UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

La transformación de Darboux y perturbación de funcionales lineales

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Diana Carolina Piñango Juárez.

Como requisito final para obtener el título de

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Matemática aplicada.

Tutor: Dr. Javier Hernández Benítez.

Barquisimeto - Venezuela

Febrero 2015

La transformación de Darboux y perturbación de funcionales lineales

Br. Diana Carolina Piñango Juárez.

RESUMEN

En este trabajo, se estudian los aportes presentados en [2], por M. Bueno y F. Marcellán, en el que consideran una sucesión de polinomios ortogonales asociada a un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$, definido en el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales que satisface una relación de recurrencia a tres términos, cuyos coeficientes son las entradas de una matriz denominada Matriz de Jacobi mónica. En lo que sigue, se muestra como encontrar la matriz de Jacobi asociada a tres perturbaciones canónicas $x\mathcal{L}$, $\mathcal{L}+\mathbf{C}\delta(x)$ y $\frac{1}{x}\mathcal{L}+\mathbf{C}\delta(x)$ donde $\delta(x)$ denota el funcional lineal $(\delta(x))(x^k)=\delta_{k,0}$ y $\delta_{k,0}$ es la delta de Kronecker. Nuestra herramienta principal es la transformación de Darboux que está basada en la factorización LU de la matriz de Jacobi.

A mis padres:

mi más grande inspiración.

Índice general

Agradecimientos

- Agradezco inmensamente a Yavé padre, por brindarme todas las experiencias que me hacen crecer, por darme aliento para recorrer mi camino.
- A mis padres Leonardo Piñango y Viviana Juárez, por todas sus enseñanzas, por tanto cariño, por tanta comprensión, por que sé que trabajan duro, gracias por enseñarme a defenderme y darme alas. Les debo todo, mil gracias.
- A todos mis familiares, porque a pesar de las dificultades siempre está alguno allí brindando su apoyo, en especial agradezco a mis queridas hermanas y a las personas más leales Jesús Suárez y René Herrera.
- A mis amigos, compañeros de tan espectacular aventura, porque no hay nada mejor y enriquecedor que emprender un viaje al lado de personas como ustedes, en particular a Génesis Sequera, Iliana Vargas, Rafael Azuaje, Liseth Mendoza, Karla Carrero, Alejandro Chávez.
- A todos los miembros de AsoEM por su gran apoyo, por los buenos momentos, por toda la amistad.
- A los que en este recorrido han sido como mi familia, porque lejos de casa los encontré a ustedes, porque sin vacilaciones me brindaron su amistad, Eliennys Vázquez, familia Gil Juárez, Génesis Sequera, Daibring Morillo, Juan Bialko, Nelson Quinte-

ro, Darelys Tavera, Anderson Gutierrez, Aurimar Gómez, Rafael Rangel y familia Guerrero Flores. Me sentí en casa.

- A todos los profesores que fueron parte de mi formación académica, en especial a los profesores Ebner Pineda, Eibar Hernández, Fernando Villafañe y Rómulo Castillo.
- A mi tutor el profesor Javier Hernández por su ayuda en este trabajo.
- Y por su puesto a mi amado Shaday, por todo tu incondicional apoyo, porque me has brindado la más dulce compañía en esta expedición de mi vida, agradezco que entre tantas diferencias, hayamos coincido en el amor a la ciencia.

Introducción

Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal a valores complejos definido en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de todos los polinomios con coeficientes reales. Si $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, entonces existe una sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_{n\geq 0}$ asociada a $\mathcal{L}$. Esta sucesión de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia a tres términos, cuyos coeficientes son las entradas de una matriz tridiagonal J que conocemos como matriz de Jacobi mónica.

En la literatura (ver [3],[4],[11],[13],[17]), se estudian varios ejemplos de perturbaciones de funcionales lineales cuasi-definido. De los cuales consideramos tres casos canónicos

1. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = x\mathcal{L}$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_1)(p) := \mathcal{L}(xp),$$

2. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_2)(p) := \mathcal{L}(p) + \mathbf{C}p(0),$$

3. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_3 = \frac{1}{x}\mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_3)(p) := \mathcal{L}\left(\frac{p - p(0)}{x}\right) + \mathbf{C}p(0).$$

Entonces parece ser natural dar una respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Es el funcional lineal perturbado un funcional lineal cuasi-definido?

2. En caso afirmativo, ¿Existe una relación entre la sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_{n\geq 0}$ asociada al funcional lineal original y la sucesión de polinomios ortogonales $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ asociada al funcional perturbado?

En [3],[11],[13] se dieron condiciones necesarias y suficientes para que el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ sea cuasi-definido. Y también se obtiene la representación de $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ en términos de $(P_n)_{n\geq 0}$. En [17] a esta clase de perturbación se le llama *transformación de Christoffel*.

Lo mismo ocurre para los funcionales $\widetilde{\mathcal{L}}_2$ y $\widetilde{\mathcal{L}}_3$ en [4],[11], [13] y en [12] respectivamente. Notemos que $x\mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}}_1 = x\widetilde{\mathcal{L}}_2$. En [17] se le conoce a $\widetilde{\mathcal{L}}_2$ como *transformación de Uvarov* y a la perturbación $\widetilde{\mathcal{L}}_3$ como *transformación de Geronimus*.

En este trabajo pretendemos analizar los resultados presentados por M. Bueno y F. Marcellán en [2], quienes estudiaron este tipo de perturbaciones desde un punto de vista diferente. Este enfoque esta basado en la relación entre las matrices de Jacobi mónicas $\widetilde{J}_i$, $i = 1, 2, 3$ asociadas al funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_i$, $i = 1, 2, 3$ y la matriz J asociada al funcional lineal original $\mathcal{L}$.

El proceso para calcular la matriz de Jacobi mónica asociada con $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ en términos de la matriz de Jacobi mónica asociada a $\mathcal{L}$, está basado en el primer paso del algoritmo LR de la Transformación de Darboux sin parámetros. Existen varias contribuciones en esta dirección por ejemplo, el trabajo por Galant (ver [5],[6]), Golub y Kautsky (ver [8],[10]), y Gautschi (ver [7]).

Supongamos que un funcional lineal $\mathcal{L}$ es definido en términos de una función peso ω de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p(x)\omega(x)dx.$$

Los trabajos realizados por Galant (ver [5],[6]), Golub y Kautsky (ver [8],[10]), están enfocados en el cálculo de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos que satisface la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la perturbación lineal de ω, es decir, $\widetilde{\omega} = k(x-\alpha)\omega$, suponiendo que $\widetilde{\omega}$ es una función positiva y L^1-integrable en el soporte de ω. Gautschi (ver [7]) extendió este resultado para medidas cuasi-definidas, esto es, medidas μ tal que el funcional lineal asociado $\mathcal{L}$ definido por $\mathcal{L}(p) = \int_{\mathbb{R}} p(x)d\mu$ es cuasi-definido.

En contexto matricial, la transformación de Darboux sin parámetro aplicada a la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\mathcal{L}$ genera la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $x\mathcal{L}$. La principal contribución del trabajo de M. Bueno y F. Marcellán (ver [2]), es la siguiente: dado un funcional lineal simétrico $\mathcal{U}$, la correspondiente matriz de Jacobi J no tiene factorización LU. En tal caso no es posible encontrar la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $x\mathcal{L}$ aplicando la transformación de Darboux sin parámetro. Sin embargo, se prueba que es posible encontrar la matriz de Jacobi mónica asociada con $x^2\mathcal{L}$, por la aplicación de dos transformaciones de Darboux sin parámetro y con cambio ϵ, como un caso límite.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el primer capítulo damos una serie de definiciones y resultados importantes de la teoría de polinomios ortogonales y estudiamos un poco la factorización LU, en el segundo capítulo introducimos las factorizaciones LU y UL de la matriz tridiagonal J, en el tercer capítulo mostramos como encontrar la matriz de Jacobi mónica $\widetilde{J}_1$ asociada con el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = x\mathcal{L}$, por la aplicación de la transformación de Darboux sin parámetros a la matriz de Jacobi mónica J asociada al funcional lineal $\mathcal{L}$. El principal resultado de este capítulo es el teorema 4 y estudiamos el caso en el que el funcional lineal es simétrico como un caso límite. Finalmente, en el cuarto capítulo obtenemos la matriz tridiagonal $\widetilde{J}_2$ asociada al funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$ por la aplicación de una transformación de Darboux sin parámetros combinada con una transformación de Darboux a la matriz de Jacobi mónica J asociada a $\mathcal{L}$.

Capítulo 1

Polinomios Ortogonales y Factorización LU.

En lo que sigue, mostraremos una serie de resultados de la teoría de Polinomios Ortogonales, que nos serán útiles para mostrar como encontrar la matriz de Jacobi mónica asociada a tres perturbaciones canónicas de un funcional lineal $\mathcal{L}$. En este asunto, nuestra herramienta principal es la factorización LU.

1.1. Polinomios Ortogonales.

Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal a valores complejos definido en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de todos los polinomios con coeficientes reales. Llamemos $\mu_k = \mathcal{L}[x^k]$, al k-ésimo momento asociado con $\mathcal{L}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Mas aún, la matriz

$$M = (\mu_{i+j})_{i,j=0}^{\infty} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

se conoce como la matriz de momentos asociada a $\mathcal{L}$, entonces la matriz

$$M_n = (\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix},$$

es la submatriz principal de orden n de la matriz de momentos asociada a $\mathcal{L}$. El funcional $\mathcal{L}$ se dice cuasi-definido si todas las submatrices principales M_n de la matriz de momentos son no-singulares (ver [3]).

Ahora daremos una caracterización de funcional cuasi-definido muy importante, pues nos garantiza la existencia de una familia de polinomios a la que llamaremos sucesión de polinomios ortogonales. $\mathcal{L}$ es cuasi-definido si y solo si existe una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\geq 0}$ tal que

1. P_n es un polinomio de grado n.

2. $\mathcal{L}[P_n P_m] = K_n \delta_{n,m}$, con $K_n \neq 0$ donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker definida por:

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Esta sucesión es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$.(ver [3]).

Entonces, si $\mathcal{L}$ es el funcional lineal asociado a la sucesión de polinomios $(P_n)_{n\geq 0}$, los siguientes enunciados son equivalentes (ver [3]):

1. $(P_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$;

2. $\mathcal{L}[pP_n] = 0$ para cada polinomio p de grado $m < n$ mientras $\mathcal{L}[pP_n] \neq 0$ si $m = n$;

3. $\mathcal{L}[x^m P_n] = K_n \delta_{m,n}$ donde $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, ..., n$.

Ahora bien, si $(P_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$, como cada P_k es de grado k entonces $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ es una base para el espacio vectorial de todos los polinomios de grado a lo sumo m, así se tiene que cualquier polinomio p de grado menor o igual a m se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base.

Teorema 1 . *Sea $(P_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales asociada a $\mathcal{L}$. Entonces para cada polinomio $p(x)$ de grado n,*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

donde

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[pP_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Prueba. (ver [3])

Notemos que dado el funcional lineal $\mathcal{L}$ entonces si $(P_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$, entonces $(c_n P_n)_{n\geq 0}$ es también una familia de polinomios ortogonales, esto se refleja en el siguiente resultado.

Corolario 1 . *Si $(P_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$ y si $(Q_n)_{n\geq 0}$ es también una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$, entonces* *existen constantes* $c_n \neq 0$ *tales que*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \ \ n = 0, 1, 2, ...$$

Prueba. (ver [3])

Cabe destacar, que si el coeficiente principal de cada P_n es igual a 1, entonces decimos que $(P_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$.

Uno de los resultados de la teoría de los polinomios ortogonales de mayor relevancia para este trabajo es el siguiente: La sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n\geq 0}$ asociado con el funcional cuasi-definido $\mathcal{L}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1.1}$$

con $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \beta_0$, y $\gamma_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Y si $\mathcal{L}$ es definido-positivo, entonces β_n es real y $\gamma_n > 0$ para $n \geq 1$, (ver [3]). Por lo tanto, existe una matriz tridiagonal semi-infinita J dada por

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

tal que $xP = JP$, con $P = [P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots]^t$. A la matriz J la llamamos matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\mathcal{L}$.

Ahora bien, si tenemos una sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_{n\geq 0}$ asociada a un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$, y además este funcional es simétrico, esto es, $\mathcal{L}(x^{2k+1}) = 0$, $k \geq 0$, entonces en la correspondiente relación de recurrencia (1.1.1) que $(P_n)_{n\geq 0}$ satisface

$$\beta_n = 0, \ \ n \geq 1. \ \ \text{(ver [3])} \tag{1.1.3}$$

Por otro lado, consideremos un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. En este trabajo estudiaremos tres perturbaciones canónicas de este funcional:

Para cualquier polinomio p,

1. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = x\mathcal{L}$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_1)(p) := \mathcal{L}(xp),$$

2. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_2)(p) := \mathcal{L}(p) + \mathbf{C}p(0),$$

3. El funcional original $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\widetilde{\mathcal{L}}_3 = \frac{1}{x}\mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$, donde

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_3)(p) := \mathcal{L}\left(\frac{p - p(0)}{x}\right) + \mathbf{C}p(0).$$

.

Así pues, surgen dos preguntas:

1. ¿Es el funcional perturbado también cuasi-definido?

2. En caso afirmativo, ¿existirá una relación entre las familias de polinomios ortogonales $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ asociadas a la perturbación y las familias $(P_n)_{n\geq 0}$ asociadas al funcional original?

Las respuestas a estas preguntas fueron dadas en [13], [15] y [17]. Al funcional $\mathcal{L}_1$ le llamamos comúnmente *transformación de Christoffel*, el funcional $\mathcal{L}_2$ lo conocemos como *transformación de Uvarov* y al funcional $\mathcal{L}_3$ le decimos *transformación de Geronimus*. El enfoque dado por M.Bueno y F.Marcellán en [2] fue el estudio de estas perturbaciones desde el punto de vista de la matriz de Jacobi y su relación con la factorización LU.

1.1.1. Polinomios kernel.

Para cualquier número complejo k, sea $\mathcal{L}_k^*$ un nuevo funcional de momento definido por

$$\mathcal{L}_k^*[x^n] = \mu_{n+1} - k\mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Entonces tenemos, para cada polinomio p

$$\mathcal{L}_k^*[p] = \mathcal{L}[(x-k)p].$$

Y definamos también los polinomios $P_n^*(k;x)$ por

$$P_n^*(k;x) = (x-k)^{-1}\left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)}P_n(x)\right],$$

donde suponemos que k no es un cero de P_n. A esta sucesión la llamaremos sucesión de polinomios kernel asociada a $\mathcal{L}$.

Teorema 2 . *Si k no es un cero de P_n para cualquier n, entonces $\mathcal{L}_k^*$ es cuasi-definido y $(P_n^*)_{n\geq 0}$ es su correspondiente suceción de polinomios ortogonales mónicos.*

Prueba.(ver [3])

1.2. Factorización LU.

Un sistema de ecuaciones lineales de orden $n \times n$ se puede escribir en forma matricial como

$$Ax = b,$$

donde la matriz A de coeficientes tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Veamos que el algoritmo gaussiano simple aplicado a la matriz A produce una factorización de A como el simple producto de dos matrices, una triangular inferior unitaria

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

y otra triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & l_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nos referimos a esto como la factorización LU de A, es decir, $A = LU$.

A continuación tenemos un ejemplo numérico que ilustra el hecho al que nos referimos:

Supongamos un sistema de ecuaciones lineales, que pueda escribirse de manera concisa en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

Ciertas operaciones en el proceso de eliminación gaussiana nos llevan al sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

y podemos llegar a este sistema de forma equivalente por una multiplicación por la izquierda de una matriz apropiada **M** al sistema (1.2.1)

$$\mathbf{M}Ax = \mathbf{M}b \tag{1.2.3}$$

donde **M** es una matriz elegida de modo que $\mathbf{M}A$ es la matriz de coeficientes para el sistema (1.2.2). Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{M}A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U$$

que es una matriz triangular superior. Para llegar al sistema (1.2.2), debemos realizar una serie de operaciones en el proceso de la eliminación gaussiana hacia adelante. Comenzamos aplicando algunas operaciones al sistema inicial (1.2.1) de la siguiente manera: a la fila dos le restamos $\frac{12}{6}$ la fila uno, a la fila tres le restamos $\frac{3}{6}$ veces la primera fila y por último a la fila cuatro le restamos -1 veces la fila uno, así completamos el primer paso de la eliminación gaussiana y obtemos el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix}. \tag{1.2.4}$$

Este paso se puede lograr mediante la multiplicación del sistema (1.2.1) por una matriz $\mathbf{M}_1$, donde

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos la forma especial de $\mathbf{M}_1$. Los elementos de la diagonal principal son todos 1 y los únicos elementos distintos de cero están en la primera columna. Estos números son los negativos de los multiplicadores situados en las posiciones donde se han creado ceros como coeficientes en el paso 1 de la fase de eliminación gaussiana hacia adelante.

Continuando con el paso 2 de la eliminación gaussiana, al realizar las operaciones: fila tres menos $\frac{-12}{-4}$ veces la fila dos y a la cuarta fila le restamos $-\frac{1}{2}$ veces la fila dos, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}. \tag{1.2.5}$$

que es equivalente a multiplicar el sistema (1.2.4) por la matriz

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una vez más, $\mathbf{M}_2$ difiere de una matriz identidad por la presencia de los negativos de los multiplicadores en la seguna columna de la diagonal principal hacia abajo.

Por último a la fila cuatro le restamos -2 veces la fila tres, y se reproduce el sistema (1.2.2), lo que equivale a multiplicar el sistema (1.2.5) por la matriz

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, la fase de eliminación gaussiana está completa y con

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1. \tag{1.2.6}$$

Utilizando (1.2.3) y (1.2.6) podemos dar una interpretación diferente de la fase de eliminación hacia adelante de la eliminación gaussiana. Ahora vemos que

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{M}^{-1}U \\ &= \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_3^{-1} \\ &= LU. \end{aligned}$$

Puesto que cada $\mathbf{M}_k$ tiene una forma especial, su inversa se obtiene simplemente cambiando los signos de las entradas de multiplicador negativo. Por lo tanto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

y se puede comprobar fácilmente que $LU = A$.

Para ver formalmente cómo la eliminación gaussiana simple conduce a una factorización LU es necesario demostrar que cada operación de renglón usada en el algoritmo se puede efectuar al multiplicar A por la izquierda por una matriz elemental. En concreto, si queremos restar λ veces el renglón p del renglón q, primero aplicamos esta operación a la matriz identidad de orden $n \times n$ para crear una matriz elemental $\mathbf{M}_{pq}$. Entonces se forma la matriz producto $\mathbf{M}_{pq}A$.

Antes de continuar, vamos a verificar que $\mathbf{M}_{pq}$ se obtinen al restar λ veces el renglón p del renglón q de la matriz A. Supongamos que $p < q$. Entonces, los elementos de $\mathbf{M}_{qp} = (m_{ij})$ son

$$
m_{ij} =; \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ -\lambda \text{ si } i = q \text{ y } j = p \\ 0 \text{ en todos los demás casos.} \end{cases}
$$

Por lo tanto, los elementos de $\mathbf{M}_{qp}A$ están dados por

$$(\mathbf{M}_{qp}A)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} m_{is}a_{sj} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq q \\ a_{qj} - \lambda a_{pj} & \text{si } i = q \end{cases}$$

El q-ésimo renglón de $\mathbf{M}_{qp}A$ es la suma de renglón q-ésimo de A y $-\lambda$ veces el renglón p-ésimo de A, como queríamos demostrar.

El k-ésimo paso de la eliminación gaussiana corresponde a la matriz $\mathbf{M}_k$, que es el producto de $n-k$ matrices elemnetales:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{nk}\mathbf{M}_{n-1,k}\cdots\mathbf{M}_{k+1,k}.$$

Observemos que cada matriz elemental $\mathbf{M}_{ik}$ es triangular inferior pues $i > k$ y, por lo tanto, $\mathbf{M}_k$ es también triangular inferior. Si llevamos a cabo el proceso de eliminación gaussiana hacia adelante en A, el resultado será una matriz triangular superior U. Por otra parte, obtenemos el resultado aplicando una serie de factores tales como $\mathbf{M}_k$ a la izquierda de A. Por lo tanto, todo el proceso se resume a escribir

$$\mathbf{M}_{n-1}\cdots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1A = U.$$

Puesto que cada $\mathbf{M}_k$ es invertible, tenemos

$$A = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\cdots\mathbf{M}_{n-1}^{-1}U.$$

Cada $\mathbf{M}_k$ es triangular inferior unitaria. Cada inversa $\mathbf{M}_k^1$ tiene la misma propiedad y lo mismo es cierto de su producto. Por lo tanto, la matriz

$$L = \mathbf{M}_1^1\mathbf{M}_2^1\cdots\mathbf{M}_{n-1}^1$$

es triangular inferior unitaria y tenemos

$$A = LU.$$

Es conveniente aclarar que no toda matriz tiene una factorización de la forma LU. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

esta claro que A es no singular.

Ahora, si A puede escribirse como

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

entonces, $l_{11}u_{11} = 0$ por lo que al menos una de las matrices L o U es singular, pero $LU = A$ es no singular.

El seudocódigo para llevar a cabo la factorización de Doolittle es el siguiente:

Data: n, (a_{ij})

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**

  $l_{kk} \leftarrow 1$

  for $j = k, k+1, \ldots, n$ **do**

    $u_{kj} \leftarrow a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$

  end

  for $i = k+1, k+2, \ldots, n$ **do**

    $l_{ik} \leftarrow \left(\frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk}}{u_{kk}} \right)$

  end

end

Algorithm 1: Doolittle

El siguiente resultado nos da información crucial, referente a la existencia y unicidad de la factorización LU.

Teorema 3 . *Supongamos que $A \in M_n$ es no singular. Entonces A puede ser escrita como*

$$A = LU$$

con $L \in M_n$ triangular inferior con 1 en la diagonal y $U \in M_n$ triangular superior, si y solo si el determinante de todas las submatrices principales de A es distinto de 0, es decir $\det A_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Además, L y U son no singular y la factorización es única.

Prueba.(ver [9])

Capítulo 2

La transformación de Darboux.

En este capítulo, presentaremos la transformación de Darboux y sus variantes. Se mostrarán algunos resultados relevantes.

Para ello, consideremos un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$ y la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n\geq 0}$ con respecto a tal funcional. Esta sucesión de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia a tres términos dada por (1.1.1), que equivale al siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

A la matriz

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.0.1}$$

la llamamos matriz de Jacobi mónica (ver [16]), asociada al funcional $\mathcal{L}$. Asimismo introducimos la siguiente transformación $J^{(p)}$ de la matriz J

$$J = LU, \quad J^{(p)} := UL, \tag{2.0.2}$$

donde $J = LU$ denota la factorización LU sin pivoteo de J, con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & l_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.0.3}$$

La matriz $J^{(p)}$ es tridiagonal semi-infinita, y sus componentes en las posiciones $(i, i+1)$ son unos, con $i = 1, 2, 3, \ldots$. Así, la matriz $J^{(p)}$ es también una matriz de Jacobi mónica (ver [16]). La transformación dada en (2.0.2) es llamada transformación de Darboux sin parámetro y la matriz $J^{(p)}$ se dice la transformación de Darboux sin parámetro de J.

De igual manera, si expresamos J como el producto de U por L, donde U y L están dadas en (2.0.3), y consideramos la siguiente transformación $J^{(d)}$ para la matriz J

$$J = UL, \quad J^{(d)} := LU,$$

entonces, la matriz $J^{(d)}$ es también una matriz de Jacobi mónica (ver [16]). Esta última transformación la conocemos como transformación de Darboux y a la matriz $J^{(d)}$ le decimos la transformación de Darboux de J.

El siguiente lema, expresa los elementos u_k en la diagonal principal de la matriz triangular superior U dada en (2.0.3), en términos de los elementos l_k en la subdiagonal de L (dada también en (2.0.3)) y las entradas β_k en la diagonal principal de la matriz de Jacobi mónica J. Además, damos también una expresión alternativa de los elementos u_k en términos de los valores $P_n(0)$, y se obtiene una fórmula recursiva para calcular los elementos l_k.

Lema 1 . *Sea $(P_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos definida por la matriz de Jacobi mónica J. Supongamos que $P_n(0)\neq 0$, $n\geq 1$. Si $J=LU$ donde LU denota la factorización LU de J entonces,*

$$u_n = -\frac{P_n(0)}{P_{n-1}(0)}. \tag{2.0.4}$$

Y también obtenemos que

$$u_1 = \beta_0 \;\; y \;\; u_n = \beta_{n-1} - l_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{2.0.5}$$

donde los l_n vienen dados de manera recursiva por

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0} \;\; y \;\; l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}, \quad n \geq 2. \tag{2.0.6}$$

Prueba.

La matriz de Jacobi mónica J es igual al producto de la matriz diagonal inferior L por la matriz diagonal superior U.

$$J = LU = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots \\ u_1 l_1 & u_2 + l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & u_2 l_2 & u_3 + l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

así, comparando con la matriz J dada en (2.0.1) tenemos que

$$u_1 = \beta_0, \quad \gamma_n = u_n l_n, \text{ para todo } n \geq 1, \tag{2.0.7}$$

$$y \quad \beta_n = u_{n+1} + l_n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Entonces

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{u_1} = \frac{\gamma_1}{\beta_0} \quad y \quad l_n = \frac{\gamma_n}{u_n} = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}.$$

Procediendo por inducción sobre n. De la relación de recurrencia (1.1.1) que $(P_n)_{n\geq 0}$ satisface, obtenemos que

$$P_1(0) = -\beta_0 \quad y \quad P_0(0) = 1,$$

así

$$u_1 = \beta_0 = -\frac{P_1(0)}{P_0(0)}.$$

Suponiendo que para $k \leq n$ se cumple que $u_k = -\frac{P_k(0)}{P_{k-1}(0)}$. Entonces, teniendo en cuenta de nuevo la relación de recurrencia (1.1.1)

$$P_{n+1}(0) = -\beta_n P_n(0) - \gamma_n P_{n-1}(0).$$

Dividiendo la expresión previa por $P_n(0)$ nos queda

$$\frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)} = -\beta_n - \gamma_n \frac{P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

Aplicando la hipótesis inductiva y teniendo en cuenta (2.0.7), obtenemos

$$-\frac{P_{n+1}(0)}{P_{n(0)}} = \beta_n - \frac{\gamma_n}{u_n} = \beta_n - l_n = u_{n+1}.$$

■

Observación 1 . *Como los elementos en la diagonal principal de la matriz L son iguales a 1, la factorización LU conocida como factorización de Doolittle de la matriz de Jacobi mónica J, es única (ver [14]). Del lema anterior y por la unicidad de la factorización*

LU de J, tenemos inmediatamente que la factorización LU sin pivoteo de una matriz de Jacobi mónica existe si y solo si $P_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$.

Por otra parte, podemos considerar las matrices L y U de una forma alternativa, así

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & l_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_1 - l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta_2 - l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.0.8}$$

donde

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0}, \quad l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}, \quad n \geq 2. \tag{2.0.9}$$

Ahora, nosotros expresaremos la matriz de Jacobi mónica (2.0.1) como el producto de una matriz triangular superior U por una matriz triangular inferior L, es decir, $J = UL$ donde los factores L y U son como en (2.0.3). En este caso la factorización no es única y depende de un parámetro libre S_0. Llamaremos a este tipo de factorización, que no es la clasica, factorización UL.

Definición 1 . *Sea* $(P_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal* $\mathcal{L}$ *y supongamos que* $(P_n)_{n\geq 0}$ *satisface la relación de recurrencia (1.1.1). Sea* $S_0 \in \mathbb{C}$. *Entonces,* $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ *es la* ***sucesión de polinomios co-recursiva con respecto al parámetro*** S_0 *asociada con el funcional lineal* $\mathcal{L}$ *si esta sucesión satisface la relación de recurrencia dada por*

$$\widehat{P}_{n+1}(x) = (x - \widehat{\beta}_n)\widehat{P}_n(x) - \widehat{\gamma}_n \widehat{P}_{n-1}(x), \tag{2.0.10}$$

donde

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_0 &= \beta_0 - S_0\\ \widehat{\beta}_n &= \beta_n, \quad n \geq 1,\\ \widehat{\gamma}_n &= \gamma_n \ \ para \ \ todo \ \ n.\end{aligned}$$

Proposición 1 *. Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada con un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$ y sea $(P_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$. Supongamos que $J = UL$ denota la factorización UL de J y S_i denota la entrada en la posición $(i+1, i+1)$ de U, esto es, $S_i := u_{i+1}$ para $i \geq 0$, donde el elemento S_0 es un parámetro libre generado en la factorización UL (que no es única). Si $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ denota la sucesión de polinomios co-recursiva con parámetro S_0 asociado con $\mathcal{L}$, y $\widehat{P}_n(0) \neq 0$ para todo n, entonces*

$$l_n = -\frac{\widehat{P}_n(0)}{\widehat{P}_{n-1}(0)}. \tag{2.0.11}$$

Además

$$l_n = \beta_{n-1} - S_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

y S_n puede ser calculada de forma recursiva de la siguiente manera

$$S_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - S_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Prueba.

Si U y L son matrices como en (2.0.3), entonces

$$J = UL = \begin{bmatrix} u_1 + l_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 l_1 & u_2 + l_2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 l_2 & u_3 + l_3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Comparando los elementos de la matriz UL con los de la matriz J dada en (2.0.1), tenemos

$$l_1 = \beta_0 - u_1,$$

Consideremos u_1 como un parámetro libre, que denotamos por S_0, entonces obviamente l_1 puede ser calculado en términos de S_0. Y nuevamente comparando las matrices mencionadas anteriormente, notamos que $l_k = \beta_{k-1} - u_k$ y $u_{k+1} l_k = \gamma_k$, para todo $n \geq 1$. Entonces como $S_{k-1} := u_k$

$$S_k := u_{k+1} = \frac{\gamma_k}{\beta_{k-1} - S_{k-1}}.$$

Por otro lado, de la relación de co-recurrencia (2.0.10) que $(\widehat{P}_m)_{n\geq 0}$ satisface, tenemos para $n = 0$

$$\widehat{P}_1(x) = (x - \widehat{\beta}_0)\widehat{P}_0(x) - \widehat{\gamma}_0 \widehat{P}_{-1}(x)$$

Entonces, $\widehat{P}_1(0) = -\widehat{\beta}_0 \widehat{P}_0(0)$.

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_1(0) &= -(\beta_0 - S_0)\widehat{P}_0(0) \\ &= (u_1 - \beta_0)\widehat{P}_0(0) \\ &= -l_1 \widehat{P}_0(0). \end{aligned}$$

Por lo que se cumple

$$l_1 = -\frac{\widehat{P}_1(0)}{\widehat{P}_0(0)}.$$

Suponiendo que para $k \leq n$ es cierto que

$$l_k = -\frac{\widehat{P}_k(0)}{\widehat{P}_{k-1}(0)},$$

entonces para $k = n+1$ ocurre que

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{k+1}(0) &= -\widehat{\beta}_k \widehat{P}_k(0) - \widehat{\gamma}_k \widehat{P}_{k-1}(0) \\
&= -\beta_k \widehat{P}_k(0) - \gamma_k \widehat{P}_{k-1}(0) \\
&= -\beta_k \widehat{P}_k(0) - S_k l_k \widehat{P}_{k-1}(0) \\
&= -\beta_k \widehat{P}_k(0) + S_k \widehat{P}_k(0) \\
&= (-\beta_k + S_k)\widehat{P}_k(0).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\widehat{P}_{k+1}(0)}{\widehat{P}_k(0)} = -\beta_k + S_k.$$

Luego

$$l_{k+1} = -\frac{\widehat{P}_{k+1}(0)}{\widehat{P}_k(0)}.$$

■

Observación 2 . *De la proposición 1 tenemos claramente que la factorización UL de una matriz de Jacobi mónica existe si y solo si el parámetro libre S_0 toma valores tales que la correspondiente sucesión de polinomios co-recursiva $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ satisface que $\widehat{P}_n(0) \neq 0$, para todo n.*

Por otra parte, las matrices L y U se pueden escribir como

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_0 - S_0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_1 - S_1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} S_0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

donde

$$S_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - S_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Capítulo 3

Transformación del funcional $\mathcal{L}$ en $x\mathcal{L}$.

En este capítulo, mostraremos que al aplicar la transformación de Darboux sin parámetro a la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\mathcal{L}$, obtenemos la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal x$\mathcal{L}$. Este resultado será extendido de una manera sencilla para obtener la matriz de Jacobi mónica asociada con $(\mathbf{x}-\alpha)\mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

El siguiente lema, da una versión finita de la transformación de Darboux sin parámetro. Se hará uso de la siguiente notación: para cualquier matriz A, $(A)_n$ denota la submatriz principal de orden n de A.

Lema 2 . *Suponiendo que $\widetilde{L}\widetilde{U}$ y LU son la factorización LU sin pivoteo de $(J)_n$ y J, respectivamente. Entonces,*

$$(L)_n = \widetilde{L}, \;\; (U)_n = \widetilde{U}.$$

Además, si $J^{(p)}$ es la transformación de Darboux sin parámetro de J, entonces

$$(J^{(p)})_n = (U)_n(L)_n + l_n e_n e_n^t,$$

donde $e_n = [0, ..., 1]^t$. Y $(J^{(p)})_n$ es la transformación de Darboux sin parámetro de $(J)_n$.

Prueba.

Como $J = LU$ con L y U dadas en (2.0.3) y $(J)_n = \widetilde{L}\widetilde{U}$, solo basta considerar las submatrices principales de L y U y claramente obtenemos que $\widetilde{L} = (L)_n$ y $\widetilde{U} = (U)_n$.

Por otra parte, si $J^{(p)} = UL$ es la transformación de Darboux sin parámetro de J, entonces

$$(J^{(p)})_n = \begin{bmatrix} u_1 + l_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ u_2 l_1 & u_2 + l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_3 l_2 & u_3 + l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_n l_{n-1} & u_n + l_n \end{bmatrix},$$

esto es

$$\begin{aligned} (J^{(p)})_n \quad &= \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & o & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & o & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \quad l_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 0, & \cdots & 1 \end{bmatrix}_n, \end{aligned}$$

entonces

$$(J^{(p)})_n = (U)_n (L)_n + l_n e_n e_n^t.$$

■

Proposición 2 . *Sea $(J)_n$ la submatriz principal de orden n de la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Si aplicamos la transformación de*

Darboux sin parámetros a $(J)_n$, esto es,

$$(J)_n = (L)_n(U)_n, \quad (J^{(p)})_n = (U)_n(L)_n + l_n e_n e_n^t,$$

entonces, la matriz $(J^{(p)})_n$ es la submatriz principal de orden n de la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $x\mathcal{L}$.

Prueba.

Teniendo en cuenta (2.0.5), obtenemos que

$$(J^{(p)})_n = \begin{bmatrix} \beta_0 + l_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1(\beta_1 - l_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1}(\beta_{n-1} - l_{n-1}) & \beta_{n-1} + l_n - l_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Suponiendo que $(Q_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional $x\mathcal{L}$ y asumiendo que satisface la relación de recurrencia a tres términos dada por

$$Q_{n+1}(x) = (x - \delta_n)Q_n(x) - k_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.0.1}$$

probaremos que las entradas de la matriz $(J^{(p)})_n$ son precisamente los coeficientes de la relación de recurrencia de arriba, que satisfacen los polinomios $Q_n(x)$, esto es

$$\begin{aligned} \delta_n &= \beta_n + l_{n+1} - l_n, \quad n \geq 0, \\ k_n &= l_n(\beta_n - l_n), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Como el funcional $x\mathcal{L}$ esta dado por

$$(x\mathcal{L})(p) := \mathcal{L}(xp), \text{ para cualquier polinomio p}$$

entonces obtenemos del teorema 2 que

$$Q_n(x) = \frac{1}{x}[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)}P_n(x)],$$

es el n-ésimo término de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada con $x\mathcal{L}$.

Reemplazando en la relación de recurrencia (3.0.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}[P_{n+2}(x) - \frac{P_{n+2}(0)}{P_{n+1}(0)}P_{n+1}(x)] &= (x-\delta_n)\frac{1}{x}[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(0)}{P_n(0)}P_n(x)] \\
&\quad -k_n\frac{1}{x}[P_n(x) - \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(0)}P_{n-1}(x)].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.0.4), la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
P_{n+2} + u_{n+2}P_{n+1}(x) &= (x-\delta_n)[P_{n+1}(x) + u_{n+1}P_n(x)] - k_n[P_n(x) + u_nP_{n-1}(x)] \\
&= (x-\delta_n)P_{n+1}(x) + (x-\delta_n)u_{n+1}P_n(x) - k_nP_n(x) - k_nu_nP_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

entonces

$$P_{n+2}(x) = (x-\delta_n-u_{n+2})P_{n+1}(x) + (u_{n+1}(x-\delta_n)-k_n)P_n(x) - k_nu_nP_{n-1}(x).$$

Como $(P_n)_{n\geq 0}$ satisface la relación de recurrencia a tres términos (1.1.1), sustituimos en la ecuación anterior y conseguimos

$$\begin{aligned}
xP_{n+1}(x) - \beta_{n+1}P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x) &= (x-\delta_n-u_{n+2})P_{n+1}(x) \\
&\quad +(u_{n+1}(x-\delta_n)-k_n)P_n(x) - k_nu_nP_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

así

$$(\delta_n + u_{n+2} - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) = [\gamma_{n+1} + u_{n+1}(x - \delta_n) - k_n]P_n(x) - k_n u_n P_{n-1}(x),$$

entonces

$$\frac{(\delta_n + u_{n+2} - \beta_{n+1})}{u_{n+1}} P_{n+1}(x) = xP_n + \frac{(\gamma_{n+1} - u_{n+1}\delta_n - k_n)}{u_{n+1}} P_n(x) + \frac{k_n u_n}{u_{n+1}},$$

luego

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \tfrac{(\delta_n + u_{n+2} - \beta_{n+1})}{u_{n+1}} P_{n+1}(x) - \tfrac{(\gamma_{n+1} - u_{n+1}\delta_n - k_n)}{u_{n+1}} P_n(x) \\ &\quad + \tfrac{k_n u_n}{u_{n+1}} P_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

Comparando (3.0.2) con la relación de recurrencia (1.1.1) que satisface $(P_n)_{n\geq 0}$ obtenemos la siguiente relación

$$\frac{(\delta_n + u_{n+2} - \beta_{n+1})}{u_{n+1}} = 1,$$

por lo que

$$\delta_n = \beta_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Como $u_n = \beta_{n-1} - l_{n-1}$, $n \geq 2$, la relación anterior queda así

$$\delta_n = \beta_n + l_{n+1} - l_n.$$

Por otra parte, encontramos también de (3.0.2) por la unicidad de la relación de recurrencia a tres términos que $(P_n)_{n\geq 0}$ satisface, la relación

$$\gamma_n = \frac{k_n u_n}{u_{n+1}},$$

entonces

$$k_n = \gamma_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Como $\gamma_n = l_n(\beta_{n-1} - l_{n-1})$ y $u_n = \beta_{n-1} - l_{n-1}$, entonces

$$k_n = l_n(\beta_n - l_n).$$

Luego, $(J^{(p)})_n$ es la submatriz principal de orden n de la matriz de Jacobi mónica asociada con $x\mathcal{L}$ pues sus entradas son los coeficientes de la relación de recurrencia (3.0.1) que satisface $(Q_n)_{n\geq 0}$.

■

Observación 3 . *De la proposición previa, tenemos que $x\mathcal{L}$ es cuasi definido si y solo si la factorización LU de J existe, que por la observación 1 es equivalente a que $P_n(0) \neq 0$ para todo n.*

Teorema 4 . *Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada con un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Si $(P_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$, y supongamos que $P_n(0) \neq 0$, para $n \geq 1$, entonces la transformación de Darboux sin parámetro de J, $J^{(p)}$, es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $x\mathcal{L}$.*

Prueba.

Las matrices L y U son bidiagonales, y las componentes de los productos LU y UL son sumas finitas. Así la proposición 2, puede extenderse para un caso infinito sin ningún problema.

■

Lema 3 . *Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Entonces, la matriz $J - \alpha I$, donde I denota la matriz identidad, es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$ dada por*

$$\widetilde{\mathcal{L}}[p] = \mathcal{L}[p(\cdot - \alpha)],$$

donde p denota cualquier polinomio.

Prueba.

Sea $(P_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$. Entonces $(P_n)_{n\geq 0}$ satisface la relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x).$$

Haciendo el cambio de variable $x \to x+\alpha$ en la ecuación anterior, tenemos

$$(x+\alpha)P_n(x+\alpha) = P_{n+1}(x+\alpha) + \beta_n P_n(x+\alpha) + \gamma_n P_{n-1}(x+\alpha),$$

esto es

$$P_{n+1}(x+\alpha) = (x-(\beta_n-\alpha))P_n(x+\alpha) - \gamma_n P_{n-1}(x+\alpha), \ \ n \geq 0. \tag{3.0.3}$$

Ahora

$$J - \alpha I = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

es decir

$$J - \alpha I = \begin{bmatrix} \beta_0-\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1-\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2-\alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.0.4}$$

Así, si $\widetilde{P}_n(x) := P_n(x+\alpha)$, entonces de (3.0.3) y (3.0.4) vemos que $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada con la matriz de Jacobi mónica $J-\alpha I$ pues las entradas de la matriz $J - \alpha I$ son los coeficientes de la relación de recurrencia (3.0.3).

Por otra parte, si definimos el funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$ por $\widetilde{\mathcal{L}}[p] = \mathcal{L}[p(\cdot - \alpha)]$ queremos ver que la sucesión $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a este funcional, entonces como $\widetilde{P}_n(x) := P_n(x + \alpha)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}[\widetilde{P}_n \widetilde{P}_m] &= \mathcal{L}[\widetilde{P}_n(\cdot - \alpha)\widetilde{P}_m(\cdot - \alpha)] = \mathcal{L}[P_n P_m] \\ &= K_n \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

lo que significa que $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Luego, $J - \alpha I$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$.

■

Observación 4 . *Si J es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional lineal $\mathcal{L}$, entonces la matriz $J + \alpha I$ es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\widetilde{\mathcal{L}}$ dado por*

$$\widetilde{\mathcal{L}}[p] = \mathcal{L}[p(\cdot + \alpha)].$$

La prueba de esta afirmación es análoga a la prueba del lema 3.

Proposición 3 . *Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada con $\mathcal{L}$, $(P_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$, y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(\alpha) \neq 0$, para $n \geq 1$. Si aplicamos la siguiente transformación*

$$J - \alpha I = LU, \quad \widetilde{J} := UL + \alpha I,$$

entonces, $\widetilde{J}$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $(x - \alpha)\mathcal{L}$. A la transformación anterior la llamamos transformación de Darboux sin parámetros y con cambio α.(ver [2])

Prueba.

Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\mathcal{L}$, entonces por el lema 3, sabemos que $J-\alpha I$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\mathcal{L}_1$ dado por

$$\mathcal{L}_1[p]=\mathcal{L}[p(\cdot-\alpha)].$$

Si aplicamos la transformación de Darboux sin parámetros a $J-\alpha I$ se genera una nueva matriz de Jacobi mónica T que por el teorema 4, esta asociada con el funcional $x\mathcal{L}_1$. De nuevo como consecuencia del lema 3, tenemos que $T+\alpha I$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con $\mathcal{L}_2$ que esta dado de manera análoga por

$$\mathcal{L}_2[p]=(x\mathcal{L}_1)[p(\cdot+\alpha)].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2[p] &= (x\mathcal{L}_1)[p(\cdot+\alpha)]:=\mathcal{L}_1[xp(\cdot+\alpha)]=\mathcal{L}[(x-\alpha)p]\\ &= (x-\alpha)\mathcal{L}[p].\end{aligned}$$

■

Corolario 2 . *Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$, y sea $(P_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$. Considerando $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\in\mathbb{C}$. Si aplicamos la siguiente transformación a J*

$$\begin{aligned}T_1: &= J-\alpha_1 I=L_1U_1,\quad \widetilde{T}_1:=U_1L_1+\alpha_1 I,\\ T_2: &= \widetilde{T}_1-\alpha_2 I=L_2U_2,\quad \widetilde{T}_2:=U_2L_2+\alpha_2 I,\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$T_r := \widetilde{T}_{r-1} - \alpha_r I = L_r U_r, \quad \widetilde{T}_r := U_r L_r + \alpha_r I.$$

Y si $(P_n^{(i)})_{n\geq 0}$ *es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada con la matriz* $\widetilde{T}_i$, $i \in \{1, 2, ..., r-1\}$, *y suponiendo que*

$$P_n(\alpha_1) \neq 0, \; P_n(\alpha_{i+1}; i) \neq 0, \; n \geq 1, \; i \in \{1, 2, ..., r-1\},$$

entonces $\widetilde{T}_r$ *es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional*

$$(x - \alpha_r) \cdots (x - \alpha_2)(x - \alpha_1)\mathcal{L}.$$

A esta transformación se le llama transformación de Christoffel de $\mathcal{L}$.

Prueba.

Sea J la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Si aplicamos a J la siguiente transformación

$$T_1 := J - \alpha_1 I = L_1 U_1, \quad \widetilde{T}_1 := U_1 L_1 + \alpha_1 I,$$

y teniendo en cuenta que $(P_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$, tal que $P_n(\alpha_1) \neq 0$, entonces como consecuencia de la proposición 3, $\widetilde{T}_1$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $(x - \alpha_1)\mathcal{L}$.

De igual manera, si aplicamos la transformación

$$T_2 := \widetilde{T}_1 - \alpha_2 I = L_2 U_2, \quad \widetilde{T}_2 := U_2 L_2 + \alpha_2 I,$$

a la matriz $\widetilde{T}_1$, y como $P_n(\alpha_2) \neq 0$, tenemos de nuevo de la proposición 3, que $\widetilde{T}_2$ es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $(x - \alpha_2)[(x - \alpha_3)\mathcal{L}] = (x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\mathcal{L}$.

Haciendo este procedimiento de manera sucesiva, como

$$P_n(\alpha_1) \neq 0,\ P_n(\alpha_{i+1}) \neq 0,\ n \geq 1,\ i \in \{1, 2, ..., r-1\},$$

conseguimos que $\widetilde{T}_r$ es la matriz de Jacobi mónica asociada con

$$(x - \alpha_r) \cdots (x - \alpha_2)(x - \alpha_1)\mathcal{L}.$$

■

3.0.1. Transformación de Darboux sin parámetro para funcionales lineales simétricos.

En lo que sigue, consideramos un funcional lineal definido positivo $\mathcal{U}$. Este funcional se dice simétrico si los momentos de orden impar asociados a $\mathcal{U}$ son todos cero, esto es, $\mathcal{U}(x^{2k+1}) = 0$, $k \geq 0$. En tal caso, si $(Q_n)_{n\geq 0}$ es la suseción de polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{U}$, entonces de (1.1.3) en la correspondiente fórmula de recurrencia (1.1.1)

$$\beta_n = 0\ \ (n \geq 1),$$

en consecuencia, la matriz de Jacobi mónica asociada a $\mathcal{U}$, J_0, tiene ceros como entradas en la diagonal principal y así por el teorema 3 la factorización LU de la matriz J_0 no existe.

El enfoque en esta sub-sección estará, en perturbaciones de un funcional lineal definido positivo simétrico que genera un nuevo funcional lineal definido positivo simétrico. Cabe resaltar, que si $\mathcal{U}$ es un funcional lineal simétrico, $x\mathcal{U}$ ya no es un funcional lineal simétrico. Sin embargo, sucede que $x^2\mathcal{U}$ sí es un nuevo funcional lineal simétrico. Basado en resultados previos, la manera más obvia para obtener la matriz de Jacobi mónica asociada con $x^2\mathcal{U}$

debería ser la aplicación de dos transformaciones de Darboux sin parámetro para J_0, de manera consecutiva. Pero, si

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \xi_1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \xi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal simétrico $\mathcal{U}$, como $\beta_0 = 0$, entonces la factorización LU de J_0 no existe (ver [9]) y no es posible considerar la transformación de Darboux sin parámetro de J_0. Ante la situación planteada, probaremos que la matriz de Jacobi mónica asociada con $x^2\mathcal{U}$ puede ser obtenida de la matriz de Jacobi asociada con $\mathcal{U}$ aplicando de manera consecutiva, dos transformaciones de Darboux sin parámetro con cambio $-\epsilon$ y ϵ, y tomando límites cuando ϵ tiende a 0.

Ahora, aplicaremos una transformación de Darboux sin parámetro con cambio $-\epsilon$ a la matriz de Jacobi mónica J_0, donde ϵ es cualquier número positivo. Si L_1U_1 denota la factorización LU de $J_0 + \epsilon I$,

$$J_0 + \epsilon I = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 & \cdots \\ \xi_1 & \epsilon & 1 & \cdots \\ 0 & \xi_2 & \epsilon & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = L_1U_1,$$

entonces, teniendo en cuenta (2.0.5), obtenemos que

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon) & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

y

$$U_1 = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \epsilon - l_1(\epsilon) & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \epsilon - l_2(\epsilon) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

con $l_1 = \frac{\xi_1}{\epsilon}$, $l_n = \frac{\xi_n}{\epsilon - l_{n-1}(\epsilon)}$.

Entonces, si hacemos $J_1 := U_1 L_1 - \epsilon I$,

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} \epsilon + l_1(\epsilon) & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon)(\epsilon - l_1(\epsilon)) & l_2(\epsilon) - l_1(\epsilon) + \epsilon & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon)(\epsilon - l_2(\epsilon)) & l_3(\epsilon) - l_2(\epsilon) + \epsilon & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \epsilon & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \epsilon & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1(\epsilon) & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon)(\epsilon - l_1(\epsilon)) & l_2(\epsilon) - l_1(\epsilon) & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon)(\epsilon - l_2(\epsilon)) & l_3(\epsilon) - l_2(\epsilon) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Y como consecuencia de la proposición 3, J_1 es la matriz de Jacobi mónica asociada con $(x+\epsilon)\mathcal{L}$. Seguidamente, aplicamos una de transformación de Darboux sin parámetro con cambio ϵ para J_1, esto es

$$J_1 - \epsilon I = L_2 U_2, \ \ J_2 := U_2 L_2 + \epsilon I.$$

Luego, del corolario 2, tenemos que J_2 es la matriz de Jacobi mónica de $(x+\epsilon)(x-\epsilon)\mathcal{L} = (x^2-\epsilon^2)\mathcal{L}$.

Por otra parte, notemos que

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\epsilon)(\epsilon - l_2(\epsilon)) & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\epsilon)(\epsilon - l_3(\epsilon)) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.0.5}$$

es la matriz de Jacobi mónica asociada con un funcional lineal simétrico pues sus entradas en la diagonal principal son todas ceros, si ϵ tiende a cero nosotros tenemos lo siguiente:

Proposición 4 .

$$\lim_{\epsilon \to 0} |l_n(\epsilon)[\epsilon - l_{n+1}(\epsilon)]| < \infty. \tag{3.0.6}$$

Si denotamos por $T := \lim_{\epsilon \to 0} J_2$*, entonces* T *es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal simétrico* $x^2\mathcal{L}$*.*

Con el objetivo de probar esta proposición, introducimos los siguientes lemas:

Lema 4 . *Si* $(R_n)_{n\geq 0}$ *es la sucesión de polinomios mónicos asociada con* $J_0 + \epsilon I$*, entonces*

$$l_n(\epsilon) = -\xi_n \frac{R_{n-1}(0)}{R_n(0)}, \ n \geq 1. \tag{3.0.7}$$

Prueba.

Consideremos la factorización LU de $J_0 + \epsilon I$ y teniendo en cuenta (2.0.7), obtenemos que

$$\xi_n = l_n(\epsilon) u_n(\epsilon),$$

donde $u_n(\epsilon) = \epsilon - l_{n-1}$, $n \geq 2$.

Considerando (2.0.4), tenemos

$$\xi_n = l_n(\epsilon)\left(-\frac{R_n(0)}{R_{n-1}(0)}\right),\ n \geq 1,$$

por lo que

$$l_n(\epsilon) = -\xi_n \frac{R_{n-1}(0)}{R_n(0)}.$$

■

Lema 5 . *Teniendo en cuenta que los polinomios $(R_n)_{n\geq 0}$ son funciones de ϵ, se cumple que*

- *Los polinomios de grado par, satisfacen*

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_{2n}(0) \neq 0 \ \ para \ \ n \geq 1. \tag{3.0.8}$$

- *Los polinomios de grado impar satisfacen*

$$R_{2n+1}(0) = \epsilon K_{2n+1}(\epsilon) \tag{3.0.9}$$

para un cierto polinomio de ϵ, $K_{2n+1}(\epsilon)$, tal que $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$ para $n \geq 0$.

Prueba.

Sea $(R_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada con la matriz $J_0 + \epsilon I$, entonces las entradas de $J_0 + \epsilon I$ son los parámetros de la relación de recurrencia que satisfacen los polinomios R_n, es decir

$$R_{n+1}(x) = (x-\epsilon)R_n(x) - \xi_n R_{n-1}(x). \tag{3.0.10}$$

Como el funcional $\mathcal{U}$ es definido positivo, entonces de (1.1.1) tenemos que $\xi_n > 0$ para $n \geq 1$.

Ahora, para probar que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) \neq 0$ procedemos por inducción sobre n. De (3.0.10), $R_1(0) = -\epsilon$ y $R_2(0) = \epsilon^2 - \xi_1$. Así el $\lim\limits_{\epsilon\to 0} R_2(0) \neq 0$.

Suponiendo que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} R_{2n-2}(0) \neq 0$ y de nuevo, teniendo en cuenta (3.0.10)

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) = \lim_{\epsilon\to 0}[-\epsilon R_{2n-1}(0) - \xi_{2n-1}R_{2n-2}(0)] \neq 0.$$

Por otra parte, veamos que $R_{2n+1}(0) = \epsilon K_{2n+1}(\epsilon)$, para cierto polinomio de ϵ, $K_{2n+1}(\epsilon)$ tal que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$ para $n \geq 0$.

Procedamos por inducción.

$$R_1(0) = -\epsilon = \epsilon K_1(\epsilon), \text{ donde } K_1(\epsilon) := -1,$$

y de aquí se tiene claramente que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} K_1 \neq 0$.

Supongamos que

$$R_{2n-1}(0) = \epsilon K_{2n-1}(\epsilon), \text{ con } \lim_{\epsilon\to 0} K_{2n-1}(\epsilon) \neq 0. \tag{3.0.11}$$

Ahora de (3.0.10) notamos que

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(0) &= -\epsilon R_{2n}(0) - \xi_{2n}R_{2n-1}(0) \\ &= -\epsilon R_{2n}(0) - \epsilon\xi_{2n}K_{2n-1}(\epsilon) \\ &= \epsilon(-R_{2n}(0) - \xi_{2n}K_{2n-1}(\epsilon)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$R_{2n+1}(0) = \epsilon K_{2n+1}(\epsilon), \quad para \quad n \geq 1,$$

donde

$$K_{2n+1}(\epsilon) = -R_{2n}(0) - \xi_{2n} K_{2n-1}(\epsilon), \tag{3.0.12}$$

así falta ver que $\lim_{\epsilon \to 0} K_{2n+1} \neq 0$. Ahora de (3.0.10)

$$R_{2n}(0) = -\epsilon R_{2n-1}(0) - \xi_{2n-1}(0),$$

entonces, considerando (3.0.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} R_{2n}(0) &= \lim_{\epsilon \to 0} [-\epsilon^2 K_{2n-1}(\epsilon) - \xi_{2n-1} R_{2n-2}(0)] && (3.0.13) \\ &= -\xi_{2n-1} \lim_{\epsilon \to 0} R_{2n-2}(0), && (3.0.14) \end{aligned}$$

esto es, los límites cuando ϵ tiende a cero de dos polinomios consecutivos de grado par evaluados en 0, tienen signos opuestos.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $K_1(\epsilon) = -1$ y de (3.0.12) tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} K_3(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} [-R_2(0) - \xi_2 K_1(\epsilon)] > 0,$$

pues el $\lim_{\epsilon \to 0} R_2(0) = \lim_{\epsilon \to 0} [\epsilon^2 - \xi_1]$ y el $\lim_{\epsilon \to 0} K_1(\epsilon)$ tienen el mismo signo y $\xi_2 > 0$.

Supongamos que $\lim_{\epsilon \to 0} R_{2n-2}(0)$ y $\lim_{\epsilon \to 0} K_{2n-3}(\epsilon)$ tienen el mismo signo. Entonces,

$$\lim_{\epsilon \to 0} K_{2n-1}(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} [-R_{2n-2}(0) - \xi_{2n-2} K_{2n-3}(\epsilon)]$$

tiene el signo opuesto que $\lim_{\epsilon \to 0} R_{2n-2}(0)$ y (3.0.13) implica que $\lim_{\epsilon \to 0} K_{2n-1}(\epsilon)$ y $\lim_{\epsilon \to 0} R_{2n}(0)$ tienen el mismo signo, y finalmente de (3.0.12) concluimos que $\lim_{\epsilon \to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$.

Por lo tanto

$$R_{2n+1}(0) = \epsilon K_{2n+1}(\epsilon),$$

para un cierto polinomio de ϵ, $K_{2n+1}(\epsilon)$, tal que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$ para $n \geq 0$.

■

Proposición 5 .

$$\lim_{\epsilon\to 0} |l_n(\epsilon)[\epsilon - l_{n+1}(\epsilon)]| < \infty. \tag{3.0.15}$$

Si se denota por $T := \lim_{\epsilon\to 0} J_2$, entonces T es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal simétrico $x^2\mathcal{L}$.

Prueba.

Del lema 4, tenemos que

$$l_{2n}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n+1}(\epsilon)) = -\frac{\xi_{2n} R_{2n-1}(0)}{R_{2n}(0)} \left[\epsilon + \frac{\xi_{2n+1} R_{2n}(0)}{R_{2n+1}(0)}\right],$$

y del lema 5

$$l_{2n}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n-1}(\epsilon)) = -\frac{\xi_{2n} \epsilon K_{2n-1}(\epsilon)}{R_{2n}(0)} \left[\epsilon + \frac{\xi_{2n+1} R_{2n}(0)}{\epsilon K_{2n+1}(\epsilon)}\right],$$

es decir

$$l_{2n}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n-1}(\epsilon)) = -\frac{\xi_{2n} K_{2n-1}(\epsilon)}{R_{2n}(0)} \left[\epsilon^2 + \frac{\xi_{2n+1} R_{2n}(0)}{K_{2n+1}(\epsilon)}\right]. \tag{3.0.16}$$

Como los polinomios K_{2n-1}, K_{2n+1} y R_{2n} son funciones de ϵ, entonces si tomamos límites cuando ϵ tiende a cero de dichos polinomios, éstos límites tienden a los términos independientes de K_{2n-1}, K_{2n+1} y R_{2n}, así para que (3.0.15) se cumpla, debemos garantizar que los denominadores en la expresión (3.0.16) son distintos de cero, pero el lema 5 nos garantiza, $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n}(0) \neq 0$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$. Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0} |l_{2n}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n+1}(\epsilon))| < \infty.$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} l_{2n+1}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n+1}(\epsilon)) &= -\frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{\epsilon K_{2n+1}(\epsilon)}\left[\epsilon + \frac{\xi_{2n+2}\epsilon K_{2n+1}(\epsilon)}{R_{2n+2}(0)}\right] \\ &= -\frac{\xi_{2n+1}R_{2n}(0)}{K_{2n+1}(\epsilon)}\left[1 + \frac{\xi_{2n+2}K_{2n+1}(\epsilon)}{R_{2n+2}(0)}\right]. \end{aligned}$$

Razonando de la misma forma, como $\lim_{\epsilon\to 0} R_{2n+2}(0) \neq 0$ y $\lim_{\epsilon\to 0} K_{2n+1}(\epsilon) \neq 0$, obtenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} |l_{2n+1}(\epsilon)(\epsilon - l_{2n+2}(\epsilon))| < \infty.$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Transformación del funcional $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L} + \mathrm{C}\delta(x)$.

En este capítulo, probaremos que la aplicación de una transformación de Darboux sin parámetro seguida por una transformación de Darboux para la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\mathcal{L}$, da como resultado la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $\mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$. Este resultado puede ser extendido de una manera simple para obtener la matriz de Jacobi mónica asociada con

$$\mathcal{L} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{C}_i \delta(x - a_i), \;\; a_i \in \mathbb{C}.$$

De inmediato, definiremos el concepto de funcional simetrizable. Esta definición será muy útil para probar el resultado principal de esta sección.

Definición 2 . *Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal cuasi-definido. El funcional $\mathcal{L}$ se dice simetrizable si el funcional $\mathcal{U}$ definido por*

$$\mathcal{U}(x^{2n}) = \mathcal{L}(x^n), \;\; \mathcal{U}(x^{2n+1}) = 0, n \geq 0,$$

es también cuasi-definido.

Lema 6 . *Un funcional lineal $\mathcal{L}$ es simetrizable si y solo si $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, donde $(P_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$.*

Prueba.

Sea $(P_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$, y supongamos que $\mathcal{L}$ es simetrizable, así por definición $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, luego por observación 3 tenemos que $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

Recíprocamente, suponiendo que $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, veremos que $\mathcal{L}$ es simetrizable, esto es, el funcional lineal $\mathcal{U}$ dado por

$$\mathcal{U}(x^{2n}) = \mathcal{L}(x^n), \quad \mathcal{U}(x^{2n+1}) = 0, \quad n \geq 0,$$

es también cuasi-definido, lo que como vimos anteriormente equivale a probar que existe una sucesión de polinomios ortogonales asociado al funcional $\mathcal{U}$.

Definamos la sucesión de polinomios ortogonales $(S_n)_{n\geq 0}$ de la siguiente manera:

$$S_{2m}(x) = P_m(x^2), \quad S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2),$$

donde $(Q_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios kernel asociada a $\mathcal{L}$, entonces $(S_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociados al funcional $\mathcal{U}$ (ver [3]).

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un funcional lineal cuasi-definido, esto es, $\mathcal{L}$ es simetrizable.

■

Proposición 6 . *Sea J_0 la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Supongamos que $(P_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto* *a $\mathcal{L}$, y $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y si aplicamos la siguiente transformación a J_0*

$$\begin{aligned} J_0 &= L_1U_1, \quad J_1 := U_1L_1, \\ J_1 &= U_2L_2, \quad J_2 := L_2U_2, \end{aligned}$$

entonces J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $\mathcal{L} + \boldsymbol{C}\delta(x)$, donde

$$C = \frac{\mu_0(\beta_0 - s)}{s}.$$

Con $\mu_0 = \mathcal{L}(1)$, $\beta_0 = \frac{\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(1)}$ y s denota el parámetro libre asociado con la factorización UL de J_1.

Prueba.

Supongamos que $J_0 = L_1U_1$, así de (2.0.8) tenemos que

$$J_1 = \begin{bmatrix} \beta_0 + l_1 & 1 & 0 & \cdots \\ l_1(\beta_1 - l_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 & 1 & \cdots \\ 0 & l_2(\beta_2 - l_2) & \beta_2 + l_3 - l_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.0.1}$$

donde,

$$l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0}\ , \ l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Ahora consideremos la factorización UL de J_1, que depende de un parámetro libre s, entonces de la proposición 1,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{u}_1 + \widetilde{l}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \widetilde{u}_2\widetilde{l}_1 & \widetilde{u}_2 + \widetilde{l}_2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \widetilde{u}_3\widetilde{l}_2 & \widetilde{u}_3 + \widetilde{l}_3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.0.2}$$

aquí $S_i := \widetilde{u}_{i+1}$.

Comparando (4.0.1) y (4.0.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_0 + l_1 &= \widetilde{u}_1 + \widetilde{l}_1 \implies \widetilde{l}_1 = \beta_0 + l_2 - l_1 \\ \beta_1 + l_2 - l_1 &= \widetilde{u}_2 + \widetilde{l}_2 \implies \widetilde{l}_2 = \beta_1 + l_2 - l_1 - S_1 \\ \beta_2 + l_3 - l_2 &= \widetilde{u}_3 + \widetilde{l}_3 \implies \widetilde{l}_3 = \beta_2 + l_3 - l_2 - S_2 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_n + l_{n+1} - l_n &= \widetilde{u}_{n+1} + \widetilde{l}_{n+1} \implies \widetilde{l}_{n+1} = \beta_n + l_{n+1} - l_n - S_n. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$U_2 = \begin{bmatrix} S & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \; L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \nu_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \nu_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \nu_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.0.3}$$

donde $\nu_1 = \beta_0 + l_1 - s$, $\nu_n = \beta_{n-1} + l_n - S_{n-1}$, $S_k := \widetilde{u}_{k+1} = \frac{\widetilde{\gamma}_k}{\widetilde{\beta}_{k-1} - \widetilde{S}_{k-1}}$.

Pero como $\widetilde{\gamma}_k = \widetilde{u}_{k+1}\widetilde{l}_k$ y $\widetilde{l}_{k+1} = \widetilde{\beta}_k - \widetilde{S}_k$, entonces

$$S_k := \frac{\widetilde{u}_{k+1}\widetilde{l}_k}{\widetilde{l}_k}.$$

Ahora si comparamos nuevamente (4.0.1) y (4.0.2), es claro que

$$\widetilde{u}_{k+1}\widetilde{l}_k = l_k(\beta_k - l_k).$$

Luego,

$$S_1 = \frac{l_1(\beta_1 - l_1)}{\beta_0 + l_1 - S}, \quad S_n = \frac{l_n(\beta_n - l_n)}{\beta_{n-1} + l_n - l_{n-1} - S_{n-1}}.$$

Por otra parte, de (4.0.3) la matriz J_2, esta dada por

$$J_2 = \begin{bmatrix} S & 1 & 0 & \cdots \\ S(\beta_0 + l_1 - S) & \beta_0 + l_1 - S + S_1 & 1 & \cdots \\ 0 & S_1(\beta_1 + l_2 - l_1 - S_1) & \beta_1 + l_2 - l_1 + S_2 - S_1 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2(\beta_2 + l_3 - l_2 - S_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Nosotros probaremos que J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$, donde $\mathbf{C} = \frac{\mu_0(\beta_0 - S)}{S}$, con $\mu_0 = \mathcal{L}(1)$.

Como $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, entonces por el lema anterior $\mathcal{L}$ es simetrizable.

Sea $\mathcal{U}$ el funcional lineal simétrico cuasi-definido asociado con $\mathcal{L}$, entonces existe una sucesión de polinomios ortogonales $(Q_n)_{n\geq 0}$ asociada a $\mathcal{U}$, y una sucesión de parámetros $(\xi_n)_{n\geq 0}$ dada por la relación de recurrencia a tres términos que $(Q_n)_{n\geq 0}$ satisface, esto es,

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - \xi_n Q_{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Es bien conocido que:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \xi_1, && (4.0.4) \\ \beta_n &= \xi_{2n} + \xi_{2n+1}, \quad n \geq 1 && (4.0.5) \\ \gamma_n &= \xi_{2n-1}\xi_{2n}, \quad n \geq 1. && (4.0.6) \end{aligned}$$

(ver [3])

Suponiendo que $l_0 = 0$, probaremos por inducción que

$$\xi_{2n} = l_n, \quad \xi_{2n+1} = \beta_n - l_n, \quad n \geq 1.$$

Como $l_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0}$, tenemos de (4.0.4) lo siguente

$$\xi_1 = \beta_0 - l_0, \quad \xi_2 = \frac{\gamma_1}{\xi_1} = \frac{\gamma_1}{\beta_0} = l_1.$$

Supongamos que $\xi_{2n-1} = \beta_{n-1} - l_{n-1}$, y de nuevo de (4.0.4) encontramos que

$$\xi_{2n} = \frac{\gamma_n}{\xi_{2n-1}},$$

entonces $\xi_{2n} = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}$ y como $l_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1} - l_{n-1}}$, $n \geq 2$ tenemos que

$$\xi_{2n} = l_n. \tag{4.0.7}$$

Por otra parte, de (4.0.4) $\xi_{2n+1} = \beta_n - \xi_{2n}$, luego de (4.0.7) obtenemos

$$\xi_{2n+1} = \beta_n - l_n. \tag{4.0.8}$$

.

Ahora supongamos que $(\widetilde{\beta}_n)_{n\geq 0}$ y $(\widetilde{r}_n)_{n\geq 0}$ son las sucesiones de parámetros asociados con la relación de recurrencia que satisface la sucesión de polinomios ortogonales asociada con $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Como $\mathcal{L}$ es simetrizable, $\widetilde{\mathcal{L}}$ es simetrizable, en efecto, sea $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\widetilde{\mathcal{L}}$ y supongamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $\widetilde{p}_{n_0}(0) = 0$, así que

$$\widetilde{\mathcal{L}}[\widetilde{p}_{n_0}] = \mathcal{L}[\widetilde{p}_{n_0}] + \mathbf{C}\widetilde{p}_{n_0}(0),$$

esto es, $\widetilde{\mathcal{L}}[\widetilde{p}_{n_0}] = \mathcal{L}[\widetilde{p}_{n_0}]$, pero como $\widetilde{p}_{n_0}$ es ortogonal con respecto a $\widetilde{\mathcal{L}}$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{L}}[\widetilde{p}_{n_0}] = \mathcal{L}[\widetilde{p}_{n_0}] = 0,$$

lo que nos dice que

$$\widetilde{p}_{n_0} = p_{n_0},$$

y esto es una contradicción, pues como $\mathcal{L}$ es simetrizable, $p_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ en particular para n_0.

Sea $\widetilde{\mathcal{U}}$ el funcional lineal simétrico asociado con $\widetilde{\mathcal{L}}$ y sea $(\widetilde{Q}_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónica asociada a $\mathcal{U}$.

Si $(\widetilde{\xi}_n)_{n\geq 0}$ denota la sucesión de parámetros dada por la relación de recurrencia a tres términos que la sucesión $(\widetilde{Q}_n)_{n\geq 0}$ satisface, entonces

$$\widetilde{\beta}_0 = \widetilde{\xi}_1 \tag{4.0.9}$$

$$\widetilde{\beta}_n = \widetilde{\xi}_{2n} + \widetilde{\xi}_{2n+1}, \quad n \geq 1 \tag{4.0.10}$$

$$\widetilde{\gamma}_n = \widetilde{\xi}_{2n-1}\widetilde{\xi}_{2n}, \quad n \geq 1. \tag{4.0.11}$$

(ver [3]).

Por otra parte,

$$\widetilde{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{1 + \frac{\mathbf{C}}{\mu_0}} \tag{4.0.12}$$

$$\widetilde{\xi}_{2n} = \xi_{2n-1} + \xi_{2n} - \widetilde{\xi}_{2n-1}, \quad n \geq 1 \tag{4.0.13}$$

$$\widetilde{\xi}_{2n+1} = \frac{\xi_{2n}\xi_{2n+1}}{\widetilde{\xi}_{2n}}, \quad n \geq 1. \tag{4.0.14}$$

(ver [1]).

De (4.0.4), (4.0.9) y (4.0.12) tenemos que

$$\widetilde{\beta}_0 = \widetilde{\xi}_1 = \frac{\xi_1\mu_0}{\mu_0 + \mathbf{C}} = \frac{\beta_0\mu_0}{\mu_0 + \mathbf{C}} = S,$$

y

$$\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\xi}_1\widetilde{\xi}_2 = \widetilde{\beta}_0(\xi_1 + \xi_2 - \widetilde{\xi}_1) = \widetilde{\beta}_0(\beta_0 + \xi_2 - \widetilde{\beta}_0),$$

entonces,

$$\widetilde{\gamma}_1 = S(\beta_0 + l_1 - S).$$

Teniendo en cuenta nuevamente que $l_0 = 0$, probaremos que $\widetilde{\xi}_{2n} = \beta_{n-1} + l_n - l_{n-1} - S_{n-1}$ y que $\widetilde{\xi}_{2n-1} = S_{n-1}$, $n \geq 1$.

Así para $n = 1$ tenemos que $\widetilde{\xi}_1 = S$, y de (4.0.12) $\widetilde{\xi}_2 = \xi_1 + \xi_2 - \widetilde{\xi}_1$, y considerando también (4.0.4) y (4.0.7) conseguimos que

$$\widetilde{\xi}_2 = \beta_0 - l_0 + l_1 - S,$$

supongamos que $\widetilde{\xi}_{2n-1} = S_{n-1}$, y consideremos (4.0.7) y (4.0.8), entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_{2n} &= \xi_{2n-1} + \xi_{2n} - \widetilde{\xi}_{2n-1}\\ &= \beta_{n-1} - l_{n-1} + l_n - S_{n-1},\end{aligned}$$

por otro lado, de (4.0.7), (4.0.8) y (4.0.12)

$$\widetilde{\xi}_{2n+1} = \frac{\xi_{2n}\xi_{2n+1}}{\widetilde{\xi}_{2n}} = \frac{l_n(\beta_n - l_n)}{\beta_{n-1} - l_{n-1} + l_n - S_{n-1}} = S_n,$$

luego,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_n &= \widetilde{\xi}_{2n} + \widetilde{\xi}_{2n+1} = \beta_{n-1} - l_{n-1} + l_n - S_{n-1} + S_n\\ \widetilde{\gamma}_n &= \widetilde{\xi}_{2n-1}\widetilde{\xi}_{2n} = S_{n-1}(\beta_{n-1} - l_{n-1} + l_n - S_{n-1}),\end{aligned}$$

esto es, $\widetilde{\beta}_n$ y $\widetilde{\gamma}_n$ son las entradas de la matriz J_2, por lo tanto, J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$.

■

Corolario 3 . *Sea J_0 la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Considerando la siguiente transformación en la matriz J_0*

$$\begin{aligned}J_0 - \alpha I &= L_1U_1, \quad J_1 := U_1L_1,\\ J_1 &= U_2L_2, \quad J_2 := L_2U_2 + \alpha I.\end{aligned}$$

Entonces, J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $\mathcal{L} + \boldsymbol{C}\delta(x-\alpha)$, donde

$$\boldsymbol{C} = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - x)}{s},$$

con $\mu_0 = \mathcal{L}(1)$, $\beta_0 = \frac{\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(1)}$, *y* s *es el parámetro asociado con la factorización UL de* J_1.

Prueba.

Sea J_0 la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Si denotamos $T_0 := J_0 - \alpha I$, entonces por el lema 3, T_0 es la matriz de Jacobi mónica asociada con $\mathcal{L}_1$, dado por

$$\mathcal{L}_1[p] = \mathcal{L}[p(\cdot - \alpha)].$$

Ahora, como $\mathcal{L}$ es cuasi-definido entonces $P_n(0) \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y si aplicamos la siguiente transformación a la matriz T_0

$$\begin{aligned} T_0 &= L_1U_1, \quad T_1 = U_1L_1 \\ T_1 &= U_2L_2, \quad T_2 = L_2U_2, \end{aligned}$$

entonces como consecuencia de la proposición 6, tenemos que T_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{C}\delta(x),$$

donde

$$\mathbf{C} = \frac{\widetilde{\mu}_0(\widetilde{\beta}_0 - s)}{s} = \frac{\beta_0 - \alpha - s}{s}, \ \textit{con} \ \widetilde{\mu}_0 = \mathcal{L}_1(1), \ \widetilde{\beta}_0 = \frac{\mathcal{L}_1(x)}{\mathcal{L}_1(1)}.$$

Finalmente, $J_2 = T_1 + \alpha I$, es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $\mathcal{L}_3$ dado por

$$\mathcal{L}_3[p] = \mathcal{L}_2[p(\cdot + \alpha)],$$

pero

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3[p] &= \mathcal{L}_2[p(\cdot + \alpha)] \\
&= \mathcal{L}_1[p(\cdot + \alpha)] + \mathbf{C}p(\alpha) \\
&= \mathcal{L}[p] + \mathbf{C}p(\alpha)
\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x - \alpha).$$

■

Corolario 4 . *Consideremos la matriz de Jacobi mónica J_0 asociada con el funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{L}$. Aplicando la siguiente transformación a J_0*

$$\begin{aligned}
J_0 - \alpha I = L_1 U_1, \quad J_1 &:= U_1 L_1, \\
J_1 = U_2 L_2, \quad J_2 &:= L_2 U_2 + \alpha I, \\
J_2 + \alpha I = L_3 U_3, \quad J_3 &:= U_3 L_3, \\
J_3 = U_4 L_4, \quad J_4 &:= L_4 U_4 - \alpha I.
\end{aligned}$$

Si las condiciones para la existencia de la factorización LU de la matriz $J_0 - \alpha I$ y $J_0 + \alpha$ están dadas, entonces J_4 es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional lineal

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} + \boldsymbol{C}_1\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha),$$

donde

$$\boldsymbol{C}_1 = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - S_1)}{S_1}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - S_2) + \boldsymbol{C}_1(2\alpha - S_2)}{S_2},$$

con $\mu_0 = \mathcal{L}(1)$, $\beta_0 = \frac{\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(1)}$, y S_1, S_2 son los parámetros libres asociados a la factorización UL de las matrices J_1 y J_3 respectivamente.

Prueba.

Del corolario anterior, la matriz J_2 esta asociada con el funcional lineal

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x - \alpha),$$

donde

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mu_0(\beta_0 - \alpha - S_1)}{S_1}.$$

Teniendo en cuenta nuevamente el corolario anterior, tenemos también que J_4 es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathbf{C}_2\delta(x + \alpha),$$

con

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\widetilde{\mu}_0(\widetilde{\beta}_0 + \alpha - S_2)}{S_2}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_0 = \mathcal{L}_1[1] &= (\mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x - \alpha))[1] && (4.0.15)\\ &= \mathcal{L}[1] + \mathbf{C}_1 && (4.0.16)\\ &= \mu_0 + \mathbf{C}_1, && (4.0.17) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_0 &= \frac{\mathcal{L}_1(x)}{\mathcal{L}_1(1)} && (4.0.18)\\ &= \frac{\mu_1 + \mathbf{C}_1\alpha}{\mu_0 + \mathbf{C}_1} && (4.0.19)\\ &= \frac{\beta_0\mu_0 + \mathbf{C}_1\alpha}{\mu_0 + \mathbf{C}_1}. && (4.0.20) \end{aligned}$$

Si p denota cualquier polinomio, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2[p] &= [\mathcal{L}_1 + \mathbf{C}_2\delta(x+\alpha)][p] \\
&= \mathcal{L}_1[p] + \mathbf{C}_2 p(\alpha) \\
&= [\mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x-\alpha)][p] + \mathbf{C}_2 p(\alpha) \\
&= \mathcal{L}[p] + \mathbf{C}_1 p(-\alpha) + \mathbf{C}_2 p(\alpha),
\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x+\alpha) + \mathbf{C}_2\delta(x-\alpha).$$

Finalmente, sustituyendo (4.0.15) y (4.0.18) nos queda

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 &= \frac{(\mu_0 + \mathbf{C}_1)(\frac{\beta_0\mu_0 + \mathbf{C}_1\alpha}{\mu_0 + \mathbf{C}_1} + \alpha - S_2)}{S_2} \\
&= \frac{\beta_0\mu_0 + \mathbf{C}_1\alpha + \mu_0\alpha + \mathbf{C}_1\alpha - \mu_0 S_2 - \mathbf{C}_1 S_2}{S_2} \\
&= \frac{\mu_0(\beta_0 + \alpha - S_2) + \mathbf{C}_1(2\alpha - S_2)}{S_2}.
\end{aligned}$$

■

Finalmente, estudiamos el caso en que el funcional inicial $\mathcal{L}$ es transformado en el funcional $\frac{1}{x}\mathcal{L} + \mathbf{C}\delta(x)$.

Proposición 7 . *Sea J_1 la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$. supongamos que existe un funcional lineal $\mathcal{L}$ tal que $\widetilde{\mathcal{L}} = x\mathcal{L}$. Consideremos una transformación de Darboux aplicada a J_1,*

$$J_1 = U_1 L_1, \quad J_2 := L_1 U_1.$$

Entonces, J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional $\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{L}} + \boldsymbol{C}\delta(x)$ y $\boldsymbol{C} = \frac{\widetilde{\mathcal{L}}(1)}{s}$.

Prueba.

Sea J_0 la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional lineal $\mathcal{L}$ y sea J_1 la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\widetilde{\mathcal{L}}$, supongamos que $\widetilde{\mathcal{L}} = x\mathcal{L}$.

Si aplicamos las siguientes transformaciones para J_0

$$\begin{aligned} J_0 &= L_0U_0, \quad J_1 := U_0L_0 \\ J_1 &= U_1L_1, \quad J_2 := L_1U_1, \end{aligned}$$

entonces de la proposición 6 obtenemos que J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x)$ donde

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mu_0(\beta_0 - S)}{S}, \quad \mu_0 = \mathcal{L}(1), \quad \beta_0 = \frac{\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(1)},$$

así probaremos que J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada al funcional $\frac{1}{x}\widetilde{\mathcal{L}} + \mathbf{C}\delta(x)$, esto decir,

$$\left[\frac{1}{x}\widetilde{\mathcal{L}} + \mathbf{C}\delta(x)\right](p) = [\mathcal{L} + \mathbf{C}_1\delta(x)](p).$$

Teniendo en cuenta la definición de funcional lineal $\frac{1}{x}\widetilde{\mathcal{L}} + \mathbf{C}\delta(x)[p]$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\widetilde{\mathcal{L}}\right)(p) &= \widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{p-p(0)}{x}\right) + \mathbf{C}p(0) \\
&= x\mathcal{L}\left(\frac{p-p(0)}{x}\right) + \mathbf{C}p(0) \\
&= \mathcal{L}(p-p(0)) + \mathbf{C}p(0) \\
&= \mathcal{L}(p) - \mathcal{L}(p(0)) + \mathbf{C}p(0) \\
&= \mathcal{L}(p) - \mathcal{L}(1)p(0) + \mathbf{C}p(0) \\
&= \mathcal{L}(p) - \mu_0 p(0) + \mathbf{C}p(0) \\
&= \mathcal{L}(p) + p(0)(\mathbf{C} - \mu_0).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{C} - \mathcal{L}(1) = \frac{\widetilde{\mathcal{L}}(1)}{S} - \mathcal{L}(1) = \frac{\mathcal{L}(x)}{S} - \mathcal{L}(1),$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 &= \frac{\mu_0(\beta_0 - S)}{S} \\
&= \frac{\mathcal{L}(1)\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(1)} - S\right)}{S} \\
&= \frac{\mathcal{L}(x)}{S} - \mathcal{L}(1) \\
&= \mathbf{C} - \mathcal{L}(1).
\end{aligned}$$

Luego, J_2 es la matriz de Jacobi mónica asociada con el funcional lineal $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{L}} + \mathbf{C}\delta(x)$ con $\mathbf{C} = \frac{\widetilde{\mathcal{L}}(1)}{s}$.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] J. Arvesú, J. Atia, and F. Marcellán. On semiclassical linear functional: the symmetric companion. *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions*, 10:13–29, 2002.

[2] M. I. Bueno and F. Marcellán. Darboux transformations and perturbation of linear functionals. *Linear Alg. and Appl.*, 384:215–242, 2004.

[3] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.

[4] T. S. Chihara. Orthogonal polynomials and measures with end point masses. *Rocky Mountain J. Math.*, 15:705–719, 1985.

[5] D. Galant. An implementation of Christoffel's theorem in the theory of orthogonal polynomials. *Math. Comp.*, 25:111–113, 1971.

[6] D. Galant. Algebraic methods for modified orthogonal polynomials. *Math. Comp.*, 59:541–546, 1992.

[7] W. Gautschi. An algorithmic implementation of the generalized Christoffel theorem, in: G. Hämmerlin (Ed), Numerical Integration. *Internat. Ser. Numer. Math*, 57:89–106, 1982.

[8] G. H. Golub and J. Kautsky. Calculation of Gauss quadratures with multiple free and fixed knots. *Numer. Math*, 41:147–163, 1983.

[9] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[10] J. Kautsky and G. H. Golub. On the calculation of Jacobi matrices. *Linear Algebra Appl*, 52/53:439–455, 1983.

[11] F. Marcellán and P. Maroni. Sur l'adjonction d'une masse de Dirac á une forme régulière et semi-classique. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 162:1–22, 1992.

[12] P. Maroni. Sur la Suite de Polynômes Orthogonaux Associée à la forma $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}\mathcal{L}$. *Period. Math. Hungar.*, 21(3):223–248, 1990.

[13] P. Maroni. Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. application aux polynômes orthogonaux semiclassiques. In Brezinski et al., editor, *Orthogonal Polynomials and their Applications*, volume 9, pages 95–130. IMACS Ann. Comput. Appl., 1991.

[14] M. Schatzman. *Numerical Analysis a mathematical introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[15] V. Spiridonov, L. Vinet, and A. Zhedanov. Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:7621–7637, 1997.

[16] G. Teschl. *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. Mathematical surveys and monographs. Amer. Math. Soc., 2000.

[17] A. Zhedanov. Rational spectral transformations and orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 85:67–83, 1997.