UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

DESAGREGACIÓN DE LAS MATRICES INSUMO - PRODUCTO Y CONTABILIDAD SOCIAL.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR
Br: Iliana Vargas

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADA
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: OPTIMIZACIÓN - ECONOMÍA

TUTOR: Hugo Lara

Barquisimeto - Venezuela
2015

AGRADECIMIENTOS

En el presente Trabajo Especial de Grado me gustaría agradecerte primeramente a ti Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado.

Le doy gracias a mis padres Alcides Vargas y Lucila Camacho por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación a lo largo de lo que he tenido de vida.

A mi hermana Ilianny Vargas por ser parte importante de mi vida y por su apoyo a lo largo de esta carrera.

Debo agradecer de manera especial al profesor Hugo Lara por aceptarme para realizar esta tesis de pregrado bajo su dirección. También por sus conocimientos, su experiencia, su motivación, su apoyo, su confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas.

A mi tía Dalia Vargas por su apoyo incondicional hacia mi a lo largo de mi vida.

A mis primas Rossy, Marianny y Elizabeth por todos aquellos buenos momentos que hemos vivido a lo largo de nuestras vidas, por estar atentas para saber como me iba es mis estudios, a las tres las considero mis hermanas.

A mis amigos(as) y compa neros(as) de clase Lulimar Suŕez, Shaday Guerrero,Diana Pi nango por todos los bueno momentos que pasamos a lo largo de la carrera y por todo su apoyo. Al compa nero Pedro Camacaro por su aporte en este trabajo. También agradezco a los compa neros y compa neras de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas (AsoEM) por las experiencias vividas y por los conocimientos adquiridos durante mi pertenencia allí.

Mi más grande agradecimiento a mis camaradas de lucha por sus palabras, apoyo y por sobretodo por hacer de mi experiencia en esta universidad una experiencia enrriquesedora, de formación integral constante con cada vivencia, una formación que trascendió más allá del claustro universitario.

A ti Comandante Chávez por despertar la conciencia de nuestro pueblo.

A todos ustedes, muchas gracias.

RESUMEN

El análisis de una Matriz Insumo-Producto es utilizado en muchas regiones de importantes países para estudiar problemas económicos que surgen en el comercio interregional. Este Trabajo Especial de Grado se focaliza en el estudio del armado de metodologías alternativas para el cálculo de una Matriz Insumo-Producto Regional para Venezuela, donde se estudia dos regiones: la región Centrooccidental-Central y el resto del país. El principal inconveniente que aparece a la hora de realizar este tipo de estudios es la poca disponibilidad de datos sobre el comercio entre regiones. Desafortunadamente no se hallan censos y estadísticas de ciudades o regiones a la par de los datos que están disponibles para el total del país, por lo que entonces se han desarrollado herramientas para descomponer la información de las economías regionales. El trabajo presenta alternativas metodológicas por medio de métodos indirectos para el armado de la Matriz Insumo-Producto Regional. Empleamos un Algoritmo Iterativo de Desagegación como una de esas metodologías alternas. Luego estudiamos el coeficiente de localización AFLQ para estimar el comercio dentro de cada región. Después de suponer un punto de partida para la estimación interregional (exportaciones e importaciones de mercancías) de la Matriz Regional de Insumo-Producto, introdujimos el modelo de calibración para el cálculo de los coeficientes técnicos regionales por medio del método de entropía cruzada.

Índice general

Introducción

La Economía es un sistema complejo donde interactúan los individuos, las empresas y otras organizaciones en un sistema global, y sus acciones (individuales o colectivas) están entrelazadas como el resultado de su comportamiento. En este sentido, se hace necesaria la construcción de modelos económicos para caracterizar y analizar estos fenómenos.

En el siglo XVIII, en la obra " Las Tablas Económicas " (1758) [2] Francois Quesnay vio la necesidad de contar con un sistema integrado de cuentas nacionales que sirviera como instrumento para revelar el reparto y uso del excedente social de una economía. Las tablas se convierten en el primer intento en la historia del pensamiento económico de dar una interpretación, un análisis teórico del mecanismo de reproducción social; así mismo, en su mayor aporte y causa de su inmortalidad [2].

No fue hasta el siglo XX con los trabajos pioneros de Wassily Leontief (1941) [8] que el concepto fue sistematizado, dando origen a las tablas Insumo-Producto Simétricas. A partir de estas tablas, Leontief pudo identificar la interdependencia industrial de la economía de Estados Unidos, facilitando así el desarrollo de un modelo matemático dentro del cual todos los encadenamientos económicos fueron establecidos y estimados estadísticamente. Enfoque que en lo sucesivo, de la mano de un variado conjunto de técnicas, le permitió transformarse en una de las herramientas más utilizadas en el estudio de los aspectos estructurales de una economía [8].

Estas tablas estan definidas como un conjunto integrado de matrices, que muestran el equilibrio entre la oferta y utilización de bienes y servicios (productos). Estas matrices proporcionan un análisis detallado del proceso de producción y la utilización de los bienes y servicios que se producen en un país (o región) o que se importan del resto del mundo, y del ingreso generado en dicha producción por las diversas actividades econḿicas. En su construcción se requiere poner en marcha un conjunto de actividades, como la de centralizar, analizar y procesar información básica de múltiples fuentes como pueden ser: censos económicos, agropecuarios, censos de población y vivienda, encuestas de gastos e ingresos de los hogares, registros administrativos y, fundamentalmente, los sistemas de cuentas nacionales. Los cuadros de insumo-producto permiten apreciar los componentes de las matrices de oferta, de demanda intermedia, de demanda final y el cuadro de valor agregado, configurándose, como se muestra seguidamente, en una tabla de cuatro submatrices, que nos permiten obtener en forma directa el PIB por el método de producción, tipo de gasto y tipo de ingreso [1].

La MIP permite efectuar proyecciones sobre los efectos que pueden llegar a surgir sobre parte o el conjunto de los sectores productivos ante un cambio en el nivel de demanda final. Un aumento o disminución de la demanda final para determinado sector, significa por un lado, un impacto inicial sobre los respectivos niveles de producción (denominado impacto o requisito directo) mientras que, por el otro, toda una serie de impactos subsiguientes, derivados de la demanda de insumos que debe efectuar dicho sector a los restantes y que a su vez, origina de estos últimos nuevas demandas (denominados impactos o requisitos indirectos). La cuestión clave aquí es la disponibilidad de información que se posee. Desafortunadamente no se hallan censos y estadísticas de ciudades o regiones a la par de los datos que están disponibles para el total del país, por lo que entonces se han desarrollado herramientas para descomponer la información de las economías regionales [3].

Para la regionalización de la MIP nacional, se utilizan en el presente dos metodologías, una por medio de la aplicación de un Algoritmo Iterativo de Desagregación que contruimos basándonos en supuestos previos como por ejemplo el nivel de contribución que posee las regiones a desagregar sobres las cuentas nacionales y en las características propias de la Matriz insumo-Producto; la otra es una metodología de estimación y calibración para obtener una MIP regional. Esta metodología se basan en autores como Flegg, Weber y otros [8], [9], [10] y en el paper de Jensen et al. (1978) [7] para el cálculo de matrices intrarregionales. Para ello se estiman coeficientes técnicos intrarregionales de insumo producto los cuales indican los requerimientos de insumos por cada peso de valor bruto de producción. De este modo el trabajo presenta el desarrollo de estos coeficientes, y se estudia un método numérico aplicado a una economía "ficticia" para Venezuela. La otra parte metodológica incluye el método de calibración y balanceo de matrices. Para ello utilizamos los enfoques provistos por Robinson, Cattaneo y El Said (2001) [5] pero aplicado al cálculo de una matriz interregional que incluya compras tanto dentro de la región (la base viene provista por la metodología de matrices intrarregionales) como fuera de la misma, funcionando de manera que cada región importa/exporta de la otra. Este método de entropía cruzada, es usualmente utilizado para el cálculo de matrices insumo producto nacionales y para el cálculo o actualización de diversas submatrices pertenecientes a otros instrumentos económico como los son las matrices de Contabilidad Social.

El resto del trabajo se describe a continuación: En el próximo capítulo mostramos contenidos preliminares relacionados con elementos de álgebra lineal matricial, la resolución de sistemas lineales y repasamos también las condiciones de optimalidad para problemas con restricciones lineales, los multiplicadores de Lagrange y la Función Lagrangeana. En el Capítulo 2 describimos con detalle la estructura y relaciones matemáticas de la Matriz Insumo - Producto. El Capítulo 3 se centra en el estudio de las metodologías alternas para el cáculo de la Matriz Insumo - Producto Regional. Culminamos con las conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se inicia con un repaso de algunos conceptos básicos de Algebra Matricial que son utilizados en el desarrollo del presente trabajo, entre algunos de ellos se encuentran, la definición formal de matriz, operaciones de matrices, inversa de una matriz, traspuesta de una matriz ; estos tópicos fueron extraídos de Álgebra y Geometría lineal cuyos autores son Andrés Raya, Alfonso Ríder y Rafael Rubio [4]. También repasamos las codiciones de optimalidad para problemas con restricciones y para restricciones de igualdad lineales, los multiplicadores de Lagrange y la Función Lagrangeana; estos conceptos fueron extraído de Linear and Nonlinear Optimization de los autores Igor Griva, Stephen Nash y Ariela Sofer [13].

1.1. Algebra matricial

1.1.1. Vectores

Definición 1 *Llamamos* vector *de* R^n *a una lista ordenada de de* n *números reales, la cual denotamos como* $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$. *A* x_1 *lo llamamos primera componente, a* x_2 *segunda componente y en general, a* x_k *lo llamamos k-ésima componente del vector* x.

Nota 1 *Cualquier vector cuyas componentes sean cero lo llamamos vector nulo o vector cero y lo denotamos por **0**. En el mismo orden de ideas cualquier vector cuyas componentes sean uno lo llamamos vector unitario y lo denotamos por **1**.*

1.1.2. Matrices

Definición 2 *Una* matriz *es un arreglo rectangular de números reales, llamados componentes o elementos de la matriz, de la forma* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$. *El orden o tamaño de la matriz lo determinamos por el número de filas seguido del número de columnas. Así, decimos* *que el tamaño de una matriz es* $m \times n$*, si tiene* m *filas y* n *columnas; por simplicidad, cuando* $m = n$*, decimos que la matriz es* cuadrada *de orden* n.

Definición 3 (Suma de matrices) *Definimos la suma entre dos matrices de igual tamaño* A *y* B*, como la matriz* $A+B$*, cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de las matrices* A *y* B*. En otras palabras, dadas las matrices*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

se define la suma de A *y* B *por*

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & . & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & . & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & . & . & . & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición 4 (Producto por escalar de matrices) *Definimos el producto de una matriz* A *por un número real* λ *(escalar), como la matriz* λA*, cuyas componentes son el producto de* λ *por las componentes respectivas de A. En otras palabras, dado el escalar* $\lambda \in R$ *y la matriz*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

definimos el producto de A *por el escalar* λ *por*

$$\lambda \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & . & . & . & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & . & . & . & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & . & . & . & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nota 2 *El producto por escalar* $(-1)A$*, lo denotamos simplemente como* $-A$ *y así, la resta* $A-B$*, la obtenemos de* $A+(-1)B$*.*

Definición 5 (Producto de Matrices) *Dadas las matrices* A*, de tamaño* $m \times n$*, y B, de tamaño* $n \times k$*, se define el producto de* A *por* B*, como la matriz* AB*, cuyas columnas son* $Ab_1Ab_2...Ab_k$*, donde* $b_1b_2...b_k$ *son las columnas de* B*; en otras palabras, se define* AB*, el producto de* A *por* $\mathrm{B} = [b_1b_2...b_k]$*, como la matriz de orden* $m \times k$ *dada por* $\mathrm{AB} = [Ab_1Ab_2...Ab_k]$.

Definición 6 (Matriz Invertible) *Se dice que la matriz* A *de tamaño* $n \times n$ *es invertible, si y solo si, existe una matriz* B *tal que* $AB = BA = I$*. A esta matriz* B*, la llamamos inversa de* A.

Observación 1 *Suponiendo que existen dos matrices inversas de* A*. Sean* B *y* C *matrices inversas de* A*. Así que*

$$AB = BA = I \text{ y } AC = CA = I.$$

De modo que, si multiplicamos ambos lados de la igualdad $AB = I$ *por la matriz* C *y usamos las propiedades del producto de matrices, tenemos*

$$\begin{aligned} C(AB) &= CI \\ (CA)B &= C \\ IB &= C \\ B &= C. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1 (Unicidad de la Inversa) *Si* A *es una matriz invertible, su inversa es única. Con este resultado, cuando la matriz* A *es invertible, podemos hablar de la inversa de* A *y la denotamos por* A^{-1}.

Definición 7 (Traspuesta de una Matriz) *La transpuesta de una matriz A, de tamaño* $m \times n$*, es la matriz* A^T *de tamaño* $n \times m$*, que se obtiene tomando la i-ésima columna de* A^T *como la i-ésima fila de* A*; es decir, si* $A = (a_{ij})$*, entonces* $A^T = (a_{ji})$*. Notemos que si las columnas de* A^T *son las filas de* A*, las filas de* A^T *son las columnas de* A.

1.2. Sistema de ecuaciones lineales

1.2.1. Ecuaciones lineales

Una ecuación como

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b son números dados en un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, recibe el nobre de **ecuación lineal de n incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se nombran como **coeficientes de la ecuación** y el b como **término independiente**. Si $b = 0$, la ecuación se dice **homogénea**, mientras que si $b \neq 0$ se dice que es **completa**.

Una solución de la ecuación es un conjunto ordenados de números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tales que al tomar $x_j = \xi_j$, la ecuación se convierte en una igualdad verdadera.

1.2.2. Sistemas lineales

En general, podemos tener varias ecuaciones, digamos que m, y hablar de **sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas**. Se escriben como

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots+\ldots\ldots+\ldots\ldots=\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. ,$$

donde los coeficientes se enumeran con dos índices, el primero para indicar la ecuación y el segundo para señalar el lugar que ocupa en ella; cada término independiente lleva un índice que alude a la ecuación en que aparece. El sistema se dirá **homogéneo** si son nulos todos los términos independientes y **completo** si es no nulo al menos uno de ellos. Usando la regla de multiplicar matrices, el sistema se presenta en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La matriz $A=(a_{ij})\in M(m,n,\mathbb{K})$ se conoce como **matriz de coeficientes** o **matriz del sistema**. Junto a ella es bueno considerar otra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \in M(m,n,\mathbb{K}).$$

Obtenida al añadir la columna de términos independientes, la cual se conoce como **matriz ampliada**. Una solución del sistema es un conjunto ordenado de números $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ que sea solución de todas sus ecuaciones. Un sistema se llama **compatible** si posee al menos una solución e **incompatible** si carece de soluciones. Un sistema compatible de solución única de dice **determinado**, mientras que si posee más de una solución se llama **indeterminado**. Los sistemas homogéneos siempre son compatibles, pues cuendo menos admiten la solución

$$\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=0.$$

Esta se conoce como **solución trivial o nula**.

1.3. Optimización No - Lineal

1.3.1. Condiciones de Optimalidad para problemas con restricciones

En esta sección se estudian las técnicas para resolver problemas de optimización no lineal. Nos concentramos sobre los problemas que se pueden escribir en la forma general

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & f(x) & \\ \text{Sujeto a} & g_i(x) = 0, & i \in \varepsilon \\ & g_i(x) \geq 0 & i \in \tau \end{array}$$

Aquí ε es un conjunto indizado para las restricciones de igualdad y τ un conjunto indizado para las restricciones de desigualdad. Asumimos que la función objetivo f y las funciones de restricción son dos veces continuas y diferenciables.

En este apartado estudiamos las condiciones satisfechas por las soluciones al problema de optimización con restricciones. Nos enfocaremos sólo en soluciones locales, lo mismo haremos para el caso sin restricciones. En el caso de problemas convexos, esto es, cuando la región factible es convexa y f es una función convexa, cualquier solución local es también una solución global.

En el caso sin restricciones las condiciones de optimalidad son derivadas usando aproximaciones por series de Taylor para examinar el comportamiento de la función objetivo f con respecto a un mínimo local x_*. En particular, en los puntos "cerca"de x_* los valores de f no decrese.

Una aproximación similar es usado en el caso sin restricciones. Las aproximaciones por series de Taylor son usados para analizar el comportamiento del objetivo f y de las restricciones g_i con respecto a un mínimo local con restricción x_*. En este caso, los puntos factibles "cerca"de x_* el valor de f no decrese.

Las condiciones de optimalidad se derivaran por etapas, primero para problemas con restricciones lineales y después para problemas con restricciones no-lineales. La intuición en ambos casos es similar, pero es fácil comprender cuando las restricciones son lineales. En el caso no-lineal los detalles son más complicados y se puede disfrazar las ideas básicas involucradas.

Si todas las restricciones son lineales, los movimientos factibles estan caracterizados completamente por direcciones factibles. En un mínimo local no puede haber direcciones factibles de descenso para f, así

$$p^T \nabla f(x_*) \geq 0, \tag{1.1}$$

para toda las direcciónes factibles p en x_*.

La condición de optimalidad de primer orden es el resultado directo de esta declaración.

Si el problema tiene restricciones no lineales, puede que no sea posible pasar a puntos cercanos a lo largo de las direcciones factibles. En lugar de ello, los movimientos se realizan a lo largo de curvas factibles. Analizando el movimiento a lo largo de curvas es más complicado que lo largo de direcciones, y pueden surgir situaciones más complicadas. Aun así, la idea básica es que el valor objetivo no disminuirá en los puntos factibles cerca de x_*. Algunos de los nuevos conceptos surgen en el caso con restricciones, en particular, los multiplicadores de Lagrange y la función de Lagrange. Los multiplicadores de Lagrange son análogas a las variables duales en la optimización lineal. El lagrangiano es una sola función que combina las funciones objetivo y restricciones; esta desempeña un papel central en la teoría y algoritmos de optimización con restricciones. Desarrollaremos también una teoría de la dualidad, una generalización de la teoría de la dualidad para la optimización lineal.

1.3.2. Condiciones de Optimalidad para restricciones de igualdad lineales

En esta sección se discuten las condiciones de optimalidad para problemas no lineales, donde todas las restricciones son igualdades lineales:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeto a} & Ax = b, \end{array}$$

Donde A es una matriz $m \times n$. Suponemos que f es dos veces continua y diferenciable sobre la región factible. También suponemos que las filas son linealmente independientes, es decir, A tiene rango de fila completa. Esto no es una suposición demasiado restrictiva ya que en teoría, si un problema es constante, podemos descartar cualquier restricciones redundantes. La idea principal es transformar este problema limitado a un problema sin restricciones equivalentes. La teoría y los métodos para la optimización sin restricciones se pueden aplicar para el nuevo problema.

Cualquier problema con restricciones de igualdad lineales $Ax = b$ puede ser refundida como un problema sin restricciones equivalentes. Supongamos que tenemos un punto factible $\bar{x}$, es decir, $A\bar{x} = b$. Entonces, cualquier otro punto factible se puede expresar como $x = \bar{x} + p$, donde p es una dirección factible. Cualquier dirección factible debe estar en el espacio nulo de A, el conjunto de vectores p satisfaciendo $Ap = 0$. Denotando este espacio nulo por $\aleph(A)$, la región factible puede ser descrita por $\{x : x = \bar{x} + p, p \in \aleph(A)\}$. Sea Z una matriz $n \times r$ del espacio nulo para A (con $r \geq n - m$). Entonces la región factible está dado por $\{\ x : x = \bar{x} + Zv$, cuando $v \in \Re^r\ \}$. En consecuencia, nuestro problema restringido en x es equivalente al problema sin restricciones.

$$\min_{v \in \Re^r} \phi(v) = f(\bar{x} + Zv).$$

La funcióe φ is la restricción de f en la región factible; nos referiremos a él como la *la función reducción*. Si Z es una matriz base para el espacio nulo de A, entonces φ será una funcián de n - m variables . No sólo el problema restringido ha sido transformado en un problema sin restricciones, sino también el número de variables se ha reducido también.

Las condiciones de optimalidad involucran a las derivadas de la función reducción. Si $x = \bar{x} + Zv$, entonces por la regla de la cadena

$$\nabla \phi(v) = Z^T \nabla f(\bar{x} + Zv) = Z^T \nabla f(x)$$

y

$$\nabla^2 \phi(v) = Z^T \nabla^2 f(\bar{x} + Zv) Z = Z^T \nabla^2 f(x) Z$$

El vector $Z^T \nabla f(x)$ es llamado el *gradiente reducido* de f en x. Si Z es una matriz de proyección ortogonal, el cual es llamado a veces *gradiente proyectado*. Similarmente la matriz $Z^T \nabla^2 f(x) Z$ es llamado la *matriz Hessiana reducida* o algunas veces *matriz Hessiana proyectada*. El gradiente reducido y la matriz Hessiana son el gradiente y el Hessiano de las restricciones de f en la región factible evaluedos en x.

Si x_* es una solución local del problema con restricción, entonces $x_* = \bar{x} + Zv_*$ para algunos v_*, y v_* es un mínimo local de ϕ. Así

$$\nabla \phi(v_*) = 0 \text{ y } \nabla^2 \phi(v_*) \text{ es semidefinida positiva}$$

Utilizando las fórmulas para el gradiente reducido y la matriz Hessiana, obtenemos las condiciones necesarias de primer y segundo orden para el minimizador local. Se resumen en la siguiente lema.

Lema 1 *(Condiciones necesarias, restricciones lineales de igualdad).*

Si x_* es un mínimo local de más de f sobre $\{x\colon Ax = b\}$ y Z es una matriz de espacio nulo de A, entonces:

- $Z^T \nabla f(x_* = 0)$, *y*
- $Z^T \nabla^2 f(x_*) Z$ *es semidefinida positiva*

Esto es, el gradiente reducido es cero y la matriz Hessiana reducida es semidefinida positiva.

Un punto en el que el gradiente reducido es cero es llamado un *punto estacionario* . Un punto de este tipo puede ser un mínimo local de *f*, o un máximo local, o ninguno, en cuyo caso se trata de un *punto de silla* . La información de la segunda derivada se utiliza para distinguir mínimos locales de otros puntos estacionarios.

La condición de segundo orden es equivalente a la condición

$$v^T Z^T \nabla^2 f(x_*) p \geq 0 \text{ para todo } v.$$

Observando que $p = Zv$ es un vector nulo espacio, esto puede ser reescrito como

$$p^T \nabla^2 f(x_*) p \geq 0 \text{ para todo } p \in \aleph(A);$$

Es decir, la matriz Hessiana en x_* debe ser semidefinida positiva en el espacio nulo de A.

Esta condición no requiere que la propia matriz Hessiana sea semidefinida positiva. Es un requisito menos estricto. Si la matriz Hessiana en x_* es semidefinida positiva, entonces la condición de segundo orden se cumplirá.

Las condiciones de suficiencia de segundo orden tambián son análogas al caso sin restricciones. Supondremos que Z es una matriz base para el espacio nulo de A, de modo que las columnas de Z son linealmente independientes. Las condiciones de suficiencia de segundo orden correspondientes se dan en el lema de abajo.

Lema 2 *(Condiciones suficientes, restricciones lineales de igualdad).*

Si x_* satisface

- $Ax_* = b$,
- $Z^T \nabla f(x_* = 0)$, *y*
- $Z^T \nabla^2 f(x_*) Z$

Donde Z es una matriz base para el espacio nulo de A, entonces x_* es un mínimo local estricto de f sobre $\{x : Ax = b\}$.

Demos otra mirada a la condición necesaria de primer orden. Sea x_* un mínimo local, y sea Z cualquier matriz $n \times r$ del espacio nulo de A. Quebrantando $\nabla f(x_*)$ en su espacio nulo y en los componenentes del espacio-rango da

$$\nabla f(x_*) = Zv_* + A^T \lambda_*$$

Donde v_* es en $\Re^n$ y λ_* es en $\Re^m$. Premultiplicando por Z^T y recordando que el gradiente reducido se anula en x_*, encontramos que $Z^T Z v_* = 0$. Esto puede ocurrir sólo si $Zv_* = 0$, esto es, si el componente del espacio nulo del gradiente es cero. Por lo tanto, si x_* es un mínimo local,

$$\nabla f(x_*) = A^T \lambda_*, \tag{1.2}$$

para algún m-vector λ_*. Así, en el mínimo local el gradiente del objetivo es una combinación lineal de los gradientes de las restricciones. El vector λ_* da los coeficientes de esta combinación lineal. Este es conocido como el vector de los *Multiplicadores de Lagrange*. Su i- ésimo componente es el multiplicador de Lagrange para la i- ésima restricción.

Las condiciones de optimalidad son desmostrados en la *Figura 1*. Este problema involucra una sola restricción lineal $a^T x = b$. En el mínimo x_* el gradiente es paralelo al vector a. Por lo tanto existe algún número λ_* tal que $\nabla f(x_*) = a\lambda_*$. Por otro lado, en el punto $\bar{x}$ el gradiente no es paralelo al vector a; así no existe un λ que satisfaga $\nabla f(\bar{x}) = a\lambda$, y el punto no es óptimo.

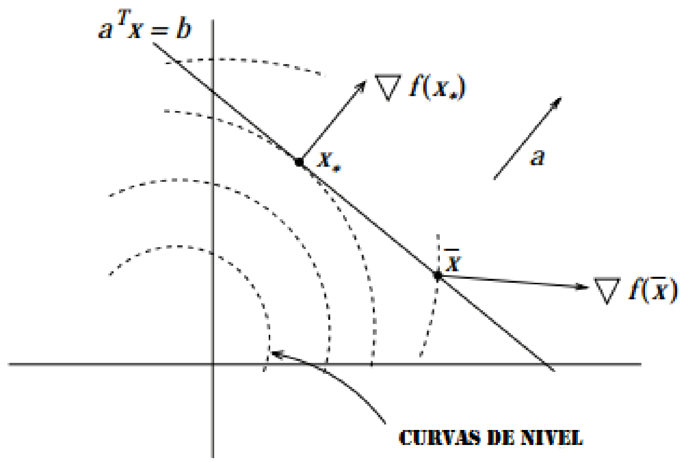

Figura 1

Hemos demostrado que si el gradiente reducido es cero, entonces existe un vector de los multiplicadores de Lagrange λ_* que satisface la condición de optimalidad (1.2). Lo contrario también es cierto; es decir, (1.2) implica que el gradiente reducido desaparece. Por lo tanto, las dos versiones de la condición de optimalidad de primer orden son equivalentes. Desde un punto de vista práctico,sin embargo, hay una diferencia. Si el gradiente reducido en un punto dado es distinto de cero, puede ser utilizado para encontrar una direccińde descenso para la reducción de la función, y a su vez para f. En contraste, el hecho de que no existan los multiplicadores de Lagrange en un punto no ayuda a encontrar una mejor estimación de una solución. Entonces, ¿por qué nos preocupamos por los multiplicadores de Lagrange? Los multiplicadores de Lagrange proporcionan información importante en el análisis de sensibilidad. Además, para problemas con restricciones de desigualdad, las estimaciones de los multiplicadores pueden indicar cómo mejorar una estimación de la solución. En consecuencia, las dos condiciones de optimalidad equivalentes se utilizan juntos en el software de optimización. Un procedimiento común es encontrar un punto x_* para el que el gradiente reducido es cero; en x_* condición (1.2) es constante y los correspondientes multiplicadores de Lagrange se pueden calcular. Nuestra derivación asume que la matriz A tiene rango fila completa, es decir, sus filas son linealmente independientes. Este supuesto se llama *hipótesis de regularidad*. Los resultados en esta sección se pueden extender al caso en que las filas de A son linealmente dependientes, pero entonces el vector de multiplicadores de Lagrange no serán generalmente único. Si tiene problemas con restricciones no lineales, algunas hipótesis, como un supuesto de regularidad en los gradientes de las restricciones en el mínimo local, es necesaria para indicar las condiciones de optimalidad.

1.3.3. Multiplicadores de Lagrange y Función Lagrangeana

Los multiplicadores de Lagrange expresan el gradiente en el óptimo como una combinación lineal de las filas de la matriz de restricciones A. Estos multiplicadores tienen un significado que va más allá de esta interpretación puramente matemática. En esta seccián veremos que indican la sensibilidad del valor objetivo óptimo a los cambios en los datos. Presentamos también la función de Lagrange y mostrar cómo se puede utilizar para expresar las condiciones de optimalidad de una manera concisa.

En la mayoría de las aplicaciones, sólo se dispone de datos aproximados. Los errores de medición, las fluctuaciones en los datos, y la falta de disponibilidad de la información son algunos de los factores que contribuyen a la imprecisión en el modelo de optimización. A falta de datos precisos, puede haber más remedio que resolver el problema con las mejores estimaciones disponibles. Una vez que se obtiene una solución, el siguiente paso es evaluar la calidad de la solución resultante. Una pregunta clave es, ¿qué tan sensible es la solución a las variaciones en los datos?

Aquí nos ocupamos de esta cuestión para el caso particular de que pequeñas variaciones se hacen en el lado derecho de las restricciones e investigar su efecto sobre el valor objetivo óptimo. Nuestra presentación será informal. Una prueba más formal es algo más complejo.

Empezamos con el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeto a} & Ax = b, \end{array}$$

Suponemos que f es dos veces continua y diferenciable, y que A es una matriz $m \times n$ de rango fila completa. También suponemos que un mínimo local de x_* se ha encontrado, con el correspondiente valor objetivo óptimo $f(x_*)$. Supongamos ahora que el lado derecho b es perturbado por $b+\delta$, donde δ es un vector de “pequeñas”perturbaciones . Vamos a investigar cómo el valor objetivo óptimo cambia como resultado de estas perturbaciones. Si las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas, es razonable suponer que el nuevo problema tiene un óptimo que está cerca de x_*. De hecho esto se puede demostrar que es verdad, siempre que las condiciones de suficiencia de segundo orden sean satisfechos en x_*. Para x cerca de x_* con $Ax = b+\delta$, podemos usar una aproximación de Taylor para obtener

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\approx f(x_*) + (\bar{x}-x_*)^T \nabla f(x_*) \\ &= f(x_*) + (\bar{x}-x_*)^T A^T \lambda_* \\ &= f(x_*) + \delta^T \lambda_* \\ &= f(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \lambda_{*i} \end{aligned}$$

En particular, esto es válido si $\bar{x}$ es el mínimo del problema perturbado. Si el lado derecho de la i- ésima restricción cambia por δ_i, entonces el valor del objetivo óptimo cambia aproximadamente en $\delta_i \lambda_{*i}$. Por lo tanto λ_{*i} representa el cambio en el objetivo óptimo por unidad de cambio en el i- ésimo lado derecho. Por esta razón, los multiplicadores de Lagrange también se denominan *precio sombra* o *variables duales.*

Vamos a echar otro vistazo a las condiciones de optimalidad (1.2). Dado que cualquier solución debe ser factible, un óptimo local es la solución del sistema de $n+m$ ecuaciones en los $n+m$ incógnitas x y λ:

$$\begin{array}{rcl} \nabla f(x) - A^T\lambda & = & 0 \\ Ax & = & 0 \end{array}$$

Esta es otra representación de las condiciones de optimalidad de primer orden.

Estas condiciones fueron utilizadas por Lagrange, aunque su trabajo se hizo en un contexto más general. Siguiendo el enfoque de Lagrange podemos construir una función de x y λ:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(a^T x - b_i) = f(x) - \lambda^T(Ax - b)$$

Donde ${a_i}^T$ denota que la i - ésima fila de A. Esta función es llamada *Función Lagrangeana.* El gradiente del Lagrangeano con respecto a x es $\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) - A^T\lambda$, y el gradiente con respecto a λ es $\nabla_\lambda L(x,\lambda) = b$ - Ax . Así, las condiciones de optimalidad de primer orden pueden ser declarados simplemente como

$$\nabla L(x_*, \lambda_*) = 0$$

Así, un mínimo local es un punto de la función Lagrangiana estacionaria.

Capítulo 2

Matriz Insumo-Producto: Modelo de Análisis Económico

En este capítulo describiremos de manera detallada y precisa lo contenido en el artículo *Tópicos Sobre el Modelo de Insumo-Producto: Teoría y Aplicaciones* [1], de el autor Andrés Ricardo Schuschny. Más explicítamente este artículo expone las bases teóricas y los modelos matemáticos que rige a la Matriz Insumo-Producto, así como sus apliacaciones en la Economía.

2.1. Matriz Insumo - Producto

Las tablas de Insumo-Producto se pueden definir como un conjunto integrado de matrices, que muestran el equilibrio entre la oferta y utilización de bienes y servicios (productos). Estas matrices proporcionan un análisis detallado del proceso de producción y la utilización de los bienes y servicios que se producen en un país (o región) o que se importan del resto del mundo, y del ingreso generado en dicha producción por las diversas actividades económicas.

Para su construcción se requiere poner en marcha un conjunto de actividades, como la de centralizar, analizar y procesar información básica de múltiples fuentes como pueden ser: censos económicos, agropecuarios, censos de población y vivienda, encuestas de gastos e ingresos de los hogares, registros administrativos y, fundamentalmente, los sistemas de cuentas nacionales [1].

2.1.1. Estructura General

Los cuadros de insumo-producto permiten apreciar los componentes de las matrices de oferta, de demanda intermedia, de demanda final y el cuadro de valor agregado, configurándose, como se muestra seguidamente, en una tabla de cuatro submatrices, que nos permiten obtener en forma directa el PIB por el método de producción, tipo de gasto y tipo de ingreso.

INSUMO-PRODUCTO GENERAL

Matriz de Oferta Total	**Matriz de Demanda Intermedia**	**Matriz de Demanda Final**
	Matriz de Valor Agregado	

Matriz de Oferta Total

Productos	*VBP*	*M*	*DM*	T_M	MC	**Oferta total**
1						
⋮						
n						

La matriz de oferta total muestra la disponibilidad de bienes y servicios, tanto de origen doméstico como importando que serán utilizados en la demanda intermedia y la final; donde VBP , es el valor bruto de la producción,M , las importaciones, DM , los derechos de importaciones, T_M , otros impuestos a las importaciones y la producción, MC , los márgenes comerciales, siendo la $Oferta\ Total = VBP + M + DM + T_M + MC$.

Matriz de Demanda Intermedia

Productos/Actividad	*1 . . . n'*	**Demanda Intermedia**
1		
⋮		
n		
Consumo Intermedio		

La matriz de demanda intermedia registra los flujos de circulación intersectorial de productos entre las distintas actividades, mostrando la utilización intermedia de los bienes y servicios en el sistema productivo. Como se verá luego, la relación entre los distintos componentes de esta matriz con la producción total de cada actividad, da lugar a la matriz de coeficientes técnicos. Con el fin de que el tratamiento econḿico sea lo mś fiel posible es importante que la información disponible discrimine entre bienes de consumo intermedio de producción doméstica de aquellos de origen importado.

Matriz de Demanda Final

Productos	C	G	I	Z	E	***Demanda final***
1						
⋮						
n						
Total						

La matriz de demanda final registra las transacciones referentes a la utilización final de los productos, es decir, su consumo por parte de los hogares C , el sector público G , la formación bruta del capital fijo (inversión), I la variación de las existencias,Z y la exportaciones,E respectivamente.

Matriz de Valor Agregado

Actividad	1 ... n'	***Total***
Salarios y remuneraciones Beneficios y excedentes de explotación Amortizaciones y consumo de capital fijo Otros impuestos menos subsidios a la producción		
Valor Agregado		
Valor Bruto de la Producción		

Finalmente, la matriz de valor agregado describe las formas de pago a los factores productivos por su participación en el proceso de transformación. En sus columnas se muestra el aporte de cada actividad económica al valor agregado.

El uso de matrices de insumo-producto reside en su utilidad para el estudio de la estructura productiva, sus tendencias y sus cambios a lo largo del tiempo, sin necesidad de recurrir a sofisticados modelos, permitiendo conocer la importancia relativa de los sectores, los grados de articulación y sus interrelaciones, a través de la identificación de los principales flujos de producción e intercambio y los requerimientos de bienes para su uso intermedio y final.

2.1.2. Identidades Contables Básicas

Las matrices de insumo-producto son tablas de doble entrada, que muestran la complejidad de las interrelaciones en la producción de bienes y servicios en un determinado espacio económico. Dicha interdependencia queda reflejada en una serie de identidades contables, en las que se indica, por una parte, el destino de la producción de cada sector y, por la otra, la aplicación o el empleo que se hace de dicha producción. Vamos a suponer que la información esta dispuesta de forma tal que tenemos desglozada la demanda de bienes y servicios domésticos, de la de origen importado. Ello nos posibilita excluir, por defecto, a las importaciones de las componentes de la demanda final. Sean n sectores económicos interrelacionados entre sí. La producción de cada sector puede venderse en el mercado de productos intermedios (a los otros sectores) o como producto final. Así, el destino de la producción del sector i-ésimo puede representarse como:

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + ... + X_{in} + C_i + I_i + G_i + Z_i + E_i \tag{2.1}$$

con :

- X_i es el valor de la producción doméstica del sector i-ésimo.
- X_{ij} es el valor de la producción doméstica que el sector i-ésimo le vende al sector j-ésimo.
- C_i es el valor de la producción doméstica del sector i-ésimo vendida como bien de consumo a los residentes.
- I_i es el valor de la producción doméstica del sector i-ésimo vendida como bien de inversión a los empresarios residentes (formación bruta del capital fijo).
- G_i es el valor de la producción doméstica del sector i-ésimo vendida al sector público

- Z_i es el valor (neto) de la producción doméstica del sector i-ésimo destinado a los inventarios.
- E_i es el valor de la producción doméstica del sector i-ésimo exportada al resto del mundo.

Puede establecerse un conjunto de relaciones similares para los bienes y servicios de origen importado.
Se puede observar que en la ecuación (2.1) se pueden diferenciar dos tipos de venta: (i) como producto intermedio de todo el proceso o (ii) como demanda final:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i \qquad Y_i = C_i + I_i G_i + Z_i + E_i \qquad 1 \leq i \leq n \tag{2.2}$$

Usando notación matricial definamos, H la matriz cuyos elementos son $H_{ij} = X_{ij}$, el consumo intermedio,x el vector columna con elementos X_i,y el vector columna cuyos elementos son $C_i + I_i + G_i + Z_i + E_i$ y el vector columna de unos $\overrightarrow{1}$, entonces:

$$x = H\overrightarrow{1} + y \tag{2.3}$$

En cuanto a la aplicación (o empleo) del valor de lo producido, cada sector utilizará este para comprar productos intermedios (a otros sectores) como insumos de su propio proceso productivo y para pagar los otros gastos originados de tal proceso, es decir el pago a los factores productivos. Por lo tanto, el uso que el sector i-ésimo haga de su valor de producción es:

$$X_j = X_{1j} + ... + X_{nj} + M_{1j} + ... + M_{nj} + S_j + A_j + (T_j - Sb_j) 1 \leq j \leq n \tag{2.4}$$

con :

- X_j es el valor de la producción del sector -ésimo.
- X_{ij}es el valor de la producción que el sector i-ésimo compra al sector i-ésimo (o que el -ésimo le vende a este).
- M_{ij}, es el valor de las importaciones de insumos intermedios de , que compra j.
- S_j son los costos en salarios, remuneraciones y seguridad social pagados por el sector i-ésimo.
- B_j son los beneficios y excendentes de explotación del sector -ésimo
- A_j son las amortizaciones y el consumo de capital fijo del sector i-ésimo.
- T_j son los impuestos pagados por el sector i-ésimo.
- SB_j las subvenciones y subsidios especiales recibidos por el sector i-ésimo.

También puede verse que, en la ecuación (4), se pueden diferenciar dos partes: (i) la adquisición de insumos intermedios y (ii) el uso de los insumos primarios:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} M_{ij} + VAB_j \qquad VAB_j = S_j + B_j + A_j + T_j - Sb_j \tag{2.5}$$

El VAB es la parte del valor de la producción del sector i-ésimo menos las compras de insumos intermedios:

$$VAB_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \tag{2.6}$$

En notación matricial, teníamos que H era la matriz cuyos elementos son X_{ij}y el vector x columna con elementos X_i , definamos a la matriz M como la matriz de consumo intermedio de bienes importados y al vector fila v' , con los elementos $VAB_j = S_j + B_j + A_j + T_j + -Sb_j$, entonces:

$$x' = \vec{\mathit{1}}\text{'}H + \vec{\mathit{1}}\text{'}M + \text{v'}trasponiendox = H'\vec{\mathit{1}} + M'\vec{\mathit{1}} + \text{v} \tag{2.7}$$

REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN LA MATRIZ INSUMO-PRODUCTO

	Prod. 1	...	Prod. j	...	Prod. n	Cons.	Invest.	C. Publ.	$\Delta Exist.$	Expo.	VBP
Prod. 1	X_{11}	...	X_{ij}	...	X_{1n}	C_1	I_1	G_1	Z_1	E_1	X_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Prod. i	X_{i1}	...	X_{ij}	...	X_{in}	C_i	I_i	G_i	Z_i	E_i	X_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Prod. n	X_{n1}	...	X_{nj}	...	X_{nn}	C_n	I_n	G_n	Z_n	E_n	X_n
Prod. 1	M_{11}	...	M_{ij}	...	M_{1n}	${C_1}^M$	${I_1}^M$	${G_1}^M$	${Z_1}^M$	${E_1}^M$	${M_1}^{Total}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Prod. i	M_{i1}	...	M_{ij}	...	M_{in}	C_i^M	I_i^M	G_i^M	Z_i^M	E_i^M	${M_i}^{Total}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Prod. n	M_{n1}	...	M_{nj}	...	M_{nn}	C_n^M	I_n^M	G_n^M	Z_n^M	E_n^M	${M_n}^{Total}$
Salarios	S_1	...	S_j	...	S_n						ΣS_i
Beneficios	B_1	...	B_j	...	B_n						ΣB_i
Amortizac.	A_1	...	A_j	...	A_n						ΣA_i
Subvenc.	$T_1 - Sb_1$	...	$T_j - Sb_j$	...	$T_n - Sb_n$						$\Sigma(T_1 - Sb_1)$
VBP(insumos)	X_1	...	X_j	...	S_n						

Donde VBP es el valor bruto de la producción, el sector j(columna) es considerado productor (demanda insumo) mientras que el i (fila), vendedor. Resumidamente, con la notación de matrices, se tiene:

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN LA MATRIZ INSUMO-PRODUCTO

	$Prod./Activ.$	$DemandaFinal$	VBP
$Prod./Activ.(domstico)$	H	y	x
$Prod./Activ.(importado)$	M		
$ValorAgregado$	v'		
$VBP(insumos)$	x'		

La suma de la fila de cada sector (es decir el destino de los productos vendidos $\equiv$ outputs), debe ser igual a la suma de la columna de dicho sector (es decir el origen de sus compras y gastos $\equiv$ inputs). Esto significa que el total de los inputs empleados por un sector debe ser igual al valor de sus outputs:

$$X_{11}+\ldots+X_{1n}+Y_1=X_{11}+\ldots+X_{n1}+VAB_1+M_{11}+\ldots+M_{n1}$$
$$\ldots+\ldots+\ldots+\ldots=\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$$
$$X_{n1}+\ldots+X_{nn}+Y_n=X_{1n}+\ldots+X_{nn}+VAB_n+{M_n}^I+M_{1n}+\ldots+M_{nn}$$

Dado que $X_{ij}\neq X_{ji}$, no es posible simplificar las sumas, sin embargo, cuando se suma miembro a miembro, si:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}+\sum_{i=1}^{n}Y_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}X_{ji}+\sum_{i=1}^{n}VAB_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}M_{ji} \tag{2.8}$$

$$PIB=\sum_{i=1}^{n}(C_i+I_i+G_i+E_i-\sum_{j=1}^{n}M_{ji})\equiv\sum_{i=1}^{n}(S_i+B_i+A_i+(T_i-Sb_i))=\sum_{i=1}^{n}VAB_i \tag{2.9}$$

Recuérdese que, por haber separado las matrices de bienes y servicios domésticos de la de bienes de origen importado, la parte de productos importados que abastecen a la demanda final,queda, por construcción, excluida. Si los elementos de la demanda final incluyeran a las importaciones, deberíamos restar las importaciones destinadas a abastecer ese consumo final:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}(C_i^M+I_i^M+G_i^M+E_i^M)$$

Así, en el proceso productivo, el conjunto de "bienes finales"producidos neto de importaciones intermedias, es absorbido exactamente por el valor agregado. En notación matricial:

$$\vec{1}'(H\vec{1})+\vec{1}'y=(\vec{1}'H)\vec{1}+(\vec{1}'M)\vec{1}+v'\vec{1}\Longrightarrow\vec{1}'y-(\vec{1}'M)\vec{1}=v'\vec{1}$$

2.1.3. Modelo teórico de Insumo-Producto

Las relaciones (2.1) y (2.4) son meras identidades contables que resumen, ex post, el funcionamiento de la economía pero no constituyen un modelo explicativo. Para transformarlo en un modelo explicativo, es necesario asumir ciertos supuestos tecnológicos (qué tipo de función de producción está en juego) y cuáles son las variables exógenas y endógenas.

El modelo de insumo-producto parte de algunos supuestos:

(i) Se supone que cada insumo es suministrado por un sólo sector de producción (hipótesis de homogeneidad sectorial). Esto implica que se emplea un sólo método de producción, por lo tanto, no es posible la sustitución entre insumos intermedios, a la vez que cada sector tiene una sola producción primaria; es decir que no hay producción conjunta.

(ii) Con la finalidad de homogeneizar lamedición de los agregados, se introduce la hipótesis de invarianza de precios relativos.

(iii) Los insumos comprados por cada sector son solamente una función del nivel de producción de ese sector, por lo tanto, la cantidad de insumos varía en la misma proporción que la producción, es decir que se asume una hipótesis de proporcionalidad estricta: la composición de los productos dentro de cada sector es fija. Esto significa que la función de producción que el modelo de Leontief considera es lineal y, por lo tanto, los coeficientes técnicos se supondrán constantes durante el período de análisis, dado que se supone que el nivel de producción que el sector i-ésimo vende al j-ésimo, es una proporción constante del nivel de producción del sector , es decir:

$$X_{ij}=a_{ij}\cdot X_j \qquad 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n \tag{2.10}$$

$$X_j = \frac{X_{ij}}{a_{ij}} \qquad 1 \leq 1 \leq n, 1 \leq j \leq n \quad (\forall a_{ij} \neq 0)$$

donde a_{ij} es denominado coeficiente técnico y constante por hipótesis, esto significa que la función de producción es tal, que la productividad marginal de cada factor es constante e igual a su productividad media. Con ello la "función de producción"(de coeficientes constantes) tiene los rendimientos constantes a escala.

(iv) Se supone que el efecto total de la producción en varios sectores, será igual a la sumatoria de los diferentes efectos (hipótesis de aditividad); con esto se excluye toda interdependencia externa de los sectores, excepto la especificada en el propio modelo.

(v) Cuando se utiliza el modelo para realizar proyecciones de precios, debe tenerse en cuenta que se mantiene la relación de precios relativos presente en el año en que se elabora la matriz.

La representación matricial de estas relaciones es: $H = A\hat{x} \Longrightarrow A = H\hat{x}^{-1}$, siendo $\hat{x}$ la matriz diagonal de producciones domésticas $(\hat{x_{ii}}) = X_i$ y $\hat{x_{ii}}^{-1} = 1/X_i)$.

Capítulo 3

Desagregación Regional de la MIP: Métodos Indirectos (Non-Survey)

La importancia de disponer de una Matriz Insumo-Producto Regional reside básicamente en que sintetiza el comportamiento económico de los aspectos productivos sectoriales y la estructura de su demanda agregada en un momento del tiempo, lo que permite afrontar en mejores condiciones la problemática económica regional. No obstante, este papel importante del análisis de las entradas y salidas en el ámbito regional está muy limitado por las propias posibilidades de elaboración de estas matrices [3]. La construcción de una matriz insumo-producto regional puede llevarse a cabo de tres maneras diferentes:

- Método Directo (Survey): consiste en realizar encuestas a las propias empresas, entidades que intervienen en la dinámica económica de la región o regiones.
- Método Semi-Directo (Partial Survey o Hybrid): método que combina datos obtenidos de encuestas parciales aplicadas a las empresas de la región y métodos de estimación.
- Método Indirecto (Non-Survey): se basa principalmente en métodos de estimación, censos económicos y poblacionales disponibles a nivel nacional y local, sin el uso de las encuestas.

Tradicionalmente, se ha acometido esta tarea mediante el uso de métodos directos (survey), lo que ha supuesto elevados costos monetarios y un importante desfase temporal entre la disponibilidad de la propia matriz y el año de referencia de la misma, debido a los importantes requerimientos de tiempo necesario para su elaboración [3].

En nuestro Trabajo Especial de Grado estudiamos estrategias alternativas por medio de métodos indirectos para la obtención de ese comportamiento económico regional, partiendo de una Matriz Insumo-Producto Nacional, sus coeficientes técnicos y de información sobre el nivel de contricución que poseen las regiones sobre las cuentas nacionales, para así generar una desagregación top-down de los resultados nacionales.

3.1. Algoritmo Iterativo de Desagregación

El análisis cuantitativo y cualitativo de políticas económicas regionales es intuitivamente atractivo porque permite establecer vínculos indirectos difíciles de detectar sobre todo cuantitativamente de otra manera. Es por ello que consideramos que si conocemos el nivel de contribución que poseen las distintas regiones de una entidad y conociendo también de antemano los flujos finacieros a nivel nacional, se puede construir una relación tomando en cuenta dichos supuestos y las relaciones matemáticas propias de un instrumento económico que interrelaciona los distintos actores en la economía como lo es la Matriz Insumo-Producto.

Para la desagregación de dicha matriz a nivel regional construímos un algoritmo basandonos en la información expuesta en el Capítulo 2 sobre la composición y propiedades de una Matriz Insumo-Producto. A continuación presentamos el pseucódigo del algoritmo.

ALGORITMO 1.1

ENTRADA: n,W, MIP Nacional

1. MIP_DI = MIP (1:n, 1:n);
2. MD = cell(n,n);
3. Si filas de W es igual a 1, hacer
4. k = 1:n;
5. l = 1:n;
6. resolver $MD_{k,l} = W \times W^T \times MIP\_DI_{k,l}$;
7. Fin

SALIDA: MD

Este algoritmo parte del suspuesto de que poseemos información del nivel de contribución que tiene cada región sobre los números nacionales,como lo expusimos al principio de esta sección, ese nivel de contribución lo llamaremos **coeficientes de contribución** denotados por W_{ij}, estos coeficientes son elementos de las matrices que denominaremos **peso**, denotadas por W que es suministrado como dato de entrada, y cuyas dimensiones coinciden con la Matriz de Demanda Intermedia de la Matriz Insumo-Producto Nacional.

Esta matriz W debe cumplir con la condición de que la suma de los componentes de sus filas deben ser igual a 1, puesto que sus elementos son coeficientes que representan las particiones del número nacional. Otro elemento que suministraremos como dato de entrada es la dimensión de la Matriz de Demanda Intermedia n.

Una vez suministrado los datos de entrada importamos la Matriz Insumo - Producto Nacional a desagregar desde el formato Excel al ambiente de Matlab por medio del comando *xlsread*.

Seleccionamos de la Matriz Insumo -Producto Nacional importada a Matlab las Matriz de Demanda Intermedia denotada por MIP_DI. Luego definimos MD que es la Matriz Desagregada resultante como una matriz celda de dimensión $n \times n$.

Definiremos también ciclos *for* de tal manera que recorran las diferentes filas y columnas de la MIP_DI. Ambos ciclos *for* de esta matriz van de 1 hasta n puesto que esta matriz registra los flujos de circulación intersectorial de productos entre las distintas actividades, la cual por definición es cuadrada.

Una vez que establecemos lo anterior definimos la relación de desagragación, la cual consiste en un producto entre la matriz de peso correspondiente a la Matriz de Demanda Intermedia a desagregar multiplicado por su traspuesta y luego este resultado es multiplicado por la propia MIP_DI a desagregar.

Definimos el producto de esta manera puesto que la primera multiplicación se realiza con el fin de que los coeficientes de contribución se integren en uno sólo, luego esa nueva matriz de peso es multiplicada por los valores nacionales de la ***MIP_DI***.

Una vez realizado lo anterior obtendremos como dato de salida la MIP desagregada (MD), luego dicha matriz generada la exportamos al formato Excel, para ello construímos un código en matlab (Ver Anexos).

3.1.1. Experimentación Numérica con datos simulados.

En este Trabajo Especial de Grado utilizamos una réplica de la economía venezolana por medio del instrumento de una Matriz Insumo-Producto generada con datos simulados. La Tabla 1 muestra los valores brutos de la producción de una economía venezolana que se supone que posee 2.455 millones de bolívares de VBP total.

Tabla 1: Matriz Insumo-Producto Nacional para la economía venezolana con valores ficticios.

Matriz Insumo - Producto
(Millones de Bolívares)
SIMULADO

Actividad económica / Actividad económica	Primario	Industrial	Servicios	Demanda intermedia (Precios básicos)	Exportación al resto del mundo	Consumo Privado	Consumo Público	Formación bruta de capital fijo /3	Valor neto Inventario	Demanda total (Precios básicos)
Primario	50	200	15	265	70	90	55	5	15	500
Industrial	70	350	230	650	140	45	130	10	20	1.000
Servicios	100	300	110	510	230	140	10	40	25	955
Remuneración de los asalariados	80	30	50	160						
Excedente de explotación, bruto	45	50	106	201						
Ingreso mixto, bruto	55	25	210	290						
Consumo de capital fijo no sociedades	40	30	134	204						
Consumo de capital fijo sociedades	60	15	100	175						
Valor agregado bruto	280	150	600							
Producción a precios básicos	500	1.000	955							2.455

Cómo expusimos en el Capítulo 2 la Matriz Insumo - Producto es la concatenación de matrices, para la experimentación en este Trabajo de Grado nos enfocaremos en la Matriz de Demanda Intermedia la cual muestra las relaciones intersectoriales.

En la Tabla 2 se presenta la información aportada por dicha matriz con valores ficticios planteada para esta experimentación. En la misma se muestran tres sectores, los cuales se clasifican en el sector Primario (S01), sector Industrial (S02) y sector de Servicios (S03).

Para esta experimentación consideraremos dos regiones a la cual desagregar la Matriz Insumo-Producto Nacional, la región Centrooccidental-Central (CO-C) y el Resto del País (RP). En la Tabla 3 se evidencia cuantitativamente las relaciones entre CO-C y el resto del país, así como también la contribución neta y porcentual que posee cada región con respecto al Valor Bruto de la Producción Nacional.

Tabla 2: Matriz Demanda Intermedia para la economía venezolana con valores ficticios.

Matriz Demanda Intermedia
(Millones de Bolívares)
SIMULADO

Actividad económica / Actividad económica	Primario	Industrial	Servicios
Primario	50	200	15
Industrial	70	350	230
Servicios	100	300	110
Total CI Nacional	220	850	355
Total VBP	1325.7	417.35	711.9

Tabla 3 : Valor Bruto de la Producción. Valores ficticios para Venezuela, la región Centroocidental- Centro y el Resto del país.

Sector	*VBP Vzla*	*% VBP Vzla*	*VBP CO-C*	*% VBP CO-C*	*VBP RP*	*% VBP RP*
S01	1325.7	54%	198.85	15%	1126.85	85%
S02	417.35	17%	229.54	35%	187.81	45%
S03	711.9	29%	213.57	30%	498.33	70%
Total VBP	2.455		641.96		1812.99	

(Millones de Bolívares)
Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenida la información anterior procedemos a aplicar el Algoritmo 1.1 el cual arrojó los siguientes resultados:

Tabla 4: Matriz Insumo-Producto Nacional Desagregada.

Matriz de Demanda Intermedia Desagregada
(Millones de Bolívares)
SIMULADO

Actividad económica	Actividad	PRIMARIO Región CO-C	PRIMARIO Región RP	INDUSTRIAL Región CO-C	INDUSTRIAL Región RP	SERVICIO Región CO-C	SERVICIO Región RP
PRIMARIO	Región CO-C	1,125	6,375	60,5	49,5	1,35	3,15
	Región RP	6,375	36,125	49,5	40,5	3,15	7,35
INDUSTRIAL	Región CO-C	1,575	8,925	105,875	86,625	20,7	48,3
	Región RP	8,925	50,575	86,625	70,875	48,3	112,7
SERVICIO	Región CO-C	2,25	12,75	90,75	74,25	9,9	23,1
	Región RP	12,75	72,25	74,25	60,75	23,1	53,9

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5: Matriz Insumo-Producto Regional generada por el Algoritmo Iterativo de Desagregación.

		Sectores de Actividad CO-C			Sectores de Actividad RP		
		S01	**S02**	**S03**	**S01**	**S02**	**S03**
	S01	1,125	60,5	1,35	6,375	49,5	3,15
Sectores de	**S02**	1,575	105,875	20,7	8,925	86,625	48,3
Actividad CO-C	**S03**	2,25	90,75	9,9	12,75	74,25	23,1
	S01	6,375	49,5	3,15	36,125	40,5	7,35
Sectores de	**S02**	8,925	86,625	48,3	50,575	70,875	112,7
Actividad RP	**S03**	12,75	74,25	23,1	72,25	60,75	53,9

(Millones de Bolívares)
Fuente: Elaboración propia

3.2. Método de Regionalización de Flegg y Weber

En este sección describiremos de manera detallada y precisa lo contenido en el artículo " A non-survey estimation for regional input-output tables. An aplplication for Buenos Aires City"[3], de los autores Leonardo Mastronardi y Carlos Romero. Más explícitamente este artículo propone alternativas para la obtención de matrices regionales a partir del empleo de coeficientes de regionalización por medio del método de Flegg y Weber [8], [9].

3.2.1. Matriz Intrarregional de Insumo-Producto

Las matrices insumo-producto regional nacen de los modelos nacionales de insumo producto, ya que son una partición de la misma que incluye transacciones intrarregionales, la cual sintetiza las relaciones de los sectores a nivel interno de la región y las transacciones interregionales, que evidencia el intercambio comercial que poseen las regiones entre si. La transformación de la matriz nacional en submatrices regionales mediante técnicas indirectas, se efectúa mediante ajustes en los coeficientes técnicos nacionales, de manera que los mismos representan la estructura productiva de la región (en términos de su tecnología) y sus relaciones con todos los sectores de la economía [3].

En este apartado realizaremos la construcción de esas matrices intrarregionales siguiendo los trabajos de Flegg y Webber [8], [9], [10] a partir del cálculo de los coeficientes intrarregionales. Se pueden encontrar diferentes versiones para el cáculo de estos coeficientes, estas técnicas se han ido afianzando a la vez que los coeficientes se fueron complejizando. En este trabajo mostraremos los avances de estas técnicas de regionalización del método indirecto, hasta llegar a la explicación del *Amplified Flegg Location Quotient (AFLQ)* o *Coeficientes de Localización Ampliada de Flegg*, el cual es el que utilizaremos para el cálculo de dichos coeficientes intrarregionales.

Coeficientes de Regionalización

Una forma común de estimar coeficientes regionales es la de regionalizar la matriz insumo-producto nacional usando los Coeficientes de Localización (LQ). El método LQ está basado en la asunción de que las tecnologías nacionales y regionales son idénticos y que los coeficientes comerciales regionales difieren de los coeficientes nacionales de entrada en la medida en que los bienes y servicios se importan de otros regiones.

Sean ${a_{ij}}^N$ y ${a_{ij}}^R$ los coeficientes nacionales y regionales, es decir, los valores de los bienes y servicios adquiridos por el sector *j- ésimo* del sector *i-ésimo* dividido por el valor de producción del sector *j- ésimo* en la nación y la región, respectivamente. Los coeficientes regionales son estimados de la siguiente manera: ${a_{ij}}^R = q_{ij} \cdot {a_{ij}}^N$, donde q_{ij} representa el grado de modificación del coeficiente nacional. A continuación presentamos fórmulas que tienen como objetivo estimar el valor de q_{ij}.

Coeficientes de Localización Simple (SLQ)

Los coeficientes de localización simple (SLQ_i) comparan la participación de la industria de una región contra la participación de la industria en el total del país. En procedimientos empíricos las matrices insumo-producto se estiman por medio de este método. El SLQ del sector i-ésimo se define por la siguiente ecuación:

$$SLQ_i = \frac{VBP_{Si,Rn}/VBP_{TRn}}{VBP_{Si,TP}/VBP_{TP}}$$

Donde, $VBP_{Si,Rn}$ es el valor bruto de la producción del sector i-ésimo en la n-ésima región, VBP_{TRn} es el total del valor bruto de la producción de la n-ésima región, $VBP_{Si,TP}$ es el valor bruto de la producción del sector i-ésimo en el total del país, VBP_{TP} es el valor bruto de la producción del total del país.

Si $SLQ_i > 1$, se asume que la n-ésima región está especializada en el sector i-ésimo. Esto implica que la industria regional es capaz de satisfacer la demanda regional, los requisitos para sus productos o servicios y, por tanto, el coeficiente regional se supone que es igual al coeficiente nacional (${a_{ij}}^R = {a_{ij}}^N$). Lo mismo se asume si $SLQ_i = 1$. Si $SLQ_i < 1$, se asume que la producción regional es menor que el promedio nacional. en consecuencia, la industria necesita importar de otras regiones para satisfacer toda la demanda regional requerida y ${a_{ij}}^R = {a_{ij}}^N \cdot SLQ_i$.

Coeficientes de Localizacioń Interindustrial (CILQ)

Una de las primeras mejoras del SLQ fueron los Coeficientes de Localización Interindustrial (CILQ). Estos coeficientes miden en una región específica, la importancia relativa del sector vendedor i respecto al sector comprador j. Básicamente la fórmula se genera por:

$$CILQ_{ij} = \frac{SLQ_i}{SLQ_j}$$

Donde, SLQ_i y SLQ_j son los coeficientes de localización simple de los sectores i- ésimo y j-ésimo respectivamente, explicados en el apartado anterior. El principal propósito de esta ecuación, es suponer que si las ventas de la industria regional vendedora (i) respecto de la industria nacional vendedora (i) son mayores que la producción regional compradora (j) respecto a la producción nacional compradora (lo que arroja un $CILQ_{ij}$ mayor a 1), los requerimientos de insumos por parte del sector j en la región pueden satisfacerse dentro de la misma región. Por el contrario, si el coeficiente $CILQ_{ij}$ es menor a la unidad, los insumos que la firma j necesita para llevar a cabo su producción en la región, probablemente no sean asequibles, por lo que deba tener que importar de otras regiones.

La flexibilidad es una de las ventajas principales de este método, ya que permite estimaciones sectoriales sin observar directamente el flujo interindustrial de bienes y servicios; además de necesitar como insumo datos que son simples de obtener en la economía. Dentro de las desventajas, el método tiende a disminuir los coeficientes técnicos de una industria y suele darle mayor importancia a los extremos a nivel local. Por lo tanto, también se observa una subestimación de las propensiones a importar en algunos casos, una autosuficiencia mayor a la real, además que no toma en cuenta el tamaño de la región o su nivel de contribución a las cuentas nacionales.

Coeficientes de Localizacioń de Flegg (FLQ))

Este método es propuesto por Flegg y Webber en 1997 [9], para corregir los problemas que se observaban en los métodos anteriores. La misma fue diseñada para intentar resolver la sobreestimación de la autosuficiencia de los distintos sectores productivos, y por lo tanto, la subestimación de las propensiones a importar. De esta forma, el cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$FLQ_{ij} = CILQ_{ij} \cdot \lambda^*$$

con $\lambda^* = [\log_2(1 + VBP_{region}/VBP_{nacional})]^{\delta}$

Los principales elementos de este método son los coeficientes de localización interindustrial y el rol explícito que se le da al tamaño de la región, de forma de ponderar la importancia de cada industria de la región a nivel nacional a través de λ^* $(0 \leq \lambda^* \leq 1)$. En el caso de que $\lambda^* = 1$, FLQ_{ij} es igual a $CILQ_{ij}$. El valor de λ^* aumenta monotónamente con el tamaño de la región de modo que un mayor ajuste de las importaciones se hace en regiones más pequeñas. De esta manera, el aumento de las importaciones regionales implica una disminución en el comercio intrarregional.

La inclusión del exponente δ $(0 \leq \delta \leq 1)$ introduce un elemento de flexibilidad alterando la convexidad de la función λ^*. Un alto valor de δ disminuirá el valor de λ^* y así, se hacen mayores ajustes de las importaciones regionales. Sin embargo, la elección del valor adecuado de δ es considerado un cálculo empírico.

La implementación de este método sigue una forma similar al de la técnica LQ :

$$a_{ij}{}^{R} = \begin{cases} a_{ij}{}^{N}, & \text{si } FLQ_{ij} \geq 1 \text{ ;} \\ FLQ_{ij} \cdot a_{ij}{}^{N}, & \text{si } FLQ_{ij} < 1. \end{cases}$$

La crítica que se le da a (9) es que la especialización industrial no se tiene debidamente en cuenta con la técnica de regionalización arriba. Su principal crítica es que la especialización regional implica la creación de economías de localización, que generalmente implican un mayor grado de subcontratación local que en el caso de una estructura económica más diversificada. Por lo tanto, su conclusión es que a medida que la escala espacial de análisis cae, los vínculos de entrada-salida observadas serán más fuertes dentro y entre las industrias, en los que la región se ha especializado, y menor en los otros. La magnitud del comercio intrarregional podría ser incluso mayor que en el promedio nacional y podría ocurrir el caso en que $a_{ij}{}^{R} > a_{ij}{}^{N}$, caso que este método no considera.

Coeficientes de Localizacioń Ampliado de Flegg (AFLQ))

Flegg y Weber en el 2000 [10] consideraron que la especialización regional se puede reflejar en el FLQ, siempre y cuando $a_{ij}{}^{R} \leq a_{ij}{}^{N}$. Esto es porque la especialización regional se vería reflejado a un aumento en el SQL y por tanto en CILQ y en el FLQ. Sin embargo, en ese año proporcionan una modificación de la fórmula FLQ, el cual involucra el caso en que $a_{ij}{}^{R} > a_{ij}{}^{N}$, en caso de que haya especialización regional:

$$AFLQ_{ij} = \begin{cases} FLQ_{ij} \cdot [\log_2(1 + SLQ_j)], & \text{si } SLQ_j > 1 \text{ ;} \\ FLQ_{ij}, & \text{si } SLQ_j \leq 1. \end{cases}$$

Tanto en la fórmula FLQ como en su versión ampliada (AFLQ), el parámetro δ juega un papel importante en el valor final que tomará el coeficiente. De esta manera, en el momento de empezar a regionalizar una matriz nacional, se debe decidir qué valor va tomar dicho parámetro.

3.2.2. Matriz Interregional de Insumo-Producto

Los métodos para el cálculo de los coeficientes de regionalización explicados en la sección anterior son usados para el cáculo de aquellos coeficientes que expresan las relaciones o transacciones realizadas internamente por cada región involucrada en la desagregación (coeficientes intrarregionales). A continución detallaremos cómo calcularemos aquellos coeficientes regionales que expresan los requerimientos o intercambios entre las regiones involucradas, estos serán los coeficientes interregionales.

Para esto, estableceremos supuestos para los valores iniciales de exportaciones, primero se debe cumplir con una restricción importante, que implica que luego con la matriz regional pueda volver a reconstruirse la matriz nacional. Esto implica que se cumpla la siguiente fórmula:

$$t_{ij}{}^{N} = \sum t_{ij}{}^{R_r R_s} \qquad r,s = 1,\ldots,m \tag{10}$$

Donde $t_{ij}{}^{N}$ es la transacción ij de la matriz insumo-producto nacional, $t_{ij}{}^{R_r R_s}$ son las transacciones ij de las matrices intrarregionales e interregionales. La fórmula implica que la transacción ij de la matriz insumo producto nacional es la sumatoria de las transacciones regionales (interregionales e intrarregionales), manteniendo de esta manera la estructura productiva nacional.

Por otro lado, y como comentamos en la sección anterior, para el armado de dicha matriz interregional se poseen datos acerca del el total de compras intermedias de cada región desagregados sectorialmente. Los mismos son adicionales a los que requiere el método de regionalización de matrices, y por ende, son restricciones adicionales que se deben cumplir. Así, dado que entre regiones el cociente (Consumo intermedio/Valor bruto de producción) son diferentes, se observa que las tecnologías entre regiones serán similares más no idénticas.

Para la construcción de la Matriz Regional de Iniciación que requerimos para aplicarle una técnica de calibración y así obtener finalmente una matriz Insumo-Producto Regional desagregada, se procede a colocar las matrices resultantes de los métodos de regionalización como las matrices intrarregionales, y para las matrices de exportaciones regionales (matrices interreginales) se sigue el siguiente camino:

(i) Tomando el supuesto de que se desagregará en dos regiones y que los sectores de la región exportan si y solo si su SLQ_i es mayor a la unidad, el mismo sector de la otra región no puede exportar y por ende sólo vende a sectores intrarregión.

(ii) Consiguiendo se pasa a la restricción transaccional. Dado que debe cumplirse la ecuación (10) y que además $t_{ij}{}^{R_1 R_2}$ ó $t_{ij}{}^{R_2 R_1}$ es 0, entonces la exportación inicial para la transacción $t_{ij}{}^{R_1 R_2}$ (si $t_{ij}{}^{R_2 R_1} = 0$ o viceversa) será:

$$t_{ij}{}^{R_1 R_2} = t_{ij}{}^{N} - t_{ij}{}^{R_1 R_1} - t_{ij}{}^{R_2 R_2}$$

(iii) De esta manera se arriba a una matriz inicial con la cual se cumple con el total de ventas intermedias pero no con el total de compras intermedias. Luego se proceden a los métodos de calibración de la matriz insumo producto.

3.2.3. Calibración MIP Regional: Entropía Cruzada

El método tradicionalmente utilizado para calibrar una matriz sujeta a tales restricciones ha sido el método RAS, que actualiza una matriz con base en los nuevos totales de fila y columna de cada cuenta. El procedimiento consiste en encontrar una nueva matriz de coeficientes A^*, basada en la original A, la cual genera una matriz de transacciones intersectoriales que es consistente con los nuevos totales de fila y columna. El balance de una matriz por el método de RAS tiene varios inconvenientes. Primero, supone que la matriz original es consistente y está balanceada; segundo, que los nuevos totales de fila y columna son correctos, es decir, que no existen los llamados errores de medición. Tercero, el método no permite incorporar información adicional (flujos al interior de la matriz) que pudiera mejorar la eficiencia de las estimaciones. Todos estos inconvenientes son superados por un nuevo método estadístico-econométrico y desarrollado en los últimos años, el cual es conocido con el nombre de *entropía* [11].

El método de entropía tiene un marco de aplicación más amplio que aquel para calibrar matrices. Su desarrollo responde a un interés por resolver los inconvenientes que se presentan comúnmente en la construcción de modelos estadísticos y económicos debido a la escasez de información. En el caso de matrices, el problema radica en generar estimaciones para cada una de las celdas de la matriz cuando solo se conocen los totales de fila y columna; es decir, existen incógnitas pero solamente un sistema de *2n - 1* ecuaciones independientes. Golan, Judge and Miller (1996) proponen un nuevo método que resuelve el problema de indeterminación, el cual puede ser aplicado al problema de calibración de matrices [11].

Sea T la matriz de transacciones de una MIP y t_{ij} el pago de la cuenta j a la cuenta i. De acuerdo con el principio de doble entrada, los ingresos (total de fila) deben ser iguales a los gastos (total de columna) para cada cuenta, por lo tanto:

$$y_i = \sum_j t_{ij} = \sum_j t_{ji}$$

Donde son los ingresos totales y los gastos totales de la cuenta i.

La matriz de coeficientes, A^*, se calcula dividiendo las celdas de cada columna de la matriz de transacciones por su respectivo total de columna:

$$a^*_{ij} = \frac{t_{ij}}{y_j}$$

Los totales de columna de la matriz A^* deben ser iguales a 1. Como los totales de fila deben ser iguales a los totales de columna, se debe satisfacer (en notación matricial):

$$y = A^* y$$

En la práctica, el problema consiste en estimar adecuadamente cada uno de los elementos de la matriz de coeficientes,a^*_{ij}, con la información disponible.[11]

Método de Entropía Cruzada

Una forma de reducir el margen de infinitas soluciones de un sistema de ecuaciones indeterminado, es establecer una serie de supuestos poco reales hasta dar con la solución única del modelo. Sin embargo, esta clase de remedios puede resultar en estimaciones poco confiables que llevan a extraer conclusiones erróneas de la realidad económica que tratan de describir. Para remediar estos problemas Jaynes propone una solución que proviene de la llamada Teoría de la Información. [11]

La información disponible para la construcción de modelos es muy limitada. A veces solo disponemos de datos parciales,y_i, para la estimación de los parámetros de interés $_{ij}$.

En términos matriciales, el problema puede plantearse de la siguiente forma:$y = Xp$, donde y es un vector de dimensión T; X es una matriz conocida de dimensión $T \times n$; p es un vector de dimensión n y representa los parámetros a estimar. Dado que n es mayor que T, el vector p no puede estimarse sin establecer una serie de supuestos poco reales.

Para resolver el problema debe encontrarse una medida de la incertidumbre asociada a los parÃ¡metros contenidos en el vector . La idea puede plantearse de la siguiente forma.

Supongamos un conjunto de n eventos $E_1, E_2, ..., E_n$, con probabilidad de ocurrencia $q_1, q_2, ..., q_n$, de tal forma que satisfagan:

$$1 \geq q_i \geq 0, \forall\ i$$
$$\sum_1 q_i = 1$$

Ahora supongamos que llega un mensaje en el sentido de que la probabilidad de ocurrencia de cada evento ha cambiado a $p_1, p_2, ..., p_n$. Si consideramos un solo evento, E_i, la información recibida con el mensaje es igual a $-\ln p_i$. Aplicando la esperanza a $-\ln p_i$ tenemos:

$$H(p) = -\sum_1^n p_i \ln p_i$$

Donde $0\ \ln(0) = 0$ y H es una medida de la incertidumbre asociada a una distribución de probabilidad. Jaynes propone hacer uso del método de mÃ¡xima entropía para estimar la distribución de probabilidad (vector p) consistente con la información disponible.

Siguiendo con Golan, Judge and Miller, debido a que cada evento tiene asociado una probabilidad inicial, la información adicional de la nueva probabilidad está dada por:

$$-\ln \tfrac{p_i}{q_i} = -[\ln p_i - \ln q_i]$$

Si aplicamos la esperanza a esta medida de incertidumbre tenemos:

$$-I(p:q) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$$

Según Robinson, Cattaneo y El-Said (1998) citando a Kapur y Kenavasan (1992), la anterior ecuación es una medida de la distancia de entropía entre dos distribuciones de probabilidad y es la base del método de entropía cruzada.

En el caso de balance de matrices, a veces es posible contar con una matriz previa balanceada y consistente que pueda tomarse como base para actualizar los parámetros de la matriz de coeficientes. En este caso $a_{ij} = q_{ij}$, donde a_{ij} es un elemento de una matriz de coeficientes A previa, que proviene de una matriz de transacciones consistente y balanceada.

El método de entropía cruzada para el problema de balance de matrices en el cual se utiliza información actual y de un año previo (una matriz de un año anterior), puede escribirse de la siguiente forma según Golan, Judge and Robinson (1994) citados por Robinson, Cattaneo y El-Said (2000):

$$\text{mín} \sum_i \sum_j a_{ij} \ln \frac{{a_{ij}}^*}{a_{ij}}$$

Sujeto a las restricciones de momentos, aditividad y no negatividad:

$$\sum_j a_{ij} y_j = y_i$$
$$\sum_j a_{ij} = 1$$
$$0 \leq a_{ij} \leq 1$$

La solución se obtiene resolviendo un lagrangeano con las ecuaciones planteadas. El resultado combina la información de la nueva matriz y de la matriz base:

$$a_{ij}{}^* = \frac{a_{ij}{}^* \exp(\varphi_i y_j{}^*)}{\sum_{i,j} a_{ij} \exp(\varphi_i y_j{}^*)}$$

Donde φ_i son los multiplicadores de Lagrange asociados con la información de la suma de filas y columnas y el denominador es el factor de normalización [11], [3].

3.2.4. Experimentación con datos simulados

Para esta sección también usaremos la réplica de la economía venezolana con la Matriz Insumo-Producto generada con datos simulados mostrado en la Tabla 1 y la matriz de Demanda Intermedia mostrado en la Tabla 2.

Además para la desagregación consideraremos dos regiones, la región Centrooccidental-Central (CO-C) y el Resto del País (RP). Por lo tanto la Matriz Insumo-Producto Nacional se dividirá en cuatro submatrices regionales que pueden observarse en la Tabla 2. Estas submatrices muestran:

- El comercio intrarregional en la región CO-C (MIP CO-C).
- El comercio intrarregional en el resto del país (MIP).
- Las exportaciones de CO-C al resto del país, que se condicen exactamente con las compras regionales que los sectores del resto del país realizan en CO-C (Expo CO-C).
- Las importaciones de CO-C proveniente del resto del país, que son exactamente con las ventas regionales que los sectores del resto del país realizan a CO-C (Impo CO-C).

En la Tabla 3 se muestra las relaciones entre CO-C y el resto del país, así como también la contribución neta y porcentual que posee cada región con respecto al Valor Bruto de la Producción Nacional y la cual consideraremos como información en este apartado para el cálculo del la MIP Regional Inicial.

Tabla 6 : Esquema Matriz Insumo-Producto Regional.

		Sectores de Actividad CO-C			Sectores de Actividad RP		
		S01	**S02**	**S03**	**S01**	**S02**	**S03**
Sectores de Actividad CO-C	**S01**						
	S02		MIP CO-C			Expor CO-C/Impor RP	
	S03						
Sectores de Actividad RP	**S01**						
	S02		Impor CO-C/Expor RP			MIP RP	
	S03						

Es importante tener claro las diferencias entre la Matriz Insumo-Producto nacional y la matriz regional. En términos de tecnología, el esquema input-output nacional refleja la tecnología media a nivel regional, ya que surge de la suma de empresas y por ende es una imagen agregada. En cambio, si una región se encuentra fuertemente especializada en una actividad, puede ser que posea un conjunto de técnicas claramente diferente a la tecnología del resto de las regiones, por lo que las tecnologías no tienen por qué ser similares.

Otra diferencia entre la matriz nacional y la regional es que la última contiene también el comercio regional. Las importaciones dentro del marco input-output regional tienen en cuenta todos aquellos bienes y servicios que provienen de una región externa a la analizada, tanto del resto del mundo como del resto de las regiones del país. Este hecho es fundamental para los modelos a analizar en el resto del estudio, ya que supone las compras de otras regiones como importaciones y las ventas a otras regiones como exportaciones.

En la Tabla 2 puede observarse la Matriz de Demanda Intermedia de la Insumo-Producto Nacional para esta experimentación. Los coeficientes técnicos que genera esta matriz son calculados por la fórmula (8) y pueden ser visualizados en la Tabla 7.

Tabla 7 : Matriz de Coeficientes Técnicos para Venezuela en la economía ficticia.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
	S01	0.037	0.479	0.021
Sectores de	**S02**	0.052	0.838	0.323
Actividad	**S03**	0.075	0.718	0.154

Dada esta información inicial, los coeficientes técnicos regionales intrarregión pueden ser calculados dada la fórmula presentada anteriormente en base a las relaciones de valores brutos de producción. Los coeficientes SLQ_i para ambas regiones son presentados en la Tabla 8.

Tabla 8 :Coeficientes SLQ_i para las regiones Centrooccidental-Central y para el Resto del País.

Sector	SQL_iCO-C	SQL_iRP
S01	0.55	1.14
S02	2.05	0.60
S03	1.17	0.98

Con el propósito de poder contrastar todas estas técnicas, se ofrece a continuación la matriz de coeficientes $CILQ_{ij}$ resultante de los datos introducidos en la en las tablas anteriores.

Tabla 9 : Coeficientes $CILQ_{ij}$ para la Región Centrooccidental-Central.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
	S01	1.00	0.26	0.47
Sectores de	**S02**	3.72	1.00	1.75
Actividad	**S03**	2.12	0.57	1.00

Tabla 10 : Coeficientes $CILQ_{ij}$ para el resto del país.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
	S01	1.00	1.9	1.16
Sectores de	**S02**	0.52	1.00	0.61
Actividad	**S03**	0.85	1.63	1.00

Una vez calculados los coeficientes SLQ_{ij}, $CILQ_{ij}$ procedemos a aplicar la técnica para el cálculo de los Coeficientes de Localizacioń Ampliado de Flegg (AFLQ) presentados en las Tabla 11 y 12.

Tabla 11 : Coeficientes $AFLQ_{ij}$ para la Región Centrooccidental-Central.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
	S01	0.72	0.13	0.17
Sectores de	**S02**	1.22	0.52	0.64
Actividad	**S03**	0.69	0.30	0.36

Tabla 12 : Coeficientes $AFLQ_{ij}$ para el resto del país.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
	S01	1.02	1.76	1.07
Sectores de	**S02**	0.52	0.93	0.56
Actividad	**S03**	0.86	1.51	0.93

Ya obtenidos los coeficientes de localización procedemos a obtener los coeficientes intrarregionales de ambas regiones, necesarios para la construcción de la Matriz Insumo-Producto Regional Inicial.

Tabla 13 : Coeficientes técnicos intrarregionales para la Región Centrooccidental-Central.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
Sectores de	**S01**	0.026	0.062	0.003
Actividad	**S02**	0.063	0.435	0.206
	S03	0.051	0.215	0.055
Total VBP		198.85	229.54	213.57

Tabla 14 : Coeficientes técnicos intrarregionales para el resto del país.

		Sectores de Actividad		
		S01	**S02**	**S03**
Sectores de	**S01**	0.037	0.843	0.022
Actividad	**S02**	0.027	0.779	0.180
	S03	0.064	1.084	0.143
Total VBP		1126.85	187.81	498.33

A continución La Matriz Insumo-Producto Inicial construida por medio de las técnicas y métodos explicados en la sección anterior.

Tabla 15 : Matriz Insumo-Producto Regional Inicial.

		Sectores de Actividad CO-C			Sectores de Actividad RP		
		S01	**S02**	**S03**	**S01**	**S02**	**S03**
Sectores de Actividad CO-C	**S01**	5.17	14.23	0.64	0	0	0
	S02	12.52	99.84	43.99	27.06	103.86	96.32
	S03	10.14	49.35	11.74	17.75	47.07	27
Sectores de Actividad RP	**S01**	3.14	27.45	3.4	41.69	158.32	10.96
	S02	0	0	0	30.42	146.30	89.69
	S03	0	0	0	72.11	203.58	71.26

(Millones de Bolívares)

Conclusiones

A continuación describimos los logros del presente trabajo:

Hemos descrito elementos teóricos asociados a la Matriz Insumo - Producto; enfatizando en su estructura general, relaciones e idéntidades contables básicas, así como también la información contenida en dicha matriz. También revisamos métodologías para la obtención de La Matriz Insumo - Producto Regional a partir de métodos indirectos.

El Algoritmo Iterativo de Desagregación construido y usado como primera alternativa metodológica para el cálculo de la Matriz Insumo - Producto Regional nos mostró que para este procedimiento se necesita algo más que sólo el nivel de contribución que pueda poseer cada región sobre los números nacionales. Esto nos motivó a estudiar el método de Flegg y Weber, que mediante el estudio y cáculo de los coeficientes de regionalización podemos saber de manera cuantitativa la dinámica económica tanto a nivel interno de cada región como las relaciones existente entre cada uno de ellos y a partir de esto construir el panoráma económico regional.

Elaboramos experimentos con datos simulados, donde son mostrados el Algoritmo Iterativo de Desagregación y el Método de Flegg y Weber.

Como trabajo futuro, pretendemos hacer el código computacional para el cáculo de la MIP Regional por el método de Flegg/Weber y experimentar esto con datos numéricos reales. Proponemos el estudio empírico del intervalo donde oscila el coeficiente que describe las importaciones interregionales δ que es usado para el cálculo de los Coeficientes de Localización de Flegg (FLQ), al conocer esto para el caso de Venezuela obtendríamos resultados más exactos.

Anexo

ALGORITMO 1.2 : ALGORITMO ITERATIVO DE DESAGREGACIÓN.

---

1. %DEFINICION DE TERMINOS
   % n = número de regiones a desagregar.
   % m = número de sectores dentro de la Matriz de Demanda Intermedia
   % p = numero de sectores dentro de la matriz de Demanda Final.
   % q = numero de sectores dentro de la mariz de Valor Agregado.
   % W = matriz de contribución de cada sector dentro de la Matriz de Demanda Intermedia.
   % W1 = matriz de contribución de cada sector dentro de la Matriz de Demanda Final.
   % W2= matriz de contribución de la Matriz de Valor Agregado.

2. % DATOS DE ENTRADA
   n, m, p, q
   MIP= xlsread('axa25x25.xls',3);% Importamos la data de excel con el comando xlsread.
   W= xlsread('contribucion',1);% Importamos la contribución de cada región con respecto a los sectores.
   W2 = xlsread('contribucion',2);% Importamos la contricuon de cada región con respecto a los sectores de la DF. W3 = xlsread('contribucion',1);% Importamos la contribución de cada región con respecto a la matriz de valor agregado.

3. % CALCULO DE DESAGREGACIÓN DE MATRIZ DE DEMANDA INTERMEDIA.

4. M Sectores= MIP(1:m,1:m);

5. B=cell(m,m);

6. for k= 1:m

7. for l=1:m
8. Bk,l= WA(:,l)* WA(:,l)'*M Sectores(k,l);
9. end
10. end
11. B;
12. % CÁLCULO DE DESAGREGACIÓN DE MATRIZ DE DEMANDA FINAL.
13. M DF = MIP(1:m, 29:35);
14. D=cell(m,p);
15. for a= 1:m
16. for b=1:p
17. Da,b= WA2(:,b)* WA2(:,b)'* M DF(a,b);
18. end
19. end
20. D;
21. % CÁLCULO DE DESAGREGACIÓN DE MATRIZ DE VALOR AGREGADO.
22. M VA= MIP(39:50,1:25);
23. A=cell(q,m);
24. for s= 1: q
25. for r= 1: m

26. As,r= WA3(:,r)*WA3(:,r)'*M VA(s,r);

27. end

28. end

29. A;

30. % CONCATENACIÓN DE MATRICES DESAGREGADAS.

31. Z= cell(12,7);

32. C= cat(2,B,D);

33. E= cat(2,A,Z);

34. CTOT= cat(1,C,E);

ALGORITMO 1.3 : EXPORTAR A EXCEL UNA MATRIZ TIPO CELL DE CUALQUIER DIMENSIÓN.

---

1. Letras = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I', 'J', 'K', 'L', 'M', 'N', 'O', 'P', 'Q', 'R', 'S', 'T', 'U', 'V', 'W', 'X', 'Y', 'Z'];
   %Vector de Letras del Abecedario según Excel.

2. clc

3. fprintf('DIMENSIONES DE LA MATRIZ INSUMO-PRODUCTO DESAGREGADA');

4. Fl = input('Ingrese la Dimensión de las Filas de MIP desagregada: ');
   % Número de Filas de la Matriz.

5. Cl = input('Ingrese la Dimensión de las Columnas de MIP desagregada: ');
   % Número de Columnas de las Matriz.

6. fprintf('DATOS DE LA PRESENTACIÓN');

7. Num_Fila_Inicio = input('Ingrese el Numero de Fila de Inicio: ');
   % Numero de la Fila de inicio.

8. Num_ Colum_Inter = input('Ingrese el Numero de Columnas de Separación: ');
   % Numero de Columnas Intermedia.

9. fprintf('DIMENSIONES DE LA MATRIZ DE DEMANDA INTERMEDIA');

10. MDI_Filas = input('Ingrese la Dimension de las Filas de MDI: ');

11. MDI_Columnas = input('Ingrese la Dimension de las Columnas de MDI: ');

12. fprintf('DATOS DE LA REGIÓN');

13. Num_Region = input('Ingrese el Número de Regiones a la cual se desagregó la MIP: ');
    % Número de Regiones

14. for Fila = 1 : Fl% Cilo que Recorrera las Filas de la Matriz

15. for Columna = 1 : Cl% Cliclo que Recorrera las Columnas de la Matriz

16. if ((Fila <= MDI_Filas && Columna <= MDI_Columnas) || (Fila <= MDI_Filas && Columna >= (MDI_Columnas + 1)) || (Fila >= (MDI_Filas + 1) && Columna <= MDI_Columnas))
    % Condición para evitar la Parte Vacía de la Matriz.

17. Celda = ”;
    % Se inicializa la Variable Celda en vacío.

18. Fragmento_Celda = ”;% Se inicializa la Variable Fragmento_Celda en vacío.

19. if ($Columna == 1$)%Si el Cliclo de Columnas está en la Primera.

20. $Num\_Columna = Columna + Num\_Colum\_Inter$;
    % La Columna actual se le Suma 1 para posicionarla separado del Borde.

21. else

22. $Num\_Columna = ((Columna - 1) * Num_Region) + (Columna + Num\_Colum\_Inter)$;
% Se multiplica la Columna Anterior por el Número de Sectores y a esto se le suma.
% el Numero de Columnas más 1 para separarlos 1 columna del la Matriz anterior.

23. end

24. if ($Num\_Columna <= 26$)
% Si el Numero de Columna Obtenido es Menor o igual a 26 que es el Numero de letras del Abecedario.

25. $Celda = [Letras(Num\_Columna)num2str(Num\_Fila\_Inicio)]$;
% La Celda será La letra que corresponda al Número de Columna más el número de la Fila.

26. else
% sino, es decir el numero de Columna es mayor a 26.

27. $Cont\_Vuelta = 0$;
% se Inicializa un Contador de Vueltas al Abecedario ($Cont\_Vuelta$) en 0

28. while ($Num\_Columna > 26$) % Mientras el Número de la Columna sea Mayor a 26.

29. $Num\_Columna = Num\_Columna - 26$;
% se le Resta 26 al Número de Columna, lo equivalente una vuelta completa al Abecedario.

30. $Cont\_Vuelta = Cont\_Vuelta + 1$;
% se Suma 1 Contador.

31. % Si el número de Columna Resultante es Menor o igual a 26 Y el Contador de Vueltas es Mayor o igual a 26.

32. $Fragmento\_Celda = Celda$;
% al Fragmento de Celda (Fragmento) se le asigna el Valor actual de la Celda.

33. $Celda = [Letras(Num_Columna)Fragmento\_Celda]$;
% se le antepone La letra que corresponda al Número de Columna al valor que anteriormente tenia Celda.

34. $Num\_Columna = Cont\_Vuelta$;
% Al número de Columna se le asigna el valor del contador para ubicar las letras faltantes según el número de vueltas que se le dio al abecedario.

35. $Cont\_Vuelta = 0;$
%El Contador de Vueltas al Abecedario se devuelve a 0.

36. else if ((Columna <= 26) && (Cont_Vuelta <26)) % Si el Numero de Columna es menor o igual a 26 Y el contador es menor a 26.

37. $Fragmento\_Celda = Celda;$
% Al Fragmento de Celda (Fragmento) se le asigna el Valor actual de la Celda.

38. $Celda = [Letras(Cont_Vuelta)Letras(Num_Columna)Fragmento_Celdanum2str(Num_Fila_Inicio)];$

% Finalmente se unen:
% - La Letra que corresponde al Valor del Contador de Vueltas ($Cont\_Vuelta$).
% - La Letra que corresponde al Valor del Número de Columna ($Num\_Columna$).
% - El Valor anterior de la Celda ($Fragmento\_Celda$).
% - El Número de la Fila Convertido a string.
% Esta unión da como resultado la Celda Buscada.

39. end

40. end

41. end

42. xlswrite('Libro1.xlsx', Nombre de la Matriz DesagregadaFila,Columna, 'Hoja1', Celda);
% Método para Escribir en un Documento de Excel una Matriz, en una Hoja especifica y que empiece en una Celda específica.

43. end

44. end

45. $Num\_Fila\_Inicio = Num\_Fila\_Inicio + Num\_Region + 1;$
% Se le suma al número de Fila (Num_Fila) su Valor anterior mas Numero de Sectores ($Num\_Sectores$) más 1 para dejar una fila de separación entre matrices.

46. end

Bibliografía

[1] Andrés R., Schuschny. Tópicos sobre el Modelo Insumo - Producto: Teoría y aplicaciones. Naciones Unidas. CEPAL. Santiago de Chile, Diciembre 2005.

[2] Elvis Hernández. Insumo Producto (MIP) como instrumento de análisis económico. Banco Central de Venezuela. Gerencia de Investigaciones Económicas. Caracas, Mayo 2005.

[3] Mastronardi, Leonardo J. y Romero, Carlos A. A non-survey estimation for regional input-output tables. An aplplication for Buenos Aires City. Universidad Argentina de la Empresa. Febrero 2012.

[4] Raya, Andrés y Ríder Alfonso y Rubio Rafael. Álgebra y Geometría lineal. Barcelona: Reverté 2007.

[5] Robinson S., A. Cattaneo y M. El-Said (2001). ”Updating and Estimating a Social Accounting Matrix Using Cross Entropy Methods”, Economic Systems Research $13:1, pp, 47-64$.

[6] Susana Santos. Social Accounting Matrix and The System of National Accounts: An application. Institute of Economics an Business Administration. Department of Economics.

[7] Jensen et. al., 1979. “Regional Economic Planning”.Croom Helm, Londres.

[8] Flegg, A. T. y C. D. Webber, 1996a. “Using locationquotients to estimate regional input-output coefficients and multipliers”, Local Economic Quaterly. $4, 58-86$.

[9] Flegg, A. T. y C. D. Webber, 1997. “On the appropiate use of location quotients in generating regional Input-Output tables: Reply”. University of the Westof England, Bristol.

[10] Flegg A. T. y C. D. Webber, 2000. “Regional size, regional specialization and the FLQ formula”. University of the West of England, Bristol.

[11] Albornoz, Lilian. “ Actualización y Balance por Entropía de una Matriz de Contabilidad Social de las Regiones Rurales de México”. Facultad de Economía. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

[12] Osvaldo, Arriagada P. y Juan C.,Parra. “Aplicación del Método indirecto para la obtención de una Matriz Insumo - Producto Año 2002 para VIII Región del Bío Bío”. Universidad de Bío Bío. Departamento de Economía y Finanza.

[13] Griva, Igor y Nash, Stephen y Sofer, Ariela. “ Linear and Nonlinear Optimization. George Mason University. Fairfax, Virginia.