denota el salto sobre  $\Gamma_j$  en la dirección de  $\mathbf{n}_j^1$ ,  $j = a, b$ :

$$[f]_{\Gamma_j} = f|_{\Omega^1} - f|_{\Omega_j^2}.$$

Físicamente, la primera condición en (1.9) representa el campo de velocidad con el cual los fluidos entran a  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , a través de  $\Gamma_{in}$ , la segunda se refiere a la condición de *no deslizamiento* que se impone al campo de velocidad del fluido 2

por estar en contacto con las paredes de la tubería,  $\Gamma_{0_j}$ ,  $j = a, b$ , como elemento sólido del subdominio  $\Omega^2(t)$ , y por último la tercera condición representa el balance de *fuerzas de tensión superficial normal* respecto a la *presión exterior* necesario para establecer el equilibrio con los *esfuerzos* que ambos fluidos ejercen sobre la frontera de salida  $\Gamma_{out}$ . Para detalles sobre este tipo de condiciones de fronteras ver [7], [16] y [17]. Por otro lado,  $\kappa_j > 0$ ,  $j = a, b$ , son constantes geométricas, dadas, relacionadas con la *curvatura media* de las interfaces;  $R_j$ ,  $j = a, b$ , denota el radio de la curvatura con el signo apropiado, es decir, con la convención de que  $R_j > 0$  si el centro de la curvatura de  $\Gamma_j$  está localizado en  $\Omega^1$ ,  $j = a, b$ , y  $\sigma$  es el tensor de esfuerzos dado, para cada  $i = 1, 2$ , por la ecuación constitutiva de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos no compresibles:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) = \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) - p^i \mathbf{I},$$

en donde  $A_1(\mathbf{u}^i) = (\nabla \mathbf{u}^i + (\nabla \mathbf{u}^i)^t)$  es el tensor de *tasa de deformación* (ver [10], [41], [7] y [31]).

Se considera que la velocidad entrante  $\mathbf{U}^i$ ,  $i = 1, 2$ , tiene la forma:

$$\mathbf{U}^i = -U^i(y)\mathbf{n} = (U^i(y), 0)^t, \quad U^i(y) > 0 \quad \forall y \in (-D, D), \quad (1.11)$$

es decir, la velocidad entrante es paralela al vector normal  $\mathbf{n}$  y está dirigida hacia dentro de cada  $\Omega^i$ . Aún más, se considera que  $U^i(D) = U^i(-D) = 0$ ; así que  $\mathbf{U}^i$  satisface la condición de compatibilidad:

$$\mathbf{U}^2(\Gamma_{0_j} \cap \Gamma_{in}^2) = \mathbf{0} \quad \text{por cada } j = a, b. \quad (1.12)$$

Finalmente, la ecuación para el movimiento de las superficies libres  $\Gamma_j$ ,  $j = a, b$ , viene dada por

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = u_y \quad \text{para cada } j = a, b, \quad (1.13)$$

con las condiciones, inicial y de borde, siguientes:

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, 0) &= \pm y_0 \quad \forall x \in [0, L] \quad j = a, b, \\ \Phi_j(0, t) &= \pm y_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad j = a, b, \end{aligned}$$

donde  $y_0 \in (-D, D)$  es una constante dada que toma el signo + si  $j = a$  y el signo - si  $j = b$ .

## 2. Semidiscretización en tiempo

Para resolver numéricamente el problema, se utilizará como estrategia DFC una combinación del método de las características con el método implícito ALE (*Arbitrary Eulerian-Lagrangian*) y el método de los elementos finitos (MEF) [34]. Con esta técnica, las magnitudes escalares, vectoriales y/o tensoriales asociadas al problema de flujo se expresan en un tipo de coordenadas específicas que relacionan las coordenadas espaciales y materiales del dominio  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ . Esto se justifica por el hecho de que sobre la frontera de  $\Omega^i$  se han impuesto condiciones de fronteras sobre puntos espaciales fijos y sobre puntos materiales; es decir sobre las interfaces  $\Gamma_j$ , para  $j = a, b$ , que se mueven y se deforman. Bajo estas premisas se tiene que la trayectoria de las partículas está basada en la velocidad relativa del fluido con respecto a la del dominio en movimiento, y no basada en el campo de velocidad  $\mathbf{u}^i$  para cada  $i = 1, 2$ . Entonces, cuando el término de convección no-lineal en las ecuaciones de Navier-Stokes (1.7) es discretizado por el método de las características (ver [9], [3] y [1]), la posición  $\mathbf{x}$  de la partícula del fluido en el tiempo  $t$  es una función de  $t$ , y la expresión

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \right)$$

es de hecho la derivada total (o en su efecto la material)  $\frac{d\mathbf{u}^i}{dt}$ ,  $i = 1, 2$ . Para detalles, se refiere al lector a Maury y Pironneau en [34] y [36] respectivamente. Ahora, si el dominio se está moviendo con velocidad  $\mathbf{c}^i$ , la velocidad relativa de la partícula es  $\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i$ . Por lo tanto, se reemplaza

$$\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \quad \text{por} \quad \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + (\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i) \cdot \nabla \mathbf{u}^i$$

y se usa la aproximación

$$\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + (\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i) \cdot \nabla \mathbf{u}^i \simeq \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, t + \delta t) - \mathbf{u}^i(\mathbf{X}, t)),$$

donde  $\mathbf{X}$  es la posición inicial de la característica al tiempo  $t$ , conveccionada por  $\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i$ . Así cada ecuación de (1.7) está discretizada, en el tiempo, por:

$$\rho^i \frac{\mathbf{u}_m^{i,m+1} - \mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)}{\delta t} - \mu^i \Delta \mathbf{u}_m^{i,m+1} + \nabla p_m^{i,m+1} = \rho^i \mathbf{g}, \quad (1.14)$$

donde  $\mathbf{u}_m^{i,m+1}$  es una aproximación de la velocidad del fluido en el tiempo  $t^{m+1}$ , definida sobre el dominio aproximante en el tiempo  $t^m$ , y  $\mathbf{X}^m$  es una aproximación de la posición ocupada por la partícula-fluido en  $t^m$ . Lo anterior no es más que el resultado de una discretización en *diferencias finitas*, hacia adelante con respecto al tiempo, del *operador diferencial total*; es decir:

$$\frac{d\mathbf{u}^i}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}_m^{i,m+1} - \mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)}{\delta t}.$$

En cada tiempo  $t^m$  las ecuaciones (1.14), conocidas como ecuaciones de *momentum*, son de la forma (para simplificar, suprimimos la dependencia sobre  $m$ ):

$$\begin{cases} \alpha\rho^i\mathbf{u}^i - \mu^i\Delta\mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i\mathbf{g} + \rho^i\alpha\mathbf{w}^i & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (1.15)$$

donde  $\alpha$  se usa para representar a  $1/\delta t$  y  $\mathbf{w}^i$  para representar a  $\mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)$  (conocida en un paso anterior  $t^{m-1}$ ). Las condiciones de borde están dadas por (1.9) y al problema planteado en estos términos se le conoce con el nombre de *problema generalizado de Stokes* (ver [24] y [26]), el cual debe ser resuelto en cada paso del tiempo dada la superficie que describe a cada interfaz. La primera condición para las interfaces (1.10) queda igual, y ya que la posición de cada interfaz es ahora conocida, la segunda condición se simplifica y (1.10) se transforma en:

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -K_j\mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = a, b, \quad (1.16)$$

donde  $K_j$ , que se usa para representar a  $\kappa_j/R_j$ ,  $j = a, b$ , es ahora una función conocida. Finalmente (1.15), (1.9) y (1.16) son las expresiones que definen al problema generalizado de Stokes con condiciones de frontera no estándar.

En este trabajo la ecuación (1.13) junto con sus condiciones inicial y de frontera no se utilizan explícitamente en el *problema linealizado*, pues se ha considerado que la posición de cada interfaz es conocida; en un trabajo posterior se usará para resolver el problema *no lineal* completo.



# CAPÍTULO II

## Formulación variacional y buen planteamiento

La técnica de discretización espacial del problema de flujo bifásico en cada paso del tiempo estará basada, tal como se mencionó en el Capítulo I, en el MEF. Esta técnica es una de las más usadas y desarrolladas matemáticamente para estudiar problemas relacionados con el *flujo de fluidos viscosos e incompresibles* [27], pues existe una gran cantidad de resultados teóricos, fundamentados en el análisis funcional, que se usan para establecer el *buen planteamiento* de los mismos en pro de obtener también buenas simulaciones computacionales del proceso o fenómeno asociado con tales problemas [5]. Básicamente, el MEF requiere de una *formulación variacional adecuada* del problema y de la elección de *espacios funcionales admisibles* para el análisis teórico continuo, discreto y posterior implementación computacional [22]. En problemas generalizados de Stokes como el que se está tratando en este trabajo, en donde las incógnitas son campos vectoriales y escalares mezclados, es necesario plantear una *formulación variacional mixta equivalente* (ver [20]) para estudiar su *buen planteamiento* o, lo que es igual, la *existencia, unicidad y estabilidad* de la solución  $(\mathbf{u}^i, p^i)$  del problema en el dominio  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , por cada pasao de tiempo; este es el objetivo principal del capítulo presente.

### 1. Preliminares.

En esta sección se introducen los espacios de Sobolev, las normas y desigualdades que principalmente se emplearon en este trabajo. Para detalles se sugieren las referencias [32] y [2].

Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de frontera  $\partial\Omega$ , el espacio de Sobolev de funciones

$H^m(\Omega)$  se define como:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial^k v \in L^2(\Omega) \forall |k| \leq m\},$$

donde  $|k| = k_1 + k_2$  con  $(k_1, k_2)$  un par de enteros no negativos (en dimensión dos) y

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}.$$

Este espacio está dotado con la seminorma

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left[ \sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |\partial^k v|^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

y es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left[ \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

El producto escalar en  $L^2(\Omega)$  es denotado por  $(\cdot, \cdot)$ . Las definiciones de este espacio se extienden sin problemas a vectores, con la misma notación.

Por otro lado  $\mathcal{D}(\Omega)$  denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  denota el espacio dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  y  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  coincide con  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ . En la referencia [32] se encuentra muy bien expuesta la definición de espacios de orden fraccional tal como  $H^s(\Omega)$  donde  $s$  es un número real. En particular, se denotará por  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  el espacio de las funciones trazas de  $H^1(\Omega)$  sobre el borde  $\partial\Omega$  y por  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  su espacio dual. La traza  $\gamma$  es una aplicación continua de  $H^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  y existe una constante  $C$  tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalmente, se considera que la desigualdad de Poincaré es valida en el siguiente subespacio de  $H^1(\Omega)$ : sea  $\Gamma$  una parte de  $\partial\Omega$  con medida positiva,  $|\Gamma| > 0$ , y sea

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\}.$$

Entonces existe una constante  $\mathcal{P}$ , dependiente solo de  $\Omega$  y  $\Gamma$  tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{P} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Además, se dota a  $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$  con la seminorma  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = |v|_{H^1(\Omega)}$ .

## 2. Formulación variacional

A continuación se replanteará el problema (1.15), (1.9), (1.16) en una formulación variacional equivalente. No se toma en cuenta la interpretación de  $K_j$  para cada  $j = a, b$ , por lo tanto es suficiente considerar que las interfaces  $\Gamma_j$  son continuas Lipschitz al igual que cada subdominio  $\Omega^i$ . Por otro lado, la función dada  $U$  pertenece al espacio  $H^1(-D, D)$ , la presión de salida  $p_{out}$  al espacio  $L^2(\Gamma_{out})$  y las funciones conocidas  $K_j$  al espacio  $L^2(\Gamma_j)$  para cada  $j = a, b$ .

En primer lugar, se considera el problema donde la primera ecuación dada en las condiciones de frontera (1.9) es reemplazada por  $\mathbf{U}^i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2$ , clásicamente conocida como condición de *Dirichlet* homogénea:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_{int}^i.$$

Posteriormente, una extensión adecuada de  $\mathbf{U}^i$  será considerada para resolver el problema (1.15), (1.9), (1.16). En vista de las condiciones de frontera se puede, entonces, elegir el siguiente espacio para la velocidad:

$$X = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2; \mathbf{v}|_{\Gamma_{int}} = \mathbf{0}, \mathbf{v}|_{\Gamma_{0j}} = \mathbf{0} \text{ para } j = a, b \right\}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, como las condiciones de transmisión sobre las interfaces y la condición de flujo a la salida involucran al tensor de esfuerzos  $\sigma$ , entonces la presión no tiene ninguna constante indeterminada y por lo tanto el espacio para la presión es:

$$M = \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; q \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.2)$$

Como es usual, se define el espacio de las velocidades con divergencia cero:

$$V = \{\mathbf{v} \in X; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}. \quad (2.3)$$

Ahora, dado que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , para la formulación variacional se tiene en cada  $\Omega^i$  la siguiente identidad

$$\Delta \mathbf{u}^i = \nabla \cdot A_1(\mathbf{u}^i).$$

A continuación se toma el producto escalar de la primera ecuación de (1.15) en

$[L^2(\Omega^i)]^2$  con una función de prueba  $\mathbf{v} \in X$  para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left( \alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} \mu^i \Delta \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^i} \nabla p^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) = \\ \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En vista de la identidad señalada anteriormente, otras identidades del cálculo tensorial, el Teorema de la Divergencia y el hecho de que el tensor  $A_1$  es simétrico, entonces el segundo término del lado izquierdo de (2.4) se transforma en:

$$\int_{\Omega^i} \mu^i \Delta \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^i} \mu^i (A_1(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad i = 1, 2,$$

donde

$$A_1(\mathbf{u}^i) : \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}), \quad i = 1, 2$$

y la operación ":" se define para dos tensores cualesquiera  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  como

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}.$$

Análogamente, si se trabaja el tercer término del lado izquierdo en (2.4) se tiene que:

$$\int_{\Omega^i} \nabla p^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^i} p^i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad i = 1, 2.$$

Sustituyendo en (2.4) las expresiones encontradas anteriormente, se obtiene la siguiente expresión para la formulación variacional:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left( \alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) = \\ \sum_{i=1,2} \left( \int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega^i} [-\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) + p^i \mathbf{I}] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por la definición del tensor  $\sigma$ , de cada  $\partial\Omega^i$  con sus respectivas condiciones, y por las condiciones (1.16) impuestas en las interfaces, entonces el término integral en la frontera del dominio se transforma, para cada  $i = 1, 2$ , en:

$$\int_{\partial\Omega^i} [-\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) + p^i \mathbf{I}] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Gamma_{out}} p_{out}^i \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Sustituyendo en (2.5), se tiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \left( \alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) \\
&= \sum_{i=1,2} \left( \int_{\Omega} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}^i} p_{out}^i \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \right) \\
&\quad - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

con la condición de divergencia cero, que se puede escribir

$$\forall q \in L^2(\Omega^i), \quad \sum_{i=1,2} - \int_{\Omega^i} q \nabla \cdot \mathbf{u}^i \, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.7}$$

En otras palabras, se tiene la siguiente formulación variacional para el problema homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}^i \in X \text{ y } p^i \in M \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^i) = \sum_{i=1,2} \ell(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M, \quad \sum_{i=1,2} b(\mathbf{u}^i, q) = 0, \end{array} \right. \tag{2.8}$$

en donde:

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

es una *forma bilineal* definida sobre  $X \times X$  como:

$$a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) = \alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v}^i \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2,$$

por otro lado

$$b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

es una *forma bilineal* definida sobre  $X \times M$  mediante la siguiente expresión:

$$b(\mathbf{v}, p^i) = - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

y finalmente

$$\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$$

es una *forma lineal* definida sobre  $X$  mediante:

$$\ell(\mathbf{v}) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad i = 1, 2.$$

## 2.1. Equivalencia.

La prueba de equivalencia entre el problema de frontera (1.15), (1.9), (1.16) y su formulación variacional (3.10) se basa esencialmente en la *densidad* de funciones regulares en el espacio al cual pertenecen, lo cual es apropiado para el operador de *Stokes* sobre un dominio  $\Omega$  en una dimensión arbitraria  $n$ . Es necesario entonces establecer antes un resultado de equivalencia, para lo cual se ha seguido muy de cerca la referencia [25] y para simplificar la notación se ha suprimido el superíndice  $i$ .

Sea entonces, en particular para  $n = 2$ , el siguiente espacio:

$$W = \{(\mathbf{L}, p) \in L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega); \Theta \in L^2(\Omega)^2, \nabla(\text{tr}\mathbf{L}) \in L^2(\Omega)^2\},$$

donde  $\Theta = \nabla \cdot (-\mu\mathbf{L} + p\mathbf{I})$  y  $\text{tr}\mathbf{L}$  denota la traza del tensor  $\mathbf{L}$ . Este es un espacio de *Hilbert* para la norma *graph* dada por

$$\|(\mathbf{L}, p)\|_W = \left( \|\mathbf{L}\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Theta\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\nabla(\text{tr}\mathbf{L})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, el operador de *Stokes* está relacionado con el espacio  $W$  a través de la siguiente identidad:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^2, \forall p \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \nabla \cdot (-\mu A_1(\mathbf{u}) + p\mathbf{I}) = -\mu\Delta\mathbf{u} - \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla p.$$

De allí, y dado a que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\text{tr}A_1(\mathbf{u})$ , si  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$  y  $p \in L^2(\Omega)$  se satisface

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ en } \Omega, \end{aligned} \tag{2.9}$$

con  $\mathbf{f}$  en  $L^2(\Omega)^2$ , entonces el par  $(A_1(\mathbf{u}), p)$  pertenece al siguiente subespacio de  $W$ :

$$W_s = \{(\mathbf{L}, p) \in W; \mathbf{L} \text{ es simétrico}\}. \tag{2.10}$$

A continuación se enuncia el teorema de densidad y un corolario que son fundamentales para concluir con la prueba de equivalencia. La prueba tanto del teorema como del corolario se basa en argumentos clásicos, y un esquema puede ser encontrado en el artículo [25].

**Teorema 1.** Sea  $\Omega$  un dominio acotado Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^{2 \times 2} \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  es denso en  $W$ .

**Observación 1.** La prueba del Teorema 1 trae como consecuencia que si  $\mathcal{D}_s(\bar{\Omega})^{2 \times 2}$  es el subespacio de los tensores simétricos de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^{2 \times 2}$ , entonces  $\mathcal{D}_s(\bar{\Omega})^{2 \times 2} \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{2 \times 2}$  es denso en  $W_s$ .

De manera indirecta, la fórmula de Green fue aplicada para plantear la formulación variacional. Retomando de nuevo este punto, para cada  $(\mathbf{L}, p) \in \mathcal{D}_s(\bar{\Omega})^{2 \times 2}$  y toda  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^2$  se tiene que:

$$\int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I})^t \mathbf{v}] \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Por el teorema de la divergencia y por la simetría del tensor  $(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I})$ , la expresión anterior se transforma en:

$$\int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial \Omega} [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{v}] \mathbf{n} \, ds + \int_{\Omega} (\mu \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

en donde  $p \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} = p \nabla \cdot \mathbf{v}$ , luego

$$\int_{\partial \Omega} [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mu \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 1 y su prueba se tiene de manera inmediata por argumentos conocidos del análisis funcional (ver [12] por ejemplo).

**Corolario 1.** Para todo  $(\mathbf{L}, p) \in W$ , la traza

$$(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)^2$$

satisface, con una constante  $C$  que depende solamente de  $\Omega$ , la cota siguiente

$$\|(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)^2} \leq C \|(\mathbf{L}, p)\|_W,$$

y se tiene la siguiente fórmula de Green

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \langle (-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\partial \Omega} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mu \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial \Omega}$  denota el producto dual entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)^2$  y  $H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega)^2$ .

En este punto, retomando la notación con el superíndice  $i$ , ya se está en capacidad de probar la equivalencia entre el problema con condiciones de frontera y su formulación variacional. En este orden de ideas ya se ha probado que cualquier solución  $(\mathbf{u}^i, p^i) \in X \times M$  de (1.15), (1.9), (1.16) es solución de la formulación variacional (3.10). Inversamente, si  $(\mathbf{u}^i, p^i)$  es una solución de la formulación variacional (3.10), entonces la segunda ecuación de (3.10) da inmediatamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 \text{ en } \Omega^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Después, tomando  $\mathbf{v}^i$  en  $\mathcal{D}(\Omega^i)^2$  para la primera ecuación de (3.10) y aplicando (2.13) con la identidad  $\nabla \cdot (A_1(\mathbf{u}^i)) = \Delta \mathbf{u}^i$ , se obtienen las *ecuaciones interiores* en  $\Omega^1$  y  $\Omega^2$  respectivamente, en el sentido de distribuciones:

$$\alpha \rho^i \mathbf{u}^i - \mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{g} + \rho^i \alpha \mathbf{w} \quad \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2,$$

es decir, se recupera el sistema (1.15). Este sistema se escribe también:

$$\alpha \rho^i \mathbf{u}^i - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) = \rho^i \mathbf{g} + \rho^i \alpha \mathbf{w}, \quad i = 1, 2.$$

A continuación se recuperan las *ecuaciones de frontera*. En tal sentido, como  $\mathbf{u}^i \in X$  entonces el *salto* de  $\mathbf{u}^i$  se anula sobre cada interfaz, es decir:

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \quad j = a, b.$$

Para recuperar las otras condiciones en la frontera, se multiplica cada ecuación de (1.15) en  $\Omega^i$  por una función  $\mathbf{v}$  del espacio  $X$ , se aplica la fórmula de Green (2.12) y se compara con la formulación variacional (3.10). En vista del Corolario 1, vale la fórmula de Green pues  $\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \in L^2(\Omega^i)^2$  y  $\nabla(\text{tr} A_1(\mathbf{u}^i)) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . De esta manera se obtiene para todo  $\mathbf{v} \in X$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \mathbf{n}^i, \mathbf{v} \rangle_{\partial \Omega^i} &= - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dado a la hipótesis (1.2) que se ha impuesto sobre cada interfaz, en (2.14) se puede elegir  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ , arbitraria en un entorno de  $\Gamma_a$  y cero en un entorno de  $\Gamma_b$ . Para esta clase de funciones  $\mathbf{v}$  se tiene:

$$\langle \sigma(\mathbf{u}^1, p^1) \mathbf{n}_a^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_a} - \langle \sigma(\mathbf{u}^2, p^2) \mathbf{n}_a^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_a} = - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$



Equivalentemente, con la definición del salto, esto se escribe:

$$\langle [\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)] \mathbf{n}_a^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_a} = - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad i = 1, 2,$$

lo cual implica que

$$[\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)]_{\Gamma_a} \mathbf{n}_a^1 = -K_a \cdot \mathbf{n}_a^1, \quad i = 1, 2.$$

De la misma manera se obtiene

$$[\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)]_{\Gamma_b} \mathbf{n}_b^1 = -K_b \cdot \mathbf{n}_b^1, \quad i = 1, 2.$$

Finalmente tomando  $\mathbf{v} \in X$  tal que  $\mathbf{v}|_{\Gamma_{int}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v}|_{\Gamma_0^2} = \mathbf{0}$ , entonces en (2.14) solo queda el término correspondiente a  $\Gamma_{out}$ . Es decir que

$$\langle \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_{out}} = - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Por lo tanto

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{out} \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_{out}.$$

Con todo el estudio anterior se ha demostrado la siguiente proposición:

**Proposición 1.** *Los problemas (3.10) y (1.15), (1.9), (1.16) son equivalentes.*

Con el propósito de retomar el problema original con la condición de borde tipo Dirichlet no homogénea sobre  $\Gamma_{int}$ , se construirá una extensión; que se denotará por  $\bar{\mathbf{U}}^i$ , de la velocidad de entrada  $\mathbf{U}^i$  para cada  $i = 1, 2$ .

Por ahora no es necesario que  $\bar{\mathbf{U}}^i$  sea regular, pero se propone una muy simple. Para esto, se recuerda que debido a la geometría de  $\Omega$  la velocidad tiene la forma (1.11)

$$\mathbf{U}^i = (U^i(y), 0)^t, \quad i = 1, 2,$$

donde  $U^i \in H^1(-D, D)$  es una función de  $y$  conocida que satisface

$$U^i(\pm D) = 0.$$

Entonces  $\bar{\mathbf{U}}^i$  se obtiene repitiendo estos valores para todo  $(x, y)$  en  $\Omega$ , es decir

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \bar{\mathbf{U}}^i(x, y) = (U^i(y), 0)^t, \quad (2.15)$$

la cual, claramente tiene divergencia cero, depende continuamente de la función  $U^i$ , pertenece a  $H^1(\Omega)^2$  y satisface la condición de compatibilidad

$$\bar{\mathbf{U}}^2(\Gamma_{0_j} \cap \Gamma_{int}^2) = \mathbf{0} \text{ por cada } j = a, b.$$

Con esto, se propone la siguiente formulación variacional para el problema (1.15), (1.9), (1.16):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}^i \in X + \bar{\mathbf{U}}^i \text{ y } p^i \in M \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^i) = \sum_{i=1,2} \ell(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M, \quad \sum_{i=1,2} b(\mathbf{u}^i, q) = 0, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

con las formas bilineales  $a$  y  $b$ , y el funcional lineal  $\ell$  definidos anteriormente.

### 3. Buen planteamiento

El problema (2.16) es un problema variacional no homogéneo del tipo mixto. La extensión de  $\mathbf{U}^i$  a todo  $\Omega$  que se ha propuesto pertenece al espacio  $V$  definido por (2.3), por lo que el problema de partida (1.15), (1.9), (1.16) tiene asociada tal formulación variacional.

Entonces, en vista de que la extensión  $\bar{\mathbf{U}}^i$  tiene divergencia cero, resolver el problema (1.15) con las condiciones de frontera (1.9) y (1.16) es equivalente a resolver el problema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0^1, \mathbf{u}_0^2) \in V \text{ y } p^i \in M \text{ tales que} \\ \alpha \rho^i \mathbf{u}_0 - \mu^i \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p^i = \rho^i (\mathbf{g} + \rho \alpha \mathbf{w}^i) - (\rho^i \alpha \bar{\mathbf{U}}^i - \mu^i \Delta \bar{\mathbf{U}}^i) \quad \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{U}}^i$ . Por lo tanto, en términos de la formulación variacional abstracta el problema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{U}}^i) \in V \text{ y } p^i \in M \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^i) = \sum_{i=1,2} \ell(\mathbf{v}) - \sum_{i=1,2} a(\bar{\mathbf{U}}^i, \mathbf{v}). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Se dice, entonces, que el buen planteamiento del problema (2.16) (es decir: existencia, unicidad y estabilidad de sus soluciones) es consecuencia de dos propiedades [4]: la *elípticidad* sobre  $V$  ( $V$ -elípticidad) de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , la condición *inf-sup* sobre  $X \times M$  de la forma bilineal  $b(\cdot, \cdot)$  y de la *continuidad* del lado derecho de la expresión (2.18).

La elípticidad se tiene sobre  $X$  (no solamente sobre  $V$ ) y es independiente del parámetro  $\alpha$ . En efecto, para toda  $\mathbf{u} \in X$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x},$$

donde

$$\int_{\Omega} \mu A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \geq \min_{1 \leq i \leq 2} (\mu^i) \int_{\Omega} A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x},$$

con lo cual

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \min_{1 \leq i \leq 2} (\mu^i) \frac{1}{2} \|A_1(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.19)$$

Como el dominio  $\Omega$  es Lipchitz y su frontera  $\partial\Omega$  está formada por partes que tienen medida no nulas y donde las funciones de  $X$  se anulan, entonces por la primera desigualdad de Korn (ver P. Ciarlet [15]): existe una constante  $\lambda$ , que depende solo de  $\Omega$ , tal que:

$$\forall \mathbf{u} \in X, \quad \frac{1}{2} \|A_1(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

luego al sustituir esta desigualdad en (2.19) se obtiene:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \lambda \min_{1 \leq i \leq 2} (\mu^i) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.20)$$

con lo cual se concluye que la forma bilineal  $a$  es  $X$ -elíptica.

Ahora se demuestra que la forma bilineal  $b(\cdot, \cdot)$  cumple con la condición *inf-sup* establecida por la proposición siguiente:

**Proposición 2.** *Existe una constante  $\beta > 0$  tal que*

$$\forall q \in M, \quad \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.21)$$

*Demostración.* La condición *inf-sup* es un resultado que se conoce cuando  $q$  tiene valor promedio nulo en el dominio  $\Omega$ . En el caso del flujo bifásico que se está estudiando  $q$  no tiene esta restricción debido a que las condiciones sobre la velocidad en toda la frontera,  $\partial\Omega$ , no son todas del tipo *Dirichlet*. Hay varias formas de probar este resultado. La más fácil, según Girault *et al.* en [25], es considerando la extensión

$$q = \tilde{q} + \bar{q}$$

en donde

$$\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x}$$

y tal que  $\tilde{q} = (q - \bar{q})$  tiene valor promedio nulo en el dominio  $\Omega$ . Es decir, se garantiza que  $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$ . Con esto y con el hecho de que  $\Omega$  es Lipschitziano y conexo, entonces el operador gradiente es un isomorfismo del espacio  $L_0^2(\Omega)$  sobre el *espacio polar*  $V^0$  de  $V$ . Por lo tanto para una constante  $\tilde{\beta} > 0$  dependiendo sólo de  $\Omega$ , se tiene que:

$$\forall \tilde{q} \in L_0^2(\Omega); \quad \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)} \geq \tilde{\beta} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De igual forma el operador divergencia es un isomorfismo del espacio *ortogonal*  $V^\perp$  de  $V$ , sobre  $L_0^2(\Omega)$ , y por lo anterior con la misma constante  $\tilde{\beta}$  se tiene:

$$\forall \mathbf{v} \in V^\perp; \quad \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{\beta} |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

Ahora, con las premisas anteriores y un resultado encontrado en [24], para toda  $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$  existe una única  $\tilde{\mathbf{v}}$  en  $[H_0^1(\Omega)]^2$  tal que:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{q} \quad \text{y} \quad \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.22)$$

con la misma  $\tilde{\beta} > 0$ . Se escoge entonces  $\bar{\mathbf{v}} = |\Omega| \bar{q} \boldsymbol{\varrho} \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior unitaria a  $\Gamma_{out}$  (es decir que:  $\mathbf{n} = (1, 0)^t$ ) y  $\boldsymbol{\varrho}$  es una función suave no negativa que se anula idénticamente en un entorno de  $\partial\Omega$  excepto en el entorno de  $\Gamma_{out}$ ; su traza sobre  $\Gamma_{out}$  tiene soporte compacto y satisface que

$$\int_{\Gamma_{out}} \boldsymbol{\varrho} \, ds = 1. \quad (2.23)$$

La elección de  $\bar{\mathbf{v}}$  se justifica por el hecho de que

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Entonces, finalmente (2.21) se establece por la técnica de Boland y Nicolaidis [11], la cual consiste en asociar a  $q$  una combinación lineal adecuada de  $\tilde{\mathbf{v}}$  y  $\bar{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{v} = \gamma \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}},$$

en donde  $\gamma$  es una constante a elegir. Así, se tiene que:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \gamma \int_{\Omega} \tilde{q}^2 \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \tilde{q} \bar{q} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tilde{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x},$$

en donde se ha usado, por (2.22), el hecho de que  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{q}$ . Por otro lado como  $\bar{q}$  es constante y  $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$ , entonces:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \gamma \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \tilde{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Usando la definición de  $\bar{\mathbf{v}}$ , la desigualdad de Cauchy-Schwartz y eligiendo  $\gamma = |\Omega| \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)}^2$ , entonces en definitiva se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &\geq |\Omega| \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 - |\Omega|^{1/2} \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora, como se está trabajando en el espacio funcional  $L^p(\Omega)$  con  $p = 2$ , por la desigualdad de Young (ver [12]) aplicada al segundo término del lado derecho en (2.25) se establece que

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq C_1 \left( \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (2.26)$$

en donde  $C_1 = \frac{1}{2} \min(\gamma, 1)$ . Por otro lado, tomando en consideración (2.22), la definición de la velocidad  $\bar{\mathbf{v}}$  y la elección de  $\gamma$  se obtiene que

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.27)$$

con

$$C_2 = |\Omega| \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)} \left( \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \right)^{1/2}.$$

Como  $q = \tilde{q} + \bar{q}$  es una descomposición ortogonal, entonces

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

y por lo tanto (2.27) se transforman en

$$\frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{C_2 \sqrt{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2}}. \quad (2.28)$$

LA prueba finaliza combinando (2.26) con (2.28) para obtener la condición inf-sup

$$\frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{con } \beta = \frac{C_1}{C_2}. \quad \blacklozenge$$

Finalmente, debido a la regularidad que se ha impuesto sobre la data, el funcional lineal  $\ell(\mathbf{v})$  es un elemento del espacio dual;  $H^{-1}(\Omega)^2$ , de  $H^1(\Omega)^2$  y los resultados de trazas, se tiene la continuidad del lado derecho de la expresión (2.18). Entonces por la teoría de Babuška-Brezzi (ver [6] y [13]) se ha probado la siguiente proposición con la cual finalizamos este capítulo

**Proposición 3.** *El problema (2.16) está bien planteado.*

# CAPÍTULO III

## Estudio numérico de la estrategia DFC

A partir de la formulación variacional se establecen los espacios funcionales *infinito-dimensionales* [23], sobre los que una única *solución débil* del problema de frontera fuerte existe y es estable. Lo que debe hacerse a continuación, como estrategia DFC, es formular el *problema discreto* análogo para aproximar tal solución.

Una vez que se ha establecido la característica del espacio finito-dimensional (de dimensión finita), lo que se hace es *elegir adecuadamente* una *base* que lo genere, y a partir de ésta se construye por *combinación lineal* una sucesión de elementos que se aproximará a la solución del problema variacional toda vez que la sucesión de espacios finito-dimensionales se aproxime al espacio funcional infinito-dimensional sobre el cual el problema variacional continuo está bien planteado. La elección de los espacios juega un rol importante debido a que un cambio en estos puede modificar considerablemente el conjunto de soluciones, y por lo tanto la aproximación no será la deseada ([27] y [5]).

En este capítulo se presenta una discretización del problema variacional basada en el MEF para aproximar la solución y un estudio numérico de la estabilidad de la solución como parte de la estrategia DFC.

### 1. Discretización del dominio y formulación variacional discreta

Teniendo en cuenta que  $K_j$ , para cada  $j = a, b$ , está relacionada con la tensión superficial y las hipótesis de regularidad especificadas en el Capítulo anterior, a partir de ésta sección se considera que cada  $\Gamma_j$  es una curva de clase  $\mathcal{C}^1 \cap H^2(\Omega)$  con una tangente horizontal en el punto de entrada  $(0, y_0)$  para  $\Phi_a$  y en  $(0, -y_0)$

para  $\Phi_b$ , es decir

$$\Phi'_a(0) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi'_b(0) = 0.$$

Entonces se triangulariza por separado cada subdominio  $\Omega^i$  usando una triangulación  $\mathcal{T}_h^i$ , de manera que la triangulación global sea conforme y viene dada por

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2,$$

con  $\mathcal{T}_h^2 = \mathcal{T}_{h_a}^2 \cup \mathcal{T}_{h_b}^2$ ,  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T)$ , y es regular en el sentido de que no hay solapamiento entre los elementos de la triangulación y existe una constante  $\zeta$  independiente de  $h$  tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \zeta,$$

donde  $h_T$  denota el diámetro de cada  $T$  y  $\rho_T$  es el diámetro del círculo inscrito en  $T$ . También se considera que  $\mathcal{T}_h$  contiene dos líneas poligonales  $\Gamma_{h_a}$  y  $\Gamma_{h_b}$  cuyos nodos están sobre las interfaces  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_b$  respectivamente, entonces se denota por  $\Omega_h^i$  al dominio aproximante de cada  $\Omega^i$ ; es decir: la *región acotada* por  $\Gamma_{h_a}$ ,  $\Gamma_{h_b}$ ,  $\Gamma_0^i$ ,  $\Gamma_{in}^i$  y  $\Gamma_{out}^i$  tal como se ilustra en la Figura III.1.

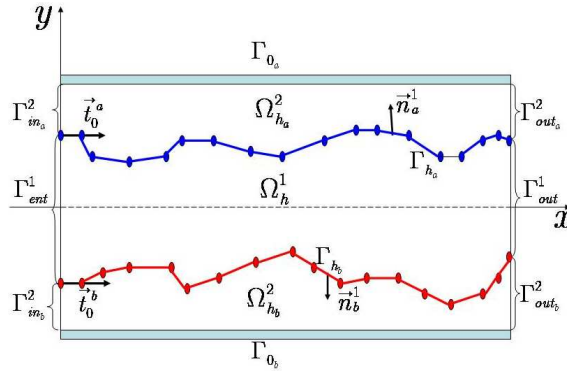


Figura III.1: Dominio  $\Omega_h$  y frontera  $\partial\Omega_h$

Seguendo Girault y Raviart [24], se aproxima cada componente de la velocidad en cada triángulo  $T$  por un polinomio de grado dos, y la presión se aproxima en cada triángulo por un polinomio de grado uno; aproximación basada en el elemento finito mixto y conforme de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$ . Ambas aproximaciones son continuas excepto posiblemente para la presión sobre cada interfaz  $\Gamma_j$ ,  $j = a, b$ ,



ya que no existe alguna razón física para que la solución exacta de la presión sea continua sobre  $\Gamma_j$  como en el caso de la velocidad. Así, se discretizan  $X$  y  $M$  por:

$$\begin{aligned} X_h &= \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h)^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in P_2^2 \} \cap X, \\ M_h &= \{ q_h = (q_h^1, q_h^2) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h^1) \times \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h^2); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in P_1 \}, \\ V_h &= \{ \mathbf{v}_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Otro aspecto que se debe considerar, antes de proponer la formulación variacional discreta, se refiere a la aproximación del término integral que toma en cuenta la tensión superficial:

$$K_j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_j} K_j \mathbf{n}_j^1 \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad j = a, b.$$

La aproximación que se propone viene motivada por el hecho de que con la convención de signos para cada  $R_j$ , se tiene:

$$\frac{\mathbf{n}_j^1}{R_j} = -\frac{\mathbf{n}_j}{\bar{R}_j} = \frac{d\mathbf{t}_j}{ds}, \quad j = a, b,$$

donde  $\mathbf{t}_j$  es la tangente a  $\Gamma_j$  en la direcci3n donde se incrementa  $s$ , que es la misma direcci3n en la que se incrementa  $x$ ,  $\mathbf{n}_j$  es el vector normal principal a  $\Gamma_j$ , es decir, paralelo a  $\mathbf{n}_j^1$  y dirigido hacia el *centro de curvatura* de  $\Gamma_j$  y  $\bar{R}_j$  es el *radio de curvatura* positivo, es decir,  $\bar{R}_j = R_j$  si el centro de curvatura esta localizado dentro de  $\Omega^1$  y  $\bar{R}_j = -R_j$  si el centro de curvatura esta hacia el otro lado fuera de  $\Omega^1$ . Por lo tanto, en el caso de las funciones de prueba  $\mathbf{v}_h \in X_h$  se tiene

$$K_j(\mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma_j} \kappa_j \mathbf{v}_h \cdot \frac{d\mathbf{t}_j}{ds} \, ds = \kappa_j \int_{\Gamma_j} \mathbf{v}_h \cdot \frac{d\mathbf{t}_j}{ds} \, ds, \quad j = a, b. \quad (3.2)$$

Ahora, sean

$$\mathbf{x}_r^j = (x_r^j, y_r^j = \Phi_j(x_r^j)), \quad 0 \leq r \leq N, \quad j = a, b$$

los puntos definidos sobre cada  $\Gamma_j$ , con:

$$0 = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{(N-1)}^j < x_N^j = L, \quad j = a, b.$$

Sea  $\tilde{S}_r^j$  el arco de  $\Gamma_j$  con puntos extremos  $\mathbf{x}_r^j$  y  $\mathbf{x}_{r+1}^j$ . La poligonal  $\Gamma_{h,j}$  se construye en base a las lneas rectas formadas mediante la uni3n de los nodos  $\mathbf{x}_r^j$  a  $\mathbf{x}_{r+1}^j$  para

cualquier  $0 \leq r \leq N - 1$ , y se denota por  $S_r^j$  al segmento  $[\mathbf{x}_r^j, \mathbf{x}_{r+1}^j]$ . Entonces, se define la tangente unitaria  $\mathbf{t}^j$  a lo largo del segmento  $S_r^j$  como:

$$\mathbf{t}_r^j = \frac{\mathbf{x}_{r+1}^j - \mathbf{x}_r^j}{|\mathbf{x}_{r+1}^j - \mathbf{x}_r^j|}, \quad 0 \leq r \leq N, \quad j = a, b,$$

y se aproxima cada  $K_j(\mathbf{v}_h)$  por medio de la siguiente fórmula:

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad K_{h_j}(\mathbf{v}_h) = \kappa_j \sum_{r=1}^{N-1} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_r^j) \cdot (\mathbf{t}_r^j - \mathbf{t}_{r-1}^j), \quad j = a, b. \quad (3.3)$$

También, se definen la densidad  $\rho_h$  y viscosidad  $\mu_h$  aproximadas por

$$\rho_h|_{\Omega_h^i} = \rho^i, \quad \mu_h|_{\Omega_h^i} = \mu^i, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (3.4)$$

En base a todo lo anterior, la formulación variacional discreta viene dada como sigue: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in X_h + \bar{\mathbf{U}}_h$  y  $p_h \in M_h$  solución de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \ell_h(\mathbf{v}_h), \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde se han introducido las formas  $a_h$  and  $\ell_h$ :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \alpha \int_{\Omega} \rho_h \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu_h A_1(\mathbf{u}_h) : A_1(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \ell_h(\mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \rho_h (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, ds - K_{h,a}(\mathbf{v}_h) - K_{h,b}(\mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (3.7)$$

## 2. Análisis de estabilidad uniforme

El primer paso para el análisis numérico del problema (3.5) consiste en probar una *condición inf-sup discreta uniforme* para el par de espacios  $(X_h, M_h)$ . Esta condición es bien conocida para discretizaciones usando el elemento finito Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$  cuando la presión es globalmente continua, y su prueba se basa sobre la condición inf-sup exacta (y [24]). Pero, en este trabajo la presión discreta es

discontinua a travéz de cada interfaz  $\Gamma_{h,j}$ ,  $j = a, b$ , y por lo tanto la prueba debe ser hecha basada sobre la condición inf-sup exacta en cada  $\Omega_h^i$ . Sin embargo esto es delicado porque  $\Omega_h^i$  depende de  $h$ . Es muy probable que la condición inf-sup exacta dependa continuamente del dominio, y ya que  $\Omega_h^i$  tiende a  $\Omega^i$  cuando  $h$  tiende a cero, la constante para  $\Omega_h^i$  está acotada independientemente de  $h$ .

En este trabajo, se demostrará la condición inf-sup discreta para el caso cuando  $\Gamma_{h,j}$ , para cada  $j = a, b$ , se ajusta exactamente a la interfaz  $\Gamma_j$  del problema. Este es el objetivo de la siguiente proposición.

**Proposición 4.** *Sea  $\mathcal{T}_h$  la triangulación previamente definida. Existe una constante  $\beta^* > 0$ , independiente de  $h$ , tal que la siguiente condición inf-sup discreta se tiene:*

$$\forall q_h \in M_h, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta^* \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.8)$$

*Demostración.* La idea subyacente para la prueba es similar a la técnica propuesta por Boland y Nicolaides [11]. Primero, se definen los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} X_h(\Omega_h^i) &= \left\{ \mathbf{v}_h^i = \mathbf{v}_h|_{\Omega_h^i}; \mathbf{v}_h \in X_h \right\}, \\ W_h(\Omega_h^i) &= X_h(\Omega_h^i) \cap H_0^1(\Omega_h^i), \\ M_h(\Omega_h^i) &= \left\{ q_h^i = q_h|_{\Omega_h^i}; q_h \in M_h \right\}, \\ Q_h(\Omega_h^i) &= M_h(\Omega_h^i) \cap L_0^2(\Omega_h^i). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ahora, como la función  $q_h$  no es a promedio nulo en  $\Omega$  entonces se toma la siguiente descomposición ortogonal

$$q_h^i = \tilde{q}_h^i + \bar{q}_h^i$$

con  $\tilde{q}_h^i \in Q_h(\Omega_h^i)$  and  $\bar{q}_h^i$  una función constante dada por:

$$\bar{q}_h^i = \frac{1}{|\Omega_h^i|} \int_{\Omega_h^i} q_h^i d\mathbf{x},$$

donde  $|\Omega_h^i|$  es la medida del subdominio  $\Omega_h^i$  para  $i = 1, 2$ , tal que

$$\|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 = |\Omega_h^i| (\bar{q}_h^i)^2.$$

Asociadas a estas funciones, se construyen dos funciones  $\tilde{\mathbf{v}}_h^i$  and  $\bar{\mathbf{v}}_h^i$  tales que

$$\mathbf{v}_h^i = \gamma^i \tilde{\mathbf{v}}_h^i + \bar{\mathbf{v}}_h^i$$

con  $\gamma^i$  un parámetro a determinar para cada  $i = 1, 2$ . Con esto,  $\mathbf{v}_h \in X_h$  se puede expresar como una combinación de  $\mathbf{v}_h^i$ , para  $i = 1, 2$ , y la función requerida por la teoría de Boland y Nicolaides se obtiene, es decir, tal que para una función  $q_h \in M_h$ :

$$\int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \geq \hat{C} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.10)$$

$$\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.11)$$

donde  $\hat{C} \neq 0$  y  $\tilde{C} \neq 0$  son constantes a determinar. Finalmente, la condición inf-sup se satisface con  $\beta^* = \frac{\hat{C}}{\tilde{C}}$ .

En este orden de ideas, si se considera que la condición inf-sup se satisface por la forma bilineal  $b(\cdot, \cdot)$  y el par de espacios  $(W_h(\Omega_h^i), Q_h(\Omega_h^i))$ , entonces existe una función  $\tilde{\mathbf{v}}_h^i \in W_h(\Omega_h^i)$  tal que

$$\tilde{\mathbf{v}}_h^i|_{\partial\Omega_h^i} = \mathbf{0}, \quad \int_{\Omega_h^i} \tilde{q}_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h^i \, d\mathbf{x} = \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2, \quad \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}$$

con  $\tilde{\beta}$  dependiendo solo de  $\Omega_h$ .

Ahora, se construye  $\bar{\mathbf{v}}_h^i \in X_h(\Omega_h^i)$  con  $\bar{\mathbf{v}}_h^i|_{\Gamma_j} = \mathbf{0}$  para cada  $i = 1, 2$  y  $j = a, b$ . En efecto,  $\bar{\mathbf{v}}_h^i$  se tiene usando la función no negativa  $\varrho$ , mencionada en el Capítulo anterior, ya que se anula idénticamente en un entorno de  $\partial\Omega$  excepto entorno de  $\Gamma_{out}$  y, aún más, su traza  $\Gamma_{out}$  tiene soporte compacto y satisface

$$\int_{\Gamma_{out}} \varrho \, ds = 1.$$

Las propiedades de la función  $\varrho$  son conservadas por sus restricciones  $\varrho^i$  en cada  $\partial\Omega_h^i$  y entonces se tiene:

$$\bar{\mathbf{v}}_h^i = |\Omega_h^i| \tilde{q}_h^i \Pi_h(\varrho^i \mathbf{n}_{out}),$$

donde  $\mathbf{n}_{out}$  es el vector normal a  $\Gamma_{out}^i$  exterior a  $\Omega_h^i$  y  $\Pi_h$  es el estándar  $\mathbb{P}_2$  operador de interpolación de Lagrange. Con esto se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^i} q_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h^i \, d\mathbf{x} &= \gamma^i \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 + \gamma^i \int_{\Omega_h^i} \tilde{q}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_h^i} \tilde{q}_h^i \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h^i} \tilde{q}_h^i \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de la Divergencia y la definición de las funciones  $\bar{q}_h^i$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_h^i$  y  $\bar{\mathbf{v}}_h^i$  se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^i} \bar{q}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega_h^i} \bar{q}_h^i \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x} &= |\Omega_h^i| (\bar{q}_h^i)^2 \left( 1 + \int_{\Gamma_{out}^i} (\Pi_h(\varrho^i) - \varrho^i) \, ds \right). \end{aligned}$$

Usando los resultados básicos de teoría de interpolación sobre espacios de Sobolev en dimensión uno (ver [20]) se encuentra que

$$\left| \int_{\Gamma_{out}^i} (\Pi_h(\varrho^i) - \varrho^i) \, ds \right| \leq Ch_{\Gamma_{out}^i}^2 |\varrho^i|_{H^1(\Gamma_{out}^i)},$$

donde  $h_{\Gamma_{out}^i} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} |E_T^i|$ , con  $|E_T^i|$  la medida del lado  $E_T^i$  para todo triángulo  $T \in \mathcal{T}_h$  tal que  $E_T^i = \partial T \cap \Gamma_{out}^i$ . Luego, para el término integral restante, con la definición de la función  $\bar{\mathbf{v}}_h^i$  y la desigualdad de Cauchy-Schawartz, se encuentra

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_h^i} \bar{q}_h^i \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_h^i \, d\mathbf{x} \right| &\leq |\Omega_h^i|^{1/2} \|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} \|\operatorname{div} \Pi_h(\varrho^i \mathbf{n}_{out})\|_{L^2(\Omega_h^i)}, \\ &\leq C |\Omega_h^i| \|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} |\varrho^i|_{H^1(\Omega_h^i)}. \end{aligned}$$

Con todas estas estimaciones se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^i} q_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h^i \, d\mathbf{x} &\geq \gamma^i \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 - C |\Omega_h^i| \|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} |\varrho^i|_{H^1(\Omega_h^i)} \\ &\quad + \|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 \left( 1 - Ch_{\Gamma_{out}^i}^2 |\varrho^i|_{H^1(\Gamma_{out}^i)} \right). \end{aligned}$$

Sea  $C_1^i = C |\varrho^i|_{H^1(\Gamma_{out}^i)}$ ,  $C_2^i = C |\Omega_h^i| \|\varrho^i\|_{H^1(\Omega_h^i)}$ ,  $\varepsilon = \gamma^i / C_2^i > 0$ , y considere  $h_{\Gamma_{out}^i}^2 \leq 1/(4C_1^i)$  para obtener

$$\int_{\Omega_h^i} q_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h^i \, d\mathbf{x} \geq \frac{\gamma^i}{2} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 + \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{(C_2^i)^2}{2\gamma^i} \right) \|\bar{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2.$$

Ahora, para  $\gamma^i = 2(C_2^i)^2$  la relación anterior se transforma en

$$\int_{\Omega_h^i} q_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h^i \, d\mathbf{x} \geq \hat{C} \|q_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}^2 \tag{3.12}$$

con  $\hat{C} = \min\{(C_2^i)^2, 1/2\}$ .

Finalmente con  $\gamma^i$  como se tomó arriba y la definición de la función  $\mathbf{v}_h^i$  se obtiene

$$|\mathbf{v}_h^i|_{H^1(\Omega_h^i)} \leq \frac{2(C_2^i)^2}{\beta} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} + |\Omega_h^i|^{1/2} \|\tilde{q}_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)} |\Pi_h(\varrho^i)|_{H^1(\Omega_h^i)},$$

de donde

$$|\mathbf{v}_h^i|_{H^1(\Omega_h^i)} \leq \tilde{C} \|q_h^i\|_{L^2(\Omega_h^i)}$$

con

$$\tilde{C} = \left[ \frac{4(C_2^i)^4}{\beta^2} + C^2 |\Omega_h^i| \|\varrho^i\|_{H^1(\Omega_h^i)}^2 \right]^{1/2}$$

y la condición inf-sup se verifica tomando  $\beta^* = \hat{C}/\tilde{C}$ . ◆

### 3. Resultados de existencia y unicidad de la solución discreta $(\mathbf{u}_h, p_h)$

En lo sucesivo se considera que  $\mathbf{u}_h$  se escribe de la manera siguiente

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0,h} + \bar{\mathbf{U}}_h,$$

donde  $\bar{\mathbf{U}}_h$  es una aproximación adecuada de  $\bar{\mathbf{U}}$  sobre los nodos que están en la frontera  $\Gamma_{in}$ . Entonces, el problema (3.5) viene dado por el siguiente sistema lineal de ecuaciones : encontrar  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times M_h$  solución de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a_h(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \ell_h(\mathbf{v}_h) - a_h(\bar{\mathbf{U}}_h, \mathbf{v}_h), \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) &= 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para probar la existencia y unicidad de la solución  $\mathbf{u}_{0,h} \in X_h$ , debe probarse lo siguiente [14]:

- La bicontinuidad de la forma  $a_h(\cdot, \cdot)$  sobre  $X_h \times X_h$ : existe una constante  $\gamma > 0$  tal que

$$\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in X_h, \quad |a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq \gamma \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega_h)}. \tag{3.14}$$

- La coercividad de la forma bilineal  $a_h(\cdot, \cdot)$  sobre  $X_h \times X_h$ : existe una constante  $\alpha^* > 0$  tal que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha^* \|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega)}^2. \tag{3.15}$$

Por otro lado, la existencia y unicidad de  $p_h$  se tiene de manera automática de la Proposición 4 cuando se tenga el resultado para  $\mathbf{u}_h$ . Tal resultado se establece con la siguiente proposición.

**Proposición 5.** *El sistema lineal de ecuaciones dado por (3.13) tiene una única solución  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times M_h$ .*

*Demostración.* La bicontinuidad (3.14) se obtiene inmediatamente considerando la definición de  $a_h$ , la norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  asociada al espacio  $X_h$  y la desigualdad de Cauchy-Schwartz. De hecho, se tiene

$$\gamma = \max\left\{\alpha \max_{1 \leq i \leq 2}(\rho^i), \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq 2}(\mu^i)\right\}.$$

Finalmente, la coercividad (3.15) se verifica con

$$\alpha^* = \frac{\tilde{C}}{C_1 \lambda}, \quad \tilde{C} = \min\left\{\alpha \min_{1 \leq i \leq 2}(\rho^i), \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq 2}(\mu^i)\right\},$$

como una consecuencia inmediata de la desigualdad de Korn utilizada en el Capítulo II con  $\lambda$  la constante respectiva. ◆

## CAPÍTULO IV

### Implementación de la estrategia DFC

Básicamente, resolver el problema variacional implica el cálculo de las integrales donde intervienen funciones definidas sobre el dominio  $\Omega$  y caracterizadas dentro de los espacios funcionales  $X$  y  $M$  como estrategia DFC. El problema aproximante, transforma éste cálculo de integrales sobre  $\bar{\Omega}$  con funciones escritas como combinaciones lineales de las que forman una base para los espacios aproximantes  $X_h$  y  $M_h$ ; ésto sugiere entonces la aproximación de las integrales por medio de una *partición* del dominio  $\bar{\Omega}$ . Por lo tanto, no solo se requiere de un procedimiento para elegir adecuadamente las bases de los espacios aproximante, sino que también se requiere que dicho procedimiento proporcione una *manera fácil* de realizar el cálculo de las integrales sobre  $\bar{\Omega}$  basado en una *partición adecuada* de éste dominio.

En este orden de ideas se ha propuesto el MEF, el cual consiste en particionar el dominio  $\bar{\Omega}$  en un *gran* número de *pequeños* trozos de forma simple, llamados *elementos*; a la partición en general se le conoce con el nombre de *triangularización* [20] como ya se mencionó en el Capítulo anterior. El *ensamblaje* de éstos elementos es llamado *un mallaje* [22]. Por pequeño se entiende que su tamaño, que está vinculado con el parámetro  $h$ , no se encuentra *acotado superiormente*. La restricción de las funciones de  $X_h$  y de  $M_h$  a cada elemento es un *polinomio* o una *transformada de un polinomio de grado acotado* pero generalmente bien pequeño. El grado de los polinomios se engloba en las constantes y todo el análisis numérico se hace en relación al parámetro  $h$  que tiende a cero [22], [35], [37] y [19].

El principio del MEF, establece entonces el *procedimiento sistemático* para elegir las funciones de base que propone el método de Galerkin debe hacerse adecuadamente a fin de generar los espacios aproximantes, y además propone una forma



para calcular las integrales asociadas al problema variacional; en efecto, el cálculo se realiza mediante *interpolación polinomial* en cada elemento de las funciones que definen los integrandos [37] como ya se estableció en el Capítulo III con la definición de los espacios  $X_h$  y  $M_h$ . En base a esto, los espacios aproximantes  $X_h$  y  $M_h$  quedan definidos de manera explícita y se les denominan *espacios de elementos finitos*.

En este capítulo se implementa la estrategia DFC propuesta anteriormente, mostrando así la estructura explícita del sistema lineal de ecuaciones a resolver y una estrategia de cálculo computacional basada en el elemento finito de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$ .

## 1. Sistema de ecuaciones tipo Galerkin

El próximo paso consiste en aplicar la metodología propuesta por Galerkin para la búsqueda sistemática de las funciones de aproximación a la solución del problema discreto. Entonces, sea  $N_u$  la dimensión del espacio  $X_h$  y  $N_p$  la dimensión del espacio  $M_h$ . Se define una base para cada espacio como:  $\{\phi_j = (\phi_{x,j}, \phi_{y,j})\}_{j=1}^{N_u}$  y  $\{\psi_k\}_{k=1}^{N_p}$ , respectivamente de tal manera que:

$$\begin{aligned} X_h &= \text{span} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_u} \}, \\ M_h &= \text{span} \{ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_p} \}. \end{aligned}$$

Así que, cualquier elemento  $\mathbf{u}_{0,h} \in X_h$  y cualquier elemento  $p_h \in M_h$  admiten un desarrollo de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,h} &= \sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \\ p_h &= \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k, \end{aligned} \tag{4.1}$$

en donde  $u_j$  son los coeficientes reales a determinar, que se asocian a la combinación lineal para la velocidad, y  $p_k$  son los correspondientes coeficientes reales a determinar y asociados con la combinación lineal para la presión. Con esto, la velocidad  $\mathbf{u}_h$  en (3.1) se puede escribir de la manera siguiente

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0,h} + \bar{\mathbf{U}}_h$$

con  $\mathbf{u}_{0,h}$  dada por la combinación lineal anterior. La función  $\bar{\mathbf{U}}_h$  es una interpolación de  $\bar{\mathbf{U}}$  sobre los nodos que se encuentran en la frontera  $\Gamma_{in}$  dada por:

$$\bar{\mathbf{U}}_h = \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j \phi_j,$$

en donde las funciones  $\phi_{N_u+1}, \phi_{N_u+2}, \dots, \phi_{N_u+V}$  y los valores  $u_{N_u+1}, u_{N_u+2}, \dots, u_{N_u+V}$ , se eligen de manera tal que

$$\sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j \phi_j(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}.$$

La interpolación se toma de manera tal que sea a divergencia cero tal como la extensión  $\bar{\mathbf{U}}$  que se ha propuesto.

Ahora bien, siguiendo a Galerkin [21], se escogen como funciones de prueba aquellas idénticamente iguales a las funciones que definen las bases correspondientes de los espacios  $X_h$  y  $M_h$ . Es decir,  $\mathbf{v}_h = \phi_i$  y  $q_h = \psi_k$  de manera tal que las formas bilineales y lineal de (3.13) para cada  $i = 1, \dots, N_u$  y  $k = 1, \dots, N_p$  se transforman en:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_{0,h}, \phi_i) &= a_h\left(\sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1}^{N_u} u_j a(\phi_j, \phi_i), \\ b(\phi_i, p_h) &= b\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k\right) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\phi_i, \psi_k), \\ f(\phi_i) &= \ell_h(\phi_i) - a_h(\bar{\mathbf{U}}_h, \phi_i) = \ell_h(\phi_i) - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a_h(\phi_j, \phi_i), \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, \psi_k) &= b\left(\sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \psi_k\right) = \sum_{j=1}^{N_u} u_j b(\phi_j, \psi_k), \\ g(\psi_k) &= -b(\bar{\mathbf{U}}_h, \psi_k) = - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j b(\phi_j, \psi_k). \end{aligned}$$

Así, se genera el siguiente sistema *global de ecuaciones*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_u} u_j a_h(\phi_j, \phi_i) + \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\phi_i, \psi_k) = f(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N_u, \\ \sum_{j=1}^{N_u} u_j b(\phi_j, \psi_k) = g(\psi_k), \quad k = 1, \dots, N_p, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

el cual escrito de manera matricial tiene la siguiente forma de sistema tipo punto de ensilladura:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

en donde  $A$  es una matriz de tamaño  $N_u \times N_u$  asociada con la discretización de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $B$  una matriz de tamaño  $N_p \times N_u$  asociada con la discretización de la forma bilineal  $b(\cdot, \cdot)$  y traspuesta  $B^T$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son vectores de tamaños  $N_u \times 1$  y  $N_p \times 1$  respectivamente que contienen la data asociada a las fuerzas y solicitudes de volumen y superficie, conocidas e impuestas sobre el dominio del problema. Los elementos de estas matrices y vectores están definidos por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a_h(\phi_j, \phi_i) = \alpha \int_{\Omega_h} \rho_h \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \mu_h A_1(\phi_j) : A_1(\phi_i) \, d\mathbf{x}, \\ B_{kj} &= b(\phi_j, \psi_k) = - \int_{\Omega_h} \psi_k \nabla \cdot \phi_j \, d\mathbf{x}, \\ f_i &= f(\phi_i) = \int_{\Omega_h} \rho_h (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \phi_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \phi_i \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \phi_i \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \phi_i \, ds - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a(\phi_j, \phi_i), \\ g_k &= g(\psi_k). \end{aligned}$$

Finalmente  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_{N_u})^t$  y  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p})^t$  son los vectores de incógnitas asociados con los valores nodales de la velocidad y la presión que definen las aproximaciones de Galerkin; el sistema (4.3) heredará propiedades de las formas bilineales que harán posible su resolución numérica-computacional mediante *métodos desacoplados* y *algoritmos iterativos*.

En la práctica, el sistema (4.3) puede describirse realizando una partición en bloques de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $B^T$  por contribución de las componentes en  $x$  y  $y$  de la velocidad. Siguiendo la idea propuesta por Silvester *et alt.* [39], dado un conjunto de funciones escalares de base para un espacio escalar de elementos finitos  $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ , se toma  $N_u = 2n$  y se define el conjunto de funciones de base para la

velocidad como:

$$\{\phi_1, \dots, \phi_{2n}\} = \{(\phi_1, 0)^t, \dots, (\phi_n, 0)^t, (0, \phi_1)^t, \dots, (0, \phi_n)^t\}.$$

Con esto se tiene que:

a) para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \alpha \int_{\Omega_h} \rho_h \phi_j \phi_i dx dy + 2 \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy + \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy = A_{xx,ij};$$

b) para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = A_{xy,ij};$$

c) para  $i = n + 1, \dots, 2n$  y  $j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy = A_{yx,ij};$$

d) para  $i = n + 1, \dots, 2n$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$A_{ij} = \alpha \int_{\Omega_h} \rho_h \phi_j \phi_i dx dy + 2 \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy + \int_{\Omega_h} \mu_h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = A_{yy,ij}.$$

De la misma manera para la forma bilineal  $B$  se tiene que

a) para  $k = 1, \dots, N_p$  y  $j = 1, \dots, n$

$$B_{kj} = - \int_{\Omega_h} \psi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = B_{x,kj};$$

b) para  $k = 1, \dots, N_p$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$B_{kj} = - \int_{\Omega_h} \psi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy = B_{y,kj}.$$

Finalmente para el vector  $\mathbf{f}$  se tiene

a) para  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
f_i = & \int_{\Omega_h} \rho_h (g_x + w_x) \phi_i dx dy - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} n_x \phi_i ds \\
& - \int_{\Gamma_a} K_a n_{a,x}^1 \phi_i ds - \int_{\Gamma_b} K_b n_{b,x}^1 \phi_i ds \\
& - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a_h(\phi_j, \phi_i) = f_{x,i};
\end{aligned}$$

b) para  $i = n + 1, \dots, 2n$

$$\begin{aligned}
f_i = & \int_{\Omega_h} \rho_h (g_y + w_y) \phi_i dx dy - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} n_y \phi_i ds \\
& - \int_{\Gamma_a} K_a n_{a,y}^1 \phi_i ds - \int_{\Gamma_b} K_b n_{b,y}^1 \phi_i ds \\
& - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a_h(\phi_j, \phi_i) = f_{y,i}.
\end{aligned}$$

Con esto el sistema (4.3) escrito en la partición por bloques es:

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & B_x^T \\ A_{yx} & A_{yy} & B_y^T \\ B_x & B_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

en donde  $A_{xx}$ ,  $A_{xy}$ ,  $A_{yx}$  y  $A_{yy}$  son matrices de tamaño  $n \times n$  y, respectivamente, coeficientes  $A_{xx,ij}$ ,  $A_{xy,ij}$ ,  $A_{yx,ij}$ ,  $A_{yy,ij}$ . Similarmente,  $B_x$  y  $B_y$  son matrices de tamaño  $N_p \times n$  y coeficientes  $B_{x,j}$ ,  $B_{y,j}$  respectivamente. Finalmente,  $\mathbf{U}_x$ ,  $\mathbf{U}_y$ ,  $\mathbf{f}_x$  y  $\mathbf{f}_y$  son vectores de tamaño  $n \times 1$  de componentes dadas por  $u_{x,i}$ ,  $u_{y,i}$ ,  $f_{x,i}$  y  $f_{y,i}$ .

## 2. El elemento mixto conforme de Taylor-Hood

El elemento propuesto por Taylor y Hood [40] es un *elemento finito mixto* utilizado usualmente en problemas de flujo de fluidos [14]. Para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , el elemento de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$ , como se definió en el Capítulo anterior, aproxima la velocidad localmente por un polinomio de grado dos determinado por sus valores en los vértices del triángulo y los puntos medios asociados a cada lado del triángulo; en general estos puntos son llamados *nodos de velocidad*. La presión es aproximada por un polinomio de grado uno determinado por sus valores solamente en los vértices del triángulo y se denominan *nodos de presión*. Globalmente, la aproximación por medio de este elemento finito en cada  $T \in \mathcal{T}_h$  se usa para definir las funciones de base que generan los espacios discretos  $X_h$  y  $M_h$ , y tal aproximación es conforme ya que estos espacios finito-dimensionales son subconjuntos de los espacios  $X$  y  $M$  respectivamente.

Con el propósito de especificar este elemento y posteriormente las funciones de aproximación, se introduce en primer lugar la notación usual [39]: para cualquier triángulo  $T_e \subset \mathbb{R}^2$  de  $\mathcal{T}_h$  se denotaran sus vértices por  $\mathbf{a}_1^e = (x_1^e, y_1^e)$ ,  $\mathbf{a}_2^e = (x_2^e, y_2^e)$  y  $\mathbf{a}_3^e = (x_3^e, y_3^e)$  numerados en el sentido antihorario y por  $\mathbf{a}_4^e = (x_4^e, y_4^e)$ ,  $\mathbf{a}_5^e = (x_5^e, y_5^e)$  y  $\mathbf{a}_6^e = (x_6^e, y_6^e)$  sus puntos medios tal como se muestra en la figura IV.1.

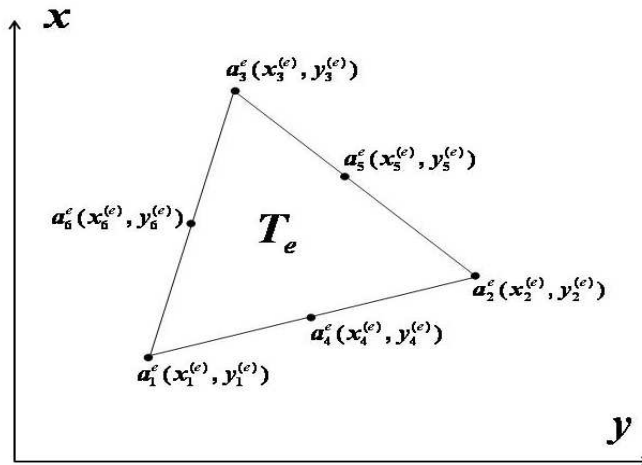


Figura IV.1: Definición del Elemento de Taylor-Hood

Para cada componente de la velocidad  $u_x$  y  $u_y$  se define sobre  $T_e$  la aproximación polinomial de grado dos dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in T_e, \quad u_x^e(\mathbf{x}) \approx u_{x,h}^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 u_{x,j}^e \phi_j^e(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in T_e, \quad u_y^e(\mathbf{x}) \approx u_{y,h}^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 u_{y,j}^e \phi_j^e(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

donde  $u_{x,j}^e = u_x^e(\mathbf{a}_j^e)$  y  $u_{y,j}^e = u_y^e(\mathbf{a}_j^e)$ , con  $j = 1, \dots, 6$ , son los valores exactos de las componentes de la velocidad en los nodos  $\mathbf{a}_1^e, \mathbf{a}_2^e, \mathbf{a}_3^e, \mathbf{a}_4^e, \mathbf{a}_5^e$  y  $\mathbf{a}_6^e$  respectivamente, y  $\phi_j^e$  es la correspondiente  $j$ -ésima *función de base local*, o *función de forma*, asociada al espacio de elemento finito para cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$ .

La presión  $p^e$  sobre cada  $T_e$  se aproxima por el polinomio de grado uno:

$$\forall \mathbf{x} \in T_e, \quad p^e(\mathbf{x}) \approx p_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 p_k^e \psi_k^e(\mathbf{x}), \quad (4.6)$$

en donde los  $p_k^e = p^e(\mathbf{a}_k^e)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , son los correspondientes valores de la presión en los nodos  $\mathbf{a}_1^e, \mathbf{a}_2^e$  y  $\mathbf{a}_3^e$ , y  $\psi_k^e$  la  $k$ -ésima función de base local o de forma de la presión en cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$ .

## 2.1. Definición de las funciones de forma $\phi_j$ y $\psi_k$ para la velocidad y la presión

La definición de las funciones de forma para elementos triangulares, sobre cualquier elemento finito, se facilita si éstas se escriben en función de las *coordenadas baricéntricas* o de área [5]. De manera más precisa, para un punto  $\mathbf{x} = (x, y) \in T_e$ , las coordenadas baricéntricas vienen dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= 1 - x - y, \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= x, \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= y. \end{aligned}$$

Con esto, las funciones de forma para el espacio de elementos finitos asociado a los nodos de velocidad se definen de la manera siguiente

Para todo  $\mathbf{x} \in T_e$

$$\phi_1^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_1(\mathbf{x}) - 1)\lambda_1(\mathbf{x}),$$

$$\phi_2^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_2(\mathbf{x}) - 1)\lambda_2(\mathbf{x}),$$

$$\phi_3^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_3(\mathbf{x}) - 1)\lambda_3(\mathbf{x}),$$

$$\phi_4^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x}),$$

$$\phi_5^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}),$$

$$\phi_6^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}),$$

y cumplen con la siguiente propiedad

$$\phi_j^e(\mathbf{a}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } i = j \\ 0 & \text{si y solo si } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (4.7)$$

De manera similar las funciones de forma para el espacio de elementos finitos asociado a los nodos de presión se definen en términos de las coordenadas baricéntricas. En tal caso, las funciones de forma coinciden con las funciones baricéntricas dado a que son polinomios de grado uno relativos a los vértices del elemento  $T_e$ . Por lo tanto

$$\forall \mathbf{x} \in T_e, \quad \psi_k^e(\mathbf{x}) = \lambda_k(\mathbf{x}).$$

Estas funciones también cumplen con la propiedad

$$\psi_k^e(\mathbf{a}_i) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

## 2.2. Contribución de elemento finito para el ensamblaje del sistema global

Para generar el sistema global por bloques (4.4) del problema de flujo bifásico, la tecnología de los elementos finito propone *elementalizar* la formulación variacional [39]. Esto es, localizar o restringir la formulación variacional sobre cada elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  al mismo tiempo y finalmente realizar una suma sobre cada elemento para obtener toda la contribución sobre el dominio completo; a esto se le conoce con el nombre de *contribución elemental* [19]. Durante éste proceso se realiza la



aproximación de los campos de velocidad y presión sobre cada elemento basada en la propiedad local de las funciones de forma para los espacios de elementos finitos.

A continuación, en la siguiente subsección se construye el sistema por bloques para cada elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$  que posteriormente se usará como contribución de cada elemento para ensamblar el sistema global (4.4).

### 2.2.1. Sistema tipo Galerkin elemental

Para un elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$  el sistema por bloques se escribe como

$$\begin{pmatrix} A_{xx}^e & A_{xy}^e & (B_x^T)^e \\ A_{yx}^e & A_{yy}^e & (B_y^T)^e \\ B_x^e & B_y^e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{p}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^e \\ \mathbf{f}_y^e \\ \mathbf{g}^e \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

en donde  $A_{xx}^e$ ,  $A_{xy}^e$ ,  $A_{yx}^e$  y  $A_{yy}^e$  son matrices de tamaño  $6 \times 6$  y, respectivamente, con coeficientes  $A_{xx,ij}^e$ ,  $A_{xy,ij}^e$ ,  $A_{yx,ij}^e$ ,  $A_{yy,ij}^e$ . Similarmente,  $B_x^e$  y  $B_y^e$  son matrices de tamaño  $3 \times 6$  con coeficientes  $B_{x,j}^e$  y  $B_{y,j}^e$  respectivamente. Finalmente,  $\mathbf{U}_x^e$ ,  $\mathbf{U}_y^e$ ,  $\mathbf{f}_x^e$  y  $\mathbf{f}_y^e$  son vectores de tamaño  $6 \times 1$  de componentes dadas por  $u_{x,i}^e$ ,  $u_{y,i}^e$ ,  $f_{x,i}^e$  y  $f_{y,i}^e$ . Los coeficientes de las matrices y vectores elementales que se han mencionado vienen dados por:

a) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{xx,ij}^e = \alpha \int_{T_e} \rho_h \phi_j^e \phi_i^e dx dy + 2 \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy + \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy;$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{xy,ij}^e = \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy;$$

c) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{yx,ij}^e = \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy;$$

d) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{yy,ij}^e = \alpha \int_{T_e} \rho_h \phi_j^e \phi_i^e dx dy + 2 \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy + \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy.$$

De la misma manera para la forma bilineal  $B$  se tiene que

a) para  $k = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$B_{x,kj}^e = - \int_{T_e} \psi_k^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy;$$

b) para  $k = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$B_{y,kj}^e = - \int_{T_e} \psi_k^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy.$$

Finalmente para el vector  $\mathbf{f}$  se tiene

a) para  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} f_{x,i}^e = & \int_{T_e} \rho_h (g_x + w_x) \phi_i^e dx dy - \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} p_{out} n_x \phi_i^e ds \\ & - \int_{\Gamma_{h_a} \cap \partial T_e} K_a n_{a,x}^1 \phi_i^e ds - \int_{\Gamma_{h_b} \cap \partial T_e} K_b n_{b,x}^1 \phi_i^e ds; \end{aligned}$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} f_{y,i}^e = & \int_{T_e} \rho_h (g_y + w_y) \phi_i^e dx dy - \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} p_{out} n_y \phi_i^e ds \\ & - \int_{\Gamma_{h_a} \cap \partial T_e} K_a n_{a,y}^1 \phi_i^e ds - \int_{\Gamma_{h_b} \cap \partial T_e} K_b n_{b,y}^1 \phi_i^e ds. \end{aligned}$$

Note que en la expresión para las componentes del vector  $\mathbf{f}$  restringido al elemento  $T_e$  no se considera la interpolación para la condición de frontera tipo Dirichlet en  $\Gamma_{in}$ . Este es un procedimiento estándar para llevar a cabo la implementación computacional, sin embargo después de realizar el *ensamblaje* por contribución de las matrices elementales tal condición en esa frontera se incorpora al lado derecho del sistema de Galerkin.

### 3. El ensamblaje del sistema global

Un aspecto importante en la contribución de las matrices elementales es el hecho de que cada nodo en el elemento posee una numeración *local* que depende del tipo de elemento, y una numeración *global* con respecto a todos los demás nodos. Este hecho es el que permite conectar las matrices elementales para contabilizar sus contribuciones en el sistema global. Para el elemento de Taylor-Hood, como ya se ha mencionado, se tiene la siguiente numeración local:  $j = 1, \dots, 6$  para cada componente de la velocidad y  $k = 1, \dots, 3$  para la presión.

La numeración global se construye siguiendo la metodología aplicada para los elementos finitos mixtos [14], donde se enumeran todos los nodos de la malla  $\mathcal{T}_h$ , para la primera componente de la velocidad, se continúa la numeración para la segunda componente utilizando nuevamente todos los nodos de la malla  $\mathcal{T}_h$  y finalmente se sigue enumerando para la presión considerando solo los nodos vértices. De esta manera, se construye una numeración global de tres variables a determinar utilizando un solo mallado. Este sistema de numeración (local y global) se almacena en un arreglo denominado *matríz de conectividad*  $M$ , la cual se define para cada variable a determinar, de tal forma que el índice  $i = M_{je}$  representa la numeración global en el  $j$ -ésimo nodo local del  $e$ -ésimo elemento (cualquiera que sea la componente de la velocidad) y  $i = M_{ke}$  es el índice apropiado en el caso de la presión.

Para proponer algoritmos de ensamblaje se considera la siguiente notación: sea  $M_p$  la matríz de conectividad para la presión, sean  $M_u$  y  $M_w$  las matrices de conectividad para la componentes de la velocidad en las direcciones de  $x$  y  $y$  respectivamente. Sean  $k_p = M_p(k, e)$ ,  $i_u = M_u(i, e)$  y  $i_w = M_w(i, e)$  los índices correspondientes a la numeración global. Si además se tienen  $n$  nodos para cada

componente de la veocidad,  $N_p$  nodos para la presión y  $N_e$  elementos, entonces el ensamblaje del sistema global se puede llevar por partes usando los algoritmos siguientes.

**Algoritmo 1:** construcción de los bloques de  $A$  y el vector  $f$  del sistema (4.3).

```

para e = 1 hasta  $N_e$ 
  para i = 1 hasta 6
    para j = 1 hasta 6
       $K_{i_u j_u} = K_{i_u j_u} + A_{xx,ij}^e$ 
       $K_{i_u j_w} = K_{i_u j_w} + A_{xy,ij}^e$ 
       $K_{i_w j_w} = K_{i_w j_w} + A_{yy,ij}^e$ 
       $K_{i_w j_u} = K_{i_w j_u} + A_{yx,ij}^e$ 
    fin lazo j
     $F_{i_u} = F_{i_u} + f_{x,i}^e$ 
     $F_{i_w} = F_{i_w} + f_{y,i}^e$ 
  fin lazo i
fin lazo e

```

**Algoritmo 2:** construcción del bloque para la matriz  $B^T$ .

```

para e = 1 hasta  $N_e$ 
  para i = 1 hasta 6
    para k = 1 hasta 3
       $K_{i_u k_p} = K_{i_u k_p} + (B_{x,ki}^e)^T$ 
       $K_{i_w k_p} = K_{i_w k_p} + (B_{y,ki}^e)^T$ 
    fin lazo k
  fin lazo i
fin lazo e

```

**Algoritmo 3:** construcción del bloque conformado por la matriz  $B$

```

|| para e = 1 hasta Ne
||     para k = 1 hasta 3
||         para j = 1 hasta 6
||             Kkpju = Kkpju + Bx,kje
||             Kkpjw = Kkpjw + By,kje
||         fin lazo j
||         Fkp = Fkp + gke
||     fin lazo k
|| fin lazo e

```

Así el sistema global tipo Galerkin se transforma en un sistema de la forma general

$$K\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

en donde

$$K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}.$$

Para finalizar el ensamblaje, al sistema anterior se le incorporan las condiciones de borde tipo Dirichlet mediante una subrutina que forma parte de la implementación computacional.

## 4. Transformaciones de coordenadas y expresiones integrales

En la técnica de elementos finitos, las evaluaciones de las expresiones integrales sobre un elemento cualquiera  $T_e \in \mathcal{T}_h$  se obtienen utilizando transformaciones afines  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  y realizando todos los cálculos sobre un elemento de referencia  $\hat{T}$ . En esta sección se obtendrán expresiones que puedan ser evaluadas de forma numérica para todos los términos integrales obtenidos en la formulación, y así, utilizando las contribuciones elementales, se pueda obtener el sistema de ecuaciones lineales del

problema. Para el elemento finito triangular de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$ , el elemento de referencia es un triángulo de vértices  $\hat{\mathbf{a}}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_2 = (1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{a}}_3 = (0, 1)$  (ver figura IV.2).

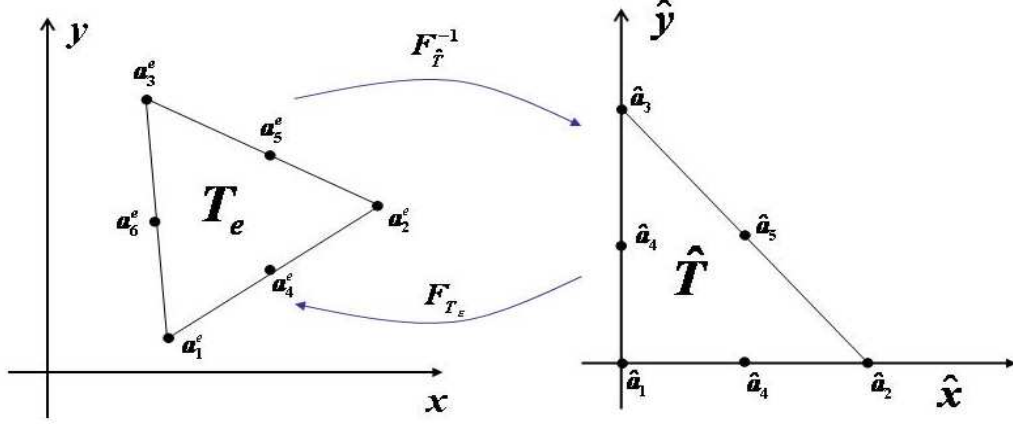


Figura IV.2: Ilustración de la transformación  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  y la inversa  $\mathcal{F}_{\hat{T}}^{-1} : T_e \rightarrow \hat{T}$ ,

Para plantear las expresiones de las contribuciones elementales, y su evaluación numérica, es necesario primero conseguirlas en el elemento de referencia a través de una transformación de coordenadas de la variable independiente en un triángulo  $T_e$  cualquiera de  $\mathcal{T}_h$  [39, 22]. Sea el elemento de referencia  $\hat{T}$  con vértices relativos a las coordenadas baricéntricas  $\hat{\mathbf{m}}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{m}}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{m}}_3 = (0, 0, 1)$ . Se define entonces la transformación de coordenadas  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  que aplica el elemento  $\hat{T}$  a cualquier elemento  $T_e$  de la malla  $\mathcal{T}_h$  de vértices  $\mathbf{m}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  como:

$$x^e(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=1}^3 x^e(\mathbf{m}_j) \hat{\phi}_j,$$

$$y^e(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=1}^3 y^e(\mathbf{m}_j) \hat{\phi}_j,$$

en donde  $\mathbf{m}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , es el  $j$ -ésimo vértice del elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$  relativo a las coordenadas baricéntricas. Tal transformación, asocia a todo punto  $(\hat{x}, \hat{y})$  en *coordenadas naturales* o *locales* dentro del elemento  $\hat{T}$ , un punto  $(x^e, y^e)$  en

coordenadas globales, dentro del elemento  $T_e$ . Además,  $x^e(\mathbf{m})$  y  $y^e(\mathbf{m})$  son las coordenadas de un punto  $\mathbf{m}$  en  $T_e$  relativo a las coordenadas baricéntricas, y las funciones  $\hat{\phi}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , son las funciones de base elementales que dependen de las coordenadas baricéntricas con respecto al elemento de referencia, definidas por

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{x} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_3 = \hat{y}.$$

La transformación tiene la propiedad de que es invertible, por lo tanto las coordenadas de todo punto  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{T}$  pueden ser determinadas mediante la aplicación inversa

$$\mathcal{F}_{\hat{T}}^{-1} : T_e \rightarrow \hat{T},$$

en tal sentido vienen dadas por

$$\hat{x} = (a_2 + b_2x^e + c_2y^e) \frac{1}{|J^e|} \quad \text{y} \quad \hat{y} = (a_3 + b_3x^e + c_3y^e) \frac{1}{|J^e|},$$

en donde

$$a_2 = x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e,$$

$$a_3 = x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e,$$

$$b_2 = y_3^e - y_1^e,$$

$$b_3 = y_1^e - y_2^e,$$

$$c_2 = x_1^e - x_3^e,$$

$$c_3 = x_2^e - x_1^e$$

y  $|J^e|$  es el Jacobiano de esta transformación dado por

$$|J^e| = \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{vmatrix}.$$

Con lo anterior, se tiene que

$$\int_{T_e} \rho_h \phi_j^e \phi_i^e dx dy = |J^e| \int_{\hat{T}} \rho_h \hat{\phi}_j \hat{\phi}_i d\hat{x} d\hat{y},$$

donde  $\hat{\phi}_j = \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y})$  y  $\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y})$  son funciones polinomiales respecto de las coordenadas baricéntricas relativas al el elemento  $\hat{T}$ , adicionalmente la densidad

$\rho_h$  es una función constante a trozos por cada  $\Omega_h^i$  y en particular sobre cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$  es constante, por lo tanto la integral anterior se calcula de manera exacta.

Análogamente, las integrales

$$\int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy \quad \text{y} \quad \int_{T_e} \mu_h \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy$$

se calculan de manera exacta al considerar que la viscosidad  $\mu_h$  es una función constante en cada elemento  $T_e$  de  $\mathcal{T}_h$  y empleando la misma transformación de coordenadas.

Sin pérdida de generalidad, el argumento anterior también se aplica para calcular las integrales asociadas con los coeficientes de las matrices  $B_x^e$  y  $B_y^e$ .

Finalmente, para los términos integrales correspondientes a las componentes del vector  $\mathbf{f}^e$  elemental, se tienen las siguientes hipótesis:

- i) las funciones  $w_x = w_x(\mathbf{x})$  y  $w_y = w_y(\mathbf{x})$  se aproximan mediante una interpolación usando las funciones de forma elemental para la velocidad, por lo tanto cualquier valor dentro de un elemento  $T_e$  viene dado por

$$w_x(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 w_x(\mathbf{a}_j^e) \phi_j^e(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad w_y(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 w_y(\mathbf{a}_j^e) \phi_j^e(\mathbf{x}),$$

con  $\mathbf{a}_j^e$  es el  $j$ -ésimo vértice del elemento  $T_e$ ;

- ii) las funciones  $g_x$  y  $g_y$  se corresponden con las componentes del vector gravedad  $\mathbf{g} = (0, 9.806)$ ; Por lo tanto son constantes dadas sobre cada elemento  $T_e$ ;
- iii) las componentes  $n_x$  y  $n_y$  del vector normal saliente en la frontera  $\Gamma_{out}$  son constantes. En efecto  $n_x = 1$  y  $n_y = 0$ . Aún más, la presión  $p_{out}$  sobre esa frontera es la presión manométrica y por lo tanto dada constante;
- iv) adicional a la hipótesis de parametrización hecha sobre las interfaces, en esta etapa del trabajo se considera que las líneas rectas se deben a el radio de curvatura es infinito y por lo tanto las funciones  $K_j$ ,  $j = a, b$ , son idénticamente igual a la función nula.



Bajo las hipótesis anteriores las componentes  $f_{x,i}^e$  y  $f_{y,i}^e$  se transforman en

a) para  $i = 1, \dots, 6$

$$f_{x,i}^e = \rho_h \sum_{j=1}^6 w_x(\mathbf{a}_j^e) \int_{T_e} \phi_i^e \phi_j^e dx dy - p_{out} \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} \phi_i^e ds;$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$

$$f_{y,i}^e = \rho_h g_y \int_{T_e} \phi_i^e dx dy + \rho \sum_{j=1}^6 w_y(\mathbf{a}_j^e) \int_{T_e} \phi_i^e \phi_j^e dx dy,$$

y en ambos casos las integrales que aparecen relacionadas con las funciones de formas sobre el elemento se calculan como antes.

## CAPÍTULO V

### Resultados de la DFC para un flujo bifásico agua-petróleo

En este capítulo se presenta una simulación numérica para el problema generalizado de Stokes asociado a un flujo bifásico agua-petróleo, como resultado de la estrategia DFC propuesta.

La simulación se realiza para el tiempo inicial  $t_0$ , considerando cada interfaz como dos líneas rectas dentro del dominio computacional. Por lo tanto, como ya se dijo en el Capítulo IV, los terminos  $K_{h,j}(\mathbf{v}_h)$ ,  $j = a, b$  para cualquier  $\mathbf{v} \in X_h$  se anulan. La condición a la salida del trozo de tubería se establece para una presión manométrica dada por  $p_{out} = 0$ , y la gravedad toma el valor  $\mathbf{g} = 9.806\mathbf{e}_2$ .

Las propiedades físicas son las siguientes:  $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 910 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_1 = 0.02912 \text{ Pa s}$  and  $\mu_2 = 0.000993 \text{ Pa s}$ . Las propiedades físicas para el petróleo (fluido 1) se corresponden con las de un *crudo mediano promedio* (tomado de [38]). Finalmente, se consideraron los siguientes parámetros geométricos que definen al dominio computacional: longitud de la tubería  $L = 12\text{m}$ , diámetro de la tubería  $D = 0.15\text{m}$  y el radio formado por ambas interfaces es  $|\Gamma_{in}^1| = 0.13\text{m}$ . Estos valores son típicos para condiciones de operación de transporte de petróleo en oleoductos (ver [8], [28] y [38]).

El dominio computacional se construyó mediante un mallado de triángulos regulares sobre cada fluido y se tomaron tres tamaños para el parámetro de discretización:  $h = 1.0986$ ,  $h = 0.5231$  y  $h = 0.2038$ . En la Figura V.1 se observa el mallado para el primer y segundo refinamiento de la malla de elementos finitos donde se aprecia el carácter regular de los elementos para cada subdominio.

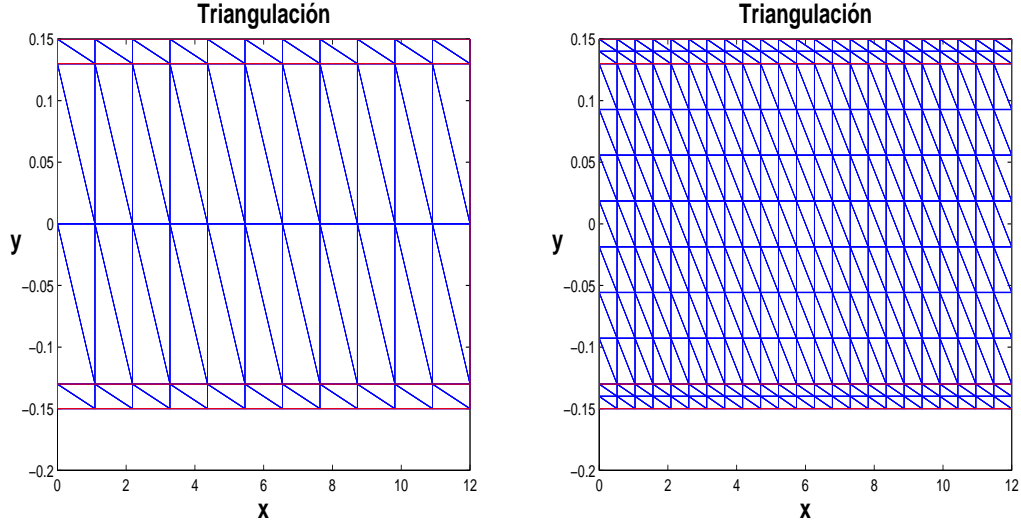


Figura V.1: Malla de elementos finitos  $T_h$  con 88 y 506 elementos,  $h = 1.0986$  y  $h = 0.5231$  respectivamente.

La velocidad de entrada  $\mathbf{U} = (U(y))\mathbf{e}_1$  se define mediante la siguiente función  $U$

$$\forall y \in \Gamma_{in}^2, \quad U(y) = \left(-\frac{\xi}{2L\mu_2}\right)y^2 + \left(-\frac{\xi}{2L\mu_2}\right)D^2$$

y

$$\forall y \in \Gamma_{in}^1, \quad U(y) = \left(-\frac{\xi}{2L\mu_1}\right)y^2 + \left(-\frac{\xi}{2L\mu_2}\right)\left[\frac{|\Gamma_{in}^1|^2}{4}\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\right) + D^2\right],$$

donde  $\xi > 0$  es un parámetro hidrodinámico tomado de [10] para este problema test.

A continuación se presentan los resultados numéricos para los tres refinamientos de la malla de elementos finitos; correspondientes a 88, 506 y 3894 elementos y un paso de tiempo consistente con  $\alpha = 35$ .

En estos resultados computacionales se visualiza el perfil de velocidad y de presión. La presión se muestra con más intensidad a la entrada de la tubería (color rojo) y menos con menos intensidad a la salida (color azul). Estas diferencias en la intensidad de la presión son consistente con el tipo de esfuerzos cortantes que deben mantenerse para obtener el perfil de velocidad parabólico que se muestra en cada caso (ver [29] y [30]). Estas simulaciones son consistentes con los resultados

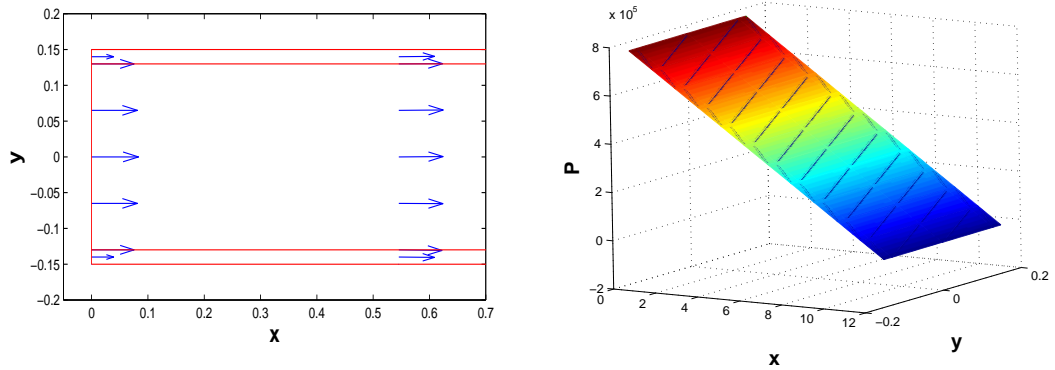


Figura V.2: Campo de velocidad y presión con 88 elementos finitos (el parámetro de discretización es  $h = 1.0986$ )

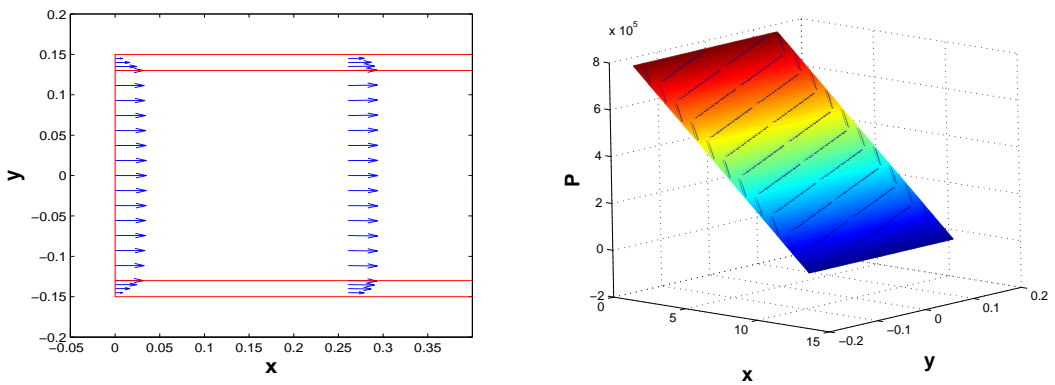


Figura V.3: Campo de velocidad y presión con 506 elementos finitos (el parámetro de discretización es  $h = 0.5231$ )

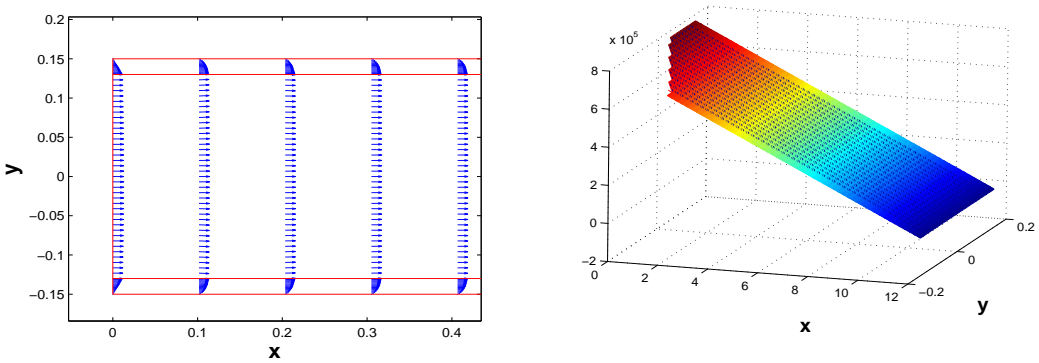


Figura V.4: Campo de velocidad y presión con 3894 elementos finitos (el parámetro de discretización es  $h = 0.2038$ )

teóricos de la DFC, por lo tanto para un paso de tiempo la estrategia DFC es confiable.

# CAPÍTULO VI

## Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se ha propuesto una estrategia fluido dinámica computacional (DFC) para un flujo bifásico compuesto por agua y petróleo en un trozo de tubería horizontal. La estrategia DFC fue una combinación entre el método de las característica y el método ALE en el contexto de los elementos finitos. Para un paso de tiempo, el problema generalizado de Stokes subyacente, con condiciones de frontera no estándar, fue planteado en una formulación variacional equivalente para la cual se demostró matemáticamente que existe una única solución en el sentido de distribuciones que es estable respecto a la data según la condición inf-sup de Babuška-Brezzi. Una discretización de elemento finito mixto basada en el elemento de Taylor-Hood/ $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$  fue considerada para obtener un sistema lineal de ecuaciones a partir de la formulación variacional en su versión discreta. La solución de este sistema existe, es única y verifica una condición inf-sup discreta para el espacio de elementos finitos; la solución es estable numéricamente. Los resultados computacionales que se obtienen mediante la implementación de la estrategia DFC son consistentes con el comportamiento físico esperado; la estrategia DFC es confiable para la simulación del flujo bifásico.

En un trabajo posterior se realizará un análisis riguroso de convergencia y estimación de cotas para el error de aproximación. De igual forma se harán implementaciones sobre mallas irregulares y el cálculo de la solución para varios pasos de tiempos con el propósito de aproximar la interfaz entre ambos fluidos. Una extensión de la estrategia DFC al caso tridimensional también será considerada replanteando el modelo matemático y numérico en coordenadas cilíndricas.

## Bibliografía

- [1] M. ABDELWAHED, M. AMARA, F. DABAGHI AND M. HASSINE, *A Numerical Modeling of a two phase flow for water Eutophication Problems*, Proceeding of the European Conference on Computational Methods in Applied Sciences, Eccomas (2000), 18 pages, Spain 200.
- [2] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York, San Francisco, London 1975.
- [3] M. AMARA, EL DABAGHI Y C. KADA KLOUCHA. *Ecoulement incompressible à surface libre*, Informe de INRIA Rocquencourt, (2000).
- [4] W. ANGULO ET V. GIRAULT, *Une méthode d'élément fini non-conforme pour l'écoulement diphasique eau-pétrole lourd dans une tuyau horizontale*, Rapport d'avance du Projet ECOS-Nord-V00M04, UPMC-Paris 6-Laboratoire Jaques-Louis Lions, Paris-Francia, (2006).
- [5] O. AXELSSON AND V. A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, Orlando, MA, (1984).
- [6] I. BABUŠKA, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math. **20** (1973), pp. 179-192.
- [7] G. K. BATCHELOR, *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, (1967).
- [8] A. BENSAXHRIA, Y. PEYSSON AND G. ANTONINI, *Experimental Study of the Pipeline Lubrication for Heavy Oil Transport*, Oil & Gas Science and Technology Rev. IFP, Vol. 59 , No. 5, pp. 523-533 (2004).

- [9] A. BERMUDEZ AND J. DURANY, Application of characteristics method with variable time step to steady convection-diffusion problems, North-Holland, (1987).
- [10] R. BIRD, W. STEWART Y E. LIGHTFOOT, Fenómenos de Transporte, Editorial Reverté-S.A, Barcelona-España, (1997).
- [11] J. BOLAND AND R. NICOLAIDES, Stability of finite elements under divergence constraints, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**, 722-731, (1983).
- [12] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Collection “Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise”, Masson, Paris, (1983).
- [13] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, RAIRO, Anal. Num. **R2** (1974), pp. 129-151.
- [14] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed Hybrid Finite Element Methods*, in Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Hong Kong, Barcelona, (1991).
- [15] PH. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [16] J. M. DELHAYE, *Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation*, Int. J. Multiphase Flow, **1** (1974), pp 395-409.
- [17] I. V. DENISOVA, *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface*, Acta Appl. Math. **37-1** (1994), pp 31-40.
- [18] D. EDWARDS, H. BRENNER AND D. WASAN, *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworth-Heinemann, Boston, (1991).
- [19] A. ERN ET J-L. GUERMOND, *Eléments finis*, Théorie, applications et mise en oeuvre, *Springer-Smai*, Mathématiques & Applications 36, Paris (2002).
- [20] A. ERN AND J-L. GUERMOND, *Theory and Practice of Finite Elements*, in Springer Series in Applied Mathematical Sciences 159, Springer-Verlag, New York, (2004).



- [21] B. G. GALERKIN, *Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates*, Eng. Bull, Vestn. Inzh. Tech-Russian. **19** (1915), 897-908.
- [22] V. GIRAULT, *Approximations variationnelles des E.D.P.*, Cours du DEA, Laboratoire Jacques-Louis Lions de La Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, (2006).
- [23] V. GIRAULT, *Problemes variationnels et méthodes d'éléments finis*, Notes de cours DEA de l'Université Paris VI-Pierre et Marie Curie, (2001).
- [24] V. GIRAULT AND P. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, *Springer Series in Computational Mathematics*, Vol. 5, Springer-Verlag, New York, (1986).
- [25] V. GIRAULT, H. LÓPEZ AND B. MAURY, *One time-step finite element discretization of the equation of motion of two-fluid flows*, Numerical Methods for Differential Equations, **22**. 3 (2006), pp. 680-707.
- [26] R. GLOWINSKI, *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet and J. L. Lions-Editors, North-Holland, Amsterdam, (2003).
- [27] M. GUNZBURGER, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A guide to Theory, Practice and Algorithms*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Boston, MA, (1989).
- [28] Y. HU AND Z. HUANG, *Coaxial liquid-liquid flows in tubes with limited length*, Journal of Zhejiang University SCIENCE A (2005).
- [29] D. D. JOSEPH AND Y. RENARDY, *Fundamentals of two-fluid dynamics, Part II Lubricated transport, Drops and Miscible Fluids*, Springer, New York, (1993).
- [30] D. D. JOSEPH, R. BAI, K. P. CHEN AND Y. RENARDY, *Core-anular flows*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 65 (1999).
- [31] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, *Mécaniques des Fluides*, MIR Moscou, (1955).

- [32] J.-L. LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. I, Dunod, Paris, (1968).
- [33] B. MAURY, *Flujo de Dos Fases*, Avance del Proyecto ECOS-Nord-V00M04, UCV-CCT, Caracas-Venezuela, (2002).
- [34] B. MAURY, *Characteristics ALE Method for the 3D Navier-Stokes Equations with a Free Surface*, Int. Journal of Comp. Fluid Dyn. **6** (1996), pp.175-188.
- [35] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [36] O. PIRONNEAU. *On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math., **38** (1982), 309–332.
- [37] P.-A. RAVIART ET J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection “Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise”, Masson, Paris, (1989).
- [38] A. SANIERE, I. HÉNAUT AND J.F. ARGILLIER, *Pipeline Transportation of Heavy Oils, a Strategic, Economic and Technological Challenge*, Oil & Gas Science and Technology Rev. IFP, Vol. 59, No. 5, pp. 455-466 (2004).
- [39] D. J. SILVESTER, H. C. ELMA ABD A. J. WATHEN, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*, Oxford-University Press, Oxford, New York, (2005).
- [40] C. TAYLOR, P. HOOD, *A numerical solution of the Navier - Stokes equations using the finite element technique*. Computers and Fluids, 1:73-100, (1973).
- [41] C. TRUESDELL AND K. R. RAJAGOPAL, *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhauser, Boston, (2000).