UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Conexiones en fibrados.

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Rafael Leonardo Azuaje Hidalgo.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Geometría diferencial.
Tutor: Profesor Yves Nogier.

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2014

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

CONEXIONES EN FIBRADOS.

presentado por el ciudadano BR. RAFAEL LEONARDO AZUAJE HIDALGO. titular de la Cédula de Identidad No. 19613384, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedicado a mi madre

Agradecimientos

Quiero agradecer muy especialmente a mi mama, por ser mi más grande apoyo, mi mejor amiga, mi maitica, gracias por todo ese amor gigantesco que me has dado.

A mi papa y a mis hermanos gabi y la mami por todo el apoyo y por creer en mi.

A mi tia Corina por abrirme las puertas de su casa y brindarme hospedaje durante casi toda la carrera.

A Uvencio por ser mi amigo con el que cuento todos los días y por ser junto con fercho, Andrey, Mitchell, kathe, katy, Carla negrita y Rossy mis amigos que hicieron muy agradables y constructivos estos años de estudio.

A mis amigos y compañeros de la carrera entre ellos Genesis, Deybis, Celismar, Diana, y todos los que me apoyan.

A mi tutor el profesor Yves Nogier por dedicar de su tiempo para ayudarme y guiarme con este trabajo, y por darme ánimos de continuar mis estudios y llegar a ser un buen matemático.

A mi pana Aldemar por ayudarme con el formato de la tesis y con ubuntu.

A Paulino Peña, mi profesor de matemáticas del liceo que me alentó a estudiar esta carrera.

A todos los que me han apoyado y ayudado de alguna manera.

Conexiones en fibrados.

Resumen

En este trabajo se aborda el estudio de las conexiones en fibrados y algunas de sus aplicaciones geométricas, detallando las características de las G-conexiones en los G-fibrados, donde G un grupo de Lie llamado grupo de calibre.

Debido a la naturaleza de los conceptos de estudio, el desarrollo de las lecturas requieren del conocimiento de las variedades diferenciales y de los objetos geométricos básicos

Este estudio se hace teniendo como guía el libro Gauge Fields, Knots and Gravity de John Baez y Javier P. Muniain, en particular el capítulo II.

Índice

Introducción

El término conexión apareció por primera vez en el texto de Hermann Weyl Reine Infinitesimal Geometrie. Weyl describió una conexión afín como aquella que determina como un vector $v_p \in T_pM$ infinitamente cercano a un vector $v_q \in T_qM$ se transforman bajo un transporte paralelo.

Después de introducir la teoría de conexiones en 1917 y en las dos décadas siguientes es Elie Cartan quien profundiza el desarrollo de las conexiones utilizando su propio calculo de formas diferenciales. A pesar de los progresos en la teoría de conexión por parte de Cartan existía un vacío en la clasificación general de las conexiones. Fue el estudiante de Cartan Charles Ehresmann quien finalmente y exitosamente clasificó las conexiones de manera general por los años 1950. Hacia esta clasificación Ehresmann introduce el concepto de fibrado vectorial.

El concepto moderno de conexión deriva secciones de un fibrado y también tiene un rol importante al usarse para definir el transporte paralelo. Gracias a poder describir una conexión a partir de su vector potencial se tiene una relación muy interesante entre la curvatura y el transporte paralelo.

Capítulo 1
Preliminares

En este capítulo introduciremos brevemente algunos conceptos básicos algebraicos, además estudiaremos los grupos de Lie y las álgebras de Lie, especialmente los grupos de Lie de matrices y sus respectivas álgebras de Lie, esto ya que en el capitulo 2, entre otras cosas, estudiaremos los G-fibrados y las G-conexiones, donde G es un grupo de Lie.
Iniciamos con algunos conceptos algebraicos,

1.1. Álgebra

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial y $L_1, L_2, ..., L_n$ subespacios vectoriales de V. Diremos que V es la suma directa de tales subespacios si cada vector $v \in V$ puede ser expresado de manera única como $v = v_1 + v_2 + ... + v_n$ con $v_i \in L_i$, si esto ocurre escribiremos los vectores de V como $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y escribiremos V como

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i = L_1 \bigoplus ... \bigoplus L_n$$

Definición 1.2. Sean V y V' espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m respectivamente, sean $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente, llamaremos producto tensorial de V y V' denotado por $V \bigotimes V'$, al espacio vectorial de dimensión nm que tiene como base al conjunto de expresiones de la forma

$$e_i \otimes e'_j$$

con $i = 1, 2, \cdots, n$ y $j = 1, 2, \cdots, m$.
Dados $v \in V$ y $v' \in V'$, $v = v^i e_i$ y $v' = v'^j e'_j$ definimos el producto tensorial de v y v' por

$$v \otimes v' = v^i v'^j e_i \otimes e'_j$$

Aquí hemos usado el convenio de suma de Einstein.

Definición 1.3. Sea V un espacio vectorial. Las transformaciones lineales de V en V son llamadas endomorfismos de V y el conjunto de los endomorfismos en V se denota por $End(V)$. Este es un espacio vectorial con las operaciones

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \qquad y \qquad (S+T)(v) = S(v) + T(v)$$

Para cualquier escalar α; $S, T \in End(V)$ y $v \in V$

Notemos que si tenemos una base $\{e_i\}$ de V y $\{e^j\}$ su base dual, entonces una base de $End(V)$ esta dada por los elementos e^i_j donde

$$e^i_j e_k = \delta^i_k e_j$$

donde δ^i_k es la delta de Kronecker.
Notemos además que existe un isomorfismo entre $V \bigotimes V^*$ y $End(V)$ que envía el elemento $v \otimes f \in V \bigotimes V^*$ en la transformación lineal dada por

$$x \mapsto f(x)v$$

para todo $x \in V$. En términos de las bases el isomorfismo esta dado por

$$e^i \otimes e_j \mapsto e^i_j$$

Definición 1.4. Sea V un K-espacio vectorial, denotaremos por $\Lambda^k V^*$ al espacio de todos los mapeos k-lineales alternantes

$$\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{k veces}} \longrightarrow K$$

Llamaremos álgebra exterior sobre V^* denotado por ΛV^* al espacio suma directa de los subespacios $\Lambda^k V^*$. $\Lambda^0 V^*$ es K, y $\Lambda^1 V^* = V^*$.

Definición 1.5. Sea V un K-espacio vectorial, definimos el producto Wedge

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$$

de los elementos $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ por

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = det(\varphi_i(v_j))$$

con $i, j = 1, 2, \cdots k$.

1.2. Grupos de Lie

Definición 1.6. Diremos que un grupo G es un Grupo de Lie si es una variedad diferenciable y las operaciones producto e inversa son diferenciables como mapeos entre variedades.

Definición 1.7. Un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G es un subgrupo H de G que es un grupo de Lie como una subvariedad inmersa de G.

El siguiente teorema nos proporciona una caracterización de subgrupo de Lie.

Teorema 1.1. Sea G en grupo de Lie, $H \subset G$ un subgrupo de G que es también una subvariedad embedded, entonces H es un subgrupo de Lie de G

Demostración. Veamos que los mapeos producto e inversa restrictos a H son diferenciables, en efecto, ya que el mapeo producto de $G \times G$ en G es diferenciable, entonces la restricción de $H \times H$ en G también lo es, además como H es un subgrupo de G entonces el producto restricto a $H \times H$ solo toma valores en H, y ya que H es una subvariedad embedded entonces el producto restricto de $H \times H$ en H es diferenciable, esto es por un teorema elemental de la teoría de variedades llamado el teorema de restricción del rango de mapeos diferenciables, (ver [2]). Análogamente se muestra que el mapeo inversa es diferenciable. ∎

A continuación veremos algunos grupos de Lie de matrices.

Proposición 1.1. Los siguientes conjuntos son grupos de Lie.

1. El conjunto de todas las matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas reales equipado con el producto usual de matrices es llamado el **grupo lineal general real** y lo denotamos por $GL(n, \mathbb{R})$

2. El conjunto de todas las matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas complejas equipado con el producto usual de matrices es llamado el **grupo lineal general complejo** y lo denotamos por $GL(n, \mathbb{C})$

3. El conjunto de matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas reales y determinante igual a 1 lo llamamos el **grupo especial lineal real** y lo denotamos por $SL(n.\mathbb{R})$

4. El conjunto de matrices invertibles de orden $n \times n$ con entradas complejas y determinante igual a 1 lo llamamos el **grupo especial lineal complejo** y lo denotamos por $SL(n.\mathbb{C})$

   Antes de dar el siguiente ejemplo definimos la siguiente métrica en $\mathbb{R}^n$ como sigue: Dados $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p + q = n$ definimos la métrica $d_{(p,q)}$ de signatura (p, q) por:

$$d_{(p,q)}(u, v) = u^1v^1 + u^2v^2 + \cdots + u^pv^p - u^{p+1}v^{p+1} - u^{p+2}v^{p+2} - \cdots - u^{p+q}v^{p+q}$$

5. Al conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times n$ que preservan la métrica $d_{(p,q)}$ definida arriba lo llamamos el **grupo ortogonal** y denotamos por $O(p, q)$

6. El subconjunto de $O(p, q)$ de matrices con determinante igual a 1 es llamado el **grupo especial ortogonal** y lo denotamos por $SO(p, q)$

   Si $p = n$ denotaremos al grupo ortogonal y al grupo especial ortogonal por $O(n)$ y $SO(n)$ respectivamente.

   El conjunto $SO(n, 1)$ es llamado el **grupo de Lorentz**

   El grupo $O(3, 1)$ es el conjunto de matrices 4×4 que preservan la métrica estándar de Minkowski, esta es

$$\eta(u, v) = -u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$$

7. El conjunto de todas las matrices de orden $n \times n$ con entradas complejas que preservan el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$ es llamado el **grupo unitario** y denotado por $U(n)$. Recordemos que el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$ esta dado por

$$\langle v, w \rangle = \overline{v^i}w_i$$

8. El subconjunto de $U(n)$ de matrices con determinante igual a 1 es llamado el **grupo especial unitario** y se denota por $SU(n)$.

Demostración. Es un resultado básico de álgebra que el grupo lineal general y el grupo general complejo son grupos. Se presenta la prueba para el grupo ortogonal $O(p, q)$ con $p + q = n$ y para el grupo unitario $U(n)$.
Sea $A, B \in O(p, q)$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$ veamos que $AB \in O(p, q)$, en efecto

$$d_{(p,q)}(ABu, ABv) = d_{(p,q)}(Bu, Bv) = d_{(p,q)}(u, v)$$

Ahora veamos que si $A \in O(p,q)$ entonces $A^{-1} \in O(p,q)$, en efecto

$$d_{(p,q)}(u,v) = d_{(p,q)}(AA^{-1}u, AA^{-1}v) = d_{(p,q)}(A^{-1}u, A^{-1}v)$$

Así que $O(p,q)$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$
Por otro lado, sean $A, B \in U(n)$ y $u, v \in \mathbb{C}^n$ veamos

$$\langle ABu, ABv \rangle = \langle Bu, Bv \rangle = \langle u, v \rangle$$

y además $\langle u,v \rangle = \langle AA^{-1}u, AA^{-1}v \rangle = \langle A^{-1}u, A^{-1}v \rangle$
Así que $U(n)$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$
El grupo lineal $GL(n,\mathbb{R})$ es un conjunto abierto en el espacio de matrices, así que es una subvariedad abierta n^2-dimensional de la variedad n^2-dimensional de matrices. El producto en $GL(n,\mathbb{R})$ es diferencial debido a que las entradas de la matriz producto de dos matrices $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$ son polinomios de las entradas de A y B. La función inversa es diferencial ya que la regla de Cramer expresa la inversa A^{-1} de una matriz $A \in GL(n,\mathbb{R})$ como funciones racionales de las entradas de A. De la misma manera se ve que $GL(n,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie.
Para ver que el grupo especial lineal $SL(n.\mathbb{R})$ es un grupo de Lie, consideremos el mapeo $F : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow R^*$, definido por $F(X) = detX$, donde $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - 0$, se sabe que $\det(XY) = \det(X)det(Y)$ así que F es un homomorfismo de grupos, además F es diferenciable ya que $det(X)$ se define como un polinomio de las entradas de la matriz X.
Ahora sean $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $a = det(A)$ y $L_A : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$, $L_a : R \longrightarrow R$ funciones definidas por $L_A(X) = AX$ y $L_a(x) = ax$. luego $F(X) = L_a \circ F \circ L_A(X)$ así que

$$\begin{aligned} rankDF(X) &= rankD(L_a \circ F \circ L_A(X)) \\ &= rank[aDF(A^{-1}X)DL_{A^{-1}}(X)] \\ &= rankDF(A^{-1}X) \end{aligned}$$

como esto se tiene para cualquier $A \in GL(n,\mathbb{R})$ entonces en particular se tiene $rankDF(X) = rankDF(X^{-1}X) = rankDF(I)$ esto es $rankDF(X)$ es constante. Así que por teorema de conjuntos de nivel con rango constante concluimos que $SL(n.\mathbb{R})$

es una subvariedad embedded s y así un grupo de Lie.
Análogamente se prueba que $SL(n,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie.
Ahora veamos que $O(n)$ y $SO(n)$ son grupos de Lie. Notemos que una matriz $A \in O(n)$ si y solo si, $AA^t = I_n$, definamos la función $F : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ por $F(X) = X^tX$. Sea $A \in GL(n,\mathbb{R})$, notemos que

$$F(XA^{-1}) = L_{(A^{-1})^t} \circ R_{A^{-1}} \circ F(X)$$

además

$$DF(XA^{-1}) = DL_{(A^{-1})^t} \circ DR_{A^{-1}} \circ DF(X)$$

así que

$$rankDF(X) = rankDF(XA^{-1})$$

luego igual que en el grupo especial lineal se puede concluir que $O(n)$ es un grupo de Lie. Ahora, por definición tenemos que $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$, notemos que si $A \in O(n)$ entonces $1 = det(AA^t) = detAdetA^t = (detA)^2$ de esto sigue que $detA = \pm 1$ para todo $A \in O(n)$.
Además $SO(n)$ es el subgrupo abierto de $O(n)$ de matrices con determinante positivo y es también una subvariedad embedded de dimensión $n(n-1)/2$ en $GL(n,\mathbb{R})$.
Análogamente se prueba que el grupo unitario y el grupo especial unitario son grupos de Lie. ∎

Ahora veremos el concepto de representación y sus propiedades.

Definición 1.8. Diremos que un grupo G **actúa** sobre un espacio vectorial **V** si existe una función ρ definida de G en el conjunto de operadores lineales invertibles en **V** tal que

$$\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v$$

para todo $v \in \mathbf{V}$ y para todos $g, h \in G$.
Llamamos a ρ una **representación** de G en **V**

Si denotamos por $GL(V)$ al grupo de Lie de todos los operadores lineales invertibles en V, entonces una representación de un grupo de Lie G en V no es mas que un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, donde V es de dimensión finita y ρ es diferenciable como un mapeo entre variedades.

Fácilmente se ve que si G y H son grupos de Lie entonces la suma directa de G y H también lo es. Además $G \bigoplus H$ es abeliano si y solo si G y H lo son.

En lo que sigue construiremos representaciones a partir de otras.

Definición 1.9. Sean G un grupo de Lie, V y V' espacios vectoriales de dimensión finita, ρ y ρ' representaciones de G en V y V' respectivamente, la función $\rho \oplus \rho' : G \longrightarrow GL(V \bigoplus V')$ definida por:

$$\rho \oplus \rho'(g)(v, v') = (\rho(g)(v), \rho'(g)(v'))$$

la llamaremos representación suma directa de las representaciones ρ y ρ'.

Por otro lado, la función $\rho \otimes \rho' : G \longrightarrow GL(V \bigotimes V')$ definida por

$$\rho \otimes \rho'(g)(v \otimes v') = \rho(g)(v) \otimes \rho'(g)(v')$$

la llamaremos producto tensorial de las representaciones ρ y ρ'.

Veamos que éstas son en efecto representaciones.

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $(v, v') \in V \bigoplus V'$ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho \oplus \rho'(gh)(v, v') &= (\rho(gh)(v), \rho'(gh)(v')) \\
&= (\rho(g)\rho(h)(v), \rho'(g)\rho'(h)(v')) \\
&= \rho \oplus \rho'(g)(\rho(h)(v), \rho'(h)(v')) \\
&= \rho \oplus \rho'(g)\rho \oplus \rho'(h)(v, v')
\end{aligned}$$

así $\rho \oplus \rho'$ es una representación.

Análogamente se prueba que $\rho \otimes \rho'$ es una representación. ■

Definición 1.10. Sea ρ una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V, supongamos que V' es un subespacio vectorial invariante de V por ρ en el sentido de que, para todo $v' \in V'$ se tiene que $\rho(g)(v') \in V'$ para cada $g \in G$, entonces la función ρ' tal que a cada $g \in G$ le asigna un operador lineal en V' definido por

$$\rho'(g)(v') = \rho(g)(v')$$

es en efecto una representación de G en V'. Diremos que ρ' es una subrepresentación de ρ.

Sea ρ una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V, si V no tiene subespacios invariantes por ρ diremos que ρ es irreducible.

Ejemplo 1.1. Sean ρ y ρ' representaciones de un grupo de Lie G en espacios vectoriales V y V' respectivamente, ρ y ρ' son subrepresentaciones del producto tensorial $\rho \otimes \rho'$.

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \{v \otimes 1' : v \in V\}$, este es un subespacio vectorial invariante por $\rho \otimes \rho'$ de $V \bigotimes V'$. Notemos que A es isomorfo a V así que

$$\rho(g)v = \rho(g)(v \otimes 1') = \rho \otimes \rho'(v \otimes 1')$$

de aquí que ρ es una subrepresentación del producto tensorial $\rho \otimes \rho'$. Análogamente se prueba que ρ' es una subrepresentación del producto tensorial $\rho \otimes \rho'$ definiendo $A' = \{1 \otimes v' : v' \in V'\}$. ■

Finalizamos esta sección con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Para cada n se tiene que la función ρ_n definida de $U(1)$ en $GL(\mathbb{C})$ por

$$\rho_n(e^{i\theta})(v) = e^{in\theta}v$$

es una representación y es irreducible.

Demostración. Sean $e^{i\theta}, e^{i\alpha} \in U(1)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho_n(e^{i\theta}e^{i\alpha})v &= \rho_n(e^{i(\theta+\alpha)}) \\
&= e^{in(\theta+\alpha)}v \\
&= e^{in\theta}e^{in\alpha}v \\
&= \rho_n(e^{i\theta})\rho_n(e^{i\alpha})v
\end{aligned}$$

Así que ρ_n es una representación. Además esta es irreducible, en efecto, supongamos que existe $V \subsetneq \mathbb{C}$ tal que si $v \in V$ entonces $\theta v \in V$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, ya que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial 1-dimensional, así que los únicos subespacios son los triviales entonces debemos tener que $V = \mathbb{C}$. ■

1.3. Álgebras de Lie

Definición 1.11. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G, es el espacio tangente al elemento identidad.

Definición 1.12. Dadas dos matrices S y T de orden $n \times n$, definimos su conmutador o corchete de Lie, denotado por $[S,T]$ por

$$[S,T] = ST - TS$$

La siguiente definición nos permite describir el álgebra de Lie de algunos grupos de Lie de matrices.

Definición 1.13. Se define la exponencial de una matriz compleja T de orden $n \times n$ como la siguiente serie de potencias:

$$exp(T) = 1 + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie de potencias converge.

Veamos algunas propiedades

Lema 1.1. Para cualquier matriz compleja T de orden $n \times n$ se tiene:

1. $exp((s+t)T) = exp(sT)exp(tT)$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$

2. Para T fija, $f_T(t) = exp(tT)$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en el espacio de matrices complejas $n \times n$ y $f(0)$ es la identidad.

3. $\frac{d}{dt}exp(tT)|_{t=0} = T$

Demostración. 1.

$$\begin{aligned} exp((s+t)T) &= exp(sT + tT) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(sT + tT)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=o}^{i}\frac{i!}{k!(i-k)!}(sT)^{i-k}(tT)^k \\ &= (\sum_{i=0}^{\infty}(sT)^i)(\sum_{i=0}^{\infty}(tT)^i) \\ &= exp(st)exp(tT) \end{aligned}$$

2. Sabemos que el espacio de matrices complejas de orden $n\times n$ denotado por $M_{n\times n}\mathbb{C}$ es una variedad diferenciable $2n^2$-dimensional, con una única parametrización. Sea $\{E_1, E_2, ...E_{2n^2}\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_{n\times n}\mathbb{C}$, luego definimos la parametrización $\phi : \mathbb{R}^{2n^2} \longrightarrow M_{n\times n}\mathbb{C}$ por

$$\phi(x) = x^i E_i$$

Para cualquier $A \in M_{n\times n}\mathbb{C}$ con $A = a^i E_i$. Sea $\alpha_{k,A} : \mathbb{R} \longrightarrow M_{n\times n}\mathbb{C}$ la función definida para cada $k = 0, 1, 2, ...$ por $\alpha_{k,A}(t) = \frac{t^k A}{k!}$; Veamos la representativa de $\alpha_{k,A}$, $\beta_{k,A} = \phi^{-1} \circ \alpha_{k,A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}$, esta dada por

$$\beta_{k,A}(t) = (\frac{t^k a^1}{k!}, \frac{t^k a^2}{k!}, ..., \frac{t^k a^{2n^2}}{k!})$$

$\beta_{k,A}$ es evidentemente diferenciable, así $\alpha_{k,A}$ es diferenciable. Notemos ahora que $f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k,T^k}(t)$, así f_T es diferenciable.

3.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}exp(tT)|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}(\frac{t^k T^k}{k!})|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}T^k}{(k-1)!}|_{t=0} \\ &= T\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.3. El álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ de $U(n)$ consiste de todas las matrices complejas de orden $n \times n$ skew-adjoint; una matriz T de orden $n \times n$ se dice que es skew-adjoint si $T_{ij} = -\overline{T_{ji}}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. En particular $\mathfrak{u}(1)$ consiste de los números complejos imaginarios puros.

Demostración. Sea γ un camino en $U(n)$ tal que $\gamma(0) = 1$, para cualquier par de vectores $v, w \in \mathbb{C}^n$ se tiene $\langle\gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo t, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$. Derivando esto y evaluando en $t = 0$ tenemos

$$\langle v, \gamma'(0)\rangle + \langle\gamma'(0), w\rangle = 0$$

Sea $\gamma'(0) = T \in$ una matriz compleja $n \times n$. Así que particularmente se tiene que $\langle e_i, T\rangle + \langle T, e_j\rangle = 0$ para todo i, j. Esto implica que $T_{ij} = -\overline{T_{ji}}$ así que T es skew-adjoint.

Veamos ahora que cualquier matriz compleja T skew-adjoint se encuentra en el álgebra de Lie de $U(n)$. Sea T una matriz $n \times n$ skew-adjoint, sea $\gamma(t) = exp(tT)$, veamos que γ es un camino en $U(n)$.

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n T^n / n! \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} T^n / (n-1)! \\
&= T\gamma'(t)
\end{aligned}$$

Así que para cualesquiera $v, w \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle &= \langle \gamma(t)v, \gamma'(t)w\rangle + \langle \gamma'(t)v, \gamma(t)w\rangle \\
&= \langle \gamma(t)v, T\gamma(t)w\rangle + \langle T\gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

de aquí que $\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle$ es constante con respecto de t, luego

$$\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w\rangle = \langle \gamma(0)v, \gamma(0)w\rangle = \langle v, w\rangle$$

esto es, $\gamma(t)$ preserva el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$, así γ es un camino en $U(n)$ luego

$$T = \frac{d}{dt} exp(tT)|_{t=0} = \gamma'(0) \in \mathfrak{u}(n)$$

$\blacksquare$

Ahora estudiaremos las álgebras de Lie de manera abstracta.

Definición 1.14. Un Álgebra de Lie es un K-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ equipado con un mapeo $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $[v, w] = -[w, v]$ para todo $v, w \in \mathfrak{g}$

2. $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w]$ para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in K$

3. Identidad de Jacobi: $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$ para todo $u,v,w \in \mathfrak{g}$

Definición 1.15. Un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ es una función

$$f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

tal que

$$f([u,v]) = [f(u), f(v)])$$

para todo $u, v \in \mathfrak{g}$

Ejemplo 1.4. El espacio $Vect(M)$ de todos los campos vectoriales en una variedad M es un álgebra de Lie con el siguiente corchete de Lie:

$$[v,w](f) = v(w(f)) - w(v(f))$$

para todo $v, w \in Vect(M)$ y para toda función $f \in C^{\infty}(M)$

Demostración. Sabemos que $Vect(M)$ es un espacio vectorial real. Ahora veamos que es un álgebra de Lie, en efecto, para $u, v, w \in Vect(M)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$[v,w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) = -(w(v(f)) - v(w(f))) = -[w,v](f)$$

además

$$\begin{aligned}
[u, \alpha v + \beta w](f) &= u((\alpha v + \beta w)(f)) - (\alpha v + \beta w)(u(f)) \\
&= u(\alpha v(f) + \beta w(f)) - \alpha v(u(f)) - \beta w(u(f)) \\
&= \alpha u(v(f)) + \beta u(w(f)) - \alpha v(u(f)) - \beta w(u(f)) \\
&= \alpha(u(v(f)) - v(u(f))) + \beta(u(w(f)) - w(u(f))) \\
&= \alpha[u,v](f) + \beta[u,w](f)
\end{aligned}$$

y finalmente la identidad de Jacobi se verifica con un simple cálculo. ■

La siguiente definición nos permitirá caracterizar las álgebras de Lie de un grupo de Lie cualquiera.

Definición 1.16. Sea G un grupo de Lie, para cada $g \in G$ definimos la multiplicación izquierda por g como la función $L_g : G \longrightarrow G$ para todo $h \in G$ por

$$L_g(h) = gh$$

La multiplicación izquierda L_g es un difeomorfismo para cada g.
Por otro lado diremos que un campo vectorial v en G es invariante a izquierda si $(L_g)_* v = v$ para todo $g \in G$.

Definición 1.17. Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio cerrado bajo el corchete de Lie.

Notemos que ya que el pushforward $(L_g)_*$ es lineal el conjunto de campos vectoriales invariante a izquierda de un grupo de Lie G, forma un subespacio de $Vect(G)$, mas interesantemente, forman una subálgebra de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Lema 1.2. Sea M una variedad diferenciable y $v, w \in Vect(M)$. Sea ϕ un difeomorfismo de M, se tiene que

$$\phi_*[v, w] = [\phi_* v, \phi_* w]$$

Demostración. Sea $\phi : M \longrightarrow M$ difeomorfismo, $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $C^\infty(M)$ luego tenemos que para cada $q \in M$

$$\begin{aligned}
[\phi_* v, \phi_* w](g)(q) &= \phi_* v(\phi_* w(g))(q) - \phi_* w(\phi_* v(g))(q) \\
&= v_p(\phi^*(\phi_* w(g))) - w_p(\phi^*(\phi_* v(g))) \\
&= v_p(\phi_* w(g)(\phi)) - w_p(\phi_* v(g)(\phi))
\end{aligned}$$

donde $p = \phi^{-1}(q)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\phi_*[v, w](g)(q) &= [v, w]_p(\phi^* g) \\
&= v(w(\phi^* g))(p) - w(v(\phi^* g))(p) \\
&= v_p(w(\phi^* g)) - w_p(v(\phi^* g))
\end{aligned}$$

Además

$$\phi_* w(g)(\phi)(s) = \phi_* w(g)(\phi(s)) = w_{\phi(s)}(\phi^* g)$$

para $s \in M$, así que

$$\phi_*[v, w] = [\phi_* v, \phi_* w]$$

∎

Y finalmente este teorema nos describe el álgebra de Lie de un grupo de Lie cualquiera.

Teorema 1.2. El espacio de campos vectoriales invariantes a izquierda de un grupo de Lie G es isomorfo al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Demostración. Dado cualquier $v_1 \in \mathfrak{g}$, podemos encontrar un campo vectorial invariante a izquierda de la siguiente manera

$$v_g = (L_g)_* v_1$$

veamos que este en realidad es un campo vectorial invariantes a izquierda, en efecto, para cualquier $h \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}(L_g)_* v_h &= (L_g)_*(L_h)_* v_1\\ &= L_g L_h)_* v_1\\ &= (L_{gh})_* v_1\\ &= v_{gh}\end{aligned}$$

Por otro lado, dado cualquier campo vectorial invariante a izquierda v en G, evaluándolo en el elemento identidad obtenemos un elemento de $\mathfrak{g}$ ■

Finalizamos este capitulo con las representaciones de álgebras de Lie.

Definición 1.18. Una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V, es un homomorfismo entre álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, donde $\mathfrak{gl}(V)$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie $GL(V)$ con el corchete de Lie usual.

La siguiente definición nos permitirá estudiar las representaciones de álgebras de Lie.

Definición 1.19. El mapeo diferenciable $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ esta determinado unívocamente por las siguientes propiedades:

1. $exp(0)$ es el elemento identidad de G.

2. $exp(sx)exp(tx) = exp((s + t)x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, $s, t \in \mathbb{R}$

3. $\frac{d}{dt}exp(tx)|_{t=0} = x$

Veamos algunas propiedades de este mapeo

Teorema 1.3. Sea G un grupo de Lie de Matrices, sean $v, w \in \mathfrak{g}$, si consideramos las curvas $exp(sv)$ y $exp(tw)$ en G, entonces

$$[v, w] = \frac{d^2}{dtds}(exp(sv)exp(tw) - exp(tw)exp(sv))|_{s,t=0}$$

además

1. $[v, w] = -[w, v]$ para todo $v, w \in \mathfrak{g}$
2. $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w]$ para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in K$
3. Identidad de Jacobi: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$

Demostración. Consideremos la diferencia

$$\begin{aligned} exp(sv)exp(tw) - exp(tw)exp(sv) &= (\sum_{i=0}^{\infty}(sv)^i)(\sum_{i=0}^{\infty}(tw)^i) - (\sum_{i=0}^{\infty}(sv)^i)(\sum_{i=0}^{\infty}(sv)^i) \\ &= 1 + stvw + A - 1 - tswv - B, \\ &= st(vw - wv) + A - B \\ &= st[v, w] + A - B \end{aligned}$$

Donde A son los términos de orden superior en t y B son los términos de orden superior en s. Así que

$$\frac{d^2}{dtds}(exp(xv)exp(tw) - exp(tw)exp(sv))|_{s,t=0} = [v, w]$$

por otro lado

1. $[v, w] = vw - wv = -(wv - vw) = -[w, v]$
2. $$\begin{aligned} [u, \alpha v + \beta w] &= u(\alpha v + \beta w) - (\alpha v + \beta w)u \\ &= \alpha uv + \beta uw - \alpha vu - \beta wu \\ &= \alpha(uv - vu) + \beta(uw - wu) \\ &= \alpha[u, v] + \beta[u, w] \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]] &= u[v,w]-[v,w]u+v[w,u]-[w,u]v+w[u,v]-[u,v]w \\
&= u(vw-wv)-(vw-wv)u+v(wu-uw) \\
&-(wu-uw)v+w(uv-vu)-(uv-vu)w \\
&= uvw-uwv-vwu+wvu+vwu-vuw-wuv \\
&+uwv+wuv-wvu-uvw+vuw \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado nos dice que si tenemos una representación $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ podemos derivar esta y obtener la representación $d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. También, si tenemos una representación $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ podemos exponenciar (por así decirlo) y obtener una representación $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ tal que $d\rho = f$.

Lema 1.3. Sea $\rho : G \longrightarrow H$ un homomorfismo entre los grupos de Lie G y H. Se tiene que $d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ dado por

$$d\rho(v) = \rho_* v$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$, es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Sean $u_1, v_1 \in \mathfrak{g}$, y consideremos sus campos vectoriales invariantes a izquierda u, v respectivamente. Sea $f \in C^\infty(H)$ y $p \in H$ tal que $\rho(q) = p$, veamos que

$$\begin{aligned}
[\rho_* u, \rho_* v](f)(p) &= \rho_* u \rho_* v(f)(p) - \rho_* v \rho_* u(f)(p) \\
&= u_q(\rho_* v(f) \circ \rho) - v_q(\rho_* u(f) \circ \rho) \\
&= u_q(v(f \circ \rho)) - v_q(u(f \circ \rho)) \\
&= uv(f \circ \rho)(q) - vu(f \circ \rho)(q) \\
&= (uv - vu)(f \circ \rho)(q) \\
&= [u,v](f \circ \rho)(q) \\
&= \rho_*[u,v](f)(p)
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Fibrados y conexiones

En este capitulo estudiaremos los fibrados, especialmente los fibrados vectoriales, introduciremos el concepto de conexión, estudiaremos sus propiedades y veremos su aplicabilidad al definir transporte paralelo.

2.1. Fibrados

Definición 2.1. Un fibrado es una estructura que consiste de una variedad E, una variedad M y un mapeo sobreyectivo $\pi : E \longrightarrow M$. La variedad E es llamada el espacio total, la variedad M el espacio base y π es llamado el mapeo proyección.
Para cada punto $p \in M$ el espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$$

es llamado la fibra sobre p.

El espacio E es la unión de todas las fibras

$$E = \bigcup E_p$$

Algunas veces llamaremos a tal fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ y otas veces simplemente diremos el fibrado E. Si queremos recordar el espacio base, diremos que E es un fibrado sobre M.

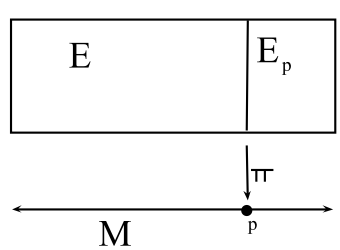

Imagen 1: El fibrado $\pi : E \longrightarrow M$

Ejemplo 2.1. El fibrado tangente de una variedad M es un Fibrado. Aquí el espacio total es TM el cual es la unión de los espacios tangentes a M

$$TM = \bigcup T_pM$$

La proyección $\pi : TM \longrightarrow M$ asigna a cada vector tangente $v_p \in T_pM$ el punto p.

Definición 2.2. Dadas dos variedades M y F, el fibrado trivial sobre M con la fibra estándar F es simplemente la suma directa $E = M \bigoplus F = M \times F$ con el mapeo proyección dado por $\pi(p, f) = p$, para todo $(p, f) \in M \times F$

Definición 2.3. Dados dos fibrados $\pi : E \longrightarrow M$ y $\pi' : E' \longrightarrow M'$ un morfismo del primer fibrado en el segundo es un mapeo $\psi : E \longrightarrow E'$ equipado con un mapeo
$\phi : M \longrightarrow M'$ tal que ψ mapea cada fibra E_p en la fibra $E_{\phi(p)}$.
Diremos que un morfismo es un isomorfismo si ϕ y ψ son ambas difeomorfismos.

El siguiente lema es una caracterización de los morfismos entre fibrados.

Lema 2.1. Dados dos fibrados $\pi : E \longrightarrow M$ y $\pi' : E' \longrightarrow M'$ se tiene que el mapeo $\psi : E \longrightarrow E'$ equipado con un mapeo $\phi : M \longrightarrow M'$ es un morfismo de fibrados si y solo si, $\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$. Además ψ determina de manera única a ϕ

Demostración. Supongamos inicialmente que ψ es un morfismo de fibrados. Sea $q \in E$, digamos que $\pi(q) = p \in M$, se tiene que

$$(\pi \circ \psi)(q) = \pi(\psi(q))$$

como ψ es morfismo entonces tenemos que $\psi(q) \in E_{\phi(p)}$, así

$$\pi(\psi(q)) = \phi(p) = \phi(\pi(q))$$

esto es,

$$\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$$

Ahora supongamos que tenemos $\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$, veamos que ψ es un morfismo,en efecto, sea $v \in E_p$ con $p \in M$, tenemos

$$\pi'(\psi(v)) = \phi(\pi(v)) = \phi(p)$$

esto es,

$$\psi(v) \in E_{\phi(p)}$$

así que ψ es un morfismo.
Supongamos ahora que existe $\phi' : M \longrightarrow M'$ tal que ψ equipado con ϕ' es un morfismo, esto es, $\pi' \circ \psi = \phi' \circ \pi$ y también $\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$ esto implica que $\phi' \circ \pi = \phi \circ \pi$, es decir, si $q \in E$, digamos que $\pi(q) = p \in M$ entonces

$$\phi'(\pi(q)) = \phi(\pi(q)) \Longrightarrow \phi'(p) = \phi(p)$$

así $\phi' = \phi$ ■

Como ψ determina de manera única a ϕ entonces diremos simplemente que ψ es un morfismo de fibrados.

Definición 2.4. Dado un fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ y una subvariedad $S \subseteq M$, definimos su fibrado restricción a S como sigue. Tomamos como espacio total

$$E|_s = \{q \in E : \pi(q) \in S\}$$

Tomamos S como espacio base y usamos π restringida a S como proyección.

Definiremos un tipo de fibrado muy especial, este luce localmente como un fibrado trivial.

Definición 2.5. Diremos que un fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ es trivial localmente con la fibra estándar F si para cada punto $p \in M$, existe una vecindad U de p y un isomorfismo de fibrados

$$\phi : E|_U \longrightarrow U \times F$$

que envía cada fibra E_p a la fibra $\{p\} \times F$. Diremos que ϕ es una trivialización local de E sobre U. Una sección de $E|_U$ es llamada una sección de E sobre U.

Ejemplo 2.2. Para cualquier variedad M, el fibrado tangente $\pi : TM \longrightarrow M$ es trivial localmente.

Demostración. Sea $p \in M$, consideremos una parametrización $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de M alrededor de p y la fibra estándar $F = \mathbb{R}^n$, definamos $\phi : TM|_U \longrightarrow U \times F$ por

$$\phi(v_q) = (q, (\varphi)_* v_q)$$

para todo $q \in U$ y $v_q \in T_qM$. Veamos que ϕ es un isomorfismo de los fibrados $\pi : TM|_U \longrightarrow U$ y $\pi' : U \times F \longrightarrow U$, equipado con el mapeo identidad $i : U \longrightarrow U$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\pi' \circ \phi)(v_q) &= \pi'((q, (\varphi)_* v_q)) \\ &= q \\ &= i(\pi(v_q)) \\ &= (i \circ \pi)(v_q)\end{aligned}$$

Así ϕ es un morfismo. Además es evidente que los mapeos i y ϕ son diferenciables, así que ϕ es un isomorfismo, por lo tanto el fibrado tangente $\pi : TM \longrightarrow M$ es trivial localmente. ∎

2.2. Fibrados vectoriales

Este tipo de fibrados juega un papel importante en la teoría de fibrados.

Definición 2.6. Un fibrado vectorial real n-dimensional es un fibrado trivial localmente $\pi : E \longrightarrow M$ tal que cada fibra E_p es un espacio vectorial n-dimensional, y además para $p \in M$, existe una vecindad U de p y una trivialización local

$$\phi : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

que mapea linealmente cada fibra E_p en la fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$.
Similarmente definimos fibrado vectorial complejo n-dimensional tomando a $\mathbb{C}^n$ para cumplir el rol de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.3. El fibrado tangente de una variedad es un fibrado vectorial.

Demostración. Sea M^n una variedad diferenciable, por ejemplo 2.2 tenemos la trivialización local $\phi : TM|_U \longrightarrow U \times F$ dada por $\phi(v_q) = (q, (\varphi)_* v_q)$ para todo $q \in U$ y $v_q \in T_qM$, donde $F = \mathbb{R}^n$
Además sabemos que $E_q = T_qM$ es un espacio vectorial real n-dimensional.Veamos que $\phi : TM|_{E_q} \longrightarrow \{q\} \times F$ es lineal, en efecto,

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $v_q, w_q \in E_q$ tenemos

$$\begin{aligned}\phi(av_q + bw_q) &= (q, (\varphi)_*(av_q + bw_q)) \\ &= (q, a(\varphi)_* v_q + b(\varphi)_* w_q) \\ &= (q, a(\varphi)_* v_q) + (q, b(\varphi)_* w_q) \\ &= a\phi(v_q) + b\phi(w_q)\end{aligned}$$

entendiendo $\lambda\phi(v_q) = (q, \lambda(\varphi)_* v_q)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Definición 2.7. Sean $\pi : E \longrightarrow M$ y $\pi : E' \longrightarrow M'$ fibrados vectoriales. Un morfismo de fibrados vectoriales del primer fibrado vectorial en el segundo es un morfismo de fibrados $\psi : E \longrightarrow E'$ donde la restricción a cada fibra E_p es lineal.

Teorema 2.1. Si un morfismo de fibrados vectoriales es un difeomorfismo, entonces su inversa es un morfismo de fibrados vectoriales.

Demostración. Sean $\pi : E \longrightarrow M$ y $\pi : E' \longrightarrow M'$ fibrados vectoriales, $\psi : E \longrightarrow E'$ un morfismo de fibrados vectoriales que es un difeomorfismo, donde ψ esta equipado con el mapeo $\phi : M \longrightarrow M'$. Mostremos que ψ^{-1} es un morfismo de fibrados vectoriales, en efecto. $\psi^{-1} : E' \longrightarrow E$ equipado con el mapeo $\phi^{-1} : M' \longrightarrow M$ es un morfismo, ya que Sea $q \in M'$ luego existe $p \in M$ tal que $\phi^{-1}(q) = p$ y sabemos que

$$\psi(E_p) = E'_{\phi p}$$

esto es

$$\psi^{-1}(E'_q) = E_{\phi^{-1}(q)}$$

así que ψ^{-1} es un morfismo de fibrados. Además notemos que $\psi^{-1}|_{E'_q}$ es invertible con inversa $\psi|_{E_p}$, como esta ultima es lineal, entonces $\psi^{-1}|_{E'_q}$ es lineal. Luego podemos concluir que ψ^{-1} equipado con ϕ^{-1} es un morfismo de fibrados vectoriales. ■

Definición 2.8. Una sección de un fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ es una función $s : M \longrightarrow E$ tal que para cualquier $p \in M$ se tiene que $s(p) \in E_p$

Supongamos que tenemos $E = M \times F$ un fibrado trivial con la fibra estándar F. Si tenemos una sección $s : M \longrightarrow E$, entonces existe una función $f : M \longrightarrow F$ tal que

$$s(p) = (p, f(p)) \in E_p$$

Recíprocamente, si tenemos una función $f : M \longrightarrow F$ entonces la formula de arriba define una sección.

Ejemplo 2.4. Una sección de un fibrado tangente es un campo vectorial. En efecto, sea $\pi : E = TM \longrightarrow M$ un fibrado tangente. Supongamos que tenemos una sección $s : M \longrightarrow E$, entonces se tiene que

$$s(p) \in E_p = T_pM$$

esto es $s(p)$ es un vector tangente a M en p, así que s define un campo vectorial en M.

Definición 2.9. Si s y s' son secciones de un fibrado E y $f \in C^\infty(M)$, definimos la sección suma $s + s'$ por

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p)$$

y definimos la sección fs por

$$(fs)(p) = f(p)s(p)$$

Denotamos al conjunto de todas las secciones de E por $\Gamma(E)$

Se ve facilmente que $\Gamma(E)$ es un modulo sobre $C^\infty(M)$

Veamos que un fibrado vectorial E tiene una base para $\Gamma(E)$ si y solo si, este es isomorfo a un fibrado trivial, donde las secciones $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ forman una base para $\Gamma(E)$ si cualquier sección $s \in \Gamma(E)$ puede ser escrita de manera única como

$$s = s^i e_i$$

donde $s^i \in C^\infty(M)$. En efecto, supongamos inicialmente que E tiene una base para $\Gamma(E)$, digamos $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, entonces E es isomorfo al fibrado $M \times K^n$ por

$$\psi((p, v)) = v^i e_i(p)$$

por otro lado si tenemos un isomorfismo de fibrados vectoriales
$\psi : M \times K^n \longrightarrow E$ entonces una base de $\Gamma(E)$ es el conjunto

$$\{\psi(z_1), \psi(z_2), ..., \psi(z_n)\}$$

donde $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ es una base para las secciones de $M \times K^n$. De aquí que cualquier fibrado vectorial tiene localmente una base de secciones.

Definiremos algunos fibrados vectoriales a partir de otros, como sigue.

Definición 2.10. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial E sobre M, definimos el fibrado dual $\pi^* : E^* \longrightarrow M$ como sigue: Ya que cada fibra E_p es un espacio vectorial entonces definimos E^* como la unión de los espacios duales E_p^* de E_p y definimos π^* por

$$\pi^*(v) = \pi(v^*)$$

donde $v^* \in E$ es el dual de v.

Teorema 2.2. Si E es un fibrado vectorial, entonces E^* es una variedad y un fibrado vectorial. También dada una base de secciones $\{e_i\}$ de un fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$, existe una única base dual $\{e^i\}$ de secciones de E^* tal que para cada punto $p \in M$, $\{e^i(p)\}$ es la base de E_p^* dual a la base $\{e_i(p)\}$ de E_p.

Demostración. Consideremos la estructura diferenciable $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ de E y definamos la estructura diferenciable $\{\varphi_\alpha^* : U_\alpha^* \subseteq E^* \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ de E^* por:

$$\varphi_\alpha^*(v) = \varphi(v^*)$$

para cada $v \in U_\alpha^* \subseteq E^*$ donde $v^* \in U$ es su dual. E^* es un fibrado vectorial ya que para cada $p \in M$ E_p^* es un espacio vectorial y existe una vecindad V de p y una trivialización local $\phi^* : E^*|_V \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$\phi^*(v) = \phi(v^*)$$

donde $\phi : E|_V \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n$ es una trivialización local de E en p; ϕ^* evidentemente mapea cada fibra E_p^* en la fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ linealmente.
Ahora definamos secciones $e^i : M \longrightarrow E^*$ por

$$e^i(p) = e_i(p)^*$$

veamos que $\{e^i\}$ es una base para las secciones de E^*, en efecto, sea $f : M \longrightarrow E^*$ una sección de E^*, sabemos que $f(p)^* \in E$ para cada $P \in M$ luego definamos $h : M \longrightarrow E$ por

$$h(p) = f(p)^*$$

Así que existen $h^i \in C^\infty(M)$ tales que $h(p) = h^i(p)e_i(p)$ y por definición de h tenemos que

$$\begin{aligned} f(p) &= h(p)^* \\ &= (h^i(p)e_i(p))^* \\ &= h^i(p)e_i(p)^* \end{aligned}$$

■

Proposición 2.1. Dados dos fibrados vectoriales E y E' sobre M, el fibrado que tiene por fibra sobre $p \in M$ el espacio $E_p \bigoplus E'_p$ es en efecto un fibrado vectorial llamado el Fibrado vectorial suma directa $E \bigoplus E'$ sobre M. También el fibrado que tiene por fibra sobre $p \in M$ el espacio $E_p \bigotimes E'_p$ es un fibrado vectorial llamado el fibrado vectorial producto tensorial $E \bigotimes E'$ de E y E'.

Demostración. Si E y E' son fibrados vectoriales sobre M, entonces para cada $p \in M$ existen trivializaciones locales $\phi : E|_U \longrightarrow U \times K^n$ y $\psi : E'|_U \longrightarrow U \times K^m$ tales que $\phi|_{E_p} : E_p \longrightarrow \{p\} \times K^n$ y $\psi|_{E'_p} : E'_p \longrightarrow \{p\} \times K^m$ son lineales. Así que $E \bigoplus E'$ es un fibrado vectorial ya que la fibras $E_p \bigoplus E'_p$ son espacios vectoriales y para cada $p \in M$ existe una vecindad U una trivialización local
$\varphi : E \bigoplus E'|_U \longrightarrow U \times K^{n+m}$ tal que $\varphi(v_p, v'_p) = (p, \phi(v_p)^2, \psi(v'_p)^2)$, donde se entiende que $\phi(v_p)^2 \in K^n$ es la segunda coordenada de $\phi(v_p)$ y $\psi(v'_p)^2 \in K^m$ es la segunda coordenada de $\psi(v'_p)$. Además tenemos que $\varphi|_{E_p \bigoplus E'_p} : E_p \bigoplus E'_p \longrightarrow \{p\} \times K^{n+m}$ es lineal.
Análogamente se ve que el fibrado vectorial producto tensorial es un fibrado vectorial.

■

El siguiente teorema nos proporciona una visión interesante acerca de las secciones de $E \bigotimes E'$.

Teorema 2.3. Suponga que E y E' son fibrados vectoriales sobre M. Una sección de $E \bigotimes E'$, puede ser escrita, no necesariamente de manera única, como una suma finita localmente de secciones de la forma $s \otimes s'$ con $s \in \Gamma(E)$ y $s' \in \Gamma(E')$

Demostración. Sea $t \bigotimes t'$ una sección de $E \bigotimes E'$, Sabemos que para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y trivializaciones local de E y E', es decir, $E|_U$ y $E'|_U$ son triviales, así que ambos fibrados tienen una base de secciones, digamos $s_1 \cdot \cdot\cdot, s_n$ base de $\Gamma(E)$ y $s'_1 \cdot \cdot\cdot, s'_n$ base de $\Gamma(E')$. Así que $t \bigotimes t' = t^i s_i \bigotimes t'^j s'_j = t^i t'^j s_i \bigotimes s'_j$. Esta manera de escribir no es única ya que podemos escribir $t \bigotimes t' = s_i \bigotimes t^i t'^j s'_j$. Así definimos

$$s = \sum_{i=1}^n s_i \text{ y } s' = \sum_{i=1}^n t_i t'^j s'_j$$ ■

Proposición 2.2. Supongamos que E es un fibrado vectorial sobre M con fibra estándar K^n, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ si tomamos como espacio total $\Lambda^i E^*$ la unión de los espacios $\Lambda^i(E_p)^*$ y la proyección π que envía $\Lambda^i(E_p)^*$ en p, entonces $\Lambda^i E^*$ es un fibrado vectorial sobre M.

Demostración. Tenemos que cada fibra $\Lambda^i(E_p)^*$ es un espacio vectorial. Como E es un fibrado vectorial, entonces para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p en M y una trivialización local

$$\psi : E|_U \longrightarrow U \times K^n$$

que mapea linealmente cada fibra E_p en $\{p\} \times K^n$. Así que definamos

$$\varphi : \Lambda^i E^*|_U \longrightarrow U \times K^{in}$$

por

$$\varphi(\bigwedge_{r=1}^{i} v_r) = (p, \prod_{r=1}^{i} (\psi^*(v_r))^2)$$

donde $v_r \in (E_p)^*$ y se entiende que $(\psi^*(v_r))^2$ es la segunda coordenada de $\psi^*(v_r)$. Luego $\Lambda^i E^*$ es un fibrado vectorial para cada i y por lo tanto ΛE^* también lo es. ■

Llamaremos fibrado álgebra exterior denotado por ΛE^* sobre M al fibrado suma directa de los fibrados $\Lambda^i E^*$.

Por otra parte, veamos una caracteristica de las secciones de $\Lambda^i T^* M$.

Sea $s : M \longrightarrow \Lambda^i T^* M$ una sección de $\Lambda^i T^* M$, luego $s(p) = \bigwedge_{k=1}^{i} \psi_k$ con $\psi_k \in T_p^* M$ así que s es una i-forma en M. Esto es, las secciones de $\Lambda^i T^* M$ están en correspondencia natural uno a uno con i-formas en M.

A continuación describiremos una receta para construir un tipo muy especial de fibrado vectorial.

Definición 2.11. Sea M una variedad diferenciable, $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M. Sea V un espacio vectorial y ρ una representación de algún grupo de Lie G en V. Pegaremos los fibrados triviales $U_\alpha \times V$ para obtener un fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$ usando funciones transición

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

Para obtener E, comenzamos con la unión disjunta

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \times V$$

y consideraremos que dos puntos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ y $(p, v') \in U_\beta \times V$ son iguales si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v'$$

Usaremos la notación $v = g_{\alpha\beta}v'$.
Este procedimiento solo dará un fibrado vectorial si las funciones trancición satisfacen un par de condiciones de consistencia. Supongamos que $p \in U_\alpha$, entonces por la receta de arriba tenemos que identificar $(p, v) \in U_\alpha \times V$ con $(p, g_{\alpha\alpha}v) \in U_\alpha \times V$, Así que se requiere que

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \text{ en } U_\alpha.$$

Ahora si suponemos $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ entonces identificaremos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ con $(p, g_{\gamma\alpha}v) \in U_\gamma \times V$ y a este lo identificamos con $(p, g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}v) \in U_\beta \times V$ Al cual finalmente identificamos con $(p, g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}v) \in U_\alpha \times V$. Asi que se requiere la condición

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$$

en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

Las condiciones anteriores implican que $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$. También para cualquier par de sucesiones $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $\beta_1, \cdots, \beta_m$ con $\alpha_1 = \beta_1$ y $\alpha_n = \beta_m$ se tiene que

$$g_{\alpha_1\alpha_2} \cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n} = g_{\beta_1\beta_2} \cdots g_{\beta_{m-1}\beta_m}$$

Veamos esto. Supongamos $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ luego identificamos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ con $(p, g_{\beta\alpha}v) \in U_\beta \times V$ y a este lo identificamos con $(p, g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}v) \in U_\alpha \times V$

Luego $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1$ esto es $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$
Ahora probemos la segunda parte. De la condición $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ obtenemos que

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\alpha}^{-1} = g_{\alpha\gamma}$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned} g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(g_{\beta_1\beta_2}\cdots g_{\beta_{m-1}\beta_m})^{-1} &= g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}g_{\beta_{m-1}\beta_m}^{-1}\cdots g_{\beta_1\beta_2}^{-1} \\ &= g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}g_{\beta_m\beta_{m-1}}\cdots g_{\beta_2\beta_1} \\ &= g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}g_{\alpha_n\beta_{m-1}}\cdots g_{\beta_2\alpha_1} \\ &= g_{\alpha_1\alpha_3}g_{\alpha_3\alpha_4}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}g_{\beta_m\beta_{m-1}}\cdots g_{\beta_2\beta_1} \end{aligned}$$

Aplicando este proceso obtenemos

$$\begin{aligned} g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n}g_{\alpha_n\beta_{m-1}}\cdots g_{\beta_2\alpha_1} &= g_{\alpha_1\alpha_n}g_{\beta_m\beta_1} \\ &= g_{\alpha_1\alpha_n}g_{\alpha_n\alpha_1} \\ &= g_{\alpha_1\alpha_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así

$$g_{\alpha_1\alpha_2}\cdots g_{\alpha_{n-1}\alpha_n} = g_{\beta_1\beta_2}\cdots g_{\beta_{m-1}\beta_m}$$

Por otro lado sea M una variedad, $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M, V un espacio vectorial y ρ una representación de algún grupo de Lie G en V. Sea $\pi : E \longrightarrow M$, donde

$$E = \bigcup_\alpha U_\alpha \times V$$

y definimos la proyección π de la siguiente manera, escribiremos $[p,v]_\alpha$ para el elemento de E que corresponde a $(p,v) \in U_\alpha \times V$, a causa de la identificación que hemos hecho, tenemos que $[p,v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta$, luego definimos

$$\pi([p,v]_\alpha) = p$$

Ahora si $g_{\alpha\alpha} = 1$ y $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ donde están definidos, entonces $\pi : E \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial. Aquí la fibra E_p sobre p es el conjunto de puntos de la forma $[p,v]_\alpha$.

En efecto, supongamos que V es un espacio vectorial n-dimensional, es fácil ver que la fibra E_p sobre p es un espacio vectorial n-dimensional con la operación + definida por

$$[p,v]_\alpha + [p,v']_\beta = [p, g_{\beta\alpha}v + v']_\beta$$

y

$$\lambda[p,v]_\alpha = [p,\lambda v]_\alpha$$

Para $p \in M$ supongamos $p \in U_\alpha$ y consideremos la función

$$\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$$

definida por

$$\varphi_\alpha([p,v]_\alpha) = (p,v)$$

tenemos que φ mapea linealmente cada fibra E_p en la fibra $\{p\} \times V$

Definición 2.12. El tipo de fibrado construido con la receta anterior es llamado G-fibrado, el grupo G es llamado el grupo de calibre y V es la fibra estándar.

La siguiente definición sera de utilidad en lo que resta.

Definición 2.13. Supongamos que tenemos un G-fibrado $\pi : E \longrightarrow M$. Sea $p \in U_\alpha$ y $T : E_p \longrightarrow E_p$ lineal, diremos que T vive en G si T es de la forma

$$[p,v]_\alpha \mapsto [p,\rho(h)v]_\alpha$$

para algún $h \in G$.
Ahora sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Diremos que T vive en $\mathfrak{g}$ si T es de la forma

$$[p,v]_\alpha \mapsto [p,d\rho(x)v]_\alpha$$

para algún $x \in \mathfrak{g}$

2.3. Transformaciones de calibre

Las transformaciones de calibre juegan un rol importante al preservar la estructura de fibrado. Dado un fibrado vectorial E sobre M, una transformación de calibre es esencialmente para cada $p \in M$ una transformación lineal en E_p que varia diferencialmente con p.

Antes de dar la definición formal de transformación de calibre, definimos fibrado endomorfismo.

Definición 2.14. Dado un fibrado vectorial E sobre una variedad M, $End(E)$ es llamado fibrado endomorfismo que denota al fibrado $E \bigotimes E^*$. La fibra de $End(E)$ sobre p es $End(E_p)$. Como resultado cualquier sección T de $End(E)$ define un mapeo de E en E que envía $v \in E_p$ en $T(p)v \in E_p$, $T(p) : E_p \longrightarrow E_p$ es lineal. Luego T actúa en cualquier sección s de E, dando una nueva sección de E definida por

$$(Ts)(p) = T(p)s(p)$$

Así que T determina una función

$$T : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

Esta función es $C^\infty(M)-$lineal, esto es

$$T(fs_1)) = fT(s_1) \qquad y \qquad T(s_1 + s_2) = T(s_1) + T(s_2)$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$ y s_1, s_2 secciones de E.

Proposición 2.3. Todo mapeo $C^\infty(M)-$lineal

$$T : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

corresponde a una sección del fibrado $End(E)$.

Demostración. Sea $T : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ un mapeo $C^\infty(M)-$lineal, mostraremos que existe una sección F de $End(E)$ tal que

$$T(s)p = F(p)s(p)$$

Primero mostraremos que T actúa localmente, esto es, si $s_1 = s_2$ en algún subconjunto abierto U de M entonces $T(s_1) = T(s_2)$ en U. Escribamos $\gamma = s_1 - s_2$, luego

$$\begin{aligned} T(\gamma) &= T(s_1 - s_2) \\ &= T(s_1) - T(s_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en U. Ahora para todo $p \in U$ sea $\varphi_p \in C^\infty(M)$ la función Bump que esta soportada en U y $\varphi_p(p) = 1$, ver [2]. Ya que $\varphi_p \gamma$ es cero en M, entonces por la linealidad de T tenemos

$$0 = T(\varphi_p \gamma) = \varphi_p T(\gamma)$$

evaluando en p se tiene

$$T(\varphi_p \gamma)(p) = \varphi_p(p) T(\gamma)(p) = T(\gamma)(p) = 0$$

Ahora mostraremos que T actúa por puntos, esto es, si $s_1(p) = s_2(p)$ entonces $T(s_1)(p) = T(s_2)(p)$. De la misma manera este resultado se obtiene suponiendo $\gamma(p) = 0$ y mostrando que $T(\gamma)(p) = 0$

Sea $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ una base local de las secciones de E en una vecindad de p, escribamos $\gamma = \gamma^i e_i$, como $\gamma(p) = 0$ entonces $\gamma^i(p) = 0$. Por el Lema de extension para fibrados vectoriales (ver [2]), existe una sección global $\gamma' = \gamma'^i e'_i$ que coincide con γ en una vecindad de p, así tenemos

$$\begin{aligned} T(\gamma)(p) &= T(\gamma')(p) \\ &= T(\gamma'^i e'_i)(p) \\ &= \gamma'(p) T(e'_i)(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definamos la sección F de $End(E)$ como sigue: para cada $p \in M$ y $v_p \in E_p$ sea

$$F(p)(v_p) = T(v)(p)$$

donde v es cualquier sección de E tal que $v(p) = v_p$, por la discusión anterior tenemos que esta definición es independiente de la elección de la sección v. ■

Definición 2.15. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un G-fibrado, con G un grupo de Lie. Supongamos que T es una sección de $End(E)$. Si $T(p)$ vive en $\mathfrak{g}$ para todo $p \in M$, diremos simplemente que T vive en $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G. Si $T(p)$ vive en G para todo $p \in M$, diremos que T es una Transformación de calibre. El conjunto de todas las transformaciones de calibre denotado por $\mathcal{G}$ es un grupo con las operaciones

$$(gh)(p) = g(p)h(p) \text{ y } g^{-1}(p) = g(p)^{-1}$$

Proposición 2.4. El producto y la inversa de transformaciones de calibre es una Transformación de calibre, y la identidad es una Transformación de calibre.

Demostración. Sean T, F transformaciones de calibre en un G-fibrado $\pi : E \longrightarrow M.$, esto es $T(p), F(p)$ viven en G para todo $p \in M$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(TF)(p)[p,v]_\alpha &= T(p)F(p)[p,v]_\alpha \\ &= T(p)[p,\rho(g)v]_\alpha \ \textit{para algún} \ g \in G \\ &= [p,\rho(h)\rho(g)v]_\alpha \ \textit{para algún} \ h \in G \\ &= [p,\rho(hg)v]_\alpha\end{aligned}$$

Así que $TF(p)$ vive en G para todo $p \in M$, luego TF es una transformación de calibre. Ahora veamos que T^{-1} también lo es, en efecto

$$\begin{aligned}T^{-1}(p)[p,v]_\alpha &= T(p)^{-1}[p,v]_\alpha \\ &= [p,\rho(h^{-1})v]_\alpha\end{aligned}$$

Así que $T^{-1}(p)$ vive en G para todo $p \in M$, luego T^{-1} es una transformación de calibre. Finalmente tenemos que $I = TT^{-1}$ luego por la primera parte la función identidad I es una transformación de calibre. ■

2.4. Conexiones

Definición 2.16. Sea E un fibrado vectorial sobre una variedad M. Una conexión D en M asigna a cada campo vectorial v en M una función D_v de $\Gamma(E)$ en $\Gamma(E)$ y satisface las siguientes propiedades

1. $D_v(\alpha s) = \alpha D_v s$
2. $D_v(s+t) = D_v s + D_v t$
3. $D_v(fs) = v(f)s + fD_v s$
4. $D_{v+w}s = D_v s + D_w s$
5. $D_{fv}s = fD_v s$

para todo $v, w \in Vect(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ y para todo escalar α que es real o complejo depende de si E es un fibrado vectorial real o complejo.
Dada cualquier sección s de E y un campo vectorial v en M, llamaremos $D_v s$ la derivada covariante de s en la dirección de v.

Sean $\{x^\mu\}$ coordenadas en un conjunto abierto $U \subseteq M$, $\{\partial_\mu\}$ los campos vectoriales coordenados y sea $\{e_i\}$ una base de secciones de E sobre U. Usaremos la notación

$$D_\mu = D_{\partial_\mu}$$

Notemos que para cualesquiera μ, j podemos expresar $D_\mu e_j$ de manera única como combinación lineal de las secciones $\{e_i\}$ con funciones en U como coeficientes. Así podemos definir funciones $A^i_{\mu j}$ en U por

$$D_\mu e_j = A^i_{\mu j} e_i$$

estas funciones son llamadas las componentes del vector potencial, mas adelante definiremos el vector potencial. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} D_v s &= D_{v^\mu \partial_\mu} s \\ &= v^\mu D_\mu s \\ &= v^\mu D_\mu (s^i e_i) \\ &= v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + A^j_{\mu i} s^i e_j) \\ &= v^\mu (\partial_\mu s^i + A^i_{\mu j} s^j) e_i \end{aligned}$$

Así que si definimos funciones $(D_\mu s)^i$ por

$$D_\mu s = (D_\mu s)^i e_i$$

entonces la ecuación de arriba da

$$(D_\mu s)^i = \partial_\mu s^i + A^i_{\mu j} s^j$$

La siguiente definición es necesaria para entender al vector potencial.

Definición 2.17. Sea E un fibrado vectorial, una 1-forma a valores en E es una sección del fibrado

$$E \bigotimes T^* M$$

Definición 2.18. Sean $\{x^\mu\}$ coordenadas en un conjunto abierto $U \subseteq M$, $\{dx^\mu\}$ base de las 1-formas en U, y sea $\{e_i\}$ una base de secciones de E sobre U. Entonces el vector potencial A esta definido por

$$A = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$$

esto es, una sección del fibrado $End(E|_U) \bigotimes T^*U$.
Esta es una 1-forma a valores en $End(E)$ en U, la 1-forma toma un campo vectorial cualquiera v en U y produce una sección de $End(E)$ sobre U de la siguiente manera

$$A(v) = A^j_{\mu i}(e_j \otimes e^i) dx^\mu(v) = A^j_{\mu i} v^\mu (e_j \otimes e^i)$$

la cual toma una sección cualquiera s de E sobre U y produce una sección de E sobre U de la siguiente manera

$$A(v)s = A^j_{\mu i} v^\mu (e_j \otimes e^i)(s) = A^j_{\mu i} v^\mu s^i e_j$$

Así en estos términos se tiene

$$(D_v s)^i = vs^i + (A(v)s)^i$$

Finalmente escribimos el vector potencial en termino de sus componentes

$$A(\partial_\mu) = A_\mu = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i$$

donde cada una de las componentes de A_μ es una sección del fibrado $End(E)$ sobre U. $A(v)s$ depende $C^\infty(M)$-lineal en v y s.

Supongamos que A es una 1-forma a valores en $End(E)$, por teorema 2.3 podemos escribir

$$A = \sum_i T_i \otimes \omega_i$$

donde T_i son secciones de $End(E)$ y ω_i son 1-formas en M. Así para cualquier campo vectorial v en M podemos definir la sección $A(v)$ de $End(E)$ por

$$A(v) = \sum_i \omega_i(v) T_i$$

Esta sección $A(v)$ actúa en cualquier sección s de E para dar una nueva sección $A(v)s$ de E.
$A(v)$ definida de esta manera es independiente de como escribimos A como la suma

$$A = \sum_i T_i \otimes \omega_i$$

en efecto, supongamos que escribimos $A = \sum_i F_i \otimes \lambda_i$.
Sea $\{e^j\}$ una base local de las secciones de $End(E)$ y $\{dx^j\}$ una base local de las 1-formas en M. Entonces

$$T_i = T_{ik}e^k \qquad y \qquad \omega_i = \omega_{ik}dx^k$$

de la misma manera

$$F_i = F_{ik}e^k \qquad y \qquad \lambda_i = \lambda_{ik}dx^k$$

Luego por definición de producto tensorial debemos tener que

$$T_{ik}\omega_{jk} = F_{ik}\lambda_{jk}$$

veamos

$$\begin{aligned}
\sum_i \omega_i(v)T_i - \sum_i \lambda_i(v)F_i &= \sum_i(\omega_i(v)T_i - \lambda_i(v)F_i) \\
&= \sum_i(\omega_{ik}dx^k(v)T_{ik}e^k - \lambda_{ik}dx^k(v)F_{ik}e^k) \\
&= \sum_i(\omega_{ik}T_{ik} - \lambda_{ik}F_{ik})dx^k(v)e^k(v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

A continuación definiremos una conexión muy particular, que tiene un papel elemental en el estudio de las conexiones.

Definición 2.19. Sean $\{x^\mu\}$ coordenadas en un conjunto abierto $U \subseteq M$, $\{\partial_\mu\}$ son los campos vectoriales coordenados y sea $\{e_i\}$ una base de secciones de E sobre U. La conexión plana estándar D^0 en $E|_U$ esta definida por

$$D^0_v s = v(s^j)e_j$$

podemos escribir cualquier conexión D como $D = D^0 + A$ de la siguiente manera

$$D_v s = (v(s^i) + A^i_{\mu j} v^\mu s^j)e_i = D^0_v s + A(v)s$$

para alguna 1-forma A a valores en End(E).
La conexión plana estándar depende de la elección de la trivialización local de E.

El siguiente lema nos dice que podemos describir cualquier conexión por medio de su vector potencial.

Lema 2.2. Si D^0 es una conexión en E y A es una 1-forma a valores en $End(E)$ entonces $D = D^0 + A$ es una conexión en E. Recíprocamente si D es una conexión cualquiera en E, entonces $D = D^0 + A$ para alguna 1-forma A a valores en $End(E)$.

Demostración. Sean $v, w \in Vect(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty M$ y α un escalar. Sea $D = D^0 + A$ con D^0 es una conexión en E y A es una 1-forma a valores en $End(E)$. Tenemos

1.

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= (D^0 + A)_v(\alpha s) \\ &= D^0_v(\alpha s) + A(v)(\alpha s) \\ &= \alpha D^0_v s + \alpha A(v)s \\ &= \alpha(D^0_v s + A(v)s) \\ &= \alpha(D^0 + A)_v s \\ &= \alpha D_v s \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} D_v(s + t) &= (D^0 + A)_v(s + t) \\ &= D^0_v(s + t) + A(v)(s + t) \\ &= (D^0_v + A(v))(s) + (D^0_v + A(v))(t) \\ &= (D^0 + A)_v s + (D^0 + A)_v t \\ &= D_v s + D_v t \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
D_v(fs) &= (D^0 + A)_v(fs)\\
&= D^0_v(fs) + A(v)(fs)\\
&= v(f)s + fD^0_v s + fA(v)s\\
&= v(f)s + f(D^0 + A)_v s\\
&= v(f)s + fD_v s
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
D_{v+w}s &= (D^0 + A)_{v+w}s\\
&= D^0_{v+w}s + A(v+w)s\\
&= D^0_v s + D^0_w s + A(v)s + A(w)s\\
&= (D^0 + A)_v s + (D^0 + A)_w s\\
&= D_v s + D_w s
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
D_{fv}s &= (D^0 + A)_{fv}s\\
&= D^0_{fv}s + A(fv)s\\
&= fD^0_v s + fA_v s\\
&= f(D^0 + A)_v s\\
&= fD_v s
\end{aligned}$$

Luego $D = D^0 + A$ es una conexión en E.
Ahora sea D una conexión en E y D^0 la conexión plana estándar, definamos $A(v)s = D_v s - D^0_v s$, veamos que A es una 1-forma a valores en $End(E)$. Sabemos que A es $C^\infty(M)$-lineal en v ya que D y D^0 lo son. por otro lado

$$\begin{aligned}
A(v)(fs) &= D_v(fs) - D^0_v(fs)\\
&= v(f)s + fD_v s - v(f)s - fD^0_v s\\
&= f(D_v s - D^0_v s)\\
&= fA(v)s
\end{aligned}$$

así que A es $C^\infty(M)$-lineal en s. Luego podemos definir la 1-forma A a valores en $End(E)$ localmente en las coordenadas $\{x^\mu\}$ por

$$A = A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$$

donde

$$A(\partial_\mu)e_j = A^i_{\mu j} e_i$$

Veamos que esta bien definida, en efecto, sean $\{x'^\nu\}$ coordenadas locales en M, luego por definición tenemos

$$A = A'^j_{\nu i} e_j \otimes e^i \otimes dx'^\nu$$

donde

$$A(\partial'_\nu)e_j = A'^i_{\nu j} e_i$$

notemos que

$$\begin{aligned} A(\partial'_\nu)e_j &= A(\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\partial_\mu)e_j \\ &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A(\partial_\mu)e_j \\ &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A^i_{\mu j} e_i \end{aligned}$$

esto es

$$A'^j_{\nu i} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A^i_{\mu j}$$

luego

$$\begin{aligned} A'^j_{\nu i} e_j \otimes e^i \otimes dx'^\nu &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx'^\nu \\ &= A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} dx'^\nu \\ &= A^j_{\mu i} e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \end{aligned}$$

■

En lo que sigue estudiaremos un tipo de conexión que definiremos a partir de su vector potencial

Definición 2.20. Supongamos que E es un G-fibrado con la fibra estándar dada por algún espacio vectorial V en el cual G tiene una representación ρ, entonces existen trivializaciones locales $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ tales que las funciones transición $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ son de la forma $\rho(g_{\beta\alpha})$ para alguna función $g_{\beta\alpha}$ a valores en G. Ahora supongamos que D es una conexión en E, entonces sobre cualquier U_α podemos escribir D como la suma de la conexión plana estándar D^0 mas un vector potencial A. Diremos que G es una **G-conexión** si en las coordenadas locales las componentes $A_\mu \in \Gamma(End(E))$ viven en $\mathfrak{g}$.

La definición de G-conexión no depende de las coordenadas locales. Sean $\{x^\mu\}$ las coordenadas originales en la definición, sean $\{x'^\nu\}$ otras coordenadas locales, entonces tenemos nuevas componentes del vector potencial dadas por

$$A'^j_{\nu i} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A^i_{\mu j}$$

se nota que estas coordenadas viven en $\mathfrak{g}$ si las originales lo hacen.

Teorema 2.4. Sea D una G-conexión en E y sea $g \in \mathcal{G}$ una transformación de calibre, entonces existe una nueva G-conexión D' en E tal que

$$D'_v(gs) = gD_v s$$

para todo campo de vectores $v \in M$ y para toda sección s de E.
D' esta dada por

$$D'_v s = gD_v(g^{-1}s)$$

Demostración. Sean $v, w \in Vect(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ y α un escalar.Tenemos

1.

$$\begin{aligned} D'_v(\alpha s) &= gD_v(g^{-1}\alpha s) \\ &= gD_v(\alpha g^{-1}s) \\ &= g\alpha D_v(g^{-1}s) \\ &= \alpha g D_v(g^{-1}s) \\ &= \alpha D'_v(\alpha s) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} D'_v(s+t) &= gD_v(g^{-1}(s+t)) \\ &= gD_v(g^{-1}s) + gD_v(g^{-1}t) \\ &= D'_v(s) + D'_v(t) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} D'_v(fs) &= gD_v(g^{-1}fs) \\ &= gD_v(fg^{-1}s) \\ &= gv(f)g^{-1}s + fgD_v(g^{-1}s) \\ &= v(f)s + fD'_v s \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} D'_{v+w}s &= gD_{v+w}(g^{-1}s) \\ &= gD_v(g^{-1}s) + gD_w(g^{-1}s) \\ &= D'_v s + D'_w s \end{aligned}$$

5.

$$D'_{fv}s = gD_{fv}s = fgD_v s = fD'_v s$$

■

Hemos dicho que podemos estudiar cualquier conexión estudiando simplemente su vector potencial, es siguiente teorema nos muestra como cambia el vector potencial de una conexión al aplicar una transformación de calibre.

Teorema 2.5. Dada una trivialización local de E sobre $U_\alpha \subseteq M$ escribimos la G-conexión D como una conexión plana estándar mas un vector potencial. Se tiene que el vector potencial A' para D' esta dado en coordenadas locales por

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}$$

esto es pensando de g localmente como una función a valores en $End(V)$.
Además como A_μ vive en $\mathfrak{g}$ entonces también A'_μ.

Demostración. Pensemos de la transformación de calibre g localmente como una función a valores en $End(V)$ y del vector potencial A como una 1-forma a valores en $End(V)$. Escribamos una sección s localmente en U como $s = s^j e_j$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} D'_\mu s &= g D_\mu (g^{-1} s) \\ &= g D^0_\mu (g^{-1} s) + g A_\mu (g^{-1} s) \\ &= g \partial_\mu (g^{-1} s)^i e_i + g A_\mu (g^{-1} s) \end{aligned}$$

Desarrollemos $g\partial_\mu (g^{-1}s)^i e_i$, notemos que

$$g^{-1} s = g^{-1}(s^j e_j) = s^j g^{-1}(e_j)$$

escribamos $g^{-1}(e_j) = \lambda^k_j e_k$, luego

$$g^{-1} s = s^j \lambda^i_j e_i$$

así que

$$\begin{aligned} g\partial_\mu (g^{-1}s)^i e_i &= g(\partial_\mu (s^j \lambda^i_j) e_i) \\ &= g((\partial_\mu s^j)\lambda^i_j e_i + s^j (\partial_\mu \lambda^i_j) e_i) \\ &= g((\partial_\mu s^j) g^{-1}(e_j)) + g(s^j \partial_\mu (g^{-1} e_j)^i) e_i) \\ &= \partial_\mu s^j g(g^{-1}(e_j)) + g(s^j (\partial_\mu g^{-1}) e_j) \\ &= \partial_\mu s^j e_j + g(\partial_\mu g^{-1})(s^j e_j) \\ &= D^0_\mu s + g(\partial_\mu g^{-1}) s \end{aligned}$$

de aquí se tiene que

$$A'_\mu s = g A_\mu g^{-1} s + g(\partial_\mu g^{-1}) s$$

veamos que esta vive en $\mathfrak{g}$, en efecto, sea $[p, v]_\alpha \in E_p$, como g es una transformación de calibre entonces g^{-1} también lo es, luego para algún $h \in G$ tenemos que

$$g(p)[p, v]_\alpha = [p, \rho(h) v]_\alpha$$

como A_μ vive en $\mathfrak{g}$ entonces para algún $x \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$A_\mu(p)[p, \rho(h) v]_\alpha = [p, d\rho(x)\rho(h) v]_\alpha$$

y además

$$g^{-1}(p)[p, d\rho(x)\rho(h)v]_\alpha = [p, \rho(h^{-1})d\rho(x)\rho(h)v]_\alpha$$

esto es

$$\begin{aligned} gA_\mu g^{-1}(p)[p, v]_\alpha &= [p, \rho(h^{-1})d\rho(x)\rho(h)v]_\alpha \\ &= [p, d\rho(x)v]_\alpha \end{aligned}$$

Por otro lado como g vive en G, podemos pensar de g como una función a valores en G, dada por $g(p) = h_p$ donde $h_p \in G$ es tal que $g(p)v_p = \rho(h_p)v_p$. Recordemos que a partir de $d\rho$ podemos obtener ρ exponenciando, por así decirlo, o bien, podemos escribir cualquier elemento de G como la exponencial de un elemento en $\mathfrak{g}$, digamos

$$h_p = exp(x_h)$$

para algún $x_h \in \mathfrak{g}$, luego

$$g(p) = exp(x_h)$$

de aquí que podemos escribir g como

$$g = exp(-f)$$

para alguna función diferenciable f a valores en $\mathfrak{g}$. Tenemos

$$\begin{aligned} g(\partial_\mu g^{-1}) &= exp(-f)(\partial_\mu(exp(f))) \\ &= exp(-f)(exp(f)\partial_\mu f) \\ &= \partial_\mu f \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} g(\partial_\mu g^{-1})(p) &= (\partial_\mu f)(p) \\ &= y_p \end{aligned}$$

con $y_p \in \mathfrak{g}$, luego $g(\partial_\mu g^{-1})$ vive en $\mathfrak{g}$.

Por lo tanto concluimos que D' es una G-conexión. ■

Ejemplo 2.5. Veamos el efecto de aplicar una transformación de calibre a una G-conexión cuando el grupo de calibre es $G = U(1)$. Supongamos que E es un fibrado trivial lineal complejo sobre M, así que la fibra E_p sobre $p \in M$ es $\mathbb{C}$, cualquier conexión D en E puede ser descrita por su vector potencial A, el cual es una 1-forma a valores en $End(C)$, pero ya que $End(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, mediante el isomorfismo dado por

$$T \mapsto z_T$$

sabemos que cada transformación lineal T en $\mathbb{C}$ es de la forma $T(w) = z_T w$ para algun $z_T \in \mathbb{C}$ y todo $w \in C$, así que la asignación

$$T \mapsto z_T$$

es un isomorfismo, entonces podemos pensar de A como una 1-forma a valores en $\mathbb{C}$. Por otra parte E se convierte en un $U(1)$-fibrado con la representación fundamental de $U(1)$, esta es, la que actúa por multiplicación de números complejos. Si la conexión D es una $U(1)$-conexión entonces debemos tener que las componentes A_μ viven en $\mathfrak{u}(\mathfrak{1})$, donde

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{1}) = \{ix/x \in \mathbb{R}\}$$

esto es, para cada $p \in M$

$$A_\mu(p)v_p = d\rho(ix)v_p = ixv_p$$

para algún $x \in \mathbb{R}$, así que las componentes A_μ son funciones a valores complejos puramente imaginarios.

Ahora supongamos que aplicamos una transformación de calibre g al vector potencial A, como E es trivial tenemos que globalmente para cada $p \in M$, $g(p) = \rho(h)$ para algún $h \in U(1)$ y como $\rho(h)v = hv$ entonces podemos pensar de g como una función a valores en $U(1)$, por teorema 2.5 tenemos que

$$A'_\mu s\mathbf{1} = gA_\mu g^{-1}s\mathbf{1} + g(\partial_\mu g^{-1})s\mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1}$ es la sección identidad. Como $U(1)$ es abeliano y podemos podemos escribir $g = e^{-f}$ para alguna función f a valores complejos puramente imaginarios entonces tenemos

$$gA_\mu g^{-1} + g(\partial_\mu g^{-1}) = A_\mu + \partial_\mu f$$

de aquí se tiene

$$A'_\mu s = A_\mu + \partial_\mu f$$

esto es

$$A' = A + df$$

donde df es la 1-forma a valores en $End(\mathbb{C})$ dada por

$$df_\mu(p)v = (\partial_\mu f)(p)v = d\rho(y)v$$

para algún $y \in u(1)$.

Capítulo 3
Holonomía y Curvatura

3.1. Holonomía

Hasta ahora hemos usado las conexiones en fibrados para derivar secciones, a continuación veremos que las conexiones tienen un rol importante en la definición de transporte paralelo.

Definición 3.1. Sea E un fibrado vectorial sobre una variedad M equipado con una conexión D. Sea $\gamma : [0,T] \longrightarrow M$ un camino diferenciable del punto p al punto q, y supongamos que para $t \in [0,T]$, $u(t)$ es un vector en la fibra $E_{\gamma(t)}$. Consideremos una trivialización local

$$E|_U \cong U \times V$$

de E sobre una vecindad U de $\gamma(t)$, entonces podemos pensar de secciones de E sobre U como funciones de M a valores en V y pensar de la conexión D como la conexión plana estándar D^0 mas un vector potencial A

$$D_\mu s = \partial_\mu s + A_\mu s$$

Así que por analogía definimos la derivada covariante

$$D_{\gamma'(t)} u(t) = \frac{d}{dt} u(t) + A(\gamma'(t)) u(t)$$

Diremos que $u(t)$ es transportado paralelamente a lo largo de γ si

$$D_{\gamma'(t)} u(t) = 0$$

para todo t, esto es, si

$$\frac{d}{dt} u^i(t) + \gamma'(t)^\mu A^i_{\mu j}(\gamma(t)) u^j(t) = 0$$

para todo t y para cada i.

Veamos que $D_{\gamma'(t)}u(t)$ es independiente de la elección de la trivialización local. En efecto, supongamos que tenemos coordenadas $\{x'^{\nu}\}$,luego tenemos que

$$A^i_{\mu j} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A^i_{'\nu j}$$

y ademàs sabemos que

$$\gamma'(t)^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \gamma'(t)'^{\nu}$$

así

$$\begin{aligned} \gamma'(t)^{\mu} A^i_{\mu j}(\gamma(t)) u^j(t) &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \gamma'(t)'^{\nu} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A^i_{'\nu j}(\gamma(t)) u^j(t) \\ &= \gamma'(t)'^{\nu} A^i_{'\nu j}(\gamma(t)) u^j(t) \end{aligned}$$

por lo tanto la derivada covariante definida de esta menara no depende de las coordenadas locales.

Por otro lado, sea $u \in E_p$, notemos que siempre podemos transportarlo paralelamente a lo largo de γ, esto es, podemos encontrar $u(t) \in E_{\gamma(t)}$ tal que

$$u(0) = u \qquad y \qquad D_{\gamma'(t)}u(t) = 0$$

Para ver esto es suficiente trabajar localmente y probar que podemos resolver la ecuación diferenciable

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0$$

escrita en forma matricial.

Esto sigue del resultado básico de la existencia de la solución de ecuaciones diferenciables lineales. Veamos una solución explicita de esta ecuación. Reescribiendo tenemos

$$\frac{d}{dt}u(t) = -A(\gamma'(t))u(t)$$

Luego la solución satisface

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1$$

usando la formula de arriba para $u(t_1)$ y sustituyendo tenemos

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(\gamma'(t_1))A(\gamma'(t_2))u(t_2)dt_2 dt_1$$

continuando este proceso infinitamente se tiene que

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u$$

El siguiente teorema nos dice que esta suma converge.

Teorema 3.1. Pongamos una norma sobre el espacio vectorial V y demos a $End(V)$ la norma

$$\|T\| = \sup_{\|u\| = 1}\|Tu\|$$

Sea

$$K = \sup_{t\in[0,T]}\|A(\gamma'(t))\|$$

Se tiene que el n-ésimo termino de la suma que define $u(t)$ tiene norma $\leq t^n K^n\|u\|/n!$, así que la suma converge. También tenemos que $u(t)$ es diferenciable, $u(0) = u$ y $\frac{d}{dt}u(t) = -A(\gamma'(t))u(t)$.

Demostración. Tenemos que el enésimo termino de la suma que define $u(t)$ es

$$\|(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u\|$$

satisface la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} \|A(\gamma'(t_1))\|\cdots(\gamma'(t_n))\|dt_n\cdots dt_1\|u\| \\
&\leq \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} K^n dt_n\cdots dt_1\|u\| \\
&\leq K^n\|u\|\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\cdots dt_1 \\
&\leq K^n\|u\|\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-2}} t_{n-1}dt_{n-1}\cdots dt_1 \\
&\leq K^n\|u\|\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-3}} \frac{t_{n-2}^2}{2}dt_{n-2}\cdots dt_1 \\
&\leq K^n\|u\|\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-4}} \frac{t_{n-3}^3}{3!}dt_{n-3}\cdots dt_1
\end{aligned}$$

Repitiendo este proceso tenemos

$$\|(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u\| \leq t^n K^n\|u\|/n!$$

Así que esta suma converge ya que

$$lim_{n\to\infty} t^n K^n \|u\|/n! = 0$$

Ahora veamos

$$u(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{0\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u = u$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{d}{dt}\int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u \\
&= \frac{d}{dt}u - \frac{d}{dt}\int_0^t A(\gamma'(t_1))udt_1 + \frac{d}{dt}\int_0^t\int_0^{t_1} A(\gamma'(t_1))A(\gamma'(t_2))udt_2dt_1 + \\
&\cdots + \frac{d}{dt}(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1)\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1) + \cdots \\
&= -A(\gamma'(t))u + A(\gamma'(t))\int_0^{t_1} A(\gamma'(t_2))udt_2 + \\
&\cdots + A(\gamma'(t))(-1)^n \int_{t_1\geq t_2\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_2))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_2 + \cdots \\
&= -A(\gamma'(t))\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma'(t_1))\cdots A(\gamma'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u \\
&= -A(\gamma'(t))u(t)
\end{aligned}$$

■

A partir del transporte paralelo podemos definir una función entre fibras llamada la holonomía , mas adelante veremos una relación muy interesante entre la holonomía y la curvatura.

Definición 3.2. Supongamos que $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ es un camino diferenciable de p a q. Sea E un fibrado vectorial sobre M con conexión D. Dado $u \in E_p$, sea $H(\gamma, D)u$ es el resultado de transportar paralelamente al vector u anclado en p hasta el punto q a lo largo del camino γ. Ya que la ecuación diferenciable que define el transporte paralelo es lineal entonces el mapeo

$$H(\gamma, D) : E_p \longrightarrow E_q$$

es lineal. Llamaremos a este mapeo la holonomía a lo largo del camino γ.
Mas generalmente, si γ es diferenciable a trozos, entonces podemos encontrar los puntos para los cuales no es diferenciable y dividir en piezas máximas diferenciables

$$\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow M$$

donde $1 \leq i \leq n$, y definimos la holonomía por

$$H(\gamma, D) = H(\gamma_n, D) \cdots H(\gamma_1, D)$$

Definición 3.3. Supongamos que tenemos un camino α en M de p a q, y un camino β en M de q a r. Diremos que α y β se pueden componer ya que podemos pegar los caminos para obtener un nuevo camino $\beta\alpha$ de p a r. Mas precisamente, si tenemos caminos $\alpha : [0, S] \longrightarrow M$ y $\beta : [0, T] \longrightarrow M$ con $\beta)(0) = \alpha(S)$ definimos el producto de los caminos α y β en ese orden como el camino

$$\beta\alpha : [0, S + T] \longrightarrow M$$

definido por

$$(\beta\alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & si \quad 0 \leq t \leq S \\ \beta(t - S) & si \quad S \leq t \leq S + T \end{cases}$$

Notemos que si α y β son diferenciables entonces $\beta\alpha$ es al menos diferenciable a trozos pero no necesariamente diferenciable.

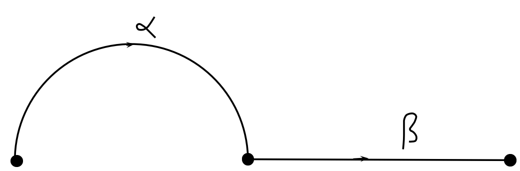

Imagen 2: Composición de caminos

Lema 3.1. Sea $\alpha : [0, T] \longrightarrow M$ un camino diferenciable a trozos y sea
$F : [0, S] \longrightarrow [0, T]$ una función diferenciable a trozos con $F(0) = 0$ y $F(S) = T$. Sea β un camino parametrizado dado por $\beta(t) = \alpha(F(t))$, entonces para cualquier conexión D en un fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$, se tiene

$$H(\alpha, D) = H(\beta, D)$$

Demostración. Dividamos α en sus trozos diferenciables, digamos $\alpha_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow M$ con $i = 1, 2, ..., n$. Supongamos que F no es diferenciable en $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k$, Luego la curva β tampoco lo es, así que la dividimos en curvas $\beta_i : [s_i, s_{i+1}]$ y supongamos que en algún intervalo (s_j, s_{j+1}) con $s_0 = 0$ y $s_{k+1} = S$, existen $c_1 \leq c_2 \leq \cdots c_m$ tales que $F(c_j) = t_i$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Luego dividimos β_j en curvas diferenciables $\beta_{ji} : [c_i, c_{i+1}]$ con $c_0 = s_j$ y $c_{m+1} = s_{j+1}$. Veamos que

$$H(\beta_{ji}, D) = H(\alpha_{ji}, D)$$

entendiendo $\alpha_{ji} : [F(c_i), F(c_{i+1})]$, en efecto
Sea $u \in E_{\alpha(F(c_i))}$ y $u(F(t))$ un vector en $E_{\alpha(F(t))}$ con $t \in [c_i, c_{i+1}]$ y tal que haciendo el cambio de variable $s = F(t)$ tenemos

$$u(F(c_i)) = u$$

y $D_{\alpha'(s)}u(s) = 0$ Notemos que definiendo $v(t) = u(F(t))$ se tiene

$$\begin{aligned}
D_{\beta'(t)}v(t) &= \frac{d}{dt}v(t) + A(\beta'(t))v(t) \\
&= \frac{d}{dt}u(f(t)) + A(\beta'(f(t)))u(f(t)) \\
&= f'(t)\frac{d}{ds}u(s) + f'(t)A(\alpha'(s))u(s) \\
&= f'(t)D_{\alpha'(s)}u(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así que $H(\alpha_{ji}, D) = H(\beta_{ji}, D)$, luego por la definición de Holonomia para una curva diferenciable a trozos se tiene

$$H(\alpha, D) = H(\beta, D)$$

■

Describiremos la holonomía para composición de caminos.

Proposición 3.1. Si α y β se pueden componer entonces

$$H(\beta\alpha, D) = H(\beta, D)H(\alpha, D)$$

También se tiene que para cualquier camino

$$\alpha : [0, T] \longrightarrow M$$

de p a q existe un camino inverso

$$\alpha^{-1} : [0, T] \longrightarrow M$$

de q a p dado por

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(T - t)$$

Además

$$H(\alpha^{-1}, D) = H(\alpha, D)^{-1}$$

Y también se tiene que para cualquier punto $p \in M$ podemos definir el bucle identidad

$$1_p : [0, 1] \longrightarrow M$$

el cual es el camino que simplemente permanece en p, esto es

$$1_p(t) = p$$

Si α es un camino de p en q tenemos

1. $H(1_q\alpha, D) = H(\alpha, D)$
2. $H(\alpha 1_p, D) = H(\alpha, D)$
3. $H(1_p, D) = 1$

Demostración. Digamos que α es una camino de p a q y β es una camino de q a r, entonces $\beta\alpha$ es un camino de p a r diferenciable a trozos. Dividamos la curva $\beta\alpha$ en curvas diferenciables $\beta\alpha_1 = \alpha : [0, S]$ y $\beta\alpha_2 : [S, T]$ donde se tiene que

$$\beta\alpha_2(t) = \beta(F(t))$$

donde $F(t) = t - S$, evidentemente F es diferenciable, así que por el lema 3.1 se tiene que

$$H(\beta\alpha_2, D) = H(\beta, D)$$

y por definición de holonomia tenemos

$$H(\beta\alpha, D) = H(\beta\alpha_2, D)H(\beta\alpha_1, D) = H(\beta, D)H(\alpha, D)$$

Ahora notemos que dado $u \in E_p$ definamos $u(t) = p$ para todo t, así que $u(o) = p$ y

$$\begin{aligned} D_{1'_p(t)}u(t) &= \frac{d}{dt}u(t) + A(1'_p(t))u(t) \\ &= 0 + A(0)p \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $H(1_p, D) = 1$. Por otro lado

$$\alpha^{-1}(0) = \alpha(T-0) = \alpha(T) = q$$

$$y$$

$$\alpha^{-1}(T) = \alpha(T-T) = \alpha(0) = p$$

Así que $\alpha\alpha^{-1}$ es un camino de p a p, y

$$H(\alpha^{-1}\alpha, D) = H(\alpha^{-1}, D)H(\alpha, D)$$

Sea $u \in E_p$ y $u(t) \in E_{\alpha(t)}$ para cada $t \in [0,T]$, tal que

$$D_{\alpha'(t)}u(t) = 0$$

Definamos $v(t) = u(T-t) \in E_{\alpha^{-1}(t)}$ para todo $t \in [0,T]$, veamos que

$$v(0) = u(T-0) = u(T) \in E_{\alpha(T)}$$

$$y$$

$$\begin{aligned} D_{\alpha'^{-1}(t)}v(t) &= \frac{d}{dt}v(t) - A(\alpha'^{-1}(t))v(t) \\ &= \frac{d}{dt}u(T-t) - A(\alpha'(T-t))u(T-t) \\ &= -\frac{d}{dt}u(t) + A(\alpha'(t))u(t) \\ &= -D_{\alpha'(t)}u(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto es, $v(0) = u(T)$ es transportado paralelamente a lo largo de α^{-1} hasta
$v(T) = u(0) \in E_{\alpha(0)} = E_p$
así que tenemos que $H(\alpha^{-1}\alpha, D) = \mathbf{1}$, por lo tanto

$$\mathbf{1} = H(\alpha^{-1}, D)H(\alpha, D)$$

con lo que concluimos que

$$H(\alpha^{-1}, D) = H(\alpha, D)^{-1}$$

Las otras identidades se verifican fácilmente. ■

La holonomía $H(\gamma, D)$ es afectada de manera muy simple cuando aplicamos una transformación de calibre a la conexión D.
Supongamos que $u(t) \in E_{\gamma(t)}$ satisface la ecuación de transporte paralelo,

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0$$

Si A es el vector potencial de D entonces

$$\frac{d}{dt}u(t) = -A(\gamma'(t))u(t)$$

o bien en las coordenadas locales

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\gamma'^{\mu}(t)A_{\mu}u(t)$$

donde escribimos A_μ por $A_\mu(\gamma(t))$
Ahora aplicamos una transformación de calibre g a $u(t)$, definiendo $w(t)$ por

$$w(t) = g(\gamma(t))u(t)$$

o simplemente escribimos $w(t) = gu(t)$, podemos derivar w y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}w(t) &= (\frac{d}{dt}g(\gamma(t)))u(t) + g(\gamma(t))(\frac{d}{dt}u(t))\\ &= \gamma'^{\mu}(t)(\partial_\mu g)u(t) - g\gamma'^{\mu}(t)A_\mu u(t)\\ &= \gamma'^{\mu}(t)(\partial_\mu g)g^{-1}w(t) - \gamma'^{\mu}(t)gA_\mu g^{-1}w(t)\end{aligned}$$

ya que gg^{-1} es constante, tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu(gg^{-1})\\ &= (\partial_\mu g)g^{-1} + g(\partial_\mu g^{-1})\end{aligned}$$

esto es,

$$(\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1}$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}w(t) &= -\gamma'^\mu(t)g(\partial_\mu g^{-1})w(t) - \gamma'^\mu(t)gA_\mu g^{-1}w(t)\\ &= -\gamma'^\mu(t)A'_\mu w(t)\end{aligned}$$

donde A' es el vector potencial obtenido por aplicar la transformación de calibre g al vector potencial A, esto es

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}$$

Así $w(t)$ satisface la ecuación de transporte paralelo,

$$D'_{\gamma'(t)}w(t) = 0$$

Donde D' resulta de aplicar la transformación de calibre g a la conexión D.
Ya que la holonomía $H(\gamma, D)$ es un mapeo lineal que envía $u(0)$ a $u(T)$, y similarmente $H(\gamma, D')$ envía $w(0) = g(\gamma(0))u(0)$ a $w(T) = g(\gamma(T))u(T)$, luego se sigue que

$$H(\gamma, D') = g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1}$$

Esta fórmula muestra como la holonomía se transforma bajo transformaciones de calibre.
La fórmula anterior para la holonomía se mantiene incluso cuando el camino γ no se queda dentro de un conjunto abierto sobre el cual nosotros tenemos trivializado el G-fibrado E. En efecto, supongamos que el camino γ es cubierto por n abiertos $U_1, ..., U_n$ subconjuntos de M, donde tenemos trivializaciónes locales

$$\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times V_i$$

del fibrado E. Dividamos el camino γ en n caminos $\gamma_i : [T_{i-1}, T_i] \longrightarrow U_i$ donde $T_0 = 0$ y $T_n = T$. Además tenemos que

$$H(\gamma_i, D') = g(\gamma_i(T_i))H(\gamma_i, D')g(\gamma_i(T_{i-1}))^{-1}$$

luego

$$
\begin{aligned}
H(\gamma, D') &= H(\gamma_n, D')H(\gamma_{n-1}, D') \circ \circ \circ H(\gamma_1, D') \\
&= g(\gamma_n(T_n))H(\gamma_n, D')g(\gamma_n(T_{n-1}))^{-1}g(\gamma_{n-1}(T_{n-1}))H(\gamma_{n-1}, D') \\
&g(\gamma_{n-1}(T_{n-2}))^{-1} \circ \circ \circ g(\gamma_1(T_1))H(\gamma_1, D')g(\gamma_1(T_0))^{-1} \\
&= g(\gamma_n(T_n))H(\gamma_n, D')H(\gamma_{n-1}, D') \circ \circ \circ H(\gamma_1, D')g(\gamma_1(T_0))^{-1} \\
&= g(\gamma(T))H(\gamma_n, D')H(\gamma_{n-1}, D') \circ \circ \circ H(\gamma_1, D')g(\gamma(T_0))^{-1} \\
&= g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1}
\end{aligned}
$$

Para finalizar este capitulo estudiaremos la curvatura de una conexión en un fibrado.

3.2. Curvatura

Definición 3.4. Supongamos que E es un fibrado vectorial sobre M con conexión D. La curvatura de una conexión D mide el fallo en la conmutatividad de las derivadas covariantes. Dados dos campos vectoriales $w, v \in M$, definimos la curvatura $F(v, w)$ como el operador en las secciones de E dado por

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v,w]}s$$

Una conexión con curvatura nula, esto es, $F(v, w)s = 0$ para cualesquiera campos vectoriales $v, w \in M$ y toda sección s de E, diremos que es plana.

Teorema 3.2. La curvatura es antisimétrica, esto es

$$F(v, w) = -F(w, v)$$

Y también es lineal sobre $C^\infty(M)$ en cada argumento, esto es

$$F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)(fs) = fF(v, w)s$$

Para toda función $f \in C^\infty(M)$ y v, w campos vectoriales en M.

Demostración. Veamos primero que $F(v,w) = -F(w,v)$, en efecto,

$$\begin{aligned}
-F(w,v)s &= -(D_w D_v s - D_v D_w s - D_{[w,v]} s) \\
&= D_v D_w s - D_w D_v s + D_{[w,v]} s \\
&= D_v D_w s - D_w D_v s + D_{-[v,w]} s \\
&= D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v,w]} s
\end{aligned}$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned}
F(v, fw) &= D_v D_{fw} - D_{fw} D_v - D_{[v,fw]} \\
&= D_v f D_w - f D_w D_v - D_{f[v,w]+v(f)w} \\
&= f D_v D_w + v(f) D_w - f D_w D_v - f D_{[v,w]} - v(f) D_w \\
&= f F(v,w)
\end{aligned}$$

La igualdad $F(v, fw) = fF(v,w)$ se obtiene de la siguiente manera

$$F(v, fw) = -F(fw, v) = -fF(w,v) = fF(v,w)$$

Finalmente mostraremos que $F(v,w)(fs) = fF(v,w)s$

$$\begin{aligned}
F(v,w)(fs) &= D_v D_w (fs) - D_w D_v (fs) - D_{[v,w]}(fs) \\
&= D_v (f D_w s + w(f)s) - D_w (f D_v s + v(f)s) - f D_{[v,w]} s - ([v,w](f))s \\
&= f D_v D_w s + v(f) D_w s + w(f) D_v s + v(w(f))s - f D_w D_v s - w(f) D_v s \\
&- v(f) D_w s - w(v(f))s - f D_{[v,w]} s - ([v,w](f))s \\
&= f[D_v, D_w]s - f D_{[v,w]} s \\
&= fF(v,w)s
\end{aligned}$$

donde $[D_v, D_w] = D_v D_w - D_w D_v$ ■

Pensaremos de la curvatura en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en algún subconjunto abierto U de M. Definimos $F_{\mu\nu}$ como la seción de $End(E)$ dada por

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

Notemos que como $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ entonces

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$$

Por la propiedad de linealidad de la curvatura podemos escribir $F(v,w)$ para cualesquiera campos vectoriales v, w en U como

$$F(v,w) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu}$$

Si tenemos una base local de secciones de E sobre U, digamos $\{e_i\}$. Escribimos la curvatura en términos del vector potencial

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i \\ &= D_\mu(A^j_{\nu i}e_j) - D_\nu(A^j_{\mu i}e_j) \\ &= (\partial_\mu A^j_{\nu i})e_j + A^k_{\mu j}A^j_{\nu i}e_k - (\partial_\nu A^j_{\mu i})e_j - A^k_{\nu j}A^j_{\mu i}e_k \end{aligned}$$

O bien

$$F_{\mu\nu}e_i = ((\partial_\mu A^j_{\nu i}) - (\partial_\nu A^j_{\mu i}) + A^j_{\mu k}A^k_{\nu i} - A^j_{\nu k}A^k_{\mu i})e_j$$

Ya que las secciones $e_j \otimes e^i$ forman una base para las secciones de $End(E)$ podemos escribir

$$F_{\mu\nu} = F^j_{\mu\nu i}e_j \otimes e^i$$

Para algún conjunto de funciones $F^j_{\mu\nu i}$, llamadas las componentes de la curvatura. En particular

$$F_{\mu\nu}e_i = F^j_{\mu\nu i}e_j$$

Así que por el resultado anterior tenemos

$$F^j_{\mu\nu i} = (\partial_\mu A^j_{\nu i}) - (\partial_\nu A^j_{\mu i}) + A^j_{\mu k}A^k_{\nu i} - A^j_{\nu k}A^k_{\mu i}$$

Escribiendo en forma matricial podemos escribir

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

La siguiente proposición nos dice que la curvatura mide la holonomía a lo largo de caminos cerrados infinitesimales.

Proposición 3.2. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial, consideremos una trivialización local de E alrededor de $p \in M$, donde tenemos una parametrización ϕ y coordenadas locales $\{x^\sigma\}$ en las cuales p es el origen. Tomemos un vector $v \in E_p$ y hagamos transporte paralelo a lo largo de un pequeño cuadrado en el plano $x^\mu x^\nu$ cuyos lados son ambos de longitud ϵ. Se tiene que el resultado es un vector v' ligeramente diferente de v, explícitamente

$$v - v' = \epsilon^2 F_{\mu\nu} v$$

En otras palabras, si γ denota el camino cerrado que rodea el cuadrado entonces

$$H(\gamma, D) = 1 - \epsilon^2 F_{\mu\nu}$$

Demostración. Sea $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0, \epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ caminos dados por
$\gamma_1(t) = te_\mu$
$\gamma_2(t) = \epsilon e_\mu + te_\nu$
$\gamma_3(t) = \epsilon e_\nu + (\epsilon - t)e_\mu$
$\gamma_4(t) = (\epsilon - t)e_\nu$
donde $\{e_\sigma\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Notemos que $\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1 : [0, 4\epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un pequeño cuadrado en el plano $x^\mu x^\nu$ cuyos lados son de longitud ϵ, además la imagen inversa de $\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ por la parametrización ϕ de M alrededor de p es la curva donde haremos el transporte paralelo.

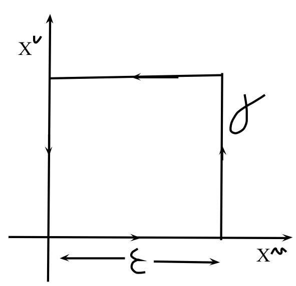

Imagen 3: Pequeño cuadrado $\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1$

Sabemos que $H(\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1, D) = H(\gamma_4, D)H(\gamma_3, D)H(\gamma_2, D)H(\gamma_1, D)$. Veamos la expresión para $H(\gamma_1, D)$, sea $u = u_1 \in E_p$, luego

$$u_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq 0} A(\gamma_1'(t_1)) \cdots A(\gamma_1'(t_n)) dt_n \cdots dt_1 u$$

satisface la ecuación de transporte paralelo, en lo que sigue solo conservaremos elementos de orden ϵ^2 o menos; luego

$$\begin{aligned}
H(\gamma_1', D) &\approx 1 - \int_0^\epsilon A(\gamma_1'(t_1))dt_1 + \int_0^\epsilon \int_0^{t_1} A(\gamma_1'(t_1))A(\gamma_1'(t_2))dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \int_0^\epsilon A_\mu(t_1 e_\mu)dt_1 + \int_0^\epsilon \int_0^{t_1} A_\mu(t_1 e_\mu)A_\mu(t_2 e_\mu)dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \int_0^\epsilon (A_\mu + \partial_\mu A_\mu t_1)dt_1 + \int_0^\epsilon \int_0^{t_1} (A_\mu + \partial_\mu A_\mu t_1)(A_\mu + \partial_\mu A_\mu t_2)dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \epsilon A_\mu - \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\mu A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\mu^2
\end{aligned}$$

Entendemos por $A_\sigma(te_\alpha)$ a la matriz cuyas entradas son las funciones $A^i_{\mu j}$ evaluadas en $\phi^{-1}(te_\alpha) \in M$, $A_\sigma = A_\sigma(0)$.
Ahora sea $u_2 \in E_{\gamma_1(\epsilon)}$, luego

$$u_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq 0} A(\gamma_2'(t_1)) \cdots A(\gamma_2'(t_n))dt_n \cdots dt_1 u$$

satisface la ecuación de transporte paralelo,luego

$$\begin{aligned}
H(\gamma_2', D) &\approx 1 - \int_0^\epsilon A(\gamma_2'(t_1))dt_1 + \int_0^\epsilon \int_0^{t_1} A(\gamma_2'(t_1))A(\gamma_2'(t_2))dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \int_0^\epsilon A_\nu(\epsilon e_\mu + t_1 e_\nu)dt_1 + \int_0^\epsilon \int_0^{t_1} A_\nu(\epsilon e_\mu + t_1 e_\nu)A_\nu(\epsilon e_\mu + t_2 e_\nu)dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \int_0^\epsilon (A_\nu + \partial_\mu A_\nu \epsilon + \partial_\nu A_\nu t_1)dt_1 + \\
&\int_0^\epsilon \int_0^{t_1} (A_\nu + \partial_\mu A_\nu \epsilon + \partial_\nu A_\nu t_1)(A_\nu + \partial_\mu A_\nu \epsilon + \partial_\nu A_\nu t_2)dt_2 dt_1 \\
&= 1 - \epsilon A_\nu - \epsilon^2 \partial_\mu A_\nu - \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\nu^2
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $u_3 \in E_{\gamma_2(\epsilon)}$, luego

$$u_3(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq 0} A(\gamma_3'(t_1)) \cdots A(\gamma_3'(t_n))dt_n \cdots dt_1 u$$

satisface la ecuación de transporte paralelo, luego

$$
\begin{aligned}
H(\gamma_3', D) &\approx 1 - \int_0^{\epsilon} A(\gamma_3'(t_1))dt_1 + \int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} A(\gamma_3'(t_1))A(\gamma_3'(t_2))dt_2dt_1 \\
&= 1 - \int_0^{\epsilon} - A_\mu(\epsilon e_\nu + (\epsilon - t_1)e_\mu)dt_1 + \int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} A_\mu(\epsilon e_\nu + (\epsilon - t_1)e_\mu)A_\mu(\epsilon e_\nu + (\epsilon - t_2)e_\mu)dt_2dt_1 \\
&= 1 + \int_0^{\epsilon} (A_\mu + \partial_\mu A_\mu(\epsilon - t_1) + \partial_\nu A_\mu \epsilon)dt_1 + \\
&\int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} (A_\mu + \partial_\mu A_\mu(\epsilon - t_1) + \partial_\nu A_\mu\epsilon)(A_\mu + \partial_\mu A_\mu(\epsilon - t_2) + \partial_\nu A_\mu\epsilon)dt_2dt_1 \\
&= 1 + \epsilon A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\mu A_\mu + \epsilon^2\partial_\nu A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\mu^2
\end{aligned}
$$

Finalmente sea $u_4 \in E_{\gamma_3(\epsilon)}$, luego

$$
u_4(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{t\geq t_1\geq\cdots\geq t_n\geq 0} A(\gamma_4'(t_1))\cdots A(\gamma_4'(t_n))dt_n\cdots dt_1 u
$$

satisface la ecuación de transporte paralelo,se tiene

$$
\begin{aligned}
H(\gamma_4', D) &\approx 1 - \int_0^{\epsilon} A(\gamma_4'(t_1))dt_1 + \int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} A(\gamma_4'(t_1))A(\gamma_4'(t_2))dt_2dt_1 \\
&= 1 - \int_0^{\epsilon} - A_\nu((\epsilon - t_1)e_\nu)dt_1 + \int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} A_\nu((\epsilon - t_1)e_\nu)A_\nu((\epsilon - t_2)e_\nu)dt_2dt_1 \\
&= 1 + \int_0^{\epsilon} (A_\nu + \partial_\nu A_\nu(\epsilon - t_1))dt_1 + \int_0^{\epsilon}\int_0^{t_1} (A_\nu + \partial_\nu A_\nu(\epsilon - t_1))(A_\nu + \partial_\nu A_\nu(\epsilon - t_2))dt_2dt_1 \\
&= 1 + \epsilon A_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\nu A_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\nu^2
\end{aligned}
$$

Así que

$$
\begin{aligned}
H(\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1, D) &= (1 + \epsilon A_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\nu A_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\nu^2)(1 + \epsilon A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\mu A_\mu + \epsilon^2\partial_\nu A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\mu^2) \\
&(1 - \epsilon A_\nu - \epsilon^2\partial_\mu A_\nu - \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\nu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\nu^2)(-\epsilon A_\mu - \frac{\epsilon^2}{2}\partial_\mu A_\mu + \frac{\epsilon^2}{2}A_\mu^2) \\
&= 1 - \epsilon^2\partial_\mu A_\nu + \epsilon^2\partial_\nu A_\mu - \epsilon^2 A_\mu A_\nu + \epsilon^2 A_\nu A_\mu \\
&= 1 - \epsilon^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \\
&= 1 - \epsilon^2 F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

■

En lo que sigue estudiaremos las formas a valores en E, para cualquier fibrado E, esto con el fin de clarificar un poco el calculo de la curvatura.

Definición 3.5. Supongamos que E es una fibrado vectorial sobre una variedad M equipado con una conexión D. Definimos una k-forma a valores en E como una sección del fibrado

$$E \bigotimes \Lambda^k T^* M$$

Una 0-forma a valores en E es una sección de E; una 1-forma en M es una función $C^\infty(M)$-lineal de $Vect(M)$ en $C^\infty(M)$. Una 1-forma a valores en E es una función $C^\infty(M)$-lineal de $Vect(M)$ en $\Gamma(E)$.
También definimos una forma a valores en E como una sección del fibrado

$$E \bigotimes \Lambda T^* M$$

Definición 3.6. Sabemos que para cualesquiera campos vectoriales v y w en M se tiene que $F(v, w)$ es una sección de $End(E)$, así que trabajando con coordenadas locales en un conjunto abierto U de M, tenemos que las componentes de la curvatura

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

son secciones de $End(E)$ sobre U.
Podemos entonces definir la curvatura 2-forma F, como una 2-forma a valores en $End(E)$, por

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Teorema 3.3. Cualquier forma a valores en E puede ser escrita, no necesariamente de manera única, como una suma de formas a valores en E de la forma $s \otimes \omega$, donde s es una sección de E y ω es una forma ordinaria en M.

Demostración. Por teorema 2.3 tenemos que cualquier sección del fibrado $E \bigotimes \Lambda T^* M$ puede ser escrita, no necesariamente de manera única, como una suma de secciones de la forma $s \otimes \omega$, donde s es una sección de E y ω es sección de $\Lambda T^* M$, pero sabemos que las secciones de $\Lambda T^* M$ están en correspondencia uno a uno con formas en M. Así se tiene el resultado. ∎

Como consecuencia del teorema anterior, podemos definir el producto wedge de una forma a valores en E y una forma ordinaria en M, definiendo simplemente el producto wedge de la forma $s \otimes \omega$ a valores en E y la forma ordinaria μ, por

$$s \otimes \omega \wedge \mu = s \otimes (\omega \wedge \mu)$$

notemos que el producto wedge depende $C^\infty(M)$-linealmente en cada factor.

Definición 3.7. La derivada covariante exterior d_D de una sección s de E es la 1-forma $d_D s$ a valores en E tal que

$$d_D s(v) = D_v s$$

para cualquier campo vectorial v en M.
Esta es una generalización de la fórmula

$$df(v) = v(f)$$

Alternativamente, en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en algún conjunto abierto U de M, definimos

$$d_D s = D_\mu s \otimes dx^\mu$$

Las definiciones de la definición 3.7 son equivalentes. en efecto,

$$D_\mu s \otimes dx^\mu(v) = v^\mu D_\mu s = D_v s$$

Definición 3.8. Es suficiente por el teorema 3.3, definir la derivada covariante exterior en una forma diferenciable a valores en E de la forma $s \otimes \omega$ donde s es una sección de E y ω es una forma diferenciable ordinaria en M. Se define de la siguiente manera

$$d_D(s \otimes \omega) = d_D s \wedge \omega + s \wedge d\omega$$

Mostraremos que d_D esta bien definida ya que una forma diferenciable a valores en E puede ser escrita de varias maneras diferentes como la suma de formas diferenciables de la forma $s \otimes \omega$.
Obtendremos una formula inequívoca para d_D en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en un conjunto abierto U de M. En efecto, tenemos que existe una base de las formas diferenciables

$\{dx^I\}$, entonces podemos escribir cualquier forma diferenciable a valores en E en U de manera única como

$$s_I \otimes dx^I$$

para algunas secciones s_I de $E|_U$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} d_D(s_I \otimes dx^I) &= d_D s_I \wedge dx^I + s_I \otimes d(dx^I) \\ &= (D_\mu s^I \otimes dx^\mu) \wedge dx^I \\ &= D_\mu s^I \otimes dx^\mu \wedge dx^I \end{aligned}$$

esta es la generalización de la siguiente fórmula para la derivada exterior

$$d(\omega_I dx^I) = (\partial_\mu \omega_I) dx^\mu \wedge dx^I$$

Definición 3.9. Trabajaremos en coordenadas locales en un abierto U de M, entonces sabemos que podemos escribir cualquier forma diferenciable a valores en $End(E)$ localmente como la suma de formas diferenciables a valores en $End(E)$ de la forma $T \otimes \omega$, donde T es una sección de $End(E)$ y ω una forma diferenciable ordinaria en M. Además también podemos escribir cualquier forma diferenciable a valores en E localmente como la suma de formas diferenciables de la forma $s \otimes \mu$, donde s es una sección de E y μ es una forma diferenciable ordinaria en M. Definimos el producto wedge de una forma a valores en $End(E)$ y una forma a valores en E usando linealidad por

$$T \otimes \omega \wedge s \otimes \mu = T(s) \otimes (\omega \wedge \mu)$$

Proposición 3.3. d_D^2 es proporcional a la curvatura de D

Demostración. Sea η una forma diferenciable a valores en E, trabajando en coordenadas locales podemos escribir $\eta = s_I \otimes \omega^I$, para algunas secciones s_I y formas diferenciables ordinarias ω^I, entonces

$$\begin{aligned} d_D^2 \eta &= d_U(D_\nu s_I \otimes dx^\nu \wedge dx^I) \\ &= D_\mu D_\nu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx_I \\ &= \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx_I \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx_I \\ &= F \wedge \eta \end{aligned}$$

■

Notemos que si la conexión D es plana entonces $d_D^2 = 0$, igual que la derivada exterior ordinaria.

Para finalizar veremos una aplicación de la curvatura y las conexiones en el electromagnetismo.
Recordemos que las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento del campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ y el campo magnético $\overrightarrow{B}$, ambos definidos en el espacio, el cual tomaremos como $\mathbb{R}^3$, aunque ambos son funciones del tiempo con un parámetro real t. Ambos campos dependen de la densidad de carga eléctrica ρ y la densidad de corriente $\overrightarrow{j}$, siendo esta primera una función en el espacio que depende del tiempo y la segunda un campo vectorial en el espacio que también depende del tiempo.
En unidades donde la velocidad de la luz es 1, tenemos las ecuaciones de Maxwell en su forma clásica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overrightarrow{B} &= 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \overrightarrow{E} &= \rho \\ \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} &= \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Recordemos que los campos vectoriales B y E pueden ser expresados en términos de un vector potencial U y un escalar potencial ϕ respectivamente

$$B = \bigtriangledown \times U \qquad y \qquad E = -\bigtriangledown \phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

y el campo electromagnético F tiene coordenadas

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

donde A_μ son las coordenadas del tetra vector potencial A, dadas por

$$A_\mu = (\phi, -U)$$

En lo que sigue escribiremos las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de la geometría diferencial.
Como sabemos en el lenguaje de las formas diferenciables la divergencia de un campo vectorial se expresa como la derivada exterior de una 2-forma en $\mathbb{R}^3$, así que al campo magnético $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_z)$ lo trataremos como una 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

y el rotacional de un campo vectorial se expresa como la derivada exterior de una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, así que al campo electrico $\overrightarrow{E} = (E_x, E_y, E_z)$ lo trataremos como una 1-forma en $\mathbb{R}^3$

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

pensaremos del campo eléctrico y el campo magnético viviendo en el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^4$. Combinando los dos campos creamos una campo electromagnético F como una 2-forma en $\mathbb{R}^4$ definida por

$$F = B + E \wedge dt$$

Si queremos ver las componentes tenemos

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos la densidad de corriente $\overrightarrow{j} = j^1\partial_1 + j^2\partial_2 + j^3\partial_3$ y escribámoslo en el lenguaje de las formas diferenciables como la 1-forma en el espacio

$$j = j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$$

Ahora combinemos la densidad de corriente $\overrightarrow{j}$ con la densidad de carga eléctrica ρ para crear un campo vectorial en el espacio-tiempo M

$$\overrightarrow{J} = \rho\partial_0 + j^1\partial_1 + j^2\partial_2 + j^3\partial_3$$

y escribimos este campo vectorial $\overrightarrow{J}$ como una 1-forma J en el espacio-tiempo

$$J = j - \rho dt$$

a la cual llamaremos corriente.
Gracias a la métrica estándar de Minkowski podemos definir el operador estrella de Hodge y se tiene que

$$(\star F)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell se transforma en

$$dF = 0$$

y el segundo par en

$$\star d \star F = J$$

Mas generalmente, si consideramos al espacio-tiempo como cualquier variedad semi-Riemanniana y orientada $M = \mathbb{R} \times S$ donde S es el espacio tres dimensional con una métrica estática de la forma $g = -dt^2 + ds^2$, entonces las ecuaciones

$$dF = 0$$

$$\star d \star F = J$$

representan las ecuaciones de Maxwell.

Por otra parte supongamos que E es un $U(1)$-fibrado trivial lineal complejo sobre $M = \mathbb{R} \times S$ con la fibra dada por la representación fundamental de $U(1)$. Para cualquier conexión D con vector potencial A se tiene que las coordenadas de la curvatura F de D son

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

esta es una generalización de la fórmula para el campo electromagnético en términos del tetra vector potencial.

Si definimos una $U(1)$-conexión D en E usando como vector potencial A el tetra vector potencial que define el campo electromagnético F, entonces la curvatura 2-forma F de D coincide con el campo electromagnético y el primer par de ecuaciones de Maxwell son generalizadas por la tautología

$$d_D F = 0$$

llamada la identidad de Bianchi, y el segundo par se generaliza mediante la ecuación de Yang-Mills, esta es

$$\star d_D \star F = J$$

Referencias Bibliográficas

[1] John Baez, Javier P. Muniain *Gauge, fields, knots and gravity* World Scientific, 1994

[2] John Lee *Introduction to smooth Manifolds* Springer-Verlag, 2003

[3] Manfredo do Carmo *Differential Forms and Applications* Universitex, 1994