UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"una Generalización de la función seno"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Yrrael Querales

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis.
Tutor: Dr. Fernando Villafañe.

Barquisimeto, Venezuela. Marzo de 2015

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios. A mis padres que me han apoyado en mi formación; a ellos que siempre sin dudar supieron creer en mí y me enseñarón que las metas se consiguen con constancia, dedicación y trabajo.

A mi tutor, profesor Fernando Villafañe por haber tenido tanta paciencia, por aclarar tantas dudas, por todas sus sugerencias y por su dedicación en que el presente trabajo sea hoy realidad.
A los profesores que de contribuyerón en mi formación: Sergio Muñoz, Rómulo Castillo, Eibar Hernandez, Mario Rodríguez, Nicolas Arías y todos aquellos con los que recibí clases.

Resumen

Se estudia la función $s(x,y) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|}$ que está vinculada a la ortogonalidad de Birkhoff-James en espacios normados. Dicha función se utiliza en la teoría de ecuaciones funcionales. Basada en esta función, se trata de una generalización de la función seno para estudiar sus propiedades.

Índice

Introducción

La idea principal del presente trabajo proviene de la teoría de las ecuaciones funcionales condicionales. Precisamente se habla de las llamadas ecuaciones ortogonales. Si consideraramos, por ejemplo, la bien conocida ecuación funcional de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

cualquier solución de esta ecuación se llama una función aditiva. Consideremos ahora la ecuación condicional relacionada

$$x \perp y \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2}$$

La condición $x \perp y$ puede ser entendida de diversas maneras. Por ejemplo, si tratamos con funciones definidas en espacios con producto interno entonces podemos utilizar la ortogonalidad definida por un producto interno. En un espacio vectorial normado no siempre la norma proviene de un producto interno, sin embargo podemos definir varias nociones de ortogonalidades.
Ortogonalidad de James

$$x \perp_J y \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$$

Ortogonalidad de Birkhoff- James

$$x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow \|x+\lambda y\| \geq \|x\| \text{ para todo} \lambda \in \mathbb{R}$$

y la ortogonalidad de Pitágora

$$x \perp_p y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Claramente, cada solución de la ecuación (1) es una solución de la ecuación (2). La implicación inversa es falsa. Por ejemplo si X es un espacio con producto interno y $f : X \to \mathbb{R}$ es definida por la fórmula $f(x) = \|x\|^2$, entonces f es una solución de (2) que no es aditiva. Echemos un vistazo a la ecuación

$$f(x+y) = g\left(\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}\right)[f(x)+f(y)] \tag{3}$$

Es una ecuación incondicional y se puede suponer para casi todos los valores de x y de y. Cada función aditiva f es una solución de esta ecuación (con función $g = 1$) y $f(x) = \|x\|^2$ es tambien una solución de esta ecuación (con $g(a) = \frac{2}{1+a^2}$).
Esto significa que la ecuación (3) conserva las soluciones mas importantes de (2). por la ortogonalidad de James o isósceles se tiene que:
$x, y \neq o$, $x \perp_j y \Rightarrow f(x+y) = g(1)[f(x)+f(y)]$
Lo que significa que tenemos una versión modificada de James aditividad ortogonal como un caso especial de la ecuación (3). En consecuencia, esta ecuación puede resolverse facilmente con la ayuda de los resultados relativos a las funciones ortogonalmente aditivas.(ver [2]). De aquí surge una pequena pregunta natural si un procedimento similar se puede aplicar con respecto a otras ortogonalidades. Con el fin de hacer frente a la ortogonalidad de Birkhoff- James podemos considerar una función similar al cociente $\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}$ conectada con la ortogonalidad de James, a saber $S(x,y) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|}$.
Y tratar luego la ecuación:

$$f(x+y) = g(s(x,y))[f(x)+f(y)]$$

En el presente trabajo especial de grado se desarrollarán algunos resultados que ponen en evidencia cierta semejanza de esta función S con la conocida función trigonométrica Seno; posteriormente se define una nueva función , basándose en la función S, que alcanza tanto valores positivos como negativos conservando propiedades ya descritas. Este desarrollo se basa en el trabajo de Tomas Szostok [5] publicado en 2003. Sin embargo, nuestro objetivo principal es estudiar algunas de las propiedades de la función S que vamos a presentar.

Capítulo 1

Definiciones previas

Comenzamos con la siguiente definición

Definición 1.1. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real. Definimos una función $s : X \times X \to \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula

$$s(x,y) = \begin{cases} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Tenga en cuenta que en realidad , el ínfimo de la definición de s es alcanzado y por lo tanto puede ser reemplazado por el mínimo, en efecto.
Si $x \neq 0$ tenemos que la función $s(x,y) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} \geq 0$ es decir, la función S es acotada inferiormente.
Si $x = 0$, tenemos que $s(x,y) = 1$ por lo tanto, en algun momento la función $s(x,y)$ alcanza un mínimo.

Estudiemos las siguientes propiedades de la función s:

Proposición 1.1. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real y sean α, β números reales distintos de cero. Entonces $s(\alpha x, \beta y) = s(x,y)$ para todo $x, y \in X$.*

Demostración.

$$s(\alpha x, \beta y) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|\alpha x + \lambda \beta y\|}{\|\alpha x\|} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$$

$$= \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|\alpha x + \lambda\beta y\|}{|\alpha|\,\|x\|}$$

$$= \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{|\alpha|}\,\|\alpha x + \lambda\beta y\|}{\|x\|}$$

$$= \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\left\|x + \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)y\right\|}{\|x\|}$$

$$= \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{\|\ x + \theta y\|}{\|x\|} = s(x,y), \text{ con } \theta = \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \in \mathbb{R}$$

. ■

Proposición 1.2. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio lineal normado real, tenemos:*

i) La función $s(x,y)$ *toma todos sus valores en el intervalo* $[0,1]$

ii) $s(x,y) = 0 \Leftrightarrow x$ *y* y *son linealmente dependientes.*

Demostración.
Probemos (i).
Sabemos que

$$s(x,y) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{1.1}$$

Por otro lado tenemos que si $\lambda = 0$, entonces $\|x+\lambda y\| = \|x\|$
en efecto, $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$
Así

$$s(x,y) \leq 1 \tag{1.2}$$

De (1.1) (1.2) tenemos $0 \leq s(x,y) \leq 1$
Probemos (ii)
$(\Leftarrow)$ Supongamos que x y y son linealmente dependientes, probemos que $s(x,y) = 0$

Sea y combinación lineal de x, entonces existe un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y = \alpha x$.

$\|x + \lambda y\| = \|x + \lambda \alpha x\| = \|x(1 + \lambda\alpha)\|$

$= |1 + \lambda\alpha| \, \|x\|$

Luego, $\text{ínf}_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} = \text{ínf}_{\lambda \in \mathbb{R}} |1 + \lambda\alpha|$

$$|1 + \lambda\alpha| = \begin{cases} 1 + \lambda\alpha, & \text{si } 1 + \lambda\alpha \geq 0 \\ -1 - \lambda\alpha, & \text{si } 1 + \lambda\alpha < 0 \end{cases}$$

Así, $\lambda = \frac{-1}{\alpha}$, entonces $|1 + \lambda\alpha| = 0$

En efecto, $\text{ínf} |1 + \lambda\alpha| = 0$

Por lo tanto $s(x, y) = \text{ínf}_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} = \text{ínf} |1 + \lambda\alpha| = 0$

($\Rightarrow$) Supongamos que $s(x, y) = 0$, probemos que x y y son linealmente dependientes.

$s(x, y) = \text{ínf}_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} = 0$

Supongamos que $\|x\| = 1$, de esta manera

$\text{ínf}_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x + \lambda y\| = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x + \lambda_n y\| = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0 \Rightarrow |\|x + \lambda_n y\| - 0| < \epsilon$

$\Rightarrow \|x + \lambda_n y\| < \epsilon$

$\lim\limits_{n\to 0} (x + \lambda_n y) = 0$

$x + \lim\limits_{n\to 0} \lambda_n y = 0$

$\lim\limits_{n\to 0} (\lambda_n y) = -x$

$[\lim\limits_{n\to 0} (\lambda_n)]y = -x$

$\pm\frac{1}{\|y\|}.y = -x$

$x = \pm y.\frac{1}{\|y\|}$

Así, $x = \lambda y$, donde $\lambda = \pm\frac{1}{\|y\|} \in \mathbb{R}$

Notemos que $\lim\limits_{n\to 0} \lambda_n = \pm\frac{1}{\|y\|}$,en efecto:

$\left\|\lim\limits_{n\to 0} \lambda_n y\right\| = \|x\| = 1$

$\lim\limits_{n\to 0} \|\lambda_n y\| = 1$

$\|y\| \lim\limits_{n\to 0} |\lambda_n| = 1$

$\lim\limits_{n\to 0} \lambda_n = \pm\frac{1}{\|y\|}$ Por otra parte si $\|x\| \neq 1$ tenemos que

$\left\|\lim\limits_{n\to 0} \lambda_n y\right\| = \|x\|$

$\lim\limits_{n\to 0} \|\lambda_n y\| = \|x\|$

$\|y\| \lim\limits_{n\to 0} |\lambda_n| = \|x\|$
$\lim\limits_{n\to 0} \lambda_n = \pm\frac{\|x\|}{\|y\|}$
Así, $[\lim\limits_{n\to 0}(\lambda_n)]y = -x$
$\pm\frac{\|x\|}{\|y\|}.y = -x$
Sea $\alpha = \pm\frac{\|x\|}{\|y\|} \in \mathbb{R}$, así $x = \alpha y$
Por lo tanto x y y son linealmente dependientes. ■

La función s está estrictamente conectada con la ortogonalidad de Birkhoft- James. Es decir, tenemos la siguiente sencilla observación.

Observación 1.1. Sean x y y dos elementos de un espacio lineal normado $(X, \|.\|)$ entonces $x\perp_{BJ}y \Leftrightarrow s(x,y) = 1$

Demostración.
$(\Rightarrow)$ S $x\perp_{BJ}y \Leftrightarrow \|x+\lambda y\| \geq \|x\|, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$
Probemos que $s(x,y) = 1$.
$s(x,y) = \text{ínf}_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} \geq \text{ínf}_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$
Así, $s(x,y) \geq 1$.
Sabemos que $s(x,y)$ toma sus valores en el intervalo $[0,1]$ así $s(x,y) \leq 1$. Por lo tanto $s(x,y) = 1$.
$(\Leftarrow)$ Sabemos que $s(x,y) = \text{ínf}_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} = 1$
Probemos que $\|x+\lambda y\| \geq \|x\| \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$
$\text{ínf}_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} = 1$
$\frac{1}{\|x\|}\,\text{ínf}\,\|x+\lambda y\| = 1$
$\text{ínf}\,\|x+\lambda y\| = \|x\|$
$\|x\|$ es cota inferior de $\text{ínf}\,\|x+\lambda y\|$, así $x\perp_{Bj}y \Leftrightarrow \|x+\lambda y\| \geq \|x\| \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$ ■

Observación 1.2. Sea $(X, (.|.))$ un espacio con producto interno. Entonces

$$s(x,y) = \sqrt{1 - \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2}} \text{ para todo } x,y \in X/\{0\} \tag{1.3}$$

En particular $s(x,y) = s(y,x)$. Por otra parte si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado de al menos de dimensión 3 y tenemos que $s(x,y) = s(y,x)$ $\forall x,y \in X$, entonces X tiene que ser un espacio con producto interno.

Demostración.

Fijemos $x, y \in X$ $x, y \neq 0$ y hagamos $a := \|x\|^2$, $b := \|y\|^2$, $c := (x|y)$

Vamos a determinar el número real λ_0 tal que para este número la expresión $h(\lambda) = \frac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|}$ es mínima. Como h es no negativa, es suficiente considerar su cuadrado.

$$\frac{\|x + \lambda y\|^2}{\|x\|^2} = \frac{(x + \lambda y|x + \lambda y)}{(x|x)^2}$$

$$= \frac{(x|x) + (x|\lambda y) + (\lambda y|x) + (\lambda y|\lambda y)}{(x|x)^2}$$

$$= \frac{(x|x)^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y)^2}{(x|x)^2} = \frac{a + 2\lambda c + \lambda^2 b}{a}$$

la expresión anterior (y por lo tanto tambien h) es mínima para $\lambda_0 = -\frac{c}{b}$.

$$h^2(\lambda) := \frac{\|x + \lambda y\|^2}{\|x\|^2} = \frac{a + 2\lambda c + \lambda^2 b}{a}$$

$$h(\lambda) := \sqrt{\frac{\|x + \lambda y\|^2}{\|x\|^2}} = \sqrt{\frac{a + 2\lambda c + \lambda^2 b}{a}}$$

Derivando con respecto a λ

$$h'(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{(a + 2\lambda c + \lambda^2 b)}{a}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2c + 2\lambda b}{a}\right) = \frac{2c + 2\lambda b}{2a\sqrt{\frac{a+2\lambda c+\lambda^2 b}{a}}}$$

$$= \frac{2(c + \lambda b)}{2a\sqrt{\frac{a+2\lambda c+\lambda^2 b}{a}}}$$

$$= \frac{c + \lambda b}{a\sqrt{\frac{a+2\lambda c+\lambda^2 b}{a}}}$$

Igualando a cero $h'(\lambda) = 0$

$h'(\lambda) = c + \lambda b = 0$

$\lambda_0 = -\frac{c}{b}$

Usando este valor de λ_0 obtenemos que

$$s(x,y) = \sqrt{\frac{a + 2\lambda_0 c + \lambda_0^2 b}{a}} = \sqrt{\frac{a - 2\left(\frac{c}{b}\right)c + \left(\frac{c^2}{b^2}\right)b}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{a - \frac{2c^2}{b} + \frac{c^2}{b}}{a}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{c^2}{b}}{a}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{c^2}{ab}} = \sqrt{1 - \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}}$$

.

Ahora, supongamos que X es un espacio normado de por lo menos de dimensión 3, tal que $s(x,y) = s(y,x)$ $\forall x, y \in X$. Por la observación (1.1) deducimos que $x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow x \perp_{BJ} x$

De la observación (1.1) sabemos que

$x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow s(x,y) = 1$

$$x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow s(x,y) = 1$$

$$\Leftrightarrow s(y,x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \|y + \lambda x\| \geq \|y\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y \perp_{BJ} x$$

La simetría de la ortogonalida de Birkhoff- James en un espacio de dimensión superior a 2, esto implica que este es un espacio con producto interno.(Ver [1]) ■

¿ Qué pasa con la continuidad de la función s ? Si interpretamos a s como el valor absoluto del seno del ángulo entre los vectores x y y, entonces no podemos esperar que la continuidad de s en un punto (x, y) tal que uno de los vectores x, y es igual a cero. Sin embargo, a exepción de estos puntos, la función s es continua.

Sea θ el ángulo entre los vectores x y y, así $s(x, y) = |sen(\theta)|$. Sabemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Así, $(x|y) = \|x\| \, . \, \|y\| \, cos\theta \;\; x, y \neq 0$

$$cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|}$$

así de la observación (1.2) nos queda

$s(x, y) = \sqrt{1 - cos^2\theta} = |sen\theta|$ ■

Teorema 1.1. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio lineal normado real de por lo menos de dimensión 2. Entonces la función* $s|(X/\{0\}) \times (X/\{0\})$ *es continua.*

Demostración.

Como $s(x \times x) \subset [0, 1]$, inferimos que

$$\limsup_{n\to\infty} s(x_n, y_n)$$

es finito. Ahora tomando $(x, y) \in X \times X$, $x, y \neq 0$ y asumiendo que existen sucesiones $(x_n, y_n) \to (x, y) \leftarrow (x'_n, y'_n)$ tal que $s(x_n, y_n) \to \alpha$ y $s(x'_n, y'_n) \to \alpha_1$, para algunos números rales $\alpha \neq \alpha_1$. Asumiendo también que los $x_n, y_n, x'_n, y'_n \neq 0$. Vamos a demostrar que esta suposición conduce a una contradicción. Supongamos que $\alpha > \alpha_1$ y denotemos $\epsilon = \alpha - \alpha_1$. Ya que $x \neq 0$ podemos reemplazar (x, y) por $\left(\frac{x}{\|x\|}, y\right)$ y haciendo lo mismo con las coordenadas de (x_n, y_n) por $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, y_n\right)$ y (x'_n, y'_n) por $\left(\frac{x'_n}{\|x'_n\|}, y'_n\right)$. Los puntos resultantes seguirán teniendo todas las propiedades asumidas. En consecuencia no hay pérdida de generalidad al suponer que $\|x\| = \|x_n\| = \|x'_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde

$$\min_{\lambda} \|x_n + \lambda y_n\| \to \alpha$$

y

$$\min_{\lambda} \|x'_n + \lambda y'_n\| \to \alpha_1$$

por lo tanto,

$\|x_n + \lambda_n y_n\| \to \alpha$ y $\|x'_n + \lambda'_n y'_n\| \to \alpha_1$ Donde λ_n y λ'_n son números reales tal que las expresiones consideradas son mínimas. Por otra parte,

$$\|x_n + \lambda_n y_n\| \leq \|x_n + \lambda y_n\| \tag{1.4}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{R}$.

Tenemos también $\|x'_n + \lambda'_n y'_n\| = s(x'_n, y'_n) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte

$$\begin{gathered} \|x'_n + \lambda'_n y'_n\| = \|(-\lambda'_n y'_n - x'_n)\| \\ \geq \|-\lambda'_n y'_n\| - \|x'_n\| = |\lambda'_n| \, \|y'_n\| - \|x'_n\|, \;\; n \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

Estas condiciones juntas con $y'_n \to y \neq 0$ significa que la sucesión (λ'_n) es acotada.

$$\|x'_n + \lambda'_n y'_n\| \geq |\lambda'_n| \, \|y'_n\| - \|x'_n\|$$

$$|\lambda'_n| \leq \frac{\|x'_n + \lambda'_n y'_n\| + \|x'_n\|}{\|y'_n\|} \leq \frac{1 + \|x'_n\|}{\|y'_n\|} = \frac{2}{\|y'_n\|}$$

En consecuencia, sin perdida de generalidad podemos asumir que λ_1, es un número real tal que $\lambda'_n \to \lambda_1$. Note que

$$|\|x_n + \lambda_1 y_n\| - \|x'_n + \lambda_1 y'_n\|| < \frac{\epsilon}{9} \tag{1.5}$$

$$||\|x'_n + \lambda_1 y'_n\| - \|x'_n + \lambda'_n y'_n\|| < \frac{\epsilon}{9} \tag{1.6}$$

Así como

$$|\alpha_1 - \|x'_n + \lambda'_n y'_n\|| < \frac{\epsilon}{9} \tag{1.7}$$

Por lo tanto

$$|\alpha_1 - \|x_n + \lambda_1 y_n\|| = |\alpha_1 - \|x'_n + \lambda'_n y'_n\| + \|x'_n + \lambda'_n y'_n\|| - \|x'_n + \lambda_1 y'_n\| + \tag{1.8}$$

$\|x'_n + \lambda_1 y'_n\| - \|x_n + \lambda_1 y_n\|$
$\leq |\alpha_1 - \|x'_n + \lambda'_n y'_n\|| + ||\|x'_n + \lambda_1 y'_n\| - \|x'_n + \lambda'_n y'_n\| + ||\|x_n + \lambda_1 y_n\| - \|x'_n + \lambda_1 y'_n\|||$
$< \frac{\epsilon}{9} + \frac{\epsilon}{9} + \frac{\epsilon}{9} = \frac{\epsilon}{3}$ (de (1.5),(1.6), (1.7))
Para todo $n \in \mathbb{N}$ es decir $n \geq n_0$. Por otra parte

$$\|x_n + \lambda_n y_n\| > \alpha - \frac{\epsilon}{3} \qquad n \geq n_1 \tag{1.9}$$

Como $|\alpha_1 - \|x_n + \lambda_1 y_n\|| < \frac{\epsilon}{3}$ tenemos
$-\frac{\epsilon}{3} < \alpha_1 - \|x_n + \lambda_1 y_n\| < \frac{\epsilon}{3}$
$-\alpha_1 - \frac{\epsilon}{3} < -\|x_n + \lambda_1 y_n\| < \frac{\epsilon}{3} - \alpha_1$
$\alpha_1 - \frac{\epsilon}{3} < \|x_n + \lambda_1 y_n\| < \frac{\epsilon}{3} + \alpha_1$
Es decir para $n \geq n_1$. Finalmente usando (1.8) y (1.9), llegamos a la conclusión de que para todo $n \geq \text{máx}(n_0, n_1)$ tenemos
$\|x_n + \lambda_n y_n\| > \alpha - \frac{\epsilon}{3} > \alpha_1 + \frac{\epsilon}{3} > \|x_n + \lambda_1 y_n\|$
Ya que $\alpha > \alpha_1$, lo cual contradice (1.4). Esta contradicción muestra que para cada $(x, y) \in X \times X, x, y \neq 0$ la función s tiene un límite en ese punto. Para terminar la prueba , basta con observar que podemos tomar (x_n, y_n) igual a (x, y) en la primera parte de la prueba, es decir

$$\limsup_{n \to \infty} s(x_n, y_n) = s(x, y)$$

■

Como ya hemos mencionado la función s puede ser vista como el valor absoluto del seno del ángulo entre los vectores x y y varios hechos acerca de la función s tambien se pueden observar. Especialmente, en los espacios con productos internos esta función tiene muchas propiedades interesantes, por ejemplo, nuestra siguiente observación establece que un espacio con producto interno en cada triángulo isósceles los valores absolutos del seno del ángulo entre la mediana y los dos lados iguales son los mismos.

Observación 1.3. Si $(X, (.|.))$ es un espacio real del producto interno, entonces para todo $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\|$ tenemos

$$s(x, x+y) = s(y, x+y) \tag{1.10}$$

Usando la observación (1.2) tenemos
$s(x, x+y) = \sqrt{1 - \frac{(x|x+y)^2}{\|x\|^2\|x+y\|^2}}$ para todo $x, x+y \in X/\{0\}$

$$= \sqrt{1 - \frac{(x|x+y)^2}{\|y\|^2\,\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{[(x|x) + (x|y)]^2}{\|y\|^2\,\|y\|^2 + 2(x|y) + \|x\|^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{[(\|x\|^2 + (x|y)]^2}{\|y\|^2\,\|y+x\|^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(\|y\|^2 + \langle x, y\rangle)^2}{\|y\|^2\,\|y+x\|^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(y|y+x)^2}{\|y\|^2\,\|y+x\|^2}}$$
$$= s(y, x+y)$$

■

Observación 1.4. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado y sea $x, y \in X$. Si a, b, c, d son números reales que $\angle((1,0),(a,b)) = \angle(1,0),(c,d))$, entonces $s(x, ax+by) = s(x, cx+dy)$

Demostración.

Sabemos por proposición (1.1) que $s(\alpha x, \beta y) = s(x, y)$, $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Por otra parte el punto (a, b) es combinación lineal de (c, d), por lo tanto $(a, b) = \beta(c, d)$

$s(x, ax + by) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda(ax+by)\|}{\|x\|}$

$$= \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x + \lambda(\beta(cx + dy))\|}{\|x\|}$$

$$= s(x, \beta(cx + dy))$$

$$= s(x, cx + dy)$$

Esto es una consecuencia directa de la proposición (1.1) ■

Ahora estamos en condiciones de formular la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real de al menos dimensión 2. Tomando $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y de tal manera que $X\perp_{BJ}y$. Definir una función $\phi_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la siguiente formula

$$\phi_{x,y}(t) = Sign(b).s(x, ax + by) \;\; t \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que el ángulo entre el vector (a, b) y el vector $(1, 0)$ es igual a t.

Observación 1.5. Si $(X, (.|.))$ es un espacio real del producto interno y $t \in (0, \pi/2)$ entonces para todo $x, y \in X$ con $x\perp y$ $\|x\| = \|y\| = 1$ tenemos

$$\phi_{x,y}(\pi/2 + t) = \phi_{x,y}(\pi/2 - t) \tag{1.12}$$

Demostración.

Fijemos $x, y \in X$ satisfaciendo las hipótesis de la observación y hagamos $z := ax + by$ donde a, b son números reales que satisfacen la igualdad $\frac{b}{a} = \tan(\frac{\pi}{2} + t)$. Entonces

$\phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} + t) = s(x, z) = s(z, x) = s(-z, x) = s(-ax - by, x)$

$$= s(-ax - by, -2ax)$$

Ahora utlizando la observación (1.3), obtenemos
$s(-ax-by,-2ax) = s(-ax+by,-2ax)$
y más
$s(-ax+by,-2ax) = s(x,-ax+by) = \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2}-t)$
Por lo tanto, la observación se ha demostrado. ■

Ejemplo 1.1. Si $(X,(.|.))$ es un espacio real con producto interno, entonces para todos los vectores unitarios $x,y \in X$ tales que $x \perp y$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos $\phi_{x,y}(t) = \sin(t)$

Demostración.
Tomando $x \in X$, $\|x\| = 1$ y $y \in X$ tal que $y \perp x$, $\|y\| = 1$. Entonces para cada z de la forma $z = ax + by$ tenemos que $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Tomando un $t \in (0,\pi/2)$ y escribiendo

$$\begin{aligned}\phi_{x,y}(t) = s(x, x+\tan(t)y &= \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x+\lambda(x+\tan(t)y)\|}{\|x\|} \\ &= \sqrt{\min_{\lambda\in\mathbb{R}} (1+\lambda)^2 + \lambda^2\tan^2(t)}\end{aligned}$$

Obviamente, la formula anterior como una función de λ alcanza su mínimo en $\lambda = -\cos(t)$

$$\frac{\|x+\lambda(x+\tan(t)y)\|^2}{\|x\|} = (1+\lambda)^2 + \lambda^2\tan^2(t)$$

Sea $h(\lambda) = \sqrt{(1+\lambda)^2 + \lambda^2\tan^2(t)}$
Derivando respecto a λ

$$\begin{aligned}h'(\lambda) &= \frac{1}{2}\left((1+\lambda)^2 + \lambda^2\tan^2(t))\right)^{-1/2}.\left(2(1+\lambda)+2\lambda\tan^2(t)\right) \\ &= \frac{2(1+\lambda)+2\lambda\tan^2(t)}{2\sqrt{(1+\lambda)^2+\lambda^2\tan^2(t)}}\end{aligned}$$

Igualando a cero $h'(\lambda) = 0$

$$2(1+\lambda)+2\lambda\tan^2(t) = 0$$

$$2 + 2\lambda + 2\lambda \tan^2(t) = 0$$

$$2 + 2\lambda(1 + \tan^2(t) = 0$$

Despejando a λ

$$\lambda = \frac{-1}{1 + \tan^2(t)} = \frac{-1}{\sec^2(t)} = \frac{-1}{\frac{1}{\cos^2(t)}} = -\cos^2(t)$$

Así $\lambda = -\cos^2(t)$, sustituyendo nos queda

$$\phi_{x,y}(t) = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \cos^4(t).\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}$$

$$= \sqrt{\sin^4(t) + \cos^2(t)\sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)\sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t)} = \sin(t),\ t \in (0, \pi/2)$$

Si ahora $t \in (\pi/2, \pi)$ entonces la igualdad deseada resulta de la observación (1.5). Para $t \in (\pi, 2\pi)$ tenemos tambien $\phi_{x,y}(t) = \sin(t)$ porque $s(x_1, -x_2) = s(x_1, x_2)$. Para valores grandes de t solo necesitamos tener en cuenta que $\phi_{x,y}$ es periodica con periodo igual a 2π. Para $t = \pi$ tenemos $\phi_{x,y} = 0$, si $t = \pi/2$ entonces tenemos que $\phi_{x,y} = 1$
$\phi_{x,y}(t + 2\pi) = \phi(t) = \sin(t)$ ■

Es fácil comprobar que en espacios normados que no son funciones de espacios con producto interno la función $\phi_{x,y}$ deja de ser la función seno. La norma no siempre proviene de un producto interno. Echemos un vistazo al siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Considerar el espacio $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(a,b)\| = \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Entonces

$$\phi_{(1,0),(0,1)}(t) = \begin{cases} \frac{\tan(t)}{1+\tan(t)} & t \in [0, \pi/2] \\ 1 & t = \pi/2 \end{cases}$$

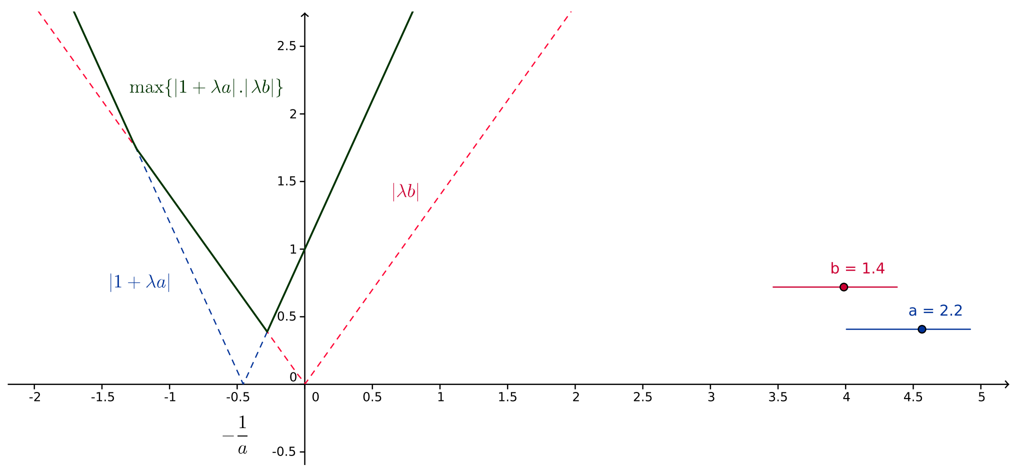
Usando la definición (1.2) tenemos que:

$\phi_{(1,0)(0,1)}(t) = Sign(b)s((1,0),(a,b)), a, b \in \mathbb{R}$

$= Sign(b) \inf\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\|(1,0)+\lambda(a,b)\|}{\|(1,0)\|}$

$= Sign(b) \inf \text{máx}\{|1+\lambda a|, |\lambda b|\}$

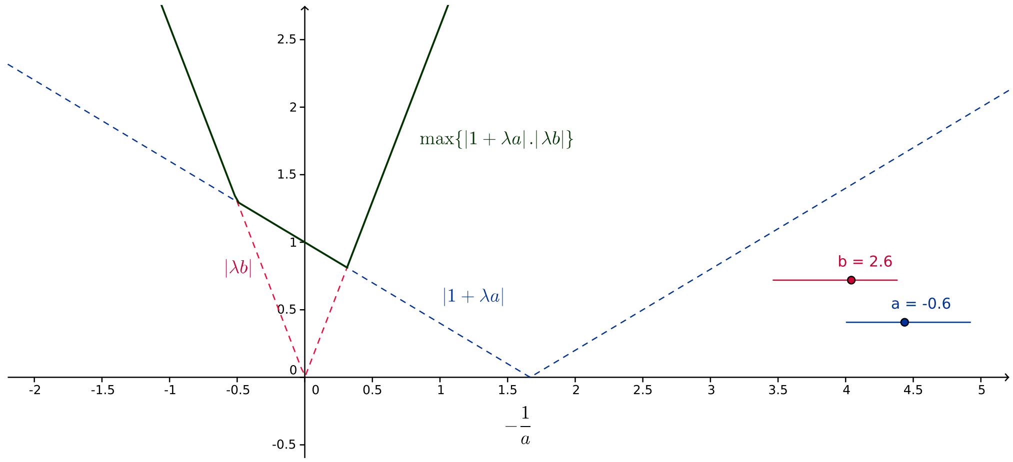
Caso $a > 0$



Igualando $|1+\lambda a| = |\lambda b|$, obtenemos que $\lambda = \frac{-1}{a-b}$, sustituyendo este valor en $|\lambda b|$ tenemos que $\left|\frac{-b}{a-b}\right| = \frac{|b|}{|a-b|} = \frac{\left|\frac{b}{a}\right|}{\left|1-\frac{b}{a}\right|}$

$$\phi_{(1,0),(0,1)}(t) = \begin{cases} Sign(b)\frac{\left|\frac{b}{a}\right|}{\left|1-\frac{b}{a}\right|} & a \neq 0 \\ Sign(b) & a = 0 \end{cases}$$

Caso $a < 0$



El recíproco del ejemplo (1.1) se cumple. La respuesta la daremos más adelante en este artículo.

Capítulo 2

“ Una generalización de la función seno”

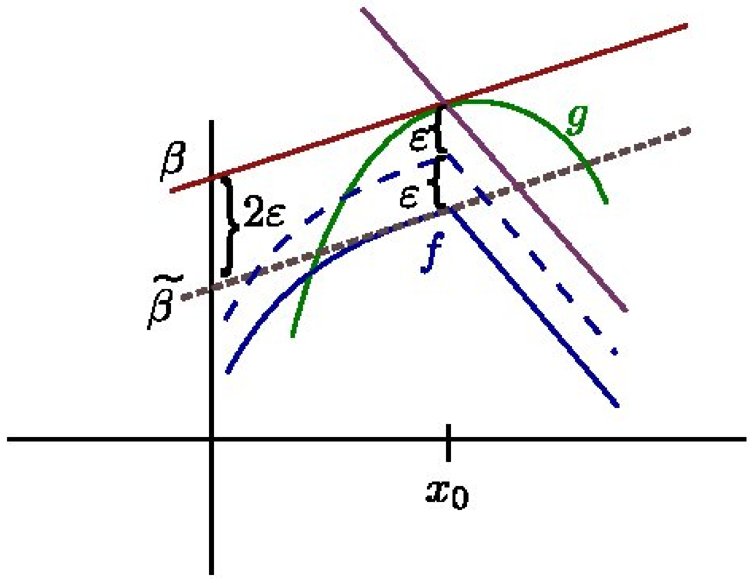
Los lemas siguientes son muy importantes ya que nos van ayudar a demostrar el resultado principal de este trabajo. Trataremos con funciones cóncavas, líneas horizontales y líneas de soporte para una función f, que son líneas que tienen un punto en común con el gráfico de f y se ecuentran por encima de la función.

Lema 2.1. *Sea $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ dadas funciones cóncavas. Si existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $g(x_0) > f(x_0)$, entonces existe una línea recta $L := \{(x, cx + d) : x \in \mathbb{R}\}$ que no es horizontal teniendo un punto en común con el gráfico de g y satisface la siguiente condición: $cx + d > f(x) + \epsilon, \forall x \in (a, b)$ y algún $\epsilon > 0$*

Demostración.
Supongamos que $\epsilon = \frac{g(x_0)-f(x_0)}{2}$ y vamos a distinguir dos casos:

1. Cualquiera de las dos $f'_+ \neq 0$ o $f'_- \neq 0$
2. $f'(x_0) = 0$

Si ocurre 1, entonces existe una linea no trivial $\tilde{L} = \{(x, \alpha x + \tilde{\beta}) : x \in \mathbb{R}\}$
con $\alpha \neq 0$ que soporta la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ y es suficiente tomar $L := \{(x, \alpha x + \beta) : x \in \mathbb{R}\}$, donde $\beta = \tilde{\beta} + 2\epsilon$.



En el caso 2, tenemos $f'(x_0) = 0$. Entonces la función tiene un máximo local en x_0, más allá de la concavidad de esta función, inferimos que

$$f(x) \leq f(x_0) < g(x_0)$$

Para todo $x \in (a, b)$. Definir $c := \frac{\epsilon}{x_0 - a}$ y $d := g(x_0) - \frac{\epsilon x_0}{x_0 - a}$.
Entonces la función $h(x) = cx + d$ es creciente .
$h(a) = ca + d = \frac{\epsilon.a}{x_0 - a} + g(x_0) - \frac{\epsilon.x_0}{x_0 - a}$

$$= g(x_0) + \frac{\epsilon.a - \epsilon.x_0}{x_0 - a}$$

$$= g(x_0) - \epsilon\frac{(x_0 - a)}{x_0 - a}$$

$$= g(x_0) - \epsilon > \text{máx}\, f(x) + \epsilon, \;\; x \in (a, b)$$

Así, $cx + d > f(x) + \epsilon \;\; \forall x \in (a, b), \epsilon > 0$
Lo que significa que la linea definida por la forma $y = cx + d$ satisface la última de las condiciones deseada, para terminar la prueba es suficiente observar que

$$c.x_0 + d = \frac{\epsilon}{x_0 - a}x_0 + g(x_0) - \epsilon\frac{x_0}{x_o - a} = g(x_0)$$

Es decir, esta línea tiene un punto en común con el gráfico de g. ■

Lema 2.2. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio normado. Si* $x, y \in X$ *son vectores unitarios, entonces el conjunto*

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|ax + by\| = 1, |a| < 1, b > 0\}$$

es el gráfico de una función cóncava $f : (-1, 1) \to (0, \infty)$.

Demostración.
Por brevedad escribiremos $\|(a, b)\|$ en lugar de $\|ax + by\|$. Notemos que para cada $t \in (-1, 1)$ existe $f(t) > 0$ tal que el punto $(t, f(t))$ es un elemento de S. En efecto, $\|(t, o)\| = \|tx + 0y\| = \|tx\| = |t| \, \|x\| = |t| < 1$
$(t, f(t)) \in S$
$\|tx + f(t)y\| = 1$, $|t| < 1$, $f(t) > 0$
por otra parte, para cada $t \in (-1, 1)$ tenemos

$$\lim_{S \to \infty} \|(t, S)\| = \infty$$

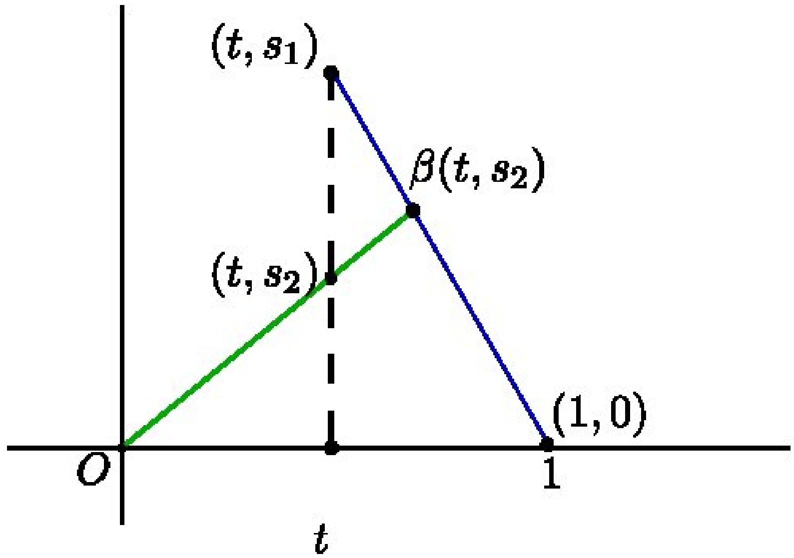
Ahora vamos a demostrar que para cada $t \in (-1, 1)$ existe exactamente un correspondiente punto $f(t)$. Supongamos que

$$\|(t, S_1)\| = \|(t, S_2)\| = 1 \tag{2.1}$$

para algunos números reales S_1, S_2 y algún $t \in (-1, 1)$. Supongamos que $S_1 \geq S_2$, entonces $(t, S_2) = \lambda(t, S_1) + (1 - \lambda)(t, 0)$ y $S_2 = \lambda S_1$, para algún $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} (t, S_2) &= \lambda(t, S_1) + (1 - \lambda)(t, 0) \\ &= (\lambda t, \lambda S_1) + (t - \lambda t, 0) \\ &= (\lambda t + t - \lambda t, \lambda S_1) \\ &= (t, \lambda S_1) \end{aligned}$$

así, $S_2 = \lambda S_1$ para algún $\lambda \in [0, 1]$ Vamos a demostrar que $\lambda = 1$. En efecto, considerar el caso de $t > 0$ Sea β tal que $\beta(t; S_2)$ esta en el segmento de extremo (t, S_1) y $(1, 0)$ es



decir, tal que existe $\alpha \in [0,1]$ para el cual

$$\begin{aligned}\beta(t,S_2) &= \alpha(t,S_1) + (1-\alpha).(1,0)\\ &= (\alpha t, \alpha S_1) + (1-\alpha, 0)\\ &= (\alpha t + 1 - \alpha, \alpha S_1)\end{aligned}$$

Observe que $\beta \geq 1$ ya que, igualando coordenadas en la última igualdad se tiene $\beta t = \alpha t + 1 - \alpha$, de esta forma
$\beta \geq 1 \Leftrightarrow \beta t \geq t \Leftrightarrow \alpha t + 1 - \alpha \geq t \Leftrightarrow \alpha(t-1) \geq t-1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ (ya que $t \in (0,1)$)
Entonces,
$1 \leq \beta = \|\beta(t,S_1)\| = \|\alpha(t,S_1) + (1-\alpha)(1,0)\|$

$$\begin{aligned}&\leq \alpha \|(t,S_1)\| + (1-\alpha)\|(1,0)\|\\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\end{aligned}$$

Luego $\beta = 1$, de donde

$$(t,S_2) = \alpha(t,S_1) + (1-\alpha)(1,0) \tag{2.2}$$

pero tambien, (t, S_2) está en el segmento, entre (t, S_1) y $(t, 0)$
Así

$$(t, S_2) = \lambda(t, S_1) + (1-\lambda)(t, 0) = \lambda(t, S_1) + (1-\lambda)t(1, 0) \tag{2.3}$$

Igualando (2.2) y (2.3) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha t + (1-\alpha) = \lambda t + (1-\lambda)t \\ \alpha S_1 = \lambda S_1 \end{cases}$$

Como $S_1 \neq 0$, $\alpha = \lambda$, sustituyendo en la primera ecuación
$1 - \lambda = (1-\lambda)t \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-t) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee t = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ (ya que $t \in (0, 1)$)
Así $\lambda = \alpha = \beta = 1$ y $(t, S_2) = (t, S_1)$ por lo que $S_2 = S_1$

Si $t < 0$, tenemos una ilustración similar
de forma similar haciendo los calculos anteriores tambien obtenemos que $S_1 = S_2$
Para $t = 0$, la igualdad es consecuencia directa de (2.1).

$$\|(0, S_1)\| = \|(0, S_2)\| = 1$$

Por lo tanto $S_1 = S_2$

Hasta ahora hemos demostrado que existe una función f tal que el conjunto S es un gráfico de esta función. Para terminar la prueba, tenemos que demostrar que esta función es cóncava. Para finalizar, tomemos $t_1, t_2 \in (-1, 1)$ y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces

$$\|\alpha(t_1, f(t_1)) + (1-\alpha)(t_2, f(t_2)\| \leq 1 \tag{2.4}$$

Por otro lado de la definición de f tenemos

$$\|\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2, f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\| = 1 \tag{2.5}$$

Además de la ecuación (2.4) implica la existencia de exactamente un $S \geq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2)$ tal que $\|\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2, S\| = 1$. Por lo tanto de la ecuación (2.5) se deduce que
$S = f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$, que demuestra la cóncavidad de f
así

$S = f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \geq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2).$ ■

Observación 2.1. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real. Tomando $x, y \in X$ de tal forma que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \perp_{BJ} y$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $\|ax + by\| = \alpha$, entonces $|a| \leq \alpha$

Demostración.

Supongamos que $x, y \in X$ tal que,$\|x\| = \|y\| = 1$

Como $x_{BJ}y$ tenemos que

$x_{Bj}y \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\| = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Así $\|x + \lambda y\| \geq 1.$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $\|ax + by\| = \alpha$ entonces

$\left\|x + \frac{b}{a}\right\| = \frac{\alpha}{|a|}$

Si $\lambda = \frac{b}{a}$ entonces $\frac{\alpha}{|a|} = \left\|x + \frac{b}{a}y\right\| \geq 1$

Si $a > 0$ entonces

$\left\|x + \frac{b}{a}y\right\| = \frac{\alpha}{a}$

Si $a < 0$ entonces

$\left\|-x - \frac{b}{a}y\right\| = \frac{\alpha}{-a}$

$\left\|-(x + \frac{b}{a}y)\right\| = -\frac{\alpha}{a}$

$\left\|x + \frac{b}{a}y\right\| = -\frac{\alpha}{a}$

$\left\|x + \frac{b}{a}y\right\| = \frac{\alpha}{|a|}$

Por lo tanto, $\frac{\alpha}{|a|} = \left\|x + \frac{b}{a}y\right\| \geq 1 \Rightarrow |a| \leq \alpha$

■

Observación 2.2. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real. Tomando $x, y \in X$ de tal forma que, $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \perp_{Bj} y$. Sea $f(-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|ax + by\| = 1, |a| < 1, b > 0\} = Grf$$

Sea además α un número positivo dado. Definir la función

$\psi_\alpha : (1-\alpha, 1+\alpha) \to \mathbb{R}$ por la formula $\psi_\alpha(a) = \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1))$. Entonces el conjunto

$$S_\alpha := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|x - (ax + by)\| = \alpha, |a-1| < \alpha, b > 0\}$$

coincide con el gráfico de ψ_α. Además los límites (finitos) de ψ_α en los puntos extremos del dominio y las siguientes igualdades tienen:

$$\lim_{a\to 1-\alpha} \psi_\alpha(a) = \sup\{b : \|(1-\alpha, b)\| = \alpha\}$$
$$\lim_{a\to 1+\alpha} \psi_\alpha(a) = \sup\{b : \|(1+\alpha, b)\| = \alpha\}$$

Demostración.

Presentaremos solo un bosquejo de la prueba. Tenemos que demostrar que para cada $(a, b) \in S_\alpha$ obtenemos $b = \psi_\alpha(a)$ (la implicación inversa se puede probar de forma similar). De la definición de S_α tenemos

$(a, b) \in S_\alpha, \quad \|x - (ax + by)\| = \alpha$

$\|-((ax + by) - x)\| = \alpha$

$\|(ax + by) - x\| = \alpha$

$\|(a-1)x + by\| = \alpha$

Como α es un número positvo, $\alpha > 0$, podemos multiplicar por $\frac{1}{\alpha}$ en ambos lados de la igualdad anterior

$\frac{1}{\alpha}\|(a-1)x + by\| = 1$

$\left\|\frac{1}{\alpha}((a-1)x + by)\right\| = 1$

Tenemos tambien $|a-1| < \alpha$ es decir $\frac{1}{\alpha}|a-1| < 1$ y $\frac{1}{\alpha}b > 0$ en donde $\frac{1}{\alpha}b = f(\frac{1}{\alpha}(a-1))$ y, en consecuencia $b = \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1)) = \psi_\alpha(a)$

La implicación inversa

$(a, b) \in Gr(\psi_\alpha) \Leftrightarrow b = \psi_\alpha(a) = \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1))$

$(\frac{1}{\alpha}(a-1), f(\frac{1}{\alpha}(a-1))) \in Grf$

por hipótesis

$\left\|\frac{1}{\alpha}(a-1)x + f(\frac{1}{\alpha}(a-1)y\right\| = 1,\ \left|\frac{1}{\alpha}(a-1)\right| < 1,\ f(\frac{1}{\alpha}(a-1)) > 0$

Sea $\alpha > 0$

$\left\|(a-1)x + \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1)y\right\| = \alpha$

$\left\|(1-a)x - \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1)y\right\| = \alpha$

$\|x - ax - by\| = \alpha$

$\|x - (ax + by)\| = \alpha \ \wedge \ |a-1| < \alpha \quad \alpha f(\frac{1}{\alpha}(a-1) > 0$

Así

$(a, b) \in Gr(\psi_\alpha) \Leftrightarrow \|x - (ax + by)\| = \alpha, \ \ |a-1| < \alpha, \quad b > 0 \Leftrightarrow (a, b) \in S_\alpha$

La segunda declaración es resultado de los hechos siguientes: Cada función cóncava definida sobre un intervalo es monótona en algunas vecindades de los extremos de este intervalo, y la esfera unitaria bidimencional es un conjunto compacto. ■

Lema 2.3. *Sea $\|.\|$ un espacio lineal normado real. Tomando $x, y \in X$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$. Sea $f_0 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función tal que*

$$Grf_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|ax + by\| = 1, |a| < 1, b > 0\}$$

Tomando tambien $t \in (0, \pi/2)$ y poniendo $L := \{(a, \tan(t)a) : a \in \mathbb{R}\}$ extender f_0 a una función continua $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.
Sea además ψ_α se define de la misma manera que en la observación 2.2. Entonces $\phi_{x,y}(t) = \alpha_0$ si y solo si $L \bigcap Gra\psi_{\alpha_0} \neq \phi$ y $L \bigcap Gr\psi_\alpha = \varnothing$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$
(En el caso de que $t \in (\pi/2, \pi)$ tendríamos que definir y utilizar un análogo de la función ψ_α con $(a - 1)$ reemplazado por $(a + 1)$).

Demostración.
($\Rightarrow$) Si $\phi_{x,y}(t) = \alpha_0$ entonces

$$\begin{aligned}\phi_{x,y}(t) = S(x, x + \tan(t)y) &= \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{\|x + \lambda(x + \tan(t)y)\|}{\|x\|} \\ &= \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x + \lambda(x + \tan(t)y)\| \\ &= \alpha_0\end{aligned}$$

Así

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x + \lambda(x + \tan(t)y)\| = \alpha_0 \tag{2.6}$$

Ahora podemos encontrar un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ de tal manera que se consigue el minimo anteriormente para λ igual a $-\lambda_0$. Entonces tenemos $\|x - \lambda_0(x + \tan(t)y\| = \alpha_0$. ya que $\alpha_0 \leq 1$, tenemos que $\|(1 - \lambda_0)x - \lambda_0 \tan(t)y\| \leq 1$. De la observación (2.1) inferimos que $\lambda_0 \geq 0$,$|1 - \lambda_0| \leq 1$.
Y además $\lambda_0(x + \tan(t)y) \in \partial k(x, \alpha_0)$ donde $\partial k(x, \alpha_0)$ representa una ésfera centrada en x y de radio igual a α_0. Escribamos estos hechos de la siguiente manera

$$\lambda_0(x + \tan(t)y) \in \partial k^+(x, \alpha_0) = \{ax + by : \|x - (ax + by)\| = \alpha_0, b \geq 0\}$$

Por otro lado la ecuación (2.6) implica que

$$\lambda(x + \tan(t)y) \notin IntK(x, \alpha_0) \tag{2.7}$$

$\|x + \lambda(x + \tan(t)y)\| \geq \alpha_0$ para todo λ. Hechemos un vistazo al conjunto $\partial k^+((1,0), \alpha_0)$ (el punto $(1,0)$ aqui se esta identificando con el vector X). De la observación (2.1) se deduce que este conjunto se puede escribir de la siguiente manera.

$$\partial k^+((1,0), \alpha_0) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(1,0) - (a,b)\| = \alpha_0, b \geq 0\} = k_1 \cup k_2$$

donde

$$k_1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(1,0) - (a,b)\| = \alpha_0, a \in (1 - \alpha_0, 1 + \alpha_0), b \geq 0\}$$

y

$$k_2 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \|(1,0) - (a,b)\| = \alpha_0, a \in \{1 - \alpha_0, 1 + \alpha_0\}, b \geq 0\}$$

Vamos a considerar el caso cuando $(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in k_1$. Tenemos entonces $k_1 \subset Gr\psi_{\alpha_0}$ Así

$$(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in k_1 \Rightarrow (\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in Gr\psi_{\alpha_0}$$

Por lo tanto, $L \bigcap Gr\psi_{\alpha_0} \neq \varnothing$, lo que significa que la primera afirmación es cierta. Por otra parte, de la condición (2.7) se deduce que L no solo tiene un punto en común con el gráfico de la función considerada, sino también $\lambda(x + \tan(t)y) \notin intK(x, \alpha_0)$
$\|(1,0) - (\lambda, \lambda \tan(t)\| \geq \alpha_0$
$(\lambda, \lambda \tan(t)) \in L$ pero $(\lambda, \lambda \tan(t)) \notin Gr\psi_\alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que significa que $L \bigcap Gr\psi_\alpha = \varnothing$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$.
Consideremos ahora el caso de $L \bigcap k_1 = \varnothing$. Entonces $(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in k_2$ y tenemos que $\lambda_0 \in \{1 - \alpha_0, 1 + \alpha_0\}$

$$\lambda_0 \tan(t) \in \{\sup\{a : \|(1 - \alpha_0, a)\| = \alpha_0\}, \sup\{a : \|(1 + \alpha_0, a)\| = \alpha_0\}\}$$

Una de las dos primeras afirmaciones es obvia. Supongamos que la última no se cumple. En tal caso se obtiene una contradicción con la condición (2.7). En efecto, la línea L contiene un punto (a_1, b_1) tal que $a_1 \in (1 - \alpha, 1 + \alpha)$ y $b_1 < f(a_1)$.Que es una consecuencia de la continuidad de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Grg = L$ y de la observación

(2.2). Tenemos $\|(a_1, b_1)\| < 1$, lo que significa que el punto (a_1, b_1) es un elemento de $intK((1,0), \alpha_0)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $L \bigcap Gr\psi_{\alpha_0} \neq \varnothing$ y $L \bigcap Gr\psi_{\alpha} = \varnothing$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Probemos que $\phi_{x,y}(t) = \alpha_0$

Como $L \bigcap Gr\psi_{\alpha_0} \neq \varnothing$ existe un $(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in L$ y $(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) \in Gr\psi_{\alpha_0}$ .Tenemos

$Gr\psi_{\alpha_0} := \{(\lambda_0, \lambda_0 \tan(t)) : \|x - (\lambda_0 \tan(t)y\| = \alpha_0, \lambda_0 \tan(t)y > 0)\}$

$\|x - (\lambda_0 \tan(t)y\| = \alpha_0$, $|\lambda_0 - 1| < \alpha_0$, $\lambda_0 \tan(t) > 0$

Sea $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

Así λ_0 es el mínimo valor para la expresión $\text{mín} \|x + \lambda(x + \tan(t)y)\| = \alpha_0$

por lo tanto $\phi_{x,y}(t) = s(x, x + \tan(t)y) = \text{mín} \|x + \lambda(x + \tan(t)y)\| = \alpha_0$

Ahora como $L \bigcap Gr\psi_\alpha = \varnothing$, existe un $(\lambda, \lambda \tan(t)) \in L$ pero $(\lambda, \lambda \tan(T)) \notin Gr\psi$ tenemos $\|x - (\lambda x + \tan(t)y\| \geq \alpha_0 > \alpha$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$

Sabemos que $(\lambda, \lambda \tan(t)) \notin Int(K)(x, \alpha_0)$

Por lo tanto, $\phi_{x,y}(t) = s(x, x + \tan(t)y) = \alpha_0$ ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este trabajo. A saber, nuestro siguiente teorema establece que si en dos espacios normados las generalizaciones de los senos son los mismos, entonces estos espacios son esencialmente los mismos.

Teorema 2.1. *Sea $(X_1, \|.\|)$, $(X_2, \|.\|)$ dos espacios lineales normados reales. Además, sea $x_1, y_1 \in X_1$ y $x_2, y_2 \in X_2$ tal que $\|x_1\| = \|y_1\| = \|x_2\| = \|y_2\| = 1$ y $x_1 \perp_{Bj} y_1$, $x_2 \perp_{Bj} y_2$ .Entonces la igualdad*

$$\phi^1_{x_1,y_1} = \phi^2_{x_2,y_2}$$

Implica que $\|ax_1 + by_1\|_1 = \|ax_2 + by_2\|_2$ para todos los números reales a, b.

Demostración.

Tomando vectores unitarios $x_1, y_1 \in X_1$ y $x_2, y_2 \in X_2$ que son respectivamente Birkhoff-James ortogonales. Designar por razones de brevedad, $\|ax_1 + by_1\|_1$ por $\|(a,b)\|_1$ y $\|ax_2 + by_2\|_2$ por $\|(a,b)\|_2$. Supongamos que existen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(a_0, b_0)\|_1 \neq \|(a_0, b_0)\|_2 \tag{2.8}$$

Vamos a demostrar que existe un $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que

$$\phi^1_{x_1,y_1}(\theta) \neq \phi^2_{x_2,y_2}(\theta)$$

Notemos que no hay perdida de generalidad al suponer que $b_0 > 0$; De hecho, si $\|(a_0, b_0)\|_1 \neq \|(a_0, b_0)\|_2$, entonces también $\|(-a_0, -b_0)\|_1 \neq \|(-a_0, -b_0)\|_2$. Definimos los conjuntos

$$S_1 := \{(a, b) : b > 0, |a| < 1, \|(a, b)\|_1 = 1\}$$

y

$$S_2 := \{(a, b) : b > 0, |a| < 1, \|(a, b)\|_2 = 1\}$$

Del lema (2.2) sabemos que estos conjuntos producen gráficos de algunas funciones cóncavas $f_0, g_0 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, respectivamente. El primer paso de la prueba es para mostrar que la condición (2.8) implica que $S_1 \neq S_2$ y, en consecuencia existe un $t \in (-1, 1)$ tal que $f_0(t) \neq g_0(t)$. Para ello notemos que

$$1 = \left\| \left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right) \right\|_1 \neq \left\| \left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right) \right\|_2 \tag{2.9}$$

Si $\left| \frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right| < 1$, entonces, evidentemente, $S_1 \neq S_2$

Tengamos en cuenta que el caso $\left| \frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right| > 1$ es imposible, ya que, de lo contrario, el uso de la observación (2.1) obtenemos

$$\left\| \left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right) \right\|_1 > 1$$

que contradice la condición (2.9). Supongamos que $\left| \frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right| = 1$. En este caso de (2.9) y usando la ortogonalidad de Birkhoff-James de x_2 y y_2, obtenemos

$$\alpha := \left\| \left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1} \right) \right\|_2 > 1$$

Considerar el vector

$$z := \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1}\right) = (z_1, z_2)$$

Por lo tanto hemos encontrado $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|z_1| < 1$, $\|z\|_2 = \|(z_1, z_2)\|_2 = 1$ y $z_2 > 0$.
Eso significa que $z \in S_2$ o, equivalentemente, $g_0(z_1) = z_2$. Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}
\|z\|_1 &= \left\|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{\|a_0, b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0, b_0)\|_1}\right)\right\|_1 \\
&= \left\|\frac{\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_1}\right)}{\left\|\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_1}\right)\right\|_2}\right\|_1 \\
&= \frac{\left\|\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_1}\right)\right\|_1}{\left\|\left\|\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_2}\right)\right\|_2\right\|_1} \\
&= \frac{1}{\left\|\left\|\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_2}\right)\right\|_2\right\|_1} \qquad \text{por } (2.9) \\
&= \frac{1}{\left\|\left\|\left(\frac{a_0}{\|a_0,b_0)\|_1}, \frac{b_0}{\|a_0,b_0)\|_2}\right)\right\|_2\right\|_1} < 1
\end{aligned}$$

ya que $\alpha > 1$.

es decir $z \notin S_1$ y finalmente, $f_0(z_1) \neq z_2$ por lo tanto $f_0(z_1) \neq g_0(z_1)$ para algunos $z_1 < 1$.
Sea f y g representando las extensiones continuas de f_0 y g_0, respectivamente, en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, es decir $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Del lema (2.1) obtenemos la existencia de una linea $b = ca + d_0$, $c \neq 0$ de tal manera que esta linea tiene un punto en común con la gráfica de f y se encuentra por encima de la gráfica de g.
Supongamos que esta función es una linea de soporte para f (es suficiente para reemplazar el número original d_0 por otro). Denotemos la abcisa del punto de contacto por t_0. Entonces

$f(t_0) = ct_0 + d_0$, $c \neq 0$ y $ct + d_0 > g(t)$
para todo $t \in [-1, 1]$.
Ahora tomemos un d_1, tal que la linea $b = ca + d_1$ es una línea de soporte para g en un punto t_1; tenga en cuenta que $d_1 < d_0$.
Asumiendo que $c > 0$; entonces tenemos $d_0 > c$. En efecto, $g(-1) \geq 0$ y

$$ct + d_0 > ct + d_1 \geq g(t)$$

Así $d_1 + ct \geq g(t)$
Sabemos que $d_0 - c > 0$ en particular $d_0 - c > d_1 - c \geq g(-1) \geq 0$. En el caso donde $c < 0$ podemos demostrar de manera similar que $d_0 > -c$. En efecto $g(1) \geq 0$ y $d_1 + ct \geq g(t)$ Para todo $t \in [a, b]$. En particular $d_0 + c > c + d_1 \geq g(1) \geq 0$.
Tomemos un $\alpha \in (0, 1]$ y consideraremos la función $\psi_\alpha : (1 - \alpha, 1 + \alpha) \to \mathbb{R}$ definida por la formula $\psi_\alpha(a) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}(a - 1)\right)$
Si $c < 0$ entonces tenemos que considerar la función similar con $(a - 1)$ reemplazado por $(a + 1)$ y la parte restante de la prueba queda igual, tenemos
$\psi_\alpha(1 + \alpha t_0) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}(1 + \alpha t_0 - 1)\right) = \alpha f(t_0)$
También notamos que la función tiene una linea de soporte en el punto $1 + \alpha t_0$ con la pendiente igual a c. Si ψ_α fue diferenciable en este punto tenemos

$$\psi'_\alpha(a) = \left[\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}(a - 1)\right)\right]'$$

$$= \alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}(a - 1)\right).\frac{1}{\alpha}$$

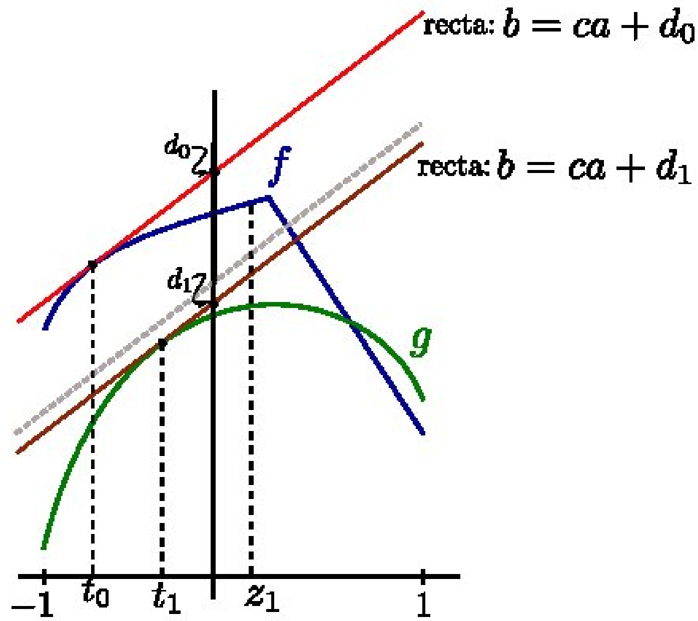
$$= f'\left(\frac{1}{\alpha}(a - 1)\right)$$

Donde, $\psi'_\alpha(1 + \alpha t_0) = f'\left(\frac{1}{\alpha}(1 + \alpha t_0 - 1)\right) = f'\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha t_0)\right) = f'(t_0)$.

Si ψ_α no fuera diferenciable en $1 + \alpha t_0$, entonces las evaluaciones se podrían hacer similares para las derivadas unilaterales y la linea con la pendiente igual a c será una linea de soporte para la función f en el punto t_0.

Resumiendo, tenemos dos lineas $L := \{(a, ca + d_0) : a \in \mathbb{R}\}$ y $L_1 := \{(a, ca + d_1) : a \in \mathbb{R}\}$, $d_0 \neq d_1$ que son lineas de soporte para f y g, respectivamente, con los correspondientes puntos de contacto $(t_0, f(t_0))$ y $(t_1, g(t_1))$ para algunos $t_0, t_1 \in [-1, 1]$ es decir $ct_0 + d_0 = f(t_0)$ y $ct_1 + d_1 = g(t_1)$.

Como $d_0 \neq 0$ estamos en condiciones de definir $\alpha_1 := \frac{c}{d_0}$, entonces



$$\psi_{\alpha_1}(1 + \alpha_1 t_0) = \alpha_1 f\left(\tfrac{1}{\alpha}(1 + \alpha_1 t_0 - 1)\right)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 f(t_0) \\ &= \frac{c}{d_0} f(t_0) \\ &= \frac{c}{d_0}(ct_0 + d_0) \\ &= \frac{c^2 t_0}{d_0} + c \end{aligned}$$

Por otro lado la línea $L^* := \{(a, ca) : a \in \mathbb{R}\}$ contiene el punto $(1 + \alpha_1 t_0, c(1 + \alpha_1 t_0))$. Tenemos

$c(1 + \alpha_1 t_0) = c + c\alpha_1 t_0 = c + \frac{c^2}{d_0} t_0 = \psi_{\alpha_1}(1 + \alpha_1 t_0)$

Lo que significa que la línea L^* contiene el punto $(1+\alpha_1 t_0, \psi_{\alpha_1}(1+\alpha_1 t_0))$. Además, la pendiente de esta recta es igual a c, lo que significa que se trata de una línea de soporte para ψ_α.

Tenemos que $1+\alpha_1 t_0 \in L^*$ y $1+\alpha_1 t_0 \in Gr\psi_{\alpha_1}$

Así $L^* \bigcap Gr\psi_{\alpha_1} \neq \varnothing$ y $L^* \bigcap Gr\psi_\alpha = \varnothing$

Por lema (2.3), tenemos que $\phi^1_{x_1,y_1}(\arctan(c)) = \alpha_1$.

De la misma manera se puede demostrar que $\phi^2_{x_2,y_2}(\arctan(c)) = \alpha_2$ para $\alpha_2 = \frac{c}{d_1}$.Como $d_0 \neq d_1$

Tenemos $\psi_{\alpha_2}(1+\alpha_2 t_1) = \frac{c^2 t_1}{d_1} + c$

Por otro lado La linea $\widetilde{L} = \{(a, ca) : a \in \mathbb{R}\}$ contiene al punto $(1+\alpha_2 t_1, c(1+\alpha_2 t_1))$. Tenemos

$$c(1+\alpha_2 t_1) = c + c\alpha_2 t_1 = \frac{c^2 t_1}{d_1} + c = \psi_{\alpha_2}(1+\alpha_2 t_1)$$

Esto significa que la línea $\widetilde{L}$ contiene el punto $(1+\alpha_2 t_1, \psi_{\alpha_2}(1+\alpha_2 t_1))$.

Además, la pendiente de esta línea es igual a c, por lo tanto es una línea de soporte para ψ_{α_2}.

Como $\widetilde{L} \bigcap Gr\psi_{\alpha_2} \neq \varnothing$ y $\widetilde{L} \bigcap Gr\psi_{\alpha_1} = \varnothing$

Por el lema (2.3) tenemos $\phi^2_{x_2,y_2}(\arctan(c)) = \alpha_2$

Así $\phi^1_{x_1,y_1} \neq \phi^2_{x_2,y_2}$, no coinciden.

Por lo tanto es una contradicción ya que $\phi^1_{x_1,y_1} = \phi^2_{x_2,y_2}$, esto implica que $\|ax_1 + by_1\|_1 = \|ax_2 + by_2\|_2$. ■

Corolario 2.1. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real. Entonces la norma $\|.\|$ proviene de un producto interno si y sólo si para todo $x, y \in X$, $x \perp_{BJ} y$ con la norma igual a 1, y para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene $\phi_{x,y}(t) = \sin(t)$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que la norma proviene de un producto interno.

Por el ejemplo (1.1) tenemos que $\phi_{x,y}(t) = \sin(t)$

($\Leftarrow$) Supongamos que la norma no p'roviene de un producto interno, entonces la función $\phi_{x,y}(t)$ deja de ser la funcion $\sin(t)$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto la norma $\|.\|$ proviene de un producto interno. ■

Teorema 2.2. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real. Si para cada $x, y \in X$, con $\|x\| = \|y\| = 1$ tal que $x \perp_{BJ} y$ y para cada $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos*

$$\phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} + t) = \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} - t) \tag{2.10}$$

Entonces $\|.\|$ proviene de un producto interno.

Demostración.

Supongamos que la norma $\|.\|$ no proviene de un producto interno. Entonces existen vectores $x, y \in X$ tal que $x \perp_{BJ} y$ y $x \not\perp y$ que adicionalmente satisfacen $\|x\| = \|y\| = 1$ ver [1]. Puesto que x y y no son James ortogonal, tenemos
$\|y + x\| \neq \|y - x\|$
Supongamos que $\|y + x\| > \|y - x\|$. De manera similar como antes, por razones de brevedad, escribiremos $\|(a, b)\|$ en lugar de $\|ax + by\|$. Sea $f_0 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$Grf_o = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a, b)\| = 1, |a| < 1, b > 0\}$$

Extendamos esta función a una función continua $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Tengamos en cuenta que a partir de $x \perp_{BJ} y$ así $\|x + \lambda y\| \geq \|x\| = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
tenemos
$\|x + \lambda y\| \geq 1$, $\|x + \lambda y\| > \|x - \lambda y\|$, $\|y + x\| > \|y - x\| \geq 1$
inferimos que $\|y - x\| \geq 1$. Por lo tanto $\|y + x\| > 1$.
Ahora, definamos $t := \frac{1}{\|y+x\|} \in (0, 1)$; entonces
$\|tx + ty\| = \|t(x + y)\| = \left\| \frac{1}{\|y+x\|}(x + y) \right\| = \frac{\|y+x\|}{\|y+x\|} = 1$
lo que significa que $t = f(t)$. Por otra parte

$$\|tx - ty\| = \left\| \frac{1}{\|x + y\|}(y - x) \right\| = \frac{\|y - x\|}{\|x + y\|} < 1$$

Es decir $\|(-t, t)\| < 1$ y, en consecuencia

$$f(-t) > t = f(t) \tag{2.11}$$

Como el punto (t, t) es un elemento de la gráfica de f, podemos encontrar una línea de soporte para la función f que contiene este punto. Denotemos esta línea por $L :=$

$\{(a,b).b = ca + d_0\}$. Entonces la línea $L^* := \{(a,b) : b = -ca + d_0\}$ no es una línea de soporte para f porque esta línea contiene el punto $(-t,t)$ que se encuentra por debajo de la grafica de f. Consideremos ahora la línea $L_1 := \{(a,b) : b = -ca + d_1\}$, donde d_1 es el número máximo de d tal que la línea $b = -ca + d$ contiene algunos puntos de la grafica de f, tenga en cuenta que $d_1 > d_0$. En consecuencia tenemos

$$f(t) = ct + d_O \quad \text{y} \quad f(t_1) = -ct_1 + d_1 \tag{2.12}$$

Para algún $t \in [-1,1]$. Asumiendo que $c < 0$ (cuando la c positiva la prueba se ejecuta de manera similar, el caso de $c = 0$ no es posible: en un caso tal $L^* = L$ pero sabemos que L es una línea de soporte para f, y L^* no es una línea de soporte para f). Resumiendo, la línea L contiene al punto $(t,t) \in Grf$, y la línea L_1 contiene un punto $(t_1, f(t_1))$ para algún $t_1 \in [-1,1]$.Así L es una línea de soporte para f.
Dado un $\alpha > 0$ consideremos las funciones

$$\psi_\alpha^+(x) := \alpha f(\frac{1}{\alpha}(x-1)), x \in (1-\alpha, 1+\alpha)$$

$|x-1| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x-1 < \alpha \Leftrightarrow 1-\alpha < x < 1+\alpha \Leftrightarrow x \in (1-\alpha, 1+\alpha)$ y

$$\psi_\alpha^-(x) := \alpha f(\frac{1}{\alpha}(x+1)), x \in (-1-\alpha, -1+\alpha)$$

$$|x+1| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x+1 < \alpha$$

$$\Leftrightarrow -1-\alpha < x < \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1-\alpha, -1+\alpha)$$

una línea con la pendiente igual a $-c$ es una línea de soporte para ψ_α^+ en el punto $(1+\alpha t_1, \psi_\alpha^+(1+\alpha t_1))$, siempre que tal línea contenga ese punto (La prueba es similar a la parte correspondiente de la demostración del teorema 2.1) Por otra parte, una línea con la pendiente igual a c que contiene el punto $(-1+\alpha t, \psi_\alpha^-(-1+\alpha t))$ es una línea de soporte para la función ψ_α^- en este punto.Consideremos ahora las líneas
$L^+ := \{(a,-ca) : a \in \mathbb{R}\}$ y $L^- := \{(a,ca) : a \in \mathbb{R}\}$
y definamos los números $\alpha^+ := -\frac{c}{d_1}$ y $\alpha^{\cdot} = -\frac{c}{d_0}$. Tenga en cuenta que $\alpha^+, \alpha^- \in (0,1]$ y $\alpha^+ \neq \alpha^-$, y estos números estan bien definidos ya que $d_0, d_1 \neq 0$. De hecho, d_1 es positivo y c es negativa por lo tanto la fracción considerada es positiva. Por otro lado,

puesto que la línea L apoya f cada punto de esta linea tiene una norma mayor o igual a 1, en consecuencia tenemos $\left\|\left(\frac{d_1}{c},0\right)\right\| \geq 1$ pero
$\left\|\left(\frac{d_1}{c},0\right)\right\| = \left|\frac{d_1}{c}\right|$ es decir $\left|\frac{d_1}{c}\right| \geq 1$.
$0 = -ct_1 + d_1$
$t_1 = \frac{d_1}{c}$, luego $\left(\frac{d_1}{c},0\right)$ es un punto de L_1, así $\left\|\left(\frac{d_1}{c},0\right)\right\| \geq 1$
Para el número α^- tenemos una situación similar. α esta bien definida, como $d_0 \neq 0$. De hecho, d_0 es positivo y c es negativa por lo tanto la fracción considerada es positiva. Por otro lado, puesto que la ínea L es una linea de soporte para f, cada punto de esta línea tiene una norma mayor o igual a 1. En consecuencia, tenemos
$0 = ct + d_0 \Rightarrow t = \frac{-d_0}{c}$
Así $\left(\frac{-d_0}{c},0\right)$ es un punto de L.
$\left\|\left(\frac{-d_0}{c},0\right)\right\| \geq 1$ pero $\left\|\frac{d_0}{c}(-1,0)\right\| = \left|\frac{d_0}{c}\right| . \|(-1,0)\| = \left|\frac{d_0}{c}\right| \geq 1$
Escribamos
$\psi^+_{\alpha^+}(1+\alpha^+ t_1) = \alpha^+ f(\frac{1}{\alpha^+}(1+\alpha^+ t_1 - 1)) = \alpha^+ f(t_1)$
$= -\frac{c}{d_1}(-ct_1 + d_1) = \frac{c^2 t_1}{d_1} - c = -c\left(1 - \frac{ct_1}{d_1}\right) = -c(1+\alpha^+ t_1)$.
Por lo tanto, la línea de L^+ contiene el punto $\left(1+\alpha^+ t_1, \psi^+_{\alpha^+}(1+\alpha^+ t_1)\right)$. Como su pendiente es igual a $-c$, esta línea soporta a $\psi^+_{\alpha^+}$.
Como $L^+ \bigcap Gr\psi^+_{\alpha^+} \neq \varnothing$ y $L^+ \bigcap Gr\psi^+_{\alpha} = \varnothing$, con $\alpha^+, \alpha \in (0,1]$
Por lema (2.3), tenemos que

$$\phi_{x,y}(\arctan(-c)) = \alpha^+$$

similarmente tenemos

$$\phi_{x,y}(\pi - \arctan(-c)) = \alpha^-$$

Escribamos
$\psi^-_{\alpha^-}(-1+\alpha^- t) = \alpha^- f(\frac{1}{\alpha}(-1+\alpha^- t + 1)) = \alpha^- f(t) = -\frac{c}{d_0}(ct + d_0) = c(-1+\alpha^- t)$
La línea L^- contiene el punto $(-1+\alpha^- t, \psi^-_{\alpha^-}(-1+\alpha^- t))$.
Como su pendiente es igual a c, esta línea soporta a $\psi^-_{\alpha^-}$
Como $L^- \bigcap Gr\psi^-_{\alpha^-} \neq \varnothing$ y $L^- \bigcap Gr\psi^-_{\alpha} = \varnothing$, con $\alpha^-, \alpha \in (0,1]$
Por lema (2.3), tenemos

$$\phi_{x,y}(\pi - \arctan(-c)) = \alpha^-$$

Por lo tanto es una traslación de π unidades hacia arriba, ya que $t = \pi/2 - \arctan(-c)$,$t \in (\pi/2, \pi)$
pero ya hemos observado que $\alpha^+ \neq \alpha^-$ lo que contradice (2.10) (con $t = \frac{\pi}{2} - \arctan(-c)$)
$\phi(\pi/2 + t) = \phi(\pi/2 + \pi/2 - \arctan(-c)) = \phi(\pi - \arctan(-c)) = \alpha^-$
$\phi(\pi/2 - t) = \phi(\pi/2 - \pi/2 - \arctan(-c)) = \phi(\arctan(-c)) = \alpha^+$
Como $\alpha^+ \neq \alpha^-$ tenemos que $\phi(\pi/2 + t) \neq \phi(\pi/2 - t)$
Así se contradice (2.3), por lo tanto la norma $\|.\|$ proviene de un producto interno. ■

Es un hecho conocido que si un espacio normado cada par x, y de los vectores ortogonales Birkhoff- James es tambien Pitágoras ortogonal entonces ese espacio es un espacio con producto interno (ver [1]).

Corolario 2.2. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio lineal normado real tal que para todo $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\|$ tenemos que*

$$\min \|x + \lambda(x + y)\| = \min \|y + \lambda(x + y)\|$$

si cada dos vectores en X que son ortogonales Birkhoff- James tambien son Pitágoras ortogonal, entonces la norma $\|.\|$ proviene de un producto interno.

Demostración.
Para probar este corolario es suficiente repetir la prueba de la observación (1.5) para obtener

$$\phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} + t) = \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} - t)$$

para todo $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \perp y$

fijemos $x, y \in X$ satisfaciendo las hipótesis de la observación (1.5) y poniendo $z := ax + by$ donde a y b son números reales que satisfacen la igualdad $\tan(\frac{\pi}{2} + t) = \frac{b}{a}$. Entonces

$$\phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} + t) = s(x, z) = s(z, x) = s(-z, x) = s(-ax - by, x) = s(-ax - by, -2ax)$$

por observación (1.2) y proposición (1.1)
Ahora, utilizando la observación (1.3) $s(x, x+y) = s(y, x+y)$ para todo $x, y \in X$ obtenemos
$s(-ax-by, -2ax) = s((-ax-by), (-ax-by) + (by-ax))$

$$= s((by-ax), (-ax-by) + (by-ax))$$

$$= s(-ax+by, -2ax)$$

Así , $s(-ax+by, -2ax) = s(-ax+y, x)$, por proposición (1.1)

$$= s(x, -ax+by), \text{ por observación (1.2)}$$

$$= \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} - t)$$

Por lo tanto $= \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} + t) = \phi_{x,y}(\frac{\pi}{2} - t)$.

Ahora, para todo $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\|$, $x \perp_y y$ y para cada $t \in (0, 2\pi)$, y luego aplicando el teorema (2.2) obtenemos que la norma $\|.\|$ proviene de un producto interno.

■

Referencias Bibliográficas

[1] D. Amir. *Characterizations of Inner Product Spaces*. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart. (1986).

[2] J. Ratz. *On orthogonally additive mappings*. Aequationes Math.(1985) **35-49**

[3] Gy. Szabó. *An conditional Cauchy equation on normed spaces*, Publ. Math. Debrecen 42. (1993).**265-271**

[4] Gy. Szabó. *Isosceles orthogonally additive mappings and inner product spaces*, Publ. Math. Debrecen 46. (1995).**373-384**

[5] T. Szostok *Modified version of Jensen equation an orthogonal additivity* , Publ. Math. Debrecen 58. (2001).**491-504**

[6] T. Szostok *On a generalized orthogonal additivity* , Bull. Polish Acad. Sci. Math.49. (2001).**395-408**