Condición necesaria y suficiente para la extinción de una especie en un sistema competitivo con retardo infinito.

Liliana Rebeca Pérez.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Condición necesaria y suficiente para la extinción de una especie en un sistema competitivo con retardo infinito.

Por

Liliana Rebeca Pérez.

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Agregado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto, 2008

Resumen

En este trabajo estudiaremos el sistemas integro diferencial,

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0; \\ \\ i = 1, ..., n \end{cases}$$

donde a_{ij} son constante no negativa para $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ii} > 0$ con $1 \leq i \leq n$ y b_i con $1 \leq i \leq n$ son funciones continuas, T-periódicas. El promedio $M(b_i) > 0$ para $i = 1, ..., n-1$. Las condiciones iniciales φ_i con $i = 1, ..., n$, pertenecen al conjunto FA, donde

$$FA = \{\varphi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua, } \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0 \text{ y } \varphi_M < +\infty\}.$$

Los núcleos $K_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, con $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ son funciones continuas que cumplen $\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1$. Este sistema es llamados sistemas competitivos Lotka Volterra. El sistema modela n especies en competencia con retardo infinito.

Damos condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes del sistema, de fácil verificación, para la extinción de la n-esima especie y la coexistencia de las otras especies involucradas en el modelo.

Índice general

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Introducción

La Ecología estudia las relaciones mutuas entre el hombre y en general entre los organismos vivos y el medio ambiente. El objeto principal de la Ecología es la evolución de las poblaciones. La descripción matemática de un sistema del mundo real es a menudo llamado modelo matemático. El interés general de la modelación matemática de poblaciones biológicas ha aumentado sustancialmente durante las últimas cuatro décadas. Esta área interdisciplinaria de investigación ha atraído un número grande de biólogos, ingenieros, físicos y matemáticos en los últimos años. La mayoría de estos investigadores ha intentado entender los fenómenos biólogicos, usando ambas técnicas, la física y la matemática.

En estas aplicaciones, el comportamiento futuro de muchos fenómenos se supone que son descritos por la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). En otras palabras el sistema es gobernado por un principio de causalidad; es decir, el estado futuro del sistema es independiente de sus estados pasados y es exclusivamente determinado por el presente. Sin embargo retrasos o retardos son componentes naturales de los sistemas biológicos y existen muchas razones para incluirlos en los modelos matemáticos. Por ejemplo, los retardos podrían ser incluido para representar:

(a) Lapsos de regeneración de recursos,

(b) Periodos de maduración,

(c) Lapsos por alimentación, etc...

Precisamente es en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (EDR), o mas generalmente Ecuaciones Diferenciales Funcionales (EDF), donde el pasado ejecuta influencias sobre el futuro de una manera muy significativa. La gran mayoría de modelos biológicos son mejor representados por EDF que por EDO.

Durante los últimos 60 años y especialmente los últimos 40 la EDR han sido y continúan siendo investigados a pasos agigantados. Ver [10],[11],[12],[13], y [24]. Una de las motivaciones de su desarrollo se ha centrado, en particular, en la Biomatemática. El uso de estos modelos con retardo se remonta a la época de los matemáticos Vito-Volterra (1860-1940) y Marcel Brelot (1903-1987) en sus publicaciones [23] y [6] respectivamente, donde estudiarón el modelo clásico de presa-depredador con retardo continuo infinito.

Volterra (1931) investigó el siguiente modelo de presa-depredador

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)\left[r_1 - \alpha_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds\right], \\[2ex] \dfrac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)\left[-r_2 + \alpha_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds\right]; \end{cases}$$

donde N_1 representa la presa y N_2 el depredador, α_i con $i = 1, 2$ son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies, r_1 es la tasa de crecimiento de la presa y r_2 es la tasa de mortalidad del depredador; F_1 y F_2:$[0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ son continuas y satisfacen

$$\int_0^{+\infty} F_i(s)ds = 1 \qquad \text{para cada} \quad i = 1, 2.$$

Las integrales

$$\int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds$$

expresan el impacto de cada especie sobre la otra en el pasado. Si la memoria de la población es limitada, el limite inferior de la integración puede ser cambiado por $(t-\tau)$, con τ constante.

Volterra probó que existe una única solución $(N_1(t), N_2(t))$ con $N_i(t) > 0$, $\forall\, t \geq 0$ con $i = 1, 2$. Además si las soluciones no son estacionarias, ellas fluctúan indefinidamente; y las soluciones periódicas son imposibles.

Brelot (1931) estudio una modificación de la ecuación (1) incluyendo términos que representan la competencia intraespecie alrededor de la presa y del depredador para obtener el sistema siguiente

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)\left[r_1 - \lambda_1 N_1(t) - \alpha_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds\right], \\[2ex] \dfrac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)\left[-r_2 - \lambda_2 N_2(t) + \alpha_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds\right]; \end{cases}$$

donde los términos $-\lambda_i N_i$ representan la competencia intraespecie, F_1 y F_1 son como en el sistema (1).

Brelot probó la existencia de una única solución para (2) la cúal es acotada.

Si $\lambda_1 \neq 0$ y N_1 (la presa) es acotada por un número positivo; el depredador N_2 puede ser acotado también, más aún se puede aproximar a cero, dependiendo de la relación que puedan tener los parámetros en la ecuación.

1.2. Modelos Para Las Especies en Competencia

Consideremos ahora dos especies (de animales, plantas o bacterias, por ejemplo) cuyas poblaciones son $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las cuales compiten una con la otra por un abastecimiento limitado en el ambiente común. Para construir un modelo matemático tan realista como sea posible, se supuso que en ausencia de la otra especie una de ellas tendría una población limitada, logística. Cuando no se da interacción entre las especies,la población satisface el siguiente sistema:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = b_1 x_1(t) - a_{11} x_1^2(t), \\ x_2'(t) = b_2 x_2(t) - a_{22} x_2^2(t). \end{cases}$$

Si suponemos que la competencia tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional a su producto $x_1(t)x_2(t)$. Insertaremos tales términos con una constante de proporcionalidad negativa en las ecuaciones (3) para obtener las ecuaciones competencia o sistemas competitivos del tipo Lotka-Volterra:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = b_1 x_1(t) - a_{11} x_1^2(t) - a_{12} x_1(t) x_2(t), \\ x_2'(t) = b_2 x_2(t) - a_{21} x_1(t) x_2(t) - a_{22} x_2^2(t)\ ; \end{cases}$$

donde los coeficientes b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son números reales positivos. Las constantes b_1 y b_2 representan la razón de crecimiento de las especies x_1, x_2 respectivamente; a_{11},a_{22} representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia razón de crecimiento; y a_{12}, a_{21}, representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra (interacción). El análisis del plano fase muestra que las condiciones

$$b_1 > \frac{a_{12} b_2}{a_{22}}\ , \quad b_2 > \frac{a_{21} b_1}{a_{11}}$$

son necesarias y suficientes para la existencia de un punto de equilibrio estable (coexistencia) (x_0, y_0) del sistema, de forma que ambas componentes sean positivas y atraigan todas las soluciones con condiciones iniciales en el primer cuadrante x_1, x_2. Si se satisfacen las condiciones

$$b_1 > \frac{a_{12} b_2}{a_{22}}\ , \quad b_2 \leq \frac{a_{21} b_1}{a_{11}}$$

entonces toda solución con condiciones iniciales tiende a la solución de equilibrio $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$, $x_2 = 0$, cuando $t \to \infty$. Esto se conoce como el principio de exclusión competitiva.

El sistema (4) se generalizó a sistemas de la forma

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)\right], \qquad i = 1, ..., n. \tag{5}$$

En los años ochenta se comenzó a considerar sistemas no autónomos de la forma

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right], \qquad i = 1, ..., n \tag{6}$$

donde las funciones $b_i(t)$, $a_{ij}(t)$ con $1 \leq i, j \leq n$, son continuas, positivas y acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Ver [1],[2],[3],[4], [9], [15],[18],[19] y [20]. Este tipo de modelo es el que trabajaremos con retardo; es decir estudiaremos sistemas competitivos de ecuaciones diferenciales con retardo de la forma.

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \qquad i = 1, ..., n.$$

Montes de Oca y Vivas en [15], considerarón el sistema integro-diferencial de Lotka Volterra con retardo infinito

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\left[a_1(t) - b_{11}x_1(t) - b_{12}(t)\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_2(s)ds\right], \\ x_2'(t) = x_2(t)\left[a_2(t) - b_{21}\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)x_1(s)ds - b_{22}(t)x_2(t)\ \right], \end{cases}$$

donde los coeficientes satisfacen las siguientes condiciones.

a) a_k y b_{kj} con $1 \leq k, j \leq 2$ son funciones continuas acotadas superior e inferiormente por constantes positivas en $(-\infty, +\infty)$.

b) Los núcleos $K_i : [0, \infty) \to (0, \infty)$, $\quad i = 1, 2$, son funciones tal que

$$\int_0^{\infty} K_i(s)ds = 1, \quad i = 1, 2.$$

c) Se usa la siguiente notación. Dada una función $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ acotada,

$$g_L = \inf_{t\in\mathbb{R}} g(t), \quad g_M = \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t).$$

d) Los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$\frac{a_{1L}}{b_{12L}} > \frac{a_{2M}}{b_{22L}}, \qquad \frac{a_{2M}}{b_{21L}} \leq \frac{a_{1L}}{b_{11M}},$$

Bajo las condiciones a),b) y d), probarón lo siguiente:
Para cualquier solución $col(x_1(t), x_2(t))$ del sistema con condiciones iniciales positivas, se cumple

$$x_2(t) \to 0 \quad \text{y} \quad x_1(t) - x^*(t) \to 0,$$

cuando $t \to \infty$, donde $x^*(t)$ es la única solución de la ecuación logística

$$x'(t) = x(t)\left[a_{11} - b_{11}x(t)\right],$$

que cumple $\delta \leq x^*(t) \leq \Delta$, donde Δ y δ satisface $0 < \delta < \dfrac{a_{1L}}{b_{11M}}$ y $\dfrac{a_{1M}}{b_{11L}} < \Delta$.

Tineo en [21], consideró el sistema competitivo de Lotka Volterra

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right], \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.1}$$

donde las funciones $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, son continuas y T-periódicas,las constantes a_{ij} para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, son no negativas y $a_{ii} > 0$, $i = 1, ..., n$, tales que:

a) para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, $M(b_i) \equiv \dfrac{1}{T}\int_0^T b_i(s)ds > 0$; esto es el valor promedio de cada b_i, es positivo.

b) $M(b_i) > \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_j) + \dfrac{M(b_n)^+}{a_{nn}} a_{in}$ $\quad i = 1, ..., n-1,$ $\quad (M(b_n)^+ = \text{máx}\{0, M(b_n)\})$.

c) $M(b_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^*$ donde $x^* = col(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$ es la única solución positiva del sistema, la existencia de x^* es implicada por las hipótesis a) y b),

$$M(b_i) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Bajo estas hipótesis Tineo probó que

- Para cualquier solución $x(t) = col(x_1(t), ..., x_n(t))$ del sistema (1.1) con condiciones iniciales positivas, se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \left(x_1(t) - U_1^*(t), x_2(t) - U_2^*(t), ..., x_{n-1}(t) - U_{n-1}^*(t), x_n(t)\right) = (0, ..., 0);$$

donde $U^*(t) = col(U_1^*(t), ..., U_{n-1}^*(t))$ es la única solución T-periódica y positiva del sistema competitivo (n-1)dimensional

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j\right]; \quad 1 \le i \le n-1. \tag{1.2}$$

La existencia de U^* fue probada por Tineo y Álvarez en [22].

- También demostró que si se satisfacen a) , b),

$$M(b_n) > \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^* \quad \text{y} \quad a_{nn} > \left\langle q, (2D-A)^{-1}(c)\right\rangle,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad c = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

entonces el sistema (1.2) tiene una solución T-periódica que atrae todas las soluciones positivas del sistema (1.1).

- Por ultimo demostró que si a), b) y c) se satisfacen y las funciones b_i son constantes positivas, entonces el sistema (1.2) tiene un punto de equilibrio positivo.

En este trabajo estudiaremos el sistemas competitivos del tipo Lotka Volterra con retardo infinito de la forma:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], & t > 0 \\ \\ x_i(t) = \phi_i(t) \quad \text{para} \quad t \le 0, & i = 1, ..., n \end{cases}$$

donde las funciones $b_i(t)$ con $i = 1, ..., n$ son son continua, positiva y T periódica, a_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$, son constantes positivas y los núcleos
$K_{ij} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ con $1 \leq i, j \leq n$ son funciones continuas y satisfacen la condición $\int_0^{\infty+} K_{ij}(t)dt = 1$ y las condiciones iniciales son funciones que cumplen $\phi_i \in FA$, $i = 1, ..., n$, donde FA esta definido de la siguiente manera

$$FA = \{\varphi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua, } \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0 \text{ y } \varphi_M < +\infty\}.$$

Nuestro objetivo es hacer un estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación (7), buscando resultados similares a los obtenidos por Tineo en [21].

En nuestro estudio usaremos técnicas estándar: el ánalisis matemático, la teoría de las ecuaciones diferenciales con retardo, teoría de las ecuaciones integrales de Volterra y algunos métodos usados en los trabajos previos citados e incluyendo algunas técnicas utilizadas en algunas publicaciones de las referencias bibliográficas y específicamente trabajaremos con el método Iterativo o esquema Iterativo desarrollado por Tineo en [21].

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo esta compuesto por definiciones lemas y teoremas necesarias para las demostraciones de algunos resultados principales de este trabajo.

2.1. Definiciones, lemas y teoremas

Definición: 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Denotamos por

$$f_L = \text{ínf}\{f(t) : t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad f_M = \sup\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Definición: 2.2. Una función $K : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, no negativa y con la propiedad

$$\int_0^\infty K(s)ds = 1,$$

se denomina núcleo normalizado.

Lema 2.3. *Sean K un núcleo normalizado y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, T-periódica y no negativa. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ la integral $\int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds$ converge y la función $f(t) = \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds$ es T- periódica, continua y $x_L \le f(t) \le x_M$.*

Demostración. Como x es una función continua, T-periódica y no negativa, entonces $0 \le x_L \le x(t) \le x_M$. Luego

$$\int_{-\infty}^t K(t-s)x_L ds \le \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds \le \int_{-\infty}^t K(t-s)x_M ds \qquad \text{ó}$$

$$x_L \le \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds \le x_M,$$

ya que $\int_{-\infty}^t K(t-s)ds = \int_0^{+\infty} K(t-s)ds = 1$. Por lo tanto $\int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds$ converge, f define una función y además

$$x_L \le f(t) \le x_M, \qquad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estudiemos ahora la continuidad de f en $t_1 \in [0, +\infty)$. En efecto; sean $t_1 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ dados. Por la continuidad de x en t_1 existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_1| < \delta$ implica que $|x(t) - x(t_1)| < \epsilon$. La desigualdad $|t - t_1| < \delta$ implica que para cualquier $u \in \mathbb{R}$ se satisface $|(t-u) - (t_1 - u)| < \delta$ y en consecuencia se tiene la desigualdad $|x(t-u) - x(t_1 - u)| < \epsilon$ para cualquier $u \in \mathbb{R}$. Así obtenemos

$$|f(t) - f(t_1)| \leq \int_0^{+\infty} K(u)|x(t-u) - x(t_1 - u)|du < \int_0^{+\infty} K(u)\epsilon.du = \epsilon.$$

Esto prueba la continuidad de f en t_1. A continuación probaremos la T-periodicidad de la función f.En efecto,

$$\begin{aligned} f(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} K(t+T-s)x(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} K(t-u)x(u+T)du \qquad \text{haciendo } u = s - T \\ &= \int_{-\infty}^{t} K(t-u)x(u)du \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que f es T periódica. ■

Definición: 2.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y T-periódica. Definimos el valor promedio de f como $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ y lo denotamos por $M(f)$.

Observación 2.5. Si f es una función continua y T-periódica, entonces

$$f_L \leq M(f) \leq f_M.$$

Observación 2.6. Si f es una función T-periódica se cumple que

$$\int_0^{nT} f(t)dt = n\int_0^T f(t)dt.$$

En efecto,

$$\int_0^{nT} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{2T} f(t)dt + ... + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)T}^{jT} f(t)dt.$$

Por otro lado, haciendo el cambio $u = t - (j-1)T$ en la integral $\int_{(j-1)T}^{jT} f(t)dt$, se tiene que

$$\int_{(j-1)T}^{jT} f(t)dt = \int_0^T f(u + (j-1)T)dt = \int_0^T f(u)dt,$$

(debido a que f es T-periódica). Así,

$$\int_0^{nT} f(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)T}^{jT} f(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_0^T f(u)dt = n \int_0^T f(u)dt.$$

■

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real de valores reales, la integral $\int_a^b f(x,y)dx$, si esta existe, define una función $g(y)$. Cuando $f(x,y)$ es una función integrable con respecto a x, la integral impropio $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$, si converge, también define una función $g(y)$.

Definición: 2.7. Si la integral impropio converge para cada $y \in B \subset \mathbb{R}$ a una función $g(y)$, entonces se dice que la convergencia es uniforme en B, si para cada $\epsilon > 0$ existe un n_ϵ tal que para todo $n \geq n_\epsilon$ y para cada $y \in B$, $\left|g(y) - \int_a^n f(x,y)dx\right| < \epsilon$.

Teorema 2.8. *Sea $f(t,x)$ una función definida y continua sobre $[a,\infty) \times [c,d]$ y supongamos que $\int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformemente sobre $[c,d]$. Entonces*

$$\int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(t,x)dt\right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(t,x)dx\right] dt.$$

Demostración. Ver Prueba en [7], Página 333.

Lema 2.9. *Sean K un núcleo normalizado y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y T-periódica. Sea f la función definida como en el lema (2.3); esto es,*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds = \int_0^{+\infty} K(u)x(t-u)du.$$

Entonces f converge uniformemente $\mathbb{R}$.

Demostración. Para probar que f converge uniformemente en $\mathbb{R}$, usaremos la definición (2.7). En efecto,

$$\left|\int_0^{+\infty} K(u)x(t-u)du - \int_0^n K(u)x(t-u)du\right| = \left|\int_n^{+\infty} K(u)x(t-u)du\right|.$$

La periodicidad y la continuidad de x implican que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así

$$\begin{aligned} \left|\int_n^{+\infty} K(u)x(t-u)du\right| &\leq \int_n^{+\infty} MK(u)du \\ &= M\int_n^{+\infty} K(u)du. \qquad (1) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos $\int_0^{+\infty} K(u)du = 1$. Esto implica que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que

$$\left| \int_0^{+\infty} K(u)du - \int_0^{n} K(u)du \right| = \left| \int_n^{+\infty} K(u)du \right| < \frac{\epsilon}{M} \qquad \forall n \geq n_0 \qquad (2)$$

de (1) y (2) se tiene la convergencia uniforme de g en $\mathbb{R}$. ■

Lema 2.10. *Sean K un núcleo normalizado, x una función continua y T-periódica y la función f como en el lema anterior. Entonces*

$$M(f) = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)dsdt = M(x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
M(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)dsdt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^{+\infty} K(u)x(t-u)dudt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} K(u)\left[\int_0^T x(t-u)dt\right]du \qquad \text{(por lema anterior y teorema (2.8)).} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} K(u)\left[\int_{-u}^{T-u} x(v)dv\right]du \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} K(u)\left[\int_0^T x(v)dv\right]du \qquad \text{(por la periodicidad } x\text{).} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x(v)dv, \qquad \text{ya que} \quad \int_0^{+\infty} K(u)du = 1, \\
&= M(x).
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.11. *Sean K un núcleo normalizado y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa y acotada. Si $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$, entonces*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s)ds = x_0.$$

Demostración. (Ver observación después del lema 3 en [15]).

Teorema 2.12. $\{$***de comparación entre dos ecuaciones escalares***$\}$
Sea D *un abierto de* $\mathbb{R}^2$, $f(t,y)$ *y* $g(t,y)$ *funciones continuas* $f,g : D \to \mathbb{R}$ *e* $y' = f(t,y)$ *e* $y' = g(t,y)$ *las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones,* f *o* g*, es localmente lipschitziana en* D *con respecto de la variable* y*. Sean* $y, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ *soluciones respectivas de* $y' = f(t,y)$ *e* $y' = g(t,y)$*. Supongamos que se verifica*

$$g(t,y) \leq f(t,y) \quad \text{en } D, \quad \text{y que} \quad z(a) \leq y(a).$$

Entonces

$$z(t) \leq y(t).$$

Demostración. Ver Prueba en [17], Página 161.

Teorema 2.13. *Sean* $a(t)$ *y* $b(t)$ *funciones continuas , T-periódicas definidas en* $\mathbb{R}$ *con* $a(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. *Existe una solución* θ *no negativa y T-periódica de la ecuación logística T-periódica*

$$x' = x\left[b(t) - a(t)x\right], \tag{2.1}$$

la cual tiene la propiedad que atrae a todas las soluciones con condiciones iniciales positivas de (2.1); esto es, si $U(t)$ *es solución de (2.1) con* $x(0) = x_0 > 0$ *entonces* $\lim_{t\to+\infty}(U(t) - \theta(t)) = 0$. θ *es llamado atractor global de (2.1). Además, se cumple*

i) $\theta \equiv 0$ *si* $M(b) \leq 0$;

ii) $\theta > 0$ *si* $M(b) > 0$ *y este caso*

$$\theta(0) = x_0 = \frac{\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right) - 1}{\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds} = \left(\int_{-\infty}^0 a(s)\exp\left(-\int_s^0 b(\tau)d\tau\right)ds\right)^{-1}.$$

Demostración. La solución para el problema

$$x' = x\left[b(t) - a(t)x\right] \qquad \text{con} \quad x(0) = x_0 \neq 0 \qquad \text{es}$$

$$U(t,x_0) = \frac{x_0\exp\left(\int_0^t b(\tau)d\tau\right)}{1 + x_0\int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds}.$$

Esta solución es T-periódica si y sólo si

$$x_0 = U(0,x_0) = U(T,x_0) = \frac{x_0\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right)}{1 + x_0\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds}.$$

Como $a(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right) ds > 0$.
Así despejando x_0, tenemos que $u(t,x_0)$ es T-periódica si y sólo si

$$x_0 = \frac{\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right) - 1}{\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right) ds}. \tag{2.2}$$

Sabemos que $M(b) > 0$ es equivalente a decir que $\int_0^T b(\tau)d\tau > 0$, por lo que $x_0 > 0$ si y sólo si $M(b) > 0$.

Veamos que la solución $\theta(t) = U(t,x_0)$, con x_0 dado por (2.2) atrae a todas las soluciones con condiciones iniciales positivas de (2.1) cuando $M(b) > 0$.

En efecto.

La derivada de la función de Poincare Π en x_0 es igual a

$$\Pi'(x_0) = \exp\left(\int_0^T (b(t) - 2a(t)U(t,x_0))\, dt\right).$$

Por otro lado como $U(t,x_0)$ es solución de la ecuación logística, tenemos que

$$\frac{U'(t,x_0)}{U(t,x_0)} = b(t) - a(t)U(t,x_0) \quad \text{y} \quad U(t,x_0) \quad \text{es T-periodica.}$$

Integrando desde 0 hasta T, nos queda

$$0 = \int_0^T \frac{U'(t,x_0)}{U(t,x_0)} dt = \int_0^T (b(t) - a(t)U(t,x_0))\, dt$$

así que

$$\begin{aligned}
\Pi'(x_0) &= \exp\left(\int_0^T (b(t) - a(t)U(t,x_0) - a(t)U(t,x_0))\, dt\right) \\
&= \exp\left(\int_0^T -a(t)U(t,x_0) dt\right) dt \\
&< 1,
\end{aligned}$$

esta desigualdad es debido a que $a(t)$ y $U(t,x_0)$ son funciones positivas.
Luego la solución $\theta(t) = U(t,x_0)$ es asintóticamente estable.

Si $M(b) \leq 0$, entonces tenemos dos casos $M(b) = 0$ ó $M(b) < 0$.

Si $M(b) < 0$ entonces $x_0 < 0$. Luego la única solución T-periódica no negativa es $U(t,0) \equiv 0$. Así que la única solución T-Periódica es $\theta(t) \equiv 0$.
Además $\prod'(0) = \exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right) = e^{TM(b)} < 1$, así la solución $\theta(t) = U(t,0) \equiv 0$ es asintóticamente estable.

Si $M(b) = 0$ entonces nuevamente la única solución T-periódica no negativa es $\theta(t) \equiv 0$. Veamos que atrae a las soluciones $U(t, x_0)$ con $x_0 > 0$. Sea $U(t, x_0) = p(t)y(t)$, donde $p(t) = \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right)$. Veamos que p es T-periódica. En efecto,

$$\begin{aligned} p(t+T) &= \exp\left(\int_0^{t+T} b(s)ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^{t} b(s)ds + \int_t^{t+T} b(s)ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^{t} b(s)ds + \int_0^{T} b(s)ds\right) \quad \text{por ser } b \text{ T-periódica.} \\ &= \exp\left(\int_0^{t} b(s)ds\right) = p(t), \quad \text{ya que } M(b) = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia p es una función T-periódica. Sustituyendo en la ecuación logística (2.1) obtenemos

$$y' = -a(t)p(t)y^2(t), \qquad y(0) = x_0 > 0$$

cuya solución es $y(t) = \dfrac{x_0}{1 + x_0 \int_0^t a(s)p(s)ds}$ y está bien definido para $t \geq 0$; porque $x_0 > 0$ y $b(s)p(s) > 0$. Además como $\int_0^t a(s)p(s)ds \geq a_L p_L t$ y $b_L, p_L > 0$, entonces $y(t) \to 0$, conforme $t \to \infty$. $0 \leq U(t, x_0) \leq p_M y(t)$ entonces $U(t, x_0) \to 0$ conforme $t \to \infty$. Esto prueba el teorema.

Probemos que

$$x_0 = \frac{\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right) - 1}{\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds} = \left(\int_{-\infty}^0 a(s)\exp\left(-\int_s^0 b(\tau)d\tau\right)ds\right)^{-1}.$$

En efecto. La función $B(t) = a(t)\exp\left(-\int_t^0 b(s)ds\right)$ es continua y positiva en $\mathbb{R}$. Sea $M = \max\{B(t) : t \in [-T, T]\}$. Dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left(1 + \frac{1}{|1 - e^{-TM(b)}|}\right) MTe^{-nTM(b)} < \epsilon. \tag{2.3}$$

Sea $\lambda < -N$, entonces existe números $n \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq r \leq T$ tal que $\lambda = -nT - r$. Claramente $n > N$. En virtud de que las funciones $a(t)$, $b(t)$ son T-periódicas se tiene

$$\int_{-nT}^0 a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds = \sum_{j=1}^n \int_0^T a(\theta)e^{-\int_{\theta-jT}^0 b(\tau)d\tau}d\theta; \tag{2.4}$$

$$\int_{\theta-jT}^{0} b(\tau)d\tau = \int_{\theta}^{0} b(\tau)d\tau + J\int_{0}^{T} b(\tau)d\tau = \int_{\theta}^{0} b(\tau)d\tau + JTM(b), \tag{2.5}$$

$$\int_{-nT-r}^{-nT} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds = e^{-nTM(b)}\int_{-r}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds. \tag{2.6}$$

De (2.4) y (2.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-nT}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds &= \frac{e^{-TM(b)}\left(1-e^{-nTM(b)}\right)}{1-e^{-TM(b)}}\int_{0}^{T} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds\\ &= \frac{\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1} - \frac{e^{-nTM(b)}\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1}.\end{aligned}$$

Luego por lo anterior y por (2.6), tenemos que para todo $\lambda < -N$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds &= \int_{-nT-r}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds\\ &= \int_{-nT-r}^{-nT} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds + \int_{-nT}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds\\ &= e^{-nTM(b)}\int_{-r}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds + \frac{\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1}\\ &\quad - \frac{e^{-nTM(b)}\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\left|\int_{\lambda}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds - \frac{\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1}\right| &< \left(1+\frac{1}{e^{TM(b)}-1}\right)MTe^{-nTM(b)}\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\int_{-\infty}^{0} a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds = \frac{\int_0^T a(s)e^{-\int_s^0 b(\tau)d\tau}ds}{e^{TM(b)}-1}.$$

Así

$$x_0 = \frac{\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right)-1}{\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds} = \left(\int_{-\infty}^{0} a(s)\exp\left(-\int_s^0 b(\tau)d\tau\right)ds\right)^{-1}.$$

■

Observación 2.14. Si a y b son constantes en el teorema anterior, entonces el atractor global de la ecuación logística es $\max\left\{0, \dfrac{b}{a}\right\}$. Si b es positivo el atractor global es el punto de equilibrio $\dfrac{b}{a}$.

Teorema 2.15. *Sean* $a(t)$, $b(t)$, $B(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones continuas, T-periódicas con* $a(t) > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $B(t) \leq b(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Sea* θ_b *el atractor global de la ecuación diferencial*

$$x'(t) = x(t)\left[b(t) - a(t)x(t)\right]$$

y sea θ_B *el atractor global de la ecuación diferencial*

$$x'(t) = x(t)\left[B(t) - a(t)x(t)\right]$$

entonces $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $M(B) \leq 0$, entonces $\theta_B \equiv 0$ y obviamente $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si $M(B) > 0$, entonces $M(b) > 0$ y $\theta_B(t)$ y $\theta_b(t)$ son funciones positivas. Por otra parte $\theta_B(0) = \left[\int_{-\infty}^{0} a(s)\exp\left(-\int_s^0 B(\tau)d\tau\right)ds\right]^{-1}$.
Como $B(t) \leq b(t)$ entonces $\exp\left(-\int_s^0 B(\tau)d\tau\right) \geq \exp\left(-\int_s^0 b(\tau)d\tau\right)$ y así $\theta_B(0) \leq \theta_b(0)$. Además para $x \geq 0$, $x\left[B(t) - a(t)x\right] \leq x\left[B(t) - a(t)x\right]$, luego por teorema de comparación (2.12) se tiene $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

Teorema 2.16. *Sean a y b funciones T-periódicas, continuas con $a(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones T-periódicas continuas que converge uniformemente hacia b sobre $\mathbb{R}$. Si θ_n es el atractor global de $x' = x\,(b_n(t) - a(t)x)$ y θ es el atractor global de $x' = x\,(b(t) - a(t)x)$ entonces la sucesión θ_n converge uniformemente hacia θ sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que la sucesión $\{\theta_n\}$ es uniformemente acotada. En efecto, la convergencia uniforme de la sucesión $\{b_n\}$ hacia la función b implica que existe $M > 0$ tal que $b_n(t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Además cada función θ_n alcanza su valor máximo en algún $t_n \in \mathbb{R}$ entonces

$$0 = \theta_n'(t_n) = \theta_n(t_n)\left(b_n(t_n) - a(t_n)\theta_n(t_n)\right)$$

De aquí que $\theta_n(t_n) = 0$ o $\theta_n(t_n) = \dfrac{b_n(t_n)}{a(t_n)} \leq \dfrac{M}{a_L}$. Entonces

$$\theta_n(t) \equiv 0 \qquad \text{ó} \qquad \theta_n(t) \leq \theta(t_n) \leq \frac{M}{a_L}.$$

Así para todo $n \in \mathbb{Z}^{+}$; $0 \leq \theta_n(t) \leq \dfrac{M}{a_L}$. Por lo tanto la sucesión $\{\theta_n\}$ es uniformemente acotada. En consecuencia

$$\begin{aligned} |\theta'_n(t)| &= |\theta_n(t)|\,|b_n(t) - a(t)\theta_n(t)| \\ &\leq \frac{M}{a_L}\left(|b_n(t)| + |a_n(t)|\,|\theta_n(t)|\right) \\ &\leq \frac{M}{a_L}\left(M + a_M\frac{M}{a_L}\right) = L. \end{aligned}$$

Así $|\theta'_n(t)| \leq L$ para todo n y para todo $t \in \mathbb{R}$. Por el teorema de valor medio se tiene que la sucesión $\{\theta_n\}$ es equicontinua. Por el teorema de Arzela-Ascoli la sucesión $\{\theta_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en $[0,T]$. Esto significa que el conjunto de todos los puntos límites de $\{\theta_n\}$ en el conjunto de todas las funciones T-periódicas y continuas es no vació. Veamos que el único punto límite es θ . En efecto, sea $\{\theta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{\theta_n\}$ que converge uniformemente hacia la función w T-periódica y continua. Como $x\,(b_n(t) - a(t)x)$ converge uniformemente a $x\,(b(t) - a(t)x)$ en
$\mathbb{R} \times [0,N]$, donde $N \geq \text{máx}\left\{\dfrac{M}{a_L}, \dfrac{b_M}{a_L}\right\}$, entonces

$$\theta'_{n_k}(t) = \theta_{n_k}(t)\left(b_{n_k}(t) - a(t)\theta_{n_k}(t)\right) \to w(t)\left(b(t) - a(t)w(t)\right)$$

uniformemente en $[0,T]$. En consecuencia $w'(t) = w(t)\left(b(t) - a(t)w(t)\right)$.

Si $w(t) > 0$, entonces por el teorema (2.13) $w(t) \equiv \theta(t)$.

Si $w(t) \equiv 0$ entonces observemos que si $\theta_{n_k}(t) > 0$

$$0 = \ln\left(\frac{\theta_{n_k}(T)}{\theta_{n_k}(0)}\right) = \int_0^T \left(b_{n_k}(t) - a(t)\theta_{n_k}(t)\right) dt > \int_0^T b_{n_k}(t)dt.$$

Así $\int_0^T b_{n_k}(t)dt < 0$ si $\theta_{n_k}(t) > 0$.
Si $\theta_{n_k}(t) = 0$, entonces $\int_0^T b_{n_k}(t)dt \leq 0$. Por lo tanto para cualquier $k \in \mathbb{Z}^{+}$ $\int_0^T b_{n_k}(t)dt \leq 0$. Tomando límite cuando $k \to +\infty$ se tiene que $\int_0^T b(t)dt \leq 0$ y por lo tanto $\theta(t) \equiv 0 \equiv w(t)$. En ambos casos $\theta(t) = w(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. como la sucesión $\{\theta_n\}$ es equicontinua, uniformemente acotada y existe una única función$\theta(t)$ que es el punto límite, se tiene entonces que la sucesión completa $\{\theta_n\}$ converge uniformemente hacia $\{\theta\}$ en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.17. *Sean a,b y c funciones T-periódicas y continuas. Sean $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de funciones T-periódicas y continuas de $\mathbb{R}$ en $[0,+\infty)$. Supongamos que existe una sucesión t_n en $[0,+\infty)$ tal que*

i) $b_n(t) \leq c(t) \leq c_n(t)$. *para* $t \geq t_n$.

ii) $\{b_n\}$ *converge uniformemente hacia* b.

iii) $\{c_n\}$ *converge uniformemente hacia* b.

Sea U *una solución del problema de valor inicial* $x' = x\,(c(t) - a(t)x)$, $x(0) = x_0 > 0$. *Entonces* U *esta definida en* $[0, +\infty)$ *y* $U(t) - \theta_b(t) \to 0$ *conforme* $t \to +\infty$, *donde* $\theta_b(t)$ *es el atractor global de* $x' = x\,(b(t) - a(t)x)$.

Demostración. Obviamente U está definida en $[0, +\infty)$ debido a propiedades de las soluciones de la ecuación logística diferencial. Sean U_n y v_n soluciones respectivas de

$$x' = x\left[b_n(t) - a(t)x\right], \qquad x(t_n) = U(t_n)$$

$$x' = x\left[c_n(t) - a(t)x\right], \qquad x(t_n) = U(t_n).$$

Sabemos que U_n y v_n están definidas en $[t_n, +\infty)$ y además

$$U_n(t) - \theta_{b_n}(t) \to 0, \quad v_n(t) - \theta_{c_n}(t) \to 0 \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty. \tag{2.7}$$

Por el teorema de comparación (2.15) se tiene que $U_n(t) \leq U(t) \leq v_n(t)$ para todo $t \geq t_n$. Fijemos $\epsilon > 0$. Por el teorema anterior , existe un entero $N \geq 1$ tal que

$$|\theta_{b_n}(t) - \theta_b(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad |\theta_{c_n}(t) - \theta_b(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},\ n \geq N.$$

De (2.7), existe $\tau = \tau(\epsilon, N) \geq t_N$ tal que

$$|U_N(t) - \theta_{b_N}(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad |v_N(t) - \theta_{c_N}(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para} \quad t \geq \tau. \tag{2.8}$$

De aquí tenemos que

$$U(t) \leq v_N(t) \leq \theta_{c_N}(t) + \frac{\epsilon}{2} \leq \theta_b(t) + \epsilon$$

$$U(t) \geq U_N(t) \geq \theta_{b_N}(t) - \frac{\epsilon}{2} \geq \theta_b(t) - \epsilon \qquad \text{si} \quad t \geq \tau.$$

Esto es; $-\epsilon \leq U(t) - \theta_b(t) \leq \epsilon$ para $t \geq \tau$. Así

$$\lim_{t \to +\infty} \left(U(t) - \theta_b(t)\right) = 0.$$

$\blacksquare$

Definición: 2.18. Dados los vectores $x = col(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = col(y_1, y_2, ..., y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, diremos que:

i) $x > 0$ (respectivamente $x \geq 0$) cuando $x_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$ (respectivamente $x_i \geq 0$).

ii) $x > y$ (respectivamente $x \geq y$)cuando $x_i > y_i$ para todo $i = 1, ..., n$ (respectivamente $x_i \geq y_i$).

Definición: 2.19. Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden n, diremos que:

i) $A > 0$ (respectivamente $A \geq 0$) cuando para todo par (i, j) se tiene que $a_{ij} > 0$ (respectivamente $a_{ij} \geq 0$).

ii) $A > B$ (respectivamente $A \geq B$)cuando para todo para (i, j) se tiene que $a_{ij} > b_{ij}$(respectivamente $a_{ij} \geq b_{ij}$).

Teorema 2.20. ***(Perron-Frobenius)****.*
Si $A = (a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} > 0 \quad (1 \leq i, j \leq n)$, entonces

1. *$\gamma(A) > 0$, donde $\gamma(A) = \max\{|\lambda| : \lambda$ es un autovalor de $A\}$.*
2. *$\gamma(A)$ es un autovalor de A.*
3. *Existe un $x \in \mathbb{R}^n$ con $x > 0$ y $Ax = \gamma(A)x$.*

Demostración. Ver [5] página 27.

Lema 2.21. *Dada la matriz $A = (a_{ij})$ y el vector $b = col(b_1, b_2, ..., b_m)$ con $a_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq m$ y $a_{ii}, b_i > 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Supongamos que se cumple*

$$b_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j, \qquad i = 1, ..., m. \tag{2.9}$$

Entonces $\gamma(AD^{-1} - I) < 1$, donde $D^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, ..., \frac{1}{a_{mm}})$ y existe $d = (d_1, d_2, ..., d_m)$ con $d_i > 0 \quad i = 1, ..., m$ tal que

$$d_j a_{jj} > \sum_{i=1, i\neq j}^{m} d_j a_{ij}.$$

Demostración. Para $1 \leq i, j \leq m$, sean

$$l_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si} \quad i \neq j \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad i = j \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \gamma_j = \frac{b_j}{a_{jj}}.$$

Observe que la matriz $L = (l_{ij})$ es igual a la matriz $AD^{-1} - I$ y además

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\gamma_j &= \sum_{j=1 j\neq i}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\frac{b_j}{a_{jj}} \\ &= \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1 j\neq i}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j \\ &\leq \frac{b_i}{a_{ii}} = \gamma_i \quad \text{por la hipótesis (2.9).}\end{aligned}$$

Por lo tanto para cualquier $1 \leq i \leq m$,

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\gamma_j < \gamma_i,$$

La desigualdad anterior implica que podemos seleccionar números $p_{ij} > l_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ tales que se verifiquen las desigualdades

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\gamma_j < \gamma_i, \qquad i = 1, ..., m. \tag{2.10}$$

Ahora sea P la matriz dada por $P = (p_{ij})$ y sea P^T la transpuesta de P. Como $p_{ij} > l_{ij} \geq 0$, entonces P^T es una matriz estrictamente positiva y además $0 \leq L^T < P^T$. Por el teorema de Perrón Frobenius, P^T tiene un autovector z en el cual todas sus componentes z_i son positivas y existe un número $\lambda = \gamma(P^T) > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} z_i = \lambda z_j, \qquad j = 1, ..., n. \tag{2.11}$$

Multiplicando la igualdad anterior por γ_i y sumando tenemos

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{j=1}^{m} \gamma_j z_j &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} p_{ij} z_i \gamma_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\gamma_j \right) z_i \\ &< \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i \quad \text{por la desigualdad (2.10).}\end{aligned}$$

Así

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} \gamma_j z_j < \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i > 0.$$

En consecuencia $\lambda = \gamma(P^T) < 1$ y como $0 \leq L^T < P^T$ entonces por corolario (1.5) página 37 de [5], se tiene $\gamma(L^T) < \gamma(P^T) < 1$ y como los autovalores de L y L^T son iguales entonces $\gamma(L) < 1$, es decir $\gamma(AD^{-1} - I) < 1$.

De (2.11)

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} z_i < z_j, \qquad j = 1, ..., m.$$

Como $l_{ij} < p_{ij}$, y $z_i > 0$, $i = 1, ..., m$, entonces se verifica que

$$\sum_{i=1}^{m} l_{ij} z_i < \sum_{i=1}^{m} p_{ij} z_i < z_j, \qquad j = 1, ..., m.$$

Así

$$\sum_{i=1 j \neq i}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_i < z_j, \qquad j = 1, ..., m.$$

Tomando $d_i = \dfrac{z_i}{a_{ii}}$, se tiene que

$$\sum_{i=1 j \neq i}^{m} a_{ij} d_i < d_j a_{jj}, \quad j = 1, ..., m.$$

Esto prueba el teorema. ■

Observación 2.22. En el lema anterior hemos demostrado que si A es una matriz no negativa de orden n y si existe un vector positivo $b = col(b_1, b_2, ..., b_n)$ tal que $Ab < b$, entonces $\gamma(A) < 1$.

Definición: 2.23. Una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ se dice que es convergente si $\lim_{k \to +\infty} A^k$ existe y es igual a la matriz nula.

Teorema 2.24. *Sea A una matriz de orden $n \times n$. Entonces $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$ si y sólo si $\gamma(A) < 1$.*

Demostración. Véase [14], teorema 5.6.12, página 298.

Teorema 2.25. *Sea A una matriz de orden $n \times n$. Si el radio espectral $\gamma(A)$ satisface $\gamma(A) < 1$, entonces $(I - A)^{-1}$ existe y*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Demostración. Como $Ax = \lambda x$ es verdadera exactamente cuando $(I - A)(x) = (1 - \lambda)(x)$, tenemos λ como un valor característico de A exactamente cuando $1 - \lambda$ es un valor característico de $I - A$. Pero $|\lambda| \leq \gamma(A) < 1$ y, por tanto $\lambda = 1$ no es valor característico de A y 0 tampoco puede serlo de $I - A$. Por tanto, $(I - A)^{-1}$ existe. Sea $S_n = I + A + A^2 + ... + A^n$. Entonces $(I - A)S_n = I - A^{n+1}$ y como A es convergente entonces

$$\lim_{n\to\infty}(I - A)S_n = \lim_{n\to\infty}(I - A^{n+1}) = I.$$

Por tanto

$$(I - A)^{-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = I + A + A^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

■

Observación 2.26. Las desigualdades (2.9) implica que la matriz $2D - A$ es invertible.

En efecto; como $2D - A = [I - (AD^{-1} - I)]\, D$ y $\gamma(AD^{-1} - I) < 1$, entonces por teorema (2.25), concluimos que la matriz $2D - A$ es invertible y

$$\sum_{i=1}^{\infty}(AD^{-1} - I)^i \quad \text{es la matriz inversa de} \quad (2D - A).$$

Capítulo 3

Método Iterativo

En este capítulo se trabajará con el esquema iterativo desarrollado por Tineo [21], aplicado a nuestro sistema competitivo con retardo.

3.1. Método iterativo para un sistema competitivo con retardo.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ \\ x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \leq 0, \quad i=1,...,n \end{cases} \tag{3.1}$$

donde b_i, son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, T periódicas, continuas, $a_{ij} \geq 0$ con $1 \leq i,j \leq n$ y $i \neq j$ y $a_{ii} > 0$, $i = 1, \cdots, n$. Los núcleos $K_{ij} : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ son funciones continuas que cumplen $\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1$,
$1 \leq i,j \leq n$ y el promedio $M(b_i) > 0$ para todo $i = 1,...,n-1$ y $b_n \neq 0$. Las condiciones iniciales $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ son funciones que cumplen $\varphi_i \in FA$. El sistema (3.1) posee una única solución

$$x(t,\varphi) = col\left(x_1(t,\varphi), x_2(t,\varphi), ..., x_n(t,\varphi)\right),$$

cuyo dominio contiene el intervalo $[0,+\infty)$;(Ver teorema 2.1 en [8]).

Lema 3.1. *Sea $x(t) = col\left(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)\right)$ solución de la ecuación (3.1), entonces $x_i(t) > 0$ para todo t en intervalo $[0,+\infty)$.*

Demostración. Cada ecuación

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right]$$

es equivalente a $x_i'(t) = x_i(t)P_i(t)$, donde

$$P_i(t) = \left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds \right] \quad i = 1, ..., n.$$

De aquí que $x_i(t)$ satisface

$$x_i(t) = x_i(0) \exp\left\{ \int_0^t P(s)ds \right\} \quad i = 1, ..., n.$$

Como $x_i(0) = \varphi_i(0) > 0$, tenemos que $x_i(t) > 0$, para $i = 1, ..., n$. ■

3.1.1. Desarrollo del Esquema Iterativo.

En esta sección, usando el esquema iterativo desarrollado por Tineo en [21], construiremos de manera inductiva una sucesión de funciones no negativas y T-periódicas $\left\{U^K = col(U_1^K, U_2^K, ..., U_n^K)\right\}_{k=0}^{\infty}$, donde $U_i^K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones no negativas y T-periódicas para $1 \leq i \leq n$, asociada al sistema de ecuaciones diferenciales (3.1) y probaremos que la sucesión construida preserva las propiedades establecidas en [21]. Comencemos definiendo $U^0(t) = col(0, ..., 0)$; es decir, la función nula. Sustituyendo las componentes de U^0 en la ecuación de (3.1) excepto en la i-ésima posición, nos queda la ecuación diferencial logística T-periódica

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t)\right]. \tag{3.2}$$

Por el teorema (2.13) tenemos que existe un atractor global θ_i de (3.2), es decir θ_i es una solución no negativa, T-periódica y atrae las soluciones de (3.2). Como $M(b_i) > 0$, $i = 1, ..., n-1$ entonces $\theta_i(t) > 0$, $i = 1, ..., n-1$.
Definamos $U_i^1(t) = \theta_i(t) \quad i = 1, ..., n$ y $U^1(t) = col(U_1^1(t), U_2^1(t), ..., U_n^1(t))$. Supongamos que hemos construido $U^K(t) = col(U_1^k(t), U_2^k(t), ..., U_n^k(t))$. Sustituyendo las componentes de U^K, excepto la i-esima componente en la i-esima ecuación de (3.1), nos queda la ecuación diferencial logística

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[B_i^k(t) - a_{ii}x_i(t)\right], \tag{3.3}$$

donde

$$B_i^k(t) = \left(b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)U_j^k(s)ds \right).$$

$B_i^k(t)$ es una función T-periódica por el lema (2.3). Por el teorema (2.13) tenemos que existe un atractor global $U_i^{k+1}(t)$ de (3.3); es decir $U_i^{k+1}(t)$ es una solución no negativa, T-periódica y atrae las soluciones positivas de (3.3). Aquí no podemos afirmar que es positiva porque no conocemos si $M(B_i^k) > 0$. Así definamos $U^{k+1}(t) = col(U_1^{k+1}(t), U_2^{k+1}(t), ..., U_n^{k+1})$. Veamos algunas propiedades fundamentales de esta sucesión.

Proposición 3.2. *Para cada entero $k \geq 1$, tenemos que*

$$U^{2k-2}(t) \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq U^{2k-1}(t). \tag{3.4}$$

Demostración. Obviamente, $U^0(t) \leq U^1(t)$. Como

$$B_i^1(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) U_j^1(s) ds \leq b_i(t)$$

entonces por teorema (2.15) $U^1(t) \geq U^2(t)$. Así $U^0(t) \leq U^2(t) \leq U^1(t)$ y nuevamente por el teorema (2.15) $U^1(t) \geq U^3(t) \geq U^2(t)$ debido a que

$$B_i^2(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) U_j^2(s) ds \leq B_i^1(t) \leq b_i(t).$$

Por tanto (3.4) se verifica para $k = 1$. Supongamos que se verifica (3.4) para algún entero $k \geq 1$. Esto es,

$$U^{2k-2}(t) \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq U^{2k-1}(t).$$

De aquí tenemos que

$$B_i^{2k-1}(t) \leq B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k}(t) \leq B_i^{2k-2}(t).$$

La desigualdad $B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k}(t)$ y el teorema (2.15) implican que $U_i^{2k+2} \leq U_i^{2k+1}$ para $i = 1, ..., n$ por tanto $U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+1}(t)$ y así $B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k+2}(t)$ y nuevamente por teorema (2.15) se tiene que $U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t)$. Similarmente la desigualdad $B_i^{2k-1}(t) \leq B_i^{2k+1}(t)$ y teorema (2.15) implican que $U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k+2}(t)$, $i = 1, ..., n$ y por tanto $U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t)$. En consecuencia $U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t)$. Ahora $U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t)$ implica que $B_i^{2k+2}(t) \leq B_i^{2k}(t)$ y nuevamente por el teorema (2.15) se tiene $U_i^{2k+3}(t) \leq U_i^{2k+1}(t)$ $i = 1, ..., n$, por lo tanto $U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t)$. Esto prueba que

$$U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t).$$

Esto demuestra la proposición. ■

Como para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k+2}(t) \leq U_i^1(t)$ y $0 \leq U_i^{2k+1}(t) \leq U_i^{2k-1}(t)$ entonces existen los límites

$$\lim_{k\to+\infty} U_i^{2k}(t) = \underline{U_i}(t), \qquad \lim_{k\to+\infty} U_i^{2k+1}(t) = \overline{U_i}(t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Estas definen funciones $\underline{U_i}$ y $\overline{U_i}$ las cuales son T-periódicas. Denotemos por $\underline{U}(t) = col(\underline{U_1}(t), \underline{U_2}(t), ..., \underline{U_n}(t))$ y $\overline{U}(t) = col(\overline{U_1}(t), \overline{U_2}(t), ..., \overline{U_n}(t))$

Proposición 3.3.

$$\lim_{k\to+\infty} U^{2k}(t) = \underline{U}(t) \qquad y \qquad \lim_{k\to+\infty} U^{2k+1}(t) = \overline{U}(t)$$

uniformemente en $\mathbb{R}$*. En particular,* $\underline{U}$*,* $\overline{U}$ *son funciones continuas.*

Demostración. Como $U^0 \leq U^2 \leq U^4 \leq ... \leq U^{2k} \leq ... \leq U^1$ y $... \leq U^{2k+1} \leq U^{2k-1} \leq ... \leq U^1$ entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $0 \leq U_i^{2k}(t) \leq U_i^1(t) \leq U_{iM}^1 \leq M = \max\{U_{1M}^1, U_{2M}^1, ..., U_{nM}^1\}$ y $0 \leq U_i^{2k+1}(t) \leq U_i^1(t) \leq U_{iM}^1 \leq M = \max\{U_{1M}^1, U_{2M}^1, ..., U_{nM}^1\}$. Así $\{U^{2k+1}\}$ y $\{U^{2k}\}$ son sucesiones uniformemente acotada. Además para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}
\left|B_i^k(t)\right| &\leq |b_i(t)| + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) U_j^k(s) ds \\
&\leq |b_i(t)| + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) U_j^1(s) ds \\
&\leq |b_i|_M + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) U_{jM}^1(s) ds, \quad |b_i|_M = \max\{|b_i(t)| : t \in [0,T]\} \\
&\leq M_1 + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) M ds \\
&= M_1 + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} M = N_i.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}(U_i^{2k+1}(t))\right| &= U_i^{2k+1}(t) \left|B_i^{2k}(t) - a_{ii} U_i^{2k+1}(t)\right| \\
&\leq U_i^1(t) \left[|B_i^{2k}(t)| + a_{ii} U_i^{2k+1}(t)\right] \\
&\leq U_{iM}^1(t) \left[N_i + a_{ii} U_i^1\right] \\
&\leq M \left[N_i + a_{ii} M\right].
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\left|\frac{d}{dt}(U_i^{2k}(t))\right| \leq M \left[N_i + a_{ii} M\right].$$

Por lo tanto las sucesiones $\left\{\dfrac{d}{dt}(U_i^{2k}(t))\right\}$ y $\left\{\dfrac{d}{dt}(U_i^{2k+1}(t))\right\}$ son uniformemente acotada. Esto implica que las sucesiones $\{U^{2k+1}\}$ y $\{U^{2k}\}$ son equicontinuas. Entonces por teorema de Arzela-Ascoli se cumple que existen subsucesiones $\{U^{2k_j}\}$ y $\{U^{2k_l+1}\}$ las cuales convergen uniformemente en $[0,T]$ a las funciones $\underline{U}(t)$ y $\overline{U}(t)$ respectivamente. Esto implica que las funciones $\underline{U}(t)$ y $\overline{U}(t)$ son continuas en $\mathbb{R}$. Probemos que la sucesión completa $\{U^{2k}(t)\}$ converge uniformemente a $\underline{U}(t)$ en $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $j \geq n_0$ implica que $\left\|U^{2k_j}(t) - \underline{U}(t)\right\| < \dfrac{\epsilon}{n}$.
Observemos que $\left|U_i^{2k_j}(t) - \underline{U}_i(t)\right| \leq \left\|U^{2k_j}(t) - \underline{U}(t)\right\| < \dfrac{\epsilon}{n} \quad i = 1, ..., n.$

Afirmación 3.4. $\left|U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t)\right| \leq \dfrac{\epsilon}{n} \quad \forall k \geq k_{n_0}.$

En efecto; sea $k \geq k_{n_0}$ entonces $k_{n_0} \leq k \leq k_j$ para algún $j > n_0$. Por lo tanto $2k_{n_0} \leq 2k \leq 2k_j$ y así $U_i^{2k_{n_0}}(t) \leq U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k_j}(t)$ ó $U_i^{2k_{n_0}}(t) - \underline{U}_i(t) \leq U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t) \leq U_i^{2k_j}(t) - \underline{U}_i(t)$. En consecuencia

$$\left|U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t)\right| < \frac{\epsilon}{n} \qquad \forall k \geq k_{n_0}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Por lo tanto

$$\left\|U^{2k}(t) - \underline{U}(t)\right\| < \frac{\epsilon}{n} \qquad \forall k \geq k_{n_0}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Por lo T-periodicidad, $U^{2k}(t)$ converge uniformemente a $\underline{U}(t)$ en $\mathbb{R}$. De manera análoga se demuestra que $\{U^{2k+1}\}$ converge uniformemente a $\overline{U}$ en $\mathbb{R}$. ∎

La desigualdad

$$\begin{aligned} & \left|\int_{-\infty}^{t} \left(K_{ij}(t-s)U_j^{2k-1}(s) - K_{ij}(t-s)\overline{U}_j(s)\right) ds\right| \\ \leq \; & \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left|U_j^{2k-1}(s) - \overline{U}_j(s)\right| ds \\ \leq \; & \left\|U_j^{2k-1} - \overline{U}_j\right\| \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)ds \\ = \; & \left\|U_j^{2k-1} - \overline{U}_j\right\| \qquad \text{para cualquier} \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

implica que $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)U_j^{2k-1}(s)ds$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\overline{U}_j(s)ds$ conforme $k \to +\infty$ para $1 \leq i,j \leq n$ con $i \neq j$. Similarmente $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)U_j^{2k}(s)ds$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\underline{U}_j(s)ds$ conforme $k \to +\infty$ para $1 \leq i,j \leq n$ con $i \neq j$. Esto implica que

$$B^{2k+1}(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)U_j^{2k+1}(s)ds$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a

$$b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\overline{U}_j ds \qquad \text{y}$$

$$B^{2k}(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)U_j^{2k}(s) ds$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a

$$b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\underline{U}_j ds.$$

En consecuencia para $i = 1, ..., n$,

$$\begin{cases} \overline{U}_i'(t) = \overline{U}_i(t) \left[b_i(t) - a_{ii}\overline{U}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\underline{U}_j(s) ds \right] \\ \\ \underline{U}_i'(t) = \underline{U}_i(t) \left[b_i(t) - a_{ii}\underline{U}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\overline{U}_j(s) ds \right]. \end{cases}$$

Esto es, *col* $\left(\overline{U}, \underline{U}\right)$ es una solución no negativa T-periódica del sistema 2n-dimensional anterior tal que $0 \leq \underline{U} \leq \overline{U}$.

Observación 3.5. 1. $\overline{U}_i(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ó $\overline{U}_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

2. $\underline{U}_i(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ ó $\underline{U}_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, $\overline{U}_i'(t) = \overline{U}_i(t)P(t)$, donde

$$P(t) = b_i(t) - a_{ii}\overline{U}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\underline{U}_j(s) ds.$$

De acá se tiene que $\overline{U}_i(t) = \overline{U}_i(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right)$. Como $\overline{U}_i(t) \geq 0$ entonces o bien $\overline{U}_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{U}_i(\bar{t}) = 0$. Haciendo $t_0 = \bar{t}$, en este caso $\overline{U}_i(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.Esto prueba la afirmación 1. En forma similar se prueba la afirmación 2.

Teorema 3.6. *Sea* $V = col(v_1, v_2, ..., v_n)$ *una solución del sistema (3.1). Entonces* V *está definida en* $[0, +\infty)$ *y*

$$\limsup_{t\to+\infty} \left[v_i(t) - \overline{U}_i(t)\right] \leq 0 \leq \liminf \left[v_i(t) - \underline{U}_i(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.5}$$

Demostración. Definamos $V^1 = col(v_1^1, v_2^1, ..., v_n^1)$, donde v_i^1 es la solución del problema de valor inicial

$$x' = x\left(b_i(t) - a_{ii}x\right); \qquad x(0) = \varphi_i(0).$$

Por el teorema (2.13) v_i^1 esta definida en $[0, +\infty)$ y

$$v_i^1(t) - U_i^1(t) \to 0 \qquad \text{conforme} \quad t \to +\infty, \tag{3.6}$$

donde U_i^1 es el atractor global de la ecuación logística $x' = x\left(b_i(t) - a_{ii}x\right)$. Por otra parte, la desigualdad

$$b_i(t) - a_{ii}x \geq b_i(t) - a_{ii}x - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)v_j(s)ds$$

para todo $t \in domV$ implica, por el teorema (2.12), que V está definido en $[0, +\infty)$ y además

$$v_i(t) \leq v_i^1(t) \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{3.7}$$

Usando el teorema (2.11) conjuntamente con (3.6) tenemos que para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(v_j^1(s) - U_j^1(s)\right) ds = 0,$$

por tanto

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(v_j^1(s) - U_j^1(s)\right) ds \right) = 0. \tag{3.8}$$

Definamos $\epsilon_i = \min\{U_i^1(t) : t \in [0, T]\} = \min\{U_i^1(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Afirmación 3.7. Dado un entero $p \geq 1$, existe un entero $t_p > 0$ tal que para todo $t \geq t_p$ se verifica que:

$$U_i^1(t) - \frac{\epsilon_i}{p} \leq v_i^1(t) \leq U_i^1(t) + \frac{1}{p}, \qquad \text{y} \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) - \frac{\epsilon_i}{p}\right) ds \leq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)v_j^1(s)ds \tag{3.10}$$

$$\leq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) + \frac{1}{p}\right) ds.$$

Obviamente (3.10) se satisface si los $a_{ij} = 0$ para $j = 1, ..., n$ con $j \neq i$. Por lo tanto, supondremos que para cada i con $i \in \{1, ..., n\}$ $\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} > 0$. En efecto, consideremos dos casos a)$\epsilon_i > 0$ y b) $\epsilon_i = 0$.
Si $\epsilon_i > 0$ entonces usamos (3.6) y (3.8) con $\epsilon = \epsilon_i$, $\epsilon = \dfrac{1}{p}$, $\epsilon = \dfrac{\epsilon_i}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}$ y $\epsilon = \dfrac{1}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}$ y así obtenemos t_p^1, t_p^2, t_p^3, $t_p^4 > 0$ tales que

$$-\frac{\epsilon_i}{p} < v_i^1(t) - U_i^1(t) < \frac{\epsilon_i}{p}, \qquad \forall\ t \geq t_p^1; \tag{3.11}$$

$$-\frac{1}{p} < v_i^1(t) - U_i^1(t) < \frac{1}{p}, \qquad \forall\ t \geq t_p^2; \tag{3.12}$$

$$-\frac{\epsilon_i}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} < \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) \left(v_j^1(s) - U_j^1(s) \right) ds < \frac{\epsilon_i}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}, \tag{3.13}$$

$\forall\ t \geq t_p^3$;

$$-\frac{1}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} < \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) \left(v_j^1(s) - U_j^1(s) \right) ds < \frac{1}{p} \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}, \tag{3.14}$$

$\forall\ t \geq t_p^4$.

Haciendo $t_p = \text{máx}\{t_p^1, t_p^2, t_p^3, t_p^4\}$ y tomando las primeras desigualdades de (3.11) y (3.13) y las segundas de (3.12) y (3.14) se obtiene que $\forall t \geq t_p$

$$U_i^1(t) - \frac{\epsilon_i}{p} \leq v_i^1(t) \leq U_i^1(t) + \frac{1}{p} \qquad \text{y}$$

$$\sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) \left(U_j^1(s) - \frac{\epsilon_i}{p} \right) ds \leq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) v_j^1(s) ds$$
$$\leq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) \left(U_j^1(s) + \frac{1}{p} \right) ds.$$

debido a que $\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) ds = 1$ para $1 \leq i, j \leq n$. Esto prueba la afirmación si $\epsilon_i > 0$.

En el caso $\epsilon_i = 0$, claramente $U_i^1(t) \equiv 0$ y las desigualdades (3.9) y (3.10) se verifican automáticamente porque $v_i^1(t) > 0$. Las otras desigualdades se deducen de (3.12) y (3.14). Esto prueba la afirmación.

Observe que de la definición de ϵ_i se tiene que para $p \in \mathbb{Z}^+$

$$0 \leq U_i^1(t) - \frac{\epsilon_i}{p} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De la desigualdad (3.10) tenemos que $\forall t \geq t_p$

$$\begin{aligned} & b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) + \frac{1}{p}\right) ds - a_{ii}x \\ \leq\ & b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) v_j^1(s) ds - a_{ii}x \\ \leq\ & b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) - \frac{\epsilon_i}{p}\right) ds - a_{ii}x \end{aligned}$$

ó

$$B_{ip}^1(t) - a_{ii}x \leq A_i^1(t) - a_{ii}x \leq \widehat{B}_{ip}^1(t) - a_{ii}x, \qquad \forall t \geq t_p$$

donde

$$B_{ip}^1(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) + \frac{1}{p}\right) ds,$$

$$A_i^1(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) v_j^1(s) ds,$$

$$\widehat{B}_{ip}^1(t) = b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\left(U_j^1(s) - \frac{\epsilon_i}{p}\right) ds.$$

Claramente $B_{ip}^1(t) - a_{ii}x \to B_i^1(t) - a_{ii}x$ y $\widehat{B}_{ip}^1(t) - a_{ii}x \to B_i^1(t) - a_{ii}x$ conforme $p \to +\infty$ uniformemente en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sea $V^2 = col\,(v_1^2, v_2^2, ..., v_n^2)$, donde v_i^2 es la solución del problema con valor inicial

$$x' = x\left(A_i^1(t) - a_{ii}x\right), \qquad x(0) = \varphi_i(0).$$

Por el teorema (2.17) v_i^2 esta definida en $[0, +\infty)$ y además

$$v_i^2(t) - U_i^2(t) \to 0 \qquad \text{conforme} \quad t \to +\infty.$$

Por otra parte, de (3.7) tenemos que

$$A_i^1(t) - a_{ii}x \leq b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) v_j(s) ds - a_{ii}x$$

y por el teorema de comparación $v_i^2(t) \le v_i(t)$ para todo $t \ge 0$. De manera inductiva, podemos definir una sucesión $V^k = col\left(v_1^k(t), v_2^k(t), ..., v_n^k(t)\right)$ de funciones continuamente diferenciables en $[0, +\infty)$, definidas por

$$\left(v_i^{k+1}\right)'(t) = v_i^{k+1}(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)v_j^k(s)ds - a_{ii}v_i^{k+1}(t)\right]$$

$v_i^{k+1}(0) = \varphi_i(0)$ para todos los enteros $k \ge 0$, donde $v_i^0 \equiv 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Usando inducción, el teorema (2.13) y el teorema (2.12), es fácil probar que

$$v_i^k(t) - U_i^k(t) \to 0 \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty \quad \text{para todo} \quad k \ge 1.$$

$$V^2(t) \le ... \le V^{2k}(t) \le V(t) \le V^{2k-1}(t) \le ... \le V^1(t); \quad t \ge 0$$

donde $\{U^k\}$ es la sucesión canónica de (3.1).

Fijemos $i \in \{1, ..., n\}$ y $\epsilon > 0$. Debido a que $U^{2k}(t) \to \underline{U}(t)$ conforme $k \to +\infty$ uniformemente en $\mathbb{R}$, existe un entero $\overline{k} \ge 1$ tal que $U_i^{2\overline{k}}(t) - \underline{U}_i(t) \ge -\dfrac{\epsilon}{2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $v_i^{2\overline{k}}(t) - U_i^{2\overline{k}}(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$ y por tanto existe $t_0 \ge 0$ tal que $v_i^{2\overline{k}}(t) \ge U_i^{2\overline{k}}(t) - \dfrac{\epsilon}{2}$. Así $v_i(t) \ge v_i^{2\overline{k}}(t) \ge \underline{U}_i(t) - \epsilon$ para todo $t \ge t_0$ ó $-\epsilon \le v_i(t) - \underline{U}_i(t)$ para todo $t \ge t_0$. Esto implica que $0 \le \liminf_{t\to+\infty}\left[v_i(t) - \underline{U}_i(t)\right]$. Análogamente, dado $\epsilon > 0$ existe $t_1 > 0$ tal que $v_i(t) \le \overline{U}_i(t) + \epsilon$ para todo $t \ge t_1$. Así $\limsup\left[v_i(t) - \overline{U}_i(t)\right] \le 0$. Por tanto

$$\limsup_{t\to+\infty}\left[v_i(t) - \overline{U}_i(t)\right] \le 0 \le \liminf\left[v_i(t) - \underline{U}_i(t)\right].$$

■

La sucesión $\{U^k\}_{k=0}^{\infty}$ es llamada sucesión canónica del sistema (3.1).

Observación 3.8. Si cada uno de los términos de la sucesión canónica del sistema (3.1) es una función constante, entonces por el teorema anterior para cualquier solución $col(v_1, v_2, ..., v_n)$ del sistema (3.1)

$$\underline{U}_i \le \liminf_{t\to+\infty} v_i(t) \le \limsup_{t\to+\infty} v_i(t) \le \overline{U}_i; \qquad 1 \le i \le n. \tag{3.15}$$

Observación 3.9. Si cada uno de los términos de la sucesión canónica del sistema (3.1) es una función constante y además $\underline{U}_i = \overline{U}_i$ con $i = 1, ..., n$, entonces para cualquier solución $col(v_1, v_2, ..., v_n)$ del sistema (3.1)

$$\lim_{t\to+\infty} v_i(t) = \underline{U}_i = \overline{U}_i; \qquad 1 \le i \le n.$$

Observación 3.10. Si $w_i(t) = \underline{U}_i(t) = \overline{U}_i(t)$, entonces $\lim_{t\to+\infty}(v_i(t) - w_i(t)) = 0$ para cualquier solución $col(v_1, v_2, ..., v_n)$ del sistema (3.1).

En efecto,

$$\limsup_{t\to+\infty}(v_i(t)-w_i(t)) \le 0 \le \liminf_{t\to+\infty}(v_i(t)-w_i(t)).$$

De aquí, $0 \le \liminf_{t\to+\infty}(v_i(t)-w_i(t)) \le \limsup_{t\to+\infty}(v_i(t)-w_i(t)) \le 0$ por tanto existe $\lim_{t\to+\infty}(v_i(t)-w_i(t))$ y es igual a cero.

Observación 3.11. $M(U_i^1) = \dfrac{M(b_i)}{a_{ii}} > 0$, para $i = 1, ..., n-1$.

En efecto, Como $M(b_i) > 0$ entonces por el teorema (2.13), $U_i^1(t) > 0$. Así $\dfrac{(U_i^1)'(t)}{U_i^1(t)} = b_i(t) - a_{ii}U_i^1(t)$, Integrando de 0 hasta T y usando la periodicidad de U_i^1, tenemos

$$0 = \ln U_i^1(t)]_0^T = \int_0^T b_i(t)dt - a_{ii}\int_0^T U_i^1(t)dt.$$

De aquí $M(U_i^1) = \dfrac{M(b_i)}{a_{ii}}$ para $i = 1, ..., n-1$.

Observación 3.12. Si $U_i^2(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para $i = 1, ..., n-1$, entonces $\underline{U}_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para $i = 1, ..., n-1$. Además $U_i^2(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para $i = 1, ..., n-1$ si y sólo si $M(b_i) > \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + a_{in}M(U_n^1)$ para $i = 1, ..., n-1$.

En efecto,sea $i \in \{1, ..., n-1\}$. Como

$$U_i^2(t) \le U_i^4(t) \le ... \le U_i^{2k}(t) \le U_i^{2k-1}(t) \le ... \le U_i^3(t) \le U_i^1(t)$$

entonces $\{U_i^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones T-periódicas positivas. Así $\underline{U}_i(t) = \lim_{k\to\infty} U_i^{2k}(t) \ge U_i^2(t) > 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Esto prueba la primera parte. Ahora si $U_i^2(t) > 0$, entonces

$$\frac{(U_i^2(t))'}{U_i^2(t)} = B_i^1(t) - a_{ii}U_i^2(t).$$

Integrando de 0 hasta T, dividiendo por T y usando que U_i^2 es T-periódica, tenemos que $0 = M(B_i^1) - a_{ii}M(U_i^2)$. Aplicando el lema (2.10) tenemos que $M(B_i^1) = M(b_i) - \sum_{j=ij\neq i}^{n} a_{ij}M(U_i^1)$. Por lo tanto

$$a_{ii}M(U_i^2) \;=\; M(b_i) - \sum_{j=ij\neq i}^{n} a_{ij}M(U_i^1).$$

Como $M(U_i^2) > 0$; porque $U_i^2 > 0$. Así $M(b_i) > \sum_{j=ij\neq i}^{n-1} a_{ij}M(U_i^1) + a_{in}M(U_n^1)$. Por la observación anterior $M(U_i^1) = \dfrac{M(b_i)}{a_{jj}}$. En consecuencia

$M(b_i) > \sum_{j=ij\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + a_{in}M(U_n^1)$ para $i = 1, ..., n-1$. Recíprocamente Si $M(b_i) > \sum_{j=ij\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + a_{in}M(U_n^1)$ obviamente $M(B_i^1) > 0$ para $i = 1, ..., n-1$. Así por teorema (2.13) $U_i^2(t) > 0$ para $i = 1, ..., n-1$.

Observación 3.13. $M(U_n^1) \leq \dfrac{M(b_n^+)}{a_{nn}}$, donde $b_n^+(t) = \text{máx}\{0, b_n(t)\}$.

En efecto, por teorema (2.15) $U_n^1 \leq \theta(t)$, donde θ es el atractor global de $x' = x(b_n^+(t) + a_{nn}x)$. Por lo tanto $M(U_n^1) \leq M(\theta)$. Si $M(\theta) = 0$, entonces $M(U_n^1) = 0$ y la desigualdad se cumple. Si $M(\theta) > 0$, entonces por el teorema (2.13) $M(b_n^+) > 0$ en consecuencia θ es una función positiva. Así $\dfrac{\theta'(t)}{\theta(t)} = b_n^+ - a_{nn}\theta(t)$, integrando desde 0 hasta T, dividiendo por T y usando que θ es T-periódica se obtiene $M(\theta) = \dfrac{M(b_n^+)}{a_{nn}}$. Por tanto $M(U_n^1) \leq \dfrac{M(b_n^+)}{a_{nn}}$.

Observación 3.14. Si $M(b_i) > \sum_{j=1j\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + \dfrac{a_{in}}{a_{nn}} M(b_n^+)$ para
$i = 1, ..., n-1$, entonces $\underline{U}_i > 0$ para $i = 1, ..., n-1$.

En efecto, por la observación anterior

$$\sum_{j=1j\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + \frac{a_{in}}{a_{nn}} M(b_n^+) \geq \sum_{j=ij\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + a_{in}M(U_n^1), \quad i = 1, ..., n-1.$$

En consecuencia $M(b_i) > \sum_{j=ij\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_i) + a_{in}M(U_n^1)$. Por la observación (3.12) $\underline{U}_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para $i = 1, ..., n-1$.

Capítulo 4

Caso de Coeficientes Constantes.

En este capítulo consideramos los sistemas integro-diferenciales,

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \le 0; \\ i = 1, ..., n. \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \le 0; \\ i = 1, ..., n-1 \end{cases} \tag{4.2}$$

donde b_i es una constante positiva para $1 \le i \le n-1$, b_n es un número real, a_{ij} es una constante no negativa para $1 \le i, j \le n$, $a_{ii} > 0$ $1 \le i \le n$ y los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$b_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} b_j + \frac{b_n^+}{a_{nn}} a_{in}, \qquad 1 \le i \le n-1. \tag{4.3}$$

Aquí, $b_n^+ = \max\{0, b_n\}$. Los núcleos $K_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$ son funciones continuas que satisfacen

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1.$$

Las condiciones iniciales φ_i con $i = 1, ..., n$ pertenecen al conjunto FA.

Estos sistemas son llamados sistemas competitivos Lotka-Volterra con retardo infinito. El sistema (4.1) modela n especies en competencia con retardo infinito. Observemos que las desigualdades (4.3) implican las desigualdades

$$b_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} b_j, \qquad 1 \leq i \leq n-1. \tag{4.4}$$

Las desigualdades (4.3) y (4.4) se pueden escribir, en términos de matrices y vectores, como

$$b > \left(AD^{-1} - I\right)(b) + \frac{b_n^+}{a_{nn}} c \tag{4.5}$$

$$b > \left(AD^{-1} - I\right)(b), \tag{4.6}$$

respectivamente, donde

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{pmatrix}.$$

Observe que $c \geq 0$; debido a que $a_{ij} \geq 0$.

Es bien conocido (ver [2] ó [4])que las desigualdades (4.1) implican la existencia de un vector positivo $x^* = col(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$ tal que $Ax^* = b$.

Bajo estas Hipótesis probaremos los siguientes resultados:

- El sistema (4.2) tiene un punto de equilibrio positivo, es decir cada una de las componentes del punto es positivo, el cual atrae a todas las soluciones del sistema (4.2) con condiciones iniciales en FA.

- Si $b_n \leq \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^*$, entonces para cualquier solución $col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ del sistema (4.1) se verifica que

$$\lim_{t\to+\infty} \left(x_1(t) - x_1^*, x_2(t) - x_2^*, ..., x_{n-1}(t) - x_{n-1}^*, x_n(t)\right) = (0, ..., 0)$$

- Si $b_n > \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^*$ y $a_{nn} > \langle q, (2D-A)^{-1}\rangle$, donde $\langle . , . \rangle$ representa el producto escalar en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces el sistema (4.1) tiene un punto de equilibrio positivo que atrae todas las soluciones del sistema. Esto es, los resultados por Tineo en [21] para el caso autónomo siguen siendo validos para nuestros sistemas; los cuales no son autónomos.

4.1. Estudio del sistema (4.2).

En esta sección trabajaremos con el sistema

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0; \\ \\ i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Bajo las hipótesis dadas al principio del capitulo. Aplicaremos el esquema iterativo desarrollado por Tineo a el sistema integro-diferencial con coeficientes constantes y además se obtendrán algunos resultados para este sistema.

4.1.1. Esquema Iterativo para el sistema (4.2).

Aplicando el método iterativo al sistema (4.2) y la observación (2.14), se obtiene la sucesión $\left\{U^N\right\}_{N=0}^{\infty}$, donde $U^0 = col(0,0,...,0)$, $U^1 = col\left(\dfrac{b_1}{a_{11}}, \dfrac{b_2}{a_{22}}, ..., \dfrac{b_{n-1}}{a_{(n-1)(n-1)}}\right)$,..., $U^N = col\left(U_1^N, U_2^N, ..., U_{n-1}^N\right)$ con $U_i^N = a_{ii}^{-1}\max\left\{0, b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}U_j^{N-1}\right\}$. Observe que cada vector U^N es un vector constantes. Además

$$\lim_{k\to+\infty}\left(U^{2k-1}, U^{2k}\right) = \left(\overline{U}, \underline{U}\right),$$

lo cual implica que para $i = 1, ..., n-1$,

$$\overline{U}_i = a_{ii}^{-1}\max\left\{0, b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\underline{U}_j\right\},$$

$$\underline{U}_i = a_{ii}^{-1}\max\left\{0, b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\overline{U}_j\right\}.$$

También se satisface el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} \overline{U}_i \left[b_i - a_{ii}\overline{U}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\underline{U}_j ds \right] = 0, \\ \\ \underline{U}_i \left[b_i - a_{ii}\underline{U}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)\overline{U}_j ds \right] = 0, \\ \\ i = 1, ..., n-1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Observación 4.1. La condición (4.4) implica que $\underline{U}_i > 0$.

En efecto; usando la desigualdad (4.4), es decir $b_i > \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j$ $i = 1, ..., n-1$, y $\overline{U}_j \leq U_j^1 = \dfrac{b_j}{a_{jj}}$, obtenemos que $b_i > \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} U_j^1 \geq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \overline{U}_j$, $i = 1, ..., n-1$. De aquí $b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \overline{U}_j > 0$ para $i = 1, ..., n-1$. De la definición de $\underline{U}_i$, se tiene $\underline{U}_i > 0$.

Asi $\underline{U} > 0$ si $b > \left[AD^{-1} - I \right] (b)$ por (4.6).

Observación 4.2. El par $col(\overline{U}, \underline{U})$ es solución del sistema

$$\begin{cases} (A - D)\,\overline{U} + D\underline{U} = b \\ \\ (A - D)\,\underline{U} + D\overline{U} = b. \end{cases} \tag{4.8}$$

el cual es equivalente a el sistema (4.7).

En efecto; Como $\int_{0}^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1$, y las $\overline{U}_j$, $\underline{U}_j$ son constantes positivas, el sistema (4.7) es equivalente a

$$\begin{cases} a_{ii}\overline{U}_i + \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\underline{U}_j = b_i \\ \\ a_{ii}\underline{U}_i + \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\overline{U}_j = b_i \\ \\ i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

El cual se puede escribir de forma matricial como (4.8).

Por la observación (3.8) para cualquier solución $v = col(v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ del sistema (4.2),se tiene que

$$\underline{U}_i \leq \liminf_{t\to+\infty} v_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} v_i(t) \leq \overline{U}_i; \qquad 1 \leq i \leq n-1. \tag{4.9}$$

De aquí en adelante los resultados y demostraciones son similares a los establecidos por Tineo en [21]. Relatamos y desarrollamos minuciosamente los resultados, adaptándolos a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.

Teorema 4.3.
La ecuación integro-diferencial (4.2) tiene un punto de equilibrio que atrae todas las soluciones del sistema (4.2) con condiciones iniciales en FA.

Demostración. La hipótesis (4.3) implica la desigualdad (4.6). Por la observación (4.1), $\underline{U} > 0$ y así por la observación (4.2) el par $col(\overline{U}, \underline{U})$ satisface el sistema (4.8). Restando la primera ecuación con la segunda ecuación

$$(A - D)\left(\overline{U} - \underline{U}\right) + D\left(\underline{U} - \overline{U}\right) = 0.$$

De acá tenemos

$$(2D - A)\left(\underline{U} - \overline{U}\right) = 0. \tag{4.10}$$

De la observación (2.26) se tiene que $(2D - A)$ es invertible, por lo que se cumple que la única solución del sistema (4.10), es la solución nula, por tanto se tiene $\underline{U} = \overline{U}$. Haciendo $x^* = col(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*) = \underline{U} = \overline{U}$ y reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema (4.8) se tiene $Ax^* = b$. De aquí que las funciones constantes $\varphi_i(t) = x_i^*$, $i = 1, ..., n$, definen el punto de equilibrio positivo $col(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n-1}(t))$ $= col(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$ del sistema (4.1). Por la observación (3.9), se tiene que para cualquier solución $v = (v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ con condiciones iniciales en FA del sistema (4.1) $\lim_{t\to\infty} v_i(t) = x_i^*$, $i = 1, ..., n-1$. Por tanto el sistema (4.2) tiene un punto de equilibrio que atrae todas las soluciones del sistema (4.2) con condiciones iniciales en FA ■

Observación 4.4. Si en lugar de las desigualdades (4.3) tuviésemos las hipótesis $\underline{U} > 0$ y la matriz $2D - A$ tiene inversa, entonces se tiene la conclusión del teorema (4.3).

4.2. Estudio del sistema (4.1).

Sea el sistema (4.1) dado por

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t > 0 \\ \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0; \\ \\ i = 1, ..., n. \end{cases}$$

donde b_i es una constante positiva para $1 \leq i \leq n-1$, b_n es un número real, a_{ij} es una constante no negativa para $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ii} > 0$ $1 \leq i \leq n$. Las funciones $\varphi_i \in FA$ y los coeficientes satisfacen las desigualdades (4.5).

4.2.1. Algunos Resultados para el Sistema(4.1).

Observación 4.5. Por el teorema (3.8) tenemos que para cualquier solución $v = col(v_1, v_2, ..., v_n)$ del sistema (4.1), se tiene

$$\underline{U}_i \leq \liminf_{t\to+\infty} v_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} v_i(t) \leq \overline{U}_i; \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{4.11}$$

Lema 4.6.
Las matrices A y $(2D - A)$ de orden $(n-1)$ tienen inversa y las entradas de $(2D-A)^{-1} \pm A^{-1}$ son no negativas. En particular $(2D-A)^{-1}$ es no negativa.

Demostración. Definamos $\Delta = AD^{-1} - I$, tenemos que $\Delta \geq 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} 2D - A &= D - A + D \\ &= D - \left(AD^{-1} - I\right) D \\ &= \left[I - \left(AD^{-1} - I\right)\right] D \\ &= [I - \Delta]\, D. \end{aligned}$$

Despejando A, se tiene $A = [I + \Delta]\, D$, por la desigualdad (4.6), tenemos que $\Delta(b) < b$ y por la observación (2.22) el radio espectral de Δ es menor que uno. Por el teorema (2.25) $I \pm \Delta$ tienen inversa y

$$(I + \Delta)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \Delta^i, \qquad (I - \Delta)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \Delta^i \geq 0.$$

En particular A y $2D - A$ son no singulares o invertible, además $(2D-A)^{-1} = D^{-1}(I-\Delta)^{-1}$ y $A^{-1} = D^{-1}(I+\Delta)^{-1}$ por lo que estas tienen inversa. Ahora

$$\begin{aligned} (2D-A)^{-1} + A^{-1} &= D^{-1}\left[(I-\Delta)^{-1} + (I+\Delta)^{-1}\right] \\ &= D^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty} \Delta^i + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \Delta^i\right] \\ &= D^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 + (-1)^i\right) \Delta^i \\ &= 2D^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} \Delta^{2i} \geq 0. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}(2D-A)^{-1}-A^{-1} &= D^{-1}\left[(I-\Delta)^{-1}-(I+\Delta)^{-1}\right]\\ &= D^{-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\Delta^i-\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\Delta^i\right]\\ &= D^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(1-(-1)^i\right)\Delta^i\\ &= 2D^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\Delta^{2i+1}\geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(2D-A)^{-1}+A^{-1}$ y $(2D-A)^{-1}-A^{-1}$ son matrices no negativas. En consecuencia $(2D-A)^{-1}$ es no negativa. ■

Lema 4.7.
Si $\nu > (AD^{-1}-I)(\nu)$, *para algún vector positivo* ν, *entonces* $A^{-1}(\nu)>0$.

Demostración. Conocemos que $\Delta = AD^{-1}-I$ tiene radio espectral menor que 1 (ver teorema (2.13)) y además tenemos que $A^{-1}=D^{-1}(I+\Delta)^{-1}$ con $D^{-1}>0$. Por otro lado

$$(I+\Delta)^{-1}(\nu)=\left(I-\Delta^2\right)^{-1}(I-\Delta)(\nu)$$

más aún

$$(I+\Delta)^{-1}(\nu)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^{2n}(I-\Delta)(\nu)\quad \text{ya que}\quad \left(I-\Delta^2\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^{2n}>0$$

por hipótesis tenemos que $\nu>\Delta(\nu)$ es decir $(I-\Delta)\nu>0$. Por lo que podemos concluir

$$A^{-1}(\nu)=D^{-1}(I+\Delta)^{-1}(\nu)>0.$$

■

Observación 4.8. Recordemos que

$$c=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \vdots\\a_{(n-1)n}\end{pmatrix}\geq 0\qquad \text{y}\qquad q=\begin{pmatrix}a_{n1}\\a_{n2}\\ \vdots\\a_{n(n-1)}\end{pmatrix}\geq 0.$$

Lema 4.9.
Sean

$$q = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad b_n > 0,$$

entonces

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle\right] > \left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right]$$

donde $x^* = A^{-1}(b)$ es el punto de equilibrio del sistema (4.1).

Demostración. Observemos que

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle\right] > \left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n - \left\langle q, A^{-1}\left(\frac{b_n}{a_{nn}} c\right)\right\rangle > b_n - \left\langle q, A^{-1}(b)\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\langle q, A^{-1}(b)\right\rangle - \left\langle q, A^{-1}\left(\frac{b_n}{a_{nn}} c\right)\right\rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\langle q, A^{-1}\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right)\right\rangle > 0.$$

Así, solo basta probar que $\left\langle q, A^{-1}\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right)\right\rangle > 0.$
Definamos nuevamente $\Delta = AD^{-1} - I$. Por la desigualdad (4.5) tenemos que

$$b > \Delta(b) + \frac{b_n}{a_{nn}} c \qquad \text{ó} \qquad b - \frac{b_n}{a_{nn}} c > \Delta(b) \geq 0.$$

Por tanto el vector $b - \frac{b_n}{a_{nn}} c$ es positivo. En virtud de que $b_n \geq 0$, $c \geq 0$ y $\Delta \geq 0$ tenemos:

$$b - \frac{b_n}{a_{nn}} c > \Delta(b) \geq \Delta(b) - \Delta\left(\frac{b_n}{a_{nn}} c\right).$$

Esto implica

$$b - \frac{b_n}{a_{nn}} c > \Delta\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right).$$

Por lema (4.7), tenemos que $A^{-1}\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right) > 0$. Como $q \geq 0, q \neq 0$ y $A^{-1}\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right) > 0$, se cumple que $\left\langle q, A^{-1}\left(b - \frac{b_n}{a_{nn}} c\right)\right\rangle > 0.$ ■

Observación 4.10. Los puntos de equilibrio del sistema (4.1), se obtiene de resolver el sistema algebraico

$$x_i\left[b_i - a_{ii}x_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j ds\right] = 0, \quad i = 1, ..., n, \quad \text{ó}$$

$$x_i\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right] = 0, \quad i = 1, ..., n, \qquad \left(\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)ds = 1\right).$$

El punto de equilibrio positivo se obtiene de la solución del sistema lineal

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Este sistema se puede escribir como:

$$\begin{cases} Ax + x_n c = b \\ \\ q^T.x + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} Ax + x_n c = b \\ \\ \langle q, x\rangle + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.12}$$

donde $\quad q^T.x = \langle q, x\rangle \quad$ con $\quad \langle , \rangle \quad$ es el producto escalar usual, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix},$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

■

4.2.2. Caso $b_n \leq \langle q, x^*\rangle$.

El primer caso de la demostración del siguiente resultado esta en la publicación [4] páginas 203-204 y el segundo caso en [21]. Se incluye su demostración completamente detallada para que el trabajo se autocontenido.

Proposición 4.11. *Si* $\quad b_n \leq \langle q, x^*\rangle, \quad$ *entonces el sistema* $\quad$ *(4.1)* $\quad$ *no tiene punto positivos de equilibrio.*

Demostración. Trabajemos por reducción al absurdo. Supongamos que el sistema $\quad$ (4.12) $\quad$ tiene una solución positiva $\quad col(x, x_n)$, es decir

$$\begin{cases} Ax + x_n c = b, \\ \\ \langle q, x\rangle + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Como $x_n > 0$, $a_{nn} > 0$, $\langle q, x\rangle \geq 0$ y $\langle q, x\rangle + a_{nn}x_n = b_n$ entonces $b_n > 0$. El sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} A(x - x^*) + x_n c = 0, \\ \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(x_j - x_j^*) + a_{nn}x_n = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^* \qquad \text{ó} \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(x_j - x_j^*) + a_{in}x_n = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(x_j - x_j^*) + a_{nn}x_n = b_n - \langle q, x^*\rangle \,; \end{cases} \tag{4.14}$$

debido a que $b = Ax^*$.

Consideremos dos casos a) $b_n < \langle q, x^*\rangle$ y b) $b_n = \langle q, x^*\rangle$.

Caso a) Como $b_n - \langle q, x^*\rangle < 0$, $x_n > 0$, $a_{nn} > 0$ y $a_{nj} \geq 0$ para $j = 1, ..., n-1$ entonces de la segunda ecuación del sistema (4.14) tenemos que $x_j - x_j^* < 0$ para algún $j \in \{1, ..., n-1\}$. Sean $J = \{i \in \{1, ..., n-1\} : x_i - x_i^* < 0\}$ y $\tau_i = \dfrac{-x_i^*}{x_i - x_i^*}$ para $i \in J$. Por lo anterior J es no vació y los $\tau_i > 0$ para $i \in J$. Sea $\tau = \text{mín}\{\tau_j : j \in J\}$. Así $\tau = \tau_i$ para algún $i \in J$ y además para $j \in J$, tenemos que $\dfrac{-x_j^*}{x_j - x_j^*} = \tau_j \geq \tau$. Por tanto para $j \in J$ se tiene $x_j^* + \tau(x_j - x_j^*) \geq 0$ y $x_i^* + \tau(x_i - x_i^*) = 0$.

Claramente para $j \in \{1, ..., n-1\} - J$ se tiene que $x_j - x_j^* \geq 0$ y así para esos j, $x_j^* + \tau(x_j - x_j^*) > 0$. en conclusión existen $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $\tau > 0$ tales que

$$\begin{cases} x_j^* + \tau(x_j - x_j^*) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ x_i^* + \tau(x_i - x_i^*) = 0. \end{cases}$$

Como para $0 \leq s < 1$ y $1 \leq i \leq n-1$ $x_j^* + s(x_j - x_j^*) = (1-s)x_j^* + sx_j > 0$. Entonces $\tau \geq 1$. Definamos para $j = 1, ..., n-1$, $z_j = x_j^* + \tau(x_j - x_j^*)$ y $z_n = \tau x_n$. Reemplazando en (4.14)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\dfrac{(z_j - x_j^*)}{\tau} + a_{in}\dfrac{z_n}{\tau} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\dfrac{(z_j - x_j^*)}{\tau} + a_{nn}\dfrac{z_n}{\tau} = b_n - \langle q, x^*\rangle \,; \qquad \text{ó} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(z_j - x_j^*) + a_{in}z_n = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(z_j - x_j^*) + a_{nn}z_n = \tau\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^*\right). \end{cases}$$

Como para $i = 1, ..., n-1$, se cumple $\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^* = b_i$ entonces el sistema anterior se puede escribir se la siguiente forma

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j = b_i, \quad 1 \le i \le n-1, \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}z_j = (\tau - 1)\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^*\right) + b_n. \end{cases} \tag{4.15}$$

En virtud de que $\tau \ge 1$ y por hipótesis $b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^* < 0$, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}z_j \le b_n$. De aquí se tiene que $a_{nn}z_n \le \sum_{j=1}^{n} a_{nj}z_j \le b_n$ debido a que $a_{nj} \ge 0$ y $z_j \ge 0$ para $j = 1, ..., n$. Por lo tanto $0 \le z_n \le \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. Por otra parte usando las primeras (n-1) ecuaciones de (4.15), $z_j \ge 0$ y $a_{ij} \ge 0$, obtenemos $a_{ii}z_i \le b_i$, $1 \le i \le n-1$. En consecuencia $0 \le z_j \le \dfrac{b_j}{a_{jj}}$, con $1 \le j \le n$. En vista de que $z_i = 0$, $0 \le z_j \le \dfrac{b_j}{a_{jj}}$ y la i-esima ecuación del sistema (4.15), se obtiene que

$$b_i = \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}z_j \le \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{b_j}{a_{jj}}, \qquad \text{con} \quad 1 \le i \le n-1.$$

Esto contradice (4.4). Así el sistema (4.1) no tiene puntos de equilibrio positivo.
caso b) $\langle q, x^* \rangle = b_n$. Sabemos por la suposición al principio de la demostración que $b_n > 0$. Además $q \ge 0$ y $x^* > 0$. Entonces necesariamente $q \ne 0$. Por lema (4.9) tenemos

$$\frac{b_n}{a_{nn}}\left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle\right] > \left[b_n - \langle q, x^* \rangle\right]. \tag{4.16}$$

Como el punto (x, x_n) es solución del sistema (4.12), se tiene que
$x = x^* - x_nA^{-1}(c)$ y sustituyendo esta x en $b_n = a_{nn}x_n + \langle q, x \rangle$,
obtenemos

$$\left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle\right] x_n = 0.$$

Como $x_n \ne 0$ se concluye $a_{nn} - \langle q, A^{-1}(c) \rangle = 0$. Por otro lado tenemos que $b_n - \langle q, x^* \rangle = 0$ y esto contradice (4.16). Así el sistema (4.1) no tiene puntos de equilibrio positivo en ambos casos. ∎

A partir de ahora consideraremos la siguiente notación, la cúal se usara en el resto del capitulo. La solución $X(t)$ del sistema (4.1) la escribiremos como $X(t) = col(x(t), x_n(t))$ donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $x_n(t) \in \mathbb{R}$. La sucesión canónica, $\{U^N\}$,asociada al sistema (4.1) como en el caso anterior es una sucesión de funciones vectoriales constantes, las cuales las escribiremos de la siguiente forma $U^N = col(W^N, V^N)$, donde $W^N \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $V^N \in \mathbb{R}$. Así podemos denotar a

$$\overline{U} = col\left(\overline{W}, \overline{V}\right) \qquad \text{y} \qquad \underline{U} = col\left(\underline{W}, \underline{V}\right),$$

donde $\underline{W} > 0$, debido a la desigualdad (4.5). Esto implica que $\overline{W} > 0$. También las componentes de estos vectores satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \overline{W}_i \Big[b_i - a_{ii}\overline{W}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\underline{W}_j ds \\ \quad -a_{in}\int_{-\infty}^{t} k_{in}(t-s)\underline{V} ds \Big] = 0, \qquad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ \overline{V}\Big[b_n - a_{nn}\overline{V} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^{t} k_{nj}(t-s)\underline{W}_j ds \Big] = 0, \\ \\ \underline{W}_i \Big[b_i - a_{ii}\underline{W}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\overline{W}_j(s) ds \\ \quad -a_{in}\int_{-\infty}^{t} k_{in}(t-s)\overline{V} ds \Big] = 0, \qquad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \\ \underline{V}\Big[b_n - a_{nn}\underline{V} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^{t} k_{nj}(t-s)\overline{W}_j ds \Big] = 0, \end{cases}$$

Como $\int_{\infty}^{t} k_{ij}(t-s)ds = 1$ y $\overline{W}_i$, $\underline{W}_i$ son constantes positivos para $i = 1, ..., n-1$, entonces el sistema anterior es equivalente a,

$$\begin{cases} \Big[b_i - a_{ii}\overline{W}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\underline{W}_j - a_{in}\underline{V} \Big] = 0, \qquad 1 \leq i \leq n-1 \\ \\ \overline{V}\Big[b_n - a_{nn}\overline{V} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\underline{W}_j \Big] = 0, \\ \\ \Big[b_i - a_{ii}\underline{W}_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\overline{W}_j - a_{in}\overline{V} \Big] = 0, \qquad 1 \leq i \leq n-1 \\ \\ \underline{V}\Big[b_n - a_{nn}\underline{V} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\overline{W}_j \Big] = 0. \end{cases}$$

El cual se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{cases} 1) \qquad D\overline{W} + (A-D)\,\underline{W} + c\;\underline{V} = b, \\ \\ 2) \qquad \overline{V}\left[b_n - a_{nn}\overline{V} - \langle q, \underline{W} \rangle \right] = 0, \\ \\ 3) \qquad D\underline{W} + (A-D)\,\overline{W} + c\;\overline{V} = b, \\ \\ 4) \qquad \underline{V}\left[b_n - a_{nn}\underline{V} - \langle q, \overline{W} \rangle \right] = 0. \end{cases}$$

Teorema 4.12. *Si $b_n \leq \langle q, x^* \rangle$, entonces para cualquier solución $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ del sistema (4.1) con condiciones iniciales en FA cumple que*

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = x_i^* \qquad \textit{con} \quad i = 1, ..., n-1, \quad \textit{y} \quad \lim_{t\to+\infty} x_n(t) = 0.$$

Demostración. Probemos primeramente que $\underline{V} = 0$; en efecto, si suponemos lo contrario; es decir, $\underline{V} > 0$. Así $\overline{V} > 0$, ya que $\underline{V} < \overline{V}$. De 2) y 4) tenemos que

$$a_{nn}\overline{V} + \langle q, \underline{W} \rangle = b_n \quad \text{y} \quad a_{nn}\underline{V} + \langle q, \overline{W} \rangle = b_n.$$

Sumando ambas ecuaciones y dividiendo por dos tenemos

$$\frac{a_{nn}}{2}\left(\overline{V} + \underline{V}\right) + \left\langle q, \frac{1}{2}\left(\overline{W} + \underline{W}\right) \right\rangle = b_n.$$

Similarmente de 1) y 3), tenemos

$$A\frac{1}{2}\left(\overline{W} + \underline{W}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{V} + \underline{V}\right)\ c = b.$$

Así obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A\frac{1}{2}\left(\overline{W} + \underline{W}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{V} + \underline{V}\right)\ c = b, \\[2ex] \frac{a_{nn}}{2}\left(\overline{V} + \underline{V}\right) + \left\langle q, \frac{1}{2}\left(\overline{W} + \underline{W}\right) \right\rangle = b_n, \end{cases}$$

Por lo que el punto $col\left(\frac{\overline{W} + \underline{W}}{2}, \frac{\overline{V} + \underline{V}}{2}\right)$ satisface el sistema (4.12); es decir el punto $col\left(\frac{\overline{W} + \underline{W}}{2}, \frac{\overline{V} + \underline{V}}{2}\right)$ es un punto de equilibrio positivo del sistema (4.1). Esto contradice la proposición (4.11). En consecuencia $\underline{V} = 0$.

A continuación demostraremos que $\overline{V} = 0$. Nuevamente por reducción al absurdo supongamos que $\overline{V} > 0$. Reemplazando $\underline{V} = 0$ en las ecuaciones 1) y 3) y simplificando $\overline{V}$ en la ecuación 2) nos da que el punto $col(\overline{W}, \underline{W}, \overline{V})$ es una solución positiva del sistema lineal:

$$\begin{cases} D\overline{x} + (A - D)\,\underline{x} = b, \\[2ex] D\underline{x} + (A - D)\,\overline{x} + c\ \overline{x_n} = b, \\[2ex] a_{nn}\overline{x_n} + \langle q, \underline{x} \rangle = b_n. \end{cases} \tag{4.17}$$

Definamos

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} D & A - D \\ A - D & D \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} \mathfrak{B}\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix} + \overline{x_n}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \\ \\ a_{nn}\overline{x_n} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix} \right\rangle = b_n, \end{cases} \tag{4.18}$$

donde $\langle\, .\, ,\, .\rangle$ también denota el producto interior usual en $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Por otra parte, si denotamos $\mathfrak{D}$ la matriz diagonal de $\mathfrak{B}$, entonces usando (4.5) es fácil ver que esta desigualdad se cumple

$$\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} > \left[\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - \mathcal{I}\right]\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \frac{b_n^+}{a_{nn}}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{I}$ es la matriz identidad de orden $2(n-1) \times 2(n-1)$. De aquí y el lema (4.6) la matriz $\mathfrak{B}$ tiene inversa. Observe también que

$$\mathfrak{B}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$b_n - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \right\rangle = b_n - \langle q, x^* \rangle \leq 0.$$

En consecuencia, por proposición (4.11), el sistema (4.2.2) no tiene soluciones positivas. Esto contradice que $col\left(\overline{W}, \underline{W}, \overline{V}\right)$ solución positiva del sistema. Por tanto $\overline{V} = 0$.

Así tenemos que $\overline{V} = \underline{V} = 0$, sustituyendo en 1) y 3) nos queda

$$\begin{cases} D\overline{W} + (A - D)\,\underline{W} = b, \\ \\ D\underline{W} + (A - D)\,\overline{W} = b, \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda ecuación

$$(2D - A)\left(\overline{W} - \underline{W}\right) = 0.$$

Por lema (4.6) $(2D - A)$ es invertible, entonces tenemos $\overline{W} = \underline{W}$. Sustituimos en alguna de las ecuaciones nos queda $A\overline{W} = b$ por tanto $\underline{W} = \overline{W} = x^*$. Por la observación (3.9) se tiene que para cualquier solución $col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ con condiciones iniciales en FA cumple

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = x_i^* \qquad \text{con} \quad i = 1, ..., n-1, \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} x_n(t) = 0.$$

Esto demuestra el teorema. ■

Observación 4.13. Trabajemos con notaciones parecidas a las anteriores.

Sea $\mathfrak{D}$ la matriz diagonal de la matriz $\mathfrak{B}$ definida anteriormente.
Por hipótesis general tenemos que

$$b > \left(AD^{-1} - I\right)(b) + \frac{b_n}{a_{nn}}\, c,$$

así que podemos escribir

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} &> \begin{pmatrix} (AD^{-1}-I)(b) \\ (AD^{-1}-I)(b) \end{pmatrix} + \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} I & (A-D)D^{-1} \\ (A-D)D^{-1} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} D & A-D \\ A-D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \left[\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - \mathcal{I}\right] \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} > \left[\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - \mathcal{I}\right] \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

donde $\mathcal{I}$ es la matriz identidad de orden $2(n-1) \times 2(n-1)$.

Consideremos $\overline{\Delta} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - \mathcal{I} \geq 0$, observemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= 2\mathfrak{D} - \left[\mathcal{I} - \overline{\Delta}\right]\mathfrak{D} \\
&= \left[2\mathcal{I} - \mathcal{I} + \overline{\Delta}\right]\mathfrak{D} \\
&= \left[\mathcal{I} + \overline{\Delta}\right]\mathfrak{D}
\end{aligned}$$

por el mismo procedimiento en la prueba del lema (4.6), se cumple que $\mathfrak{B}$ tiene inversa. Como $\overline{V} = \underline{V} = 0$ por el teorema anterior, nos queda el siguiente sistema

$$\begin{cases} \overline{W}D + (A-D)\,\underline{W} = b, \\[2ex] \underline{W}D + (A-D)\,\overline{W} = b, \end{cases}$$

esto es equivalente a

$$\begin{pmatrix} D & A-D \\ A-D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{W} \\ \underline{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}.$$

Como $\overline{W} = \underline{W} = x^*$, se cumple

$$\begin{pmatrix} D & A-D \\ A-D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}.$$

Así se tiene que

$$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$$

y como $\mathfrak{B}$ tiene inversa

$$\mathfrak{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

■

Lema 4.14. *Sean R y S dos vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^{n-1}$ definidos por la relación*

$$\begin{aligned} 2R &= (2D-A)^{-1}(c) - A^{-1}(c), \\ 2S &= (2D-A)^{-1}(c) + A^{-1}(c). \end{aligned}$$

Probar que

$$\mathfrak{B}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix}$$

Demostración. Probemos que

$$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Por un lado,

$$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & A-D \\ A-D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS - D(R+S) \\ D(R+S) - AR \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AS - D(R+S) &= \frac{1}{2}A\left((2D-A)^{-1}(c) + A^{-1}(c)\right) - D(2D-A)^{-1}(c) \\ &= \frac{1}{2}A(2D-A)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c - D(2D-A)^{-1}(c). \end{aligned}$$

Usando el hecho que $(2D-A)^{-1} = D^{-1}(I-\Delta)^{-1}$ y $A^{-1} = D^{-1}(I+\Delta)^{-1}$, nos queda

$$\begin{aligned}
AS - D(R+S) &= \frac{1}{2}AD^{-1}(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c - DD^{-1}(I-\Delta)^{-1}(c) \\
&= \frac{1}{2}AD^{-1}(I+\Delta)^{-1}(I+\Delta)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c - (I-\Delta)^{-1}(c) \\
&= \frac{1}{2}(I+\Delta)(I-\Delta)^{-1}(c) - (I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c \\
&= \left(\frac{1}{2}(I+\Delta) - I\right)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c \\
&= -\frac{1}{2}(I-\Delta)\frac{1}{2}(I+\Delta)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = 0.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
D(R+S) - AR &= D\left(2D-A\right)^{-1}(c) - \frac{1}{2}A\left(\left(2D-A\right)^{-1}(c) - A^{-1}(c)\right) \\
&= (I-\Delta)^{-1}(c) - \frac{1}{2}A\left(2D-A\right)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c \\
&= (I-\Delta)^{-1}(c) - \frac{1}{2}(I+\Delta)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c \\
&= \left(I - \frac{1}{2}(I+\Delta)\right)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c \\
&= \frac{1}{2}(I-\Delta)(I-\Delta)^{-1}(c) + \frac{1}{2}c = c.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{B}\begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ y así $\mathfrak{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix}$. ∎

Proposición 4.15.

Si $q \neq 0$, *y se satisface la desigualdad (4.5), entonces* $\dfrac{b_n}{a_{nn}}\left[a_{nn} - \langle q, S\rangle\right] > \left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right].$

Demostración. Observemos que si consideramos el sistema algebraico

$$\begin{cases}
\mathfrak{B}\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix} + \overline{x}_n \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \\[2ex]
\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix} \right\rangle + a_{nn}\overline{x}_n = b_n.
\end{cases}$$

Como se satisface la desigualdad

$$\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} > \left[\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - \mathcal{I}\right] \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \; + \; \frac{b_n}{a_{nn}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \neq 0$, debido a que $q \neq 0$, y $\mathfrak{B} \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$, podemos aplicar el lema (4.9) para obtener

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \mathfrak{B}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \right] > \left[b_n - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \right\rangle \right].$$

El lema anterior implica que

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R \\ S \end{pmatrix} \right\rangle \right] > \left[b_n - \langle q, x^* \rangle \right].$$

Así

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \langle q, S \rangle \right] > \left[b_n - \langle q, x^* \rangle \right].$$

$\blacksquare$

4.2.3. Caso $b_n > \langle q, x^* \rangle$.

Consideremos igualmente el sistema (4.1) bajo la hipótesis de

$$b > \left(AD^{-1} - I\right)(b) + \frac{b_n^+}{a_{nn}} c,$$

más la condición $\quad b_n > \langle q, x^* \rangle$.

Observación 4.16. $\quad b_n^+ = b_n \quad$ y $\quad a_{nn} > \langle q, A^{-1}(c) \rangle$.

En efecto, $b_n > \langle q, x^* \rangle \geq 0$ debido a que $q \geq 0$ y $x^* > 0$. Para demostrar la otra desigualdad consideramos dos casos $q = 0$ y $q \neq 0$. Sí $b_n^+ = b_n$. Si $q = 0$ la prueba es obvia debido que a_{nn} es positivo. Supongamos que $q \neq 0$. Por lema (4.9) tenemos

$$\frac{b_n}{a_{nn}} \left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c) \right\rangle \right] > \left[b_n - \langle q, x^* \rangle \right].$$

Como b_n es positivo $\quad$ y $\quad b_n - \langle q, x^* \rangle > 0$. esto implica que $a_{nn} - \langle q, A^{-1}(c) \rangle > 0$; es decir, $\quad a_{nn} > \langle q, A^{-1}(c) \rangle$. $\blacksquare$

Proposición 4.17. *. Si se satisface (4.5) y $b_n > \langle q, x^* \rangle$. Entonces el sistema (4.1) tiene un punto de equilibrio positivo col$(\widehat{x}, \widehat{x_n})$.*

Demostración. Por la observación anterior $a_{nn} > \langle q, A^{-1}(c)\rangle$. Por lo que podemos definir

$$\widehat{x_n} = \left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle >\right]^{-1} . \left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right] > 0.$$

Por lema (4.9), $\dfrac{b_n}{a_{nn}} > \widehat{x_n}$, siempre que $q \neq 0$. Para el caso $q = 0$, definamos $\widehat{x_n} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} > 0$. En ambos casos $0 < \widehat{x_n} \leq \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. Por lo tanto $0 < \widehat{x_n}c \leq \dfrac{b_n}{a_{nn}}c$. Así

$$b - \frac{b_n}{a_{nn}}c \leq b - \widehat{x_n}c. \tag{4.21}$$

Por la desigualdad (4.5) $b - \dfrac{b_n}{a_{nn}}c > \left(AD^{-1} - I\right)(b)$. Como $\left(AD^{-1} - I\right) \geq 0$ y $b > 0$, entonces $\left(AD^{-1} - I\right)(b) \geq 0$. Así $b - \dfrac{b_n}{a_{nn}}c > 0$. De esto y la desigualdad (4.21) se concluye que el vector $b - \widehat{x_n}c > 0$. Además satisface las desigualdades

$$b - \widehat{x_n}c \geq b - \frac{b_n}{a_{nn}}c > \left(AD^{-1} - I\right)(b) \geq \left(AD^{-1} - I\right)(b - \widehat{x_n}c).$$

Por lema (4.7) tenemos que el vector $\widehat{x} = A^{-1}\left(b - \widehat{x_n}\ c\right) > 0$. Así

$$A\widehat{x} + \widehat{x_n}\ c = b.$$

Por otra parte si $q = 0$ el par $(\widehat{x}, \widehat{x_n})$ satisface la ecuación $\langle q, \widehat{x}\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} = b_n$ debido a que $\widehat{x_n} = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. Si $q \neq 0$ entonces

$$\widehat{x_n} = \left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(c)\right\rangle >\right]^{-1} . \left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right]$$

$$\begin{aligned}
\langle q, \widehat{x}\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} &= \left\langle q, A^{-1}\left(b - \widehat{x_n}\ c\right)\right\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} \\
&= \left\langle q, A^{-1}(b)\right\rangle - \left\langle q, A^{-1}\left(\widehat{x_n}\ c\right)\right\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} \\
&= \langle q, x^*\rangle - \widehat{x_n}\left\langle q, A^{-1}(\ c)\right\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} \\
&= \langle q, x^*\rangle + \widehat{x_n}\left[a_{nn} - \left\langle q, A^{-1}(\ c)\right\rangle\right] \\
&= \langle q, x^*\rangle + \left(b_n - \langle q, x^*\rangle\right), \quad \text{(por definición de } \widehat{x_n}) \\
&= b_n.
\end{aligned}$$

En ambos casos el par $col(\widehat{x}, \widehat{x_n})$ satisface la ecuación $\langle q, \widehat{x}\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} = b_n$. Por lo tanto el par $col(\widehat{x}, \widehat{x_n})$ satisface el sistema

$$\begin{cases} Ax + x_n c = b, \\ \\ \langle q, x\rangle + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Es decir el punto $col(\widehat{x}, \widehat{x_n})$ es un punto de equilibrio positivo del sistema (4.1). ∎

Teorema 4.18. *. Supongamos que $b_n > \langle q, (2D-A)^{-1}(c)\rangle$ y se satisface (4.5). Si $a_{nn} > \langle q, (2D-A)^{-1}(c)\rangle$, entonces el punto de equilibrio positivo del sistema (4.1) atrae todas las soluciones del sistema (4.1) con condiciones iniciales en FA.*

Demostración. El punto de equilibrio positivo del sistema (4.1) esta garantizado por la proposición anterior.

Primero probaremos que 1) $\overline{V} > 0$ y 2)$\underline{V} > 0$. En efecto, si $\overline{V} = 0$ entonces $\underline{V} = 0$; ya que $0 \leq \underline{V} \leq \overline{V}$. Por el teorema (3.6) para cualquier solución $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ de (4.1) con condiciones iniciales en FA se tiene que la ultima componente de la solución $x_n(t)$ satisface $\lim_{t\to+\infty} x_n(t) = 0$. Esto contradice que el sistema tiene un punto de equilibrio positivo. Por lo que $\overline{V} > 0$ y esto prueba 1).
Para demostrar 2),supongamos por por reducción al absurdo que $\underline{V} = 0$. Como la condición (4.5) implica que $\underline{W} > 0$ y $\overline{W} > 0$ entonces el vector $col(\overline{W}, \underline{W}, \overline{V})$ es positivo y además

$$\begin{cases} D\overline{W} + (A-D)\,\underline{W} = b, \\ \\ D\underline{W} + (A-D)\,\overline{W} + c\,\overline{V} = b, \\ \\ a_{nn}(t)\overline{V} + \langle q, \underline{W}\rangle = b_n. \end{cases} \tag{4.22}$$

Sumando la primera con la segunda ecuación y restando la segunda de la primera ecuación del sistema (4.22) obtenemos:

$$A\left(\overline{W} + \underline{W}\right) = 2b - c\,\overline{V} \quad \text{y} \quad (2D-A)\left(\overline{W} - \underline{W}\right) = c\,\overline{V} \tag{4.23}$$

Por el lema (4.6) A y $2D - A$ son invertible. De aquí $\left(\overline{W} + \underline{W}\right) = 2A^{-1}(b) - \overline{V}A^{-1}(c)$ y $\left(\overline{W} - \underline{W}\right) = \overline{V}\,(2D-A)^{-1}(c)$. Por otra parte
$R + S = (2D-A)^{-1}(c)$, $S - R = A^{-1}(c)$ y $x^* = A^{-1}(b)$, en consecuencia

$$\left(\overline{W} + \underline{W}\right) = 2x^* + \overline{V}(R-S) \qquad \text{y} \qquad \left(\overline{W} - \underline{W}\right) = \overline{V}\,(R+S)\,.$$

Sumando y restando estas ecuaciones se tiene:

$$\overline{W} = x^* + \overline{V}R \quad \text{y} \quad \underline{W} = x^* - \overline{V}S. \tag{4.24}$$

Sustituyendo en la tercera ecuación de (4.22) obtenemos

$$\left[a_{nn}(t) - \langle q, S\rangle\right]\overline{V} = b_n - \langle q, x^*\rangle \ > 0,$$

y por tanto $a_{nn}(t) - \langle q, S\rangle > 0$. En consecuencia

$$\overline{V} = \left[a_{nn}(t) - \langle q, S\rangle\right]^{-1}\left[b_n - \langle q, x^*\rangle\right]. \tag{4.25}$$

Por otro lado sabemos que

$$\underline{U}_i = a_{ii}^{-1} \max \left\{ 0, b_i - \sum_{j=1 j \neq i}^{n} a_{ij} \overline{U}_j \right\}; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así

$$a_{nn} \underline{V} = \max \left\{ 0, b_n - \sum_{j=1 j \neq i}^{n} a_{nj} \overline{W} \right\} = \max \left\{ 0, b_n - \left\langle q, \overline{W} \right\rangle \right\}.$$

Así, en virtud de que $\underline{V} = 0$ se tiene que

$$b_n - \left\langle q, \overline{W} \right\rangle \leq 0.$$

Usando la primera ecuación de (4.24)

$$b_n - \langle q, x^* \rangle \leq \overline{V} \langle q, R \rangle .$$

Por (4.25) y la desigualdad anterior, se tiene

$$b_n - \langle q, x^* \rangle \leq [a_{nn}(t) - \langle q, S \rangle]^{-1} [b_n - \langle q, x^* \rangle] \langle q, R \rangle .$$

Multiplicando por el número positivo $[a_{nn}(t) - \langle q, S \rangle] [b_n - \langle q, x^* \rangle]^{-1}$ la desigualdad anterior, tenemos:

$$[a_{nn}(t) - \langle q, S \rangle] \leq \langle q, R \rangle ;$$

esto es,

$$a_{nn}(t) - \langle q, S + R \rangle \leq 0.$$

Como $R + S = (2D - A)^{-1} (c)$, tenemos que $a_{nn}(t) \leq \left\langle q, (2D - A)^{-1} (c) \right\rangle$. Esto contradice la hipótesis. Por tanto, $\underline{V} > 0$. Esto prueba 2).

Sea $\quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} A & c \\ q^T & a_{nn} \end{pmatrix} \quad$ la matriz del sistema

$$\begin{cases} A\overline{x} + \overline{x}_n c = b \\ \\ \langle q, \overline{x} \rangle + a_{nn} \overline{x}_n = b_n. \end{cases}$$

Denotemos por $\widehat{D}$ la matriz diagonal de $\widehat{A}$; esto es $\widehat{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, donde D es la matriz diagonal de A. Probemos Primeramente que si $2\widehat{D} - \widehat{A}$ es invertible. Para ello basta probar que la única solución del sistema

$(2\widehat{D}-\widehat{A})\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es, $\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En efecto, es fácil ver que $2\widehat{D}-\widehat{A} = \begin{pmatrix} 2D-A & -c \\ -q^T & a_{nn} \end{pmatrix}$, por tanto el sistema matricial

$$\left(2\widehat{D}-\widehat{A}\right)\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D-A & -c \\ -q^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se puede escribir como

$$\begin{cases} (2D-A)\widehat{x} - c\widehat{x_n} = 0 \\ \\ -q^T.\widehat{x} + a_{nn}\widehat{x_n} = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} (2D-A)\widehat{x} - c\widehat{x_n} = 0 \\ \\ -\langle q, \widehat{x}\rangle + a_{nn}\widehat{x_n} = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Por el lema (4.6) la matriz $(2D-A)$ es invertible, entonces podemos despejar $\widehat{x}$ de la primera ecuación. Obteniendo $\widehat{x} = \widehat{x_n}(2D-A)^{-1}(c)$. Sustituyendolo en la segunda ecuación y sacando factor común $\widehat{x_n}$, nos queda

$$\widehat{x_n}\left[-\left\langle q, (2D-A)^{-1}(c)\right\rangle + a_{nn}\right] = 0.$$

Como por hipótesis $a_{nn} \neq \langle q, (2D-A)^{-1}(c)\rangle$ se tiene que $\widehat{x_n} = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema (4.26), nos queda que $(2D-A)\widehat{x} = 0$. De aquí $\widehat{x} = 0$. Por tanto $\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que se concluye que $2\widehat{D}-\widehat{A}$ es invertible. Por otro lado tenemos que $\underline{U} = col(\underline{W}, \underline{V})$ es positivo. Con estas condiciones tenemos por la observación (4.4) $\overline{W} = \underline{W}$ y $\overline{V} = \underline{V}$ y además el punto de equilibrio $col(\widehat{x}, \widehat{x_n}) = col(\underline{W}, \underline{V}) = col(\overline{W}, \overline{V})$ atrae a todas las soluciones del sistema (4.1) con condiciones iniciales en FA. ∎

Capítulo 5

Caso de Coeficientes T-Periódicos.

En este capítulo estudiaremos el sistemas integro diferencial,

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \quad t>0 \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0; \\ i = 1, ..., n \end{cases} \tag{5.1}$$

donde a_{ij} son constante no negativa para $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ii} > 0$ con $1 \leq i \leq n$ y b_i con $1 \leq i \leq n$ son funciones continuas, T-periódicas. El promedio $M(b_i) > 0$ para $i = 1, ..., n-1$. Las condiciones iniciales φ_i con $i = 1, ..., n$, pertenecen al conjunto FA. Los núcleos

$$K_{ij} : [0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad \text{con} \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j$$

son funciones continuas que cumplen $\int_0^{+\infty} K_{ij}(t)dt = 1$. Los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$M(b_i) > \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_j) + \frac{M(b_n)^+}{a_{nn}} a_{in}, \qquad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{5.2}$$

Aquí, $M(b_n)^+ = \max\{0, M(b_n)\}$. Nuevamente la desigualdad (5.2) implican

$$M(b_i) > \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} M(b_j), \qquad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{5.3}$$

Las desigualdades (5.2) y (5.3) se pueden escribir, en términos de matrices y vectores, como

$$M(b) \geq \left(AD^{-1} - I\right) M(b) + \frac{M(b_n)^+}{a_{nn}} c \tag{5.4}$$

$$M(b) \geq \left(AD^{-1} - I\right) M(b), \tag{5.5}$$

respectivamente, donde $M(b) = col\,(M(b_1), M(b_2), ..., M(b_{n-1}))$,
$c = col(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{(n-1)n})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Observación 5.1. La hipótesis (5.5) implica que el sistema $Ax = M(b)$ tiene una única solución $x^* > 0$. Ver prueba del teorema (4.3).

Bajo estas Hipótesis probaremos los siguientes resultados:

- Si el sistema (5.1) tiene una solución $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ T-periódica y $x_i(t) > 0$ para $i = 1, ..., n$, entonces $M(b_n) > \langle q, x^* \rangle$, donde $x^* = A^{-1}(M(b))$.

- Si $M(b_n) \leq \langle q, x^* \rangle$, entonces el sistema

  $$x_i' = x_i \left[b_i(t) - a_{ii}x - \sum_{j=1 j \neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s) x_j(s) ds \right], \quad i = 1, ..., n-1.$$

  tiene un estado de coexistencia u^* tal que

  $$\lim_{t \to \infty} (x(t) - u^*(t), x_n(t)) = (0, 0)$$

  para cualquier solución $col(x, x_n)$ del sistema (5.1) con condiciones iniciales en FA.

- Si $M(b_n) > \langle q, x^* \rangle$ y $a_{nn} > \langle q, (2D - A^{-1})(b) \rangle$, entonces el sistema (5.1) tiene un estado de coexistencia que atrae todas las soluciones del sistema (5.1) con condiciones iniciales en FA.

5.1. Notación Para la sucesión canónica del Sistema (5.1).

Sea $\{U^k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión canónica del sistema (5.1), (construida en la sección 3.1.1). En esta sección usaremos la misma notación de la sección 4.2. Esto es, denotaremos por $W^k = W^k(t) = col(U_1^k(t), U_2^k(t), ..., U_{n-1}^k(t))$, $V^k(t) = U_n^k(t)$, $\overline{W} = \overline{W}(t) = col(\overline{U}_1^k(t), \overline{U}_2^k(t), ..., \overline{U}_{n-1}^k(t))$, $\overline{V} = \overline{V}(t) = \overline{U}_n(t) = \overline{U}_n$, $\underline{W} = \underline{W}(t) = col(\underline{U}_1^k(t), \underline{U}_2^k(t), ..., \underline{U}_{n-1}^k(t))$ y $\underline{V} = \underline{V}(t) = \underline{U}_n(t)$. Así $U^k = U^k(t) = col(U_1^k(t), U_2^k(t), ..., U_n^k(t)) = \begin{pmatrix} W^k(t) \\ V^k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^k \\ V^k \end{pmatrix}$, $\overline{U} = col(\overline{W}, \overline{V}) = \begin{pmatrix} \overline{W} \\ \overline{V} \end{pmatrix}$, $\underline{U} = col(\underline{W}, \underline{V}) = \begin{pmatrix} \underline{W} \\ \underline{V} \end{pmatrix}$, $\underline{W} < \overline{W}$ y $\underline{V} < \overline{V}$. Además

$$(S) \quad \begin{cases} \overline{W}_i'(t) = \overline{W}_i(t) \Big[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s)\underline{W}_j(s)ds \\ \quad -a_{in} \int_{-\infty}^t k_{in}(t-s)\underline{V}(s)ds \Big], \quad 1 \le i \le n-1 \\ \\ \underline{W}_i'(t) = \underline{W}_i(t) \Big[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s)\overline{W}_j(s)ds \\ \quad -a_{in} \int_{-\infty}^t k_{in}(t-s)\overline{V}(s)ds \Big], \quad 1 \le i \le n-1 \\ \\ \overline{V}'(t) = \overline{V}(t) \Big[b_n(t) - a_{nn}\overline{V}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \int_{-\infty}^t k_{nj}(t-s)\underline{W}_j(s)ds \Big] \\ \\ \underline{V}'(t) = \underline{V}(t) \Big[b_n(t) - a_{nn}\underline{V}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \int_{-\infty}^t k_{nj}(t-s)\overline{W}_j(s)ds \Big]. \end{cases}$$

Observación 5.2. La hipótesis (5.4) implica que $\underline{W}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia también $\overline{W}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.(Ver observación (3.14))

Proposición 5.3. *Si el sistema (5.1) tiene una solución* $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ *T-periódica y* $x_i(t) > 0$ *para* $i = 1, ..., n$, *entonces*

$$M(b_n) > \langle q, x^* \rangle ,$$

donde $x^* = A^{-1}(M(b))$ *(la existencia de* x^* *esta garantizada por la observación (5.1)).*

Demostración. Sea $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{n-1}(t), x_n(t))$ una solución T-periódica del sistema (5.1) con $x_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $i = 1, ..., n$. Entonces podemos dividir por $x_i(t)$ la ecuación que satisface $x_i(t)$;

$$\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} = \left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s)x_j(s)ds \right], \quad 1 \le i \le n.$$

Integrando de 0 hasta T, dividiendo por T, usando la T-periodicidad de las funciones x_j con $1 \le j \le n$ y el lema (2.10) obtenemos

$$0 = M(b_i) - a_{ii}M(x_i) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}M(x_j) \quad \text{ó} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}M(x_j) = M(b_i), \quad 1 \le i \le n.$$

Esto significa que el vector $col\,(M(x_1), M(x_2), ..., M(x_{n-1}), M(x_n))$ es solución del sistema

$$\begin{cases} Ay + cy_n = M(b) \\ \\ \langle q, y\rangle + a_{nn}y_n = M(b_n), \end{cases}$$

donde $y \in \mathbb{R}^{n-1}, y_n \in \mathbb{R}$. por el contrarecíproco de la proposición (4.11) aplicado al sistema

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[M(b_i) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=ij\neq i}^{n} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right].$$

Tenemos $\quad M(b_n) > \langle q, x^*\rangle$. ■

Proposición 5.4. *Si $M(b_n) \leq \langle q, x^*\rangle$, entonces el sistema*

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0, \quad i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

tiene una solución $w^*(t) = col(w_1^*(t), w_2^*(t), ..., w_{n-1}^*(t))$ T-periódica y $w_i^*(t) > 0$ para $i = 1, ..., n-1$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - w^*(t), x_n(t)) = (0, 0)$$

para cualquier solución $col(x, x_n)$ del sistema (5.1) con condiciones iniciales en FA.

Demostración. Sean $\overline{U}(t) = col\left(\overline{W}(t), \overline{V}(t)\right)$ y $\underline{U}(t) = col\,(\underline{W}(t), \underline{V}(t))$ las funciones definidas anteriormente. Por la observación (5.2) $\overline{W}(t) > 0$ y $\underline{W}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Afirmamos que$\underline{V}(t) = 0$ y $\overline{V}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probemos primero que $\underline{V}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.En efecto, supongamos lo contrario, por la observación 3.5 se tiene que $\underline{V}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia también se tiene que $\overline{V}(t) > 0$. Entonces podemos dividir por $\overline{W}_i(t)$,$\underline{W}_i(t)$,$\overline{V}(t)$ y$\underline{V}(t)$ en las respectivas ecuaciones que ellas satisfacen

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{W}_i'(t)}{\overline{W}_i(t)} = \Big[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\underline{W}_j(s)ds \\ \qquad -a_{in}\int_{-\infty}^{t} k_{in}(t-s)\underline{V}(s)ds\Big], \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \\ \dfrac{\underline{W}_i'(t)}{\underline{W}_i(t)} = \Big[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\overline{W}_j(s)ds \\ \qquad -a_{in}\int_{-\infty}^{t} k_{in}(t-s)\overline{V}(s)ds\Big], \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \\ \dfrac{\overline{V}'(t)}{\overline{V}(t)} = \left[b_n(t) - a_{nn}\overline{V}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^{t} k_{nj}(t-s)\underline{W}_j(s)ds\right] \\ \\ \dfrac{\underline{V}'(t)}{\underline{V}(t)} = \left[b_n(t) - a_{nn}\underline{V}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^{t} k_{nj}(t-s)\overline{W}_j(s)ds\right] \end{cases}$$

Integrando de 0 hasta T, dividiendo por T, usando la T-periodicidad de las funciones $\overline{W}_i(t)$,$\underline{W}_i(t)$,$\overline{V}(t)$ y$\underline{V}(t)$ con $1 \leq i \leq n-1$ y el lema (2.10) obtenemos

$$\begin{cases} a_{ii}M(\overline{W}_i) + \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}M(\underline{W}_j) + a_{in}M(\underline{V}) = M(b_i) \\ \\ a_{ii}M(\overline{W}_i) + \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}M(\overline{W}_j) + a_{in}M(\underline{V}) = M(b_i) \\ \\ a_{nn}M(\overline{V}) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}M(\underline{W}_j) = M(b_n) \\ \\ a_{nn}M(\underline{V}) \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}M(\overline{W}_j) = M(b_n) \end{cases}$$

Llevando a la forma matricial

$$\begin{cases} DM(\overline{W}) + (A-D)\, M(\underline{W}) + c\ M(\underline{V}) = M(b) \\ \\ DM(\underline{W}) + (A-D)\, M(\overline{W}) + c\ M(\overline{V}) = M(b) \\ \\ \left[M(b_n) - a_{nn}M(\overline{V}) - \langle q, M(\underline{W})\rangle\right] = 0 \\ \\ \left[M(b_n) - a_{nn}M(\underline{V}) - \left\langle q, M(\overline{W})\right\rangle\right] = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Como en la demostración del teorema (4.12), llegamos a que
$col\left(\dfrac{M(\overline{W}) + M(\underline{W})}{2}, \dfrac{M(\overline{V}) + M(\underline{V})}{2}\right)$ el cual es un vector positivo que satisface el sistema
$\widehat{A}\begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(b) \\ M(b_n) \end{pmatrix}$, donde $M(b) = \begin{pmatrix} M(b_1) \\ \vdots \\ M(b_{n-1}) \end{pmatrix}$ y $\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Esto contradice la proposición (4.11) aplicada al sistema

$$\begin{cases} x_i'(t) = x_i(t)\left[M(b_i) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t-s)x_j(s)ds\right], \\ x_i(t) = \varphi_i(t) \quad t \leq 0, \quad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Esto prueba que $\underline{V}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Probemos ahora que $\overline{V}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Supongamos lo contrario, por la observación (3.5) se tiene que $\overline{V}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.Debido a que $\underline{V}(t) = 0$

entonces tenemos

$$\begin{cases} \overline{W}_i'(t) = \overline{W}_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\underline{W}_j(s)ds\right], \quad 1\leq i\leq n-1 \\ \\ \underline{W}_i'(t) = \underline{W}_i(t)\left[b_i(t) - a_{ii}\overline{W}_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\overline{W}_j(s)ds\right. \\ \quad \left. -a_{in}\int_{-\infty}^{t} k_{in}(t-s)\overline{V}(s)ds\right], \quad 1\leq i\leq n-1 \\ \\ \overline{V}'(t) = \overline{V}(t)\left[b_n(t) - a_{nn}\overline{V}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^{t} k_{nj}(t-s)\underline{W}_j(s)ds\right] \end{cases}$$

Usando el mismo argumento que se uso en el caso de $\underline{V}$, tenemos que el vector positivo $col\left(M(\overline{W}), M(\underline{W}), M(\overline{V})\right)$ satisface el sistema lineal

$$\begin{cases} D\overline{x} + (A-D)\,\underline{x} = M(b), \\ \\ D\underline{x} + (A-D)\,\overline{x} + c\;\overline{x_n} = M(b), \\ \\ a_{nn}\overline{x_n} + \langle q, \underline{x}\rangle = M(b_n). \end{cases}$$

Razonando como en la demostración del teorema (4.12) llegamos a una contradicción. En consecuencia $\overline{V}(t) = 0$. Ahora sustituyendo $\overline{V}(t) = 0$ y $\underline{V}(t) = 0$ en el sistema (S), integrando de 0 hasta T, dividiendo por T, usando la T-periodicidad de las funciones $\overline{W}_i(t)$,$\underline{W}_i(t)$ y el lema (2.10) obtenemos el sistema lineal

$$\begin{cases} DM(\overline{W}) + (A-D)\,M(\underline{W}) = M(b), \\ \\ DM(\underline{W}) + (A-D)\,M(\overline{W}) = M(b), \end{cases}$$

restando la segunda ecuación a la primera ecuación, nos queda

$$(A-D)\left(M(\overline{W}) - M(\underline{W})\right) + D\left(M(\underline{W}) - M(\overline{W})\right) = 0.$$

Esta se puede escribir como

$$(2D-A)\left(M(\underline{W} - \overline{W})\right) = 0$$

Como $(2D-A)$ es invertible entonces $M(\underline{W} - \overline{W}) = 0$, además $\overline{W}(t) - \underline{W}(t) \geq 0$ por tanto $\underline{W}(t) - \overline{W}(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$ y como $\underline{W}, \overline{W}$ son T-periódicas se cumple $\underline{W}(t) - \overline{W}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Definamos $w^*(t) = col(w_1^*(t), ..., w_{n-1}^*(t))$ $= \underline{W}(t) = \overline{W}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para $i = 1, ..., n-1$, la cual es T-periódica y positiva. Reemplazando $\underline{W}_i(t), \overline{W}_i(t)$ por $w_i^*(t)$ y $\overline{V}(t), \underline{V}(t)$ por 0 en el sistema (S), tenemos

$$\left(w_i^*\right)'(t) = w_i^*(t)\left[b_i(t) - a_{ii}w_i^*(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)w_j^*(s)ds\right],\ 1\leq i\leq n-1.$$

Es decir $w^*(t)$ satisface el sistema anterior. Aplicando el teorema (3.6), tenemos que para cualquier solución $col(x_1, x_2, ..., x_n)$ del sistema (5.1) con condiciones iniciales en FA, se cumple que

$$\limsup_{t\to+\infty} [x_i(t) - w_i^*(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty} [x_i(t) - w_i^*(t)] \, ; \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \text{y}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} [x_n(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty} [x_n(t)] \, .$$

Por la observación (3.10) $\lim_{t\to+\infty} [x_i(t) - w_i^*(t)] = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} x_n(t) = 0$. Con esto queda demostrada la proposición. ■

Observación 5.5. Si $\theta = \theta(t)$ es el atractor global de la ecuación logística

$$x' = x\{b(t) - ax\},$$

entonces $M(\theta)$ es el atractor global de la ecuación logística

$$x' = x\{M(b) - ax\}.$$

En efecto, por el teorema (2.13) $\theta(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, si $M(b) > 0$ y $\theta(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si $M(b) \leq 0$. De aquí $M(\theta) = \begin{cases} \dfrac{M(b)}{a}, & \text{si} \quad M(b) > 0 \\ 0, & \text{si} \quad M(b) \leq 0 \end{cases} = \max\left\{0, \dfrac{M(b)}{a}\right\}$. Por la observación (2.14) se tiene que $M(\theta)$ es el atractor global de la ecuación logística $x' = x\{M(b) - ax\}$.

Teorema 5.6. *Si* $M(b_n) > \langle q, x^* \rangle$ *y* $a_{nn} > \langle q, (2D - A^{-1})(b) \rangle$, *entonces el sistema (5.1) tiene una solución* $col(W(t), V(t)) = col(W_1(t), ..., W_{n-1}(t), V(t))$ *T-periódica y positiva tal que para cualquier solución* $col(x_1(t), ..., x_n(t))$ *del sistema (5.1) con condiciones iniciales en* FA *se cumple* $\lim_{t\to\infty}(x_i(t) - W_i(t)) = 0$, $i = 1, ..., n-1$ *y* $\lim_{t\to\infty}(x_n(t) - V(t)) = 0$.

Demostración. Sea $U^N = col\left(W^N, V^N\right)$ la sucesión canónica del sistema (5.1). De la observación (5.5) tenemos que $\left\{M(U^N) = \dfrac{1}{T}\int_0^T U^N(t)dt\right\}$ es la sucesión canónica del sistema con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x_i' = x_i(t)\Big\{M(b_i) - a_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1 j\neq i}^{n-1} a_{ij}\int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s)x_j(s)ds \\ \qquad -a_{in}\int_{-\infty}^t k_{in}(t-s)x_n(s)ds\Big\}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ x_n' = x_n(t)\left\{M(b_n) - a_{nn}x_n(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\int_{-\infty}^t k_{nj}(t-s)x_j(s)ds\right\}. \end{cases}$$

Aplicando el teorema (4.18) a este sistema obtenemos que

$$M(\overline{W}) = M(\underline{W}) \quad \text{y} \quad M(\overline{V}) = M(\underline{V}).$$

Como $\overline{W}(t) \geq \underline{W}(t)$ y $\overline{V}(t) \geq \underline{V}(t)$ entonces $\overline{W}(t) = \underline{W}(t)$ y $\overline{V}(t) = \underline{V}(t)$. Definamos $W_i(t) = \overline{W}_i(t) = \underline{W}_i(t)$ y $V(t) = \overline{V}(t) = \underline{V}(t)$. Así $col(W(t), V(t)) = col(W_1(t), ..., W_{n-1}(t), V(t))$ es una solución T-periódica y positiva del sistema (5.1) y de la observación (3.10) se concluye la demostración del teorema. ■

Bibliografía

[1] Ahmad,S.and Lazer,A. (2005) Average growth and total permanence in a competitive Lotka-Volterra system , *Annali di matemática pura ed applicata.***136**,1-21.

[2] Ahmad,S.and Lazer,A. (1995) One species extinction in an autonomous competition model, *Proceedings of the first World Congress of Nonlinear Analysis, Walter DeGruyter, Berlin.*

[3] Ahmad,S.and Lazer,A. (1995) On the Nonautonomous N-competing species problems, *Appl.Anal.***57**,309-323.

[4] Ahmad,S.and Lazer,A. (1998) Necesary and sufficiente average growth in a Lotka-Volterra system , *Nonlinear Analysis.***34**,191-228.

[5] Berman,A. and Plemmons, R.(1979) Nonnegative Matrices in the Mathematical sciences , *computer science and applied mathematics.*

[6] Brelot,M.(1931) Sur le probleme biologique hereditaire de deux especes devorante et devoree , *Ann. Mat. Pura Appl.Ser.*

[7] Borden,R.(1983) A course in Advanced Calculus. Dover Publications,Inc. Mineola, New York.

[8] Carrasco, A. 2002. Estudio de sistema del tipo Lotka Volterra con retardo infinito. Trabajo de grado. Universidad Centrooccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto.47p.

[9] Gopalsamy, K. (1984) Global asymptotic in Volterra's population system, *J.Math.Bology* . **19**:157-168.

[10] Gopalsamy, K. (1987) Global asymptotic stability in a class of Volterra-Stieltjes integrodifferential system, *Int.J.Systems SCI* . **Vol 18, No. 9**:1733-1737.

[11] Gopalsamy, K. (1985) Global asymplotic stability in a periodic integrodifferential system, *Tohoku Math.* **J.37**:323-332.

[12] Gopalsamy, K. (1992) Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics , *Klumer Academic Publishers Boston.*

[13] He, X. (1998) Global stability in nonautonomous Lotka-Volterra systems of "pure-delay type", *J. Differential and Integral Equations.* . **Vol 11, No. 2**:293-310.

[14] Horn,Roger and Johnson, Charles.(1985) Matrix Analysis. Cambridge University Press.New York.

[15] Montes de Oca, F. and Vivas, M.(2006) Extinction in a two dimensional Lotka-Volterra systems with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Real world Applications* **Vol.7**:1042-1047.

[16] Murakami, S. (1989) Almost periodic solutions of a system of integradifferencial equations, *Tohoku- Math.*
Journ .**39** :71-79.

[17] Novo, S., Obaya,R. y Rojo, J. (1995) Ecuaciones y sistemas diferenciales. Mcgraw-Hill/Interamericana de España, S.A.España.

[18] Tineo, A.(1993) Asymptotic dehavior of positive solutions of the nonautonomous Lotka-Volterra competetions equations , *Differential and Integral Equations.* **6** :449-457.

[19] Tineo, A.(1995) An iterative scheme for the N-competing species problem , *J. of Differential Equations.* **Vol 116,1** :1-15.

[20] Tineo, A.(1996) Iterative scheme for some population model , *Nonlinear World.* **No 3** :695-708.

[21] Tineo, A.(2005) Necessary and Sufficient Conditions for Extinction of One species , *Advanced Nonlinear Studies.* **5(2005)** :57-71.

[22] Tineo, A. and Alvarez,C(1991) A differential consideration about the globally asymptotically stable solution of the periodic n-competing species problem , *J. Math.Anal. and Appl.159.* **159** :44-50.

[23] Volterra, V. (1931) Lecon sur la theorie mathematique de la lutte por la vie , *Gauthier villars, Paris.*

[24] Yang, K. (1993) Delay differential equations with aplications in populations dynamics , *Academic Press, New York.*