UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología

Licenciatura en Ciencias Matemáticas

UNA NOCIÓN DE TANGENCIA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Andrés Eloy Pérez Gil

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: Topología

TUTOR: DR. Fernando Villafañe

Barquisimeto, Venezuela Julio de 2015

Índice general

1. Agradecimientos **7**

2. Resumen **9**

3. Preliminares **11**
3.1. Espacios Métricos 11
3.1.1. Topología: conceptos iniciales 11
3.1.2. Métrica: conceptos iniciales 12
3.1.3. La Topología Métrica: vocablos básicos 15
3.1.4. Sucesiones en Espacios Métricos 16
3.1.5. Límite en Espacios Métricos 18
3.2. Continuidad en espacios métricos 19
3.3. Compacidad 22
3.4. Conexidad 23
3.5. Funciones reales diferenciables 24
3.6. Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^3$ 26
3.7. Curvatura 27

4. El operador de Pascali **29**
4.1. Distancia superior e inferior 29
4.2. Propiedades de la distancia superior e inferior 31

5. Generalización de la Tangencia y la Ortogonalidad **43**

6. Espacios L-SMS **47**

7. Generalización de la curvatura **53**

Bibliografía **58**

Universidad centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Una noción de tangencia en espacios métricos"

presentado por el ciudadano Br. Andrés Pérez titular de la Cédula de Identidad No. 20.235.368, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Liecenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutitlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ______ dias del mes de ____________ de ____________

____________________ TUTOR | ____________________ FIRMA

____________________ PRINCIPAL | ____________________ FIRMA

____________________ PRINCIPAL | ____________________ FIRMA

OBSERVACIONES:
____
____
____

[1] Aprobado ó Reprobado

en el nombre de Dios
clemente y misericordioso …

Capítulo 1

Agradecimientos

En primer lugar, doy gracias a Dios por darme el don de la matemática. También agradezco:

A mis *padres* y *hermanos* por el apoyo que he recibido no sólo durante mi estudio universitario sino toda la vida.

A mi abuela Neverí por permitirme estudiar en su casa practicamente todos los fines de semana, dias feriados, vacaciones, etc.

A mis primos: Migledy, Carlos, José y Miguelángel; que tanto me apoyaron a la hora de ingresar en la universidad. Sobre todo a Carlos, que tuvo la sabia idea de sugerirme seleccionar "Lic. en Cs. Matamáticas" cuando hize mi gstion por la OPSU.

A mis amigos de AsoEM, Cleiver, Eduardo, Dracir, Junior, Joelviz, Uvencio, Shadday, César, Rafael, Waidermar, Jesús, Dignora, Jessica, Liseth, Dellys, Diana, Celismar, Ana, Evelin e Iliana. "Somos elementos del mismo conjunto".

A mis amigos Erianny, Maria Esperanza, Carlos Lopez, Carlos Aular, Luis, Oliver, Rafael, que comenzaron conmigo esta gran aventura llamada matemática.

A mi amiga Emely, por permitirme usar su laptop para transcribir este trabajo.

A mis amigos José Francisco y Adriana, que aunque erán estudiantes de otra carrera, me motivarón a continuar adelante.

A los profesores Rómulo Castillo y Zita Pereira porque me ayudaron a conseguir el puesto de preparador de programación, cargo del cual he aprendido bastante.

A los profesores Alexander Carrasco, Ebner Pineda, Mario Rodríguez, Rafael Omar Rodríguez y Javier Hernández porque creyeron en mi y me dieron ánimos de seguier estudiando.

Al profesor Fernando Villafañe (mi tutor) por tener la paciencia de corregir todo este trabajo.

A los escritores Aurelio Baldor, Arthur Conan Doyle y Malba Tahan por sus excelentes obras "Algebra", "Sherlock Holmes" y "El hombre que calculaba". También al diario "Últimas Noticias" por su publicación de los fascículos "Matemática para todos". Tal vez parezca extraõ pero debo mencionar a la serie televisiva "Prision Break". Todo esto fomento mi curiosidad hacia la matemática.

A la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" por darme la oportunidad de pertenecer a ella. El Decanato de Ciencias y Tecnología se convirtió en una segunda casa para mí.

Casi ólvido agradecer a alguien muy especial, la cual es la protagonista de todo este texto. Cuando la conocí me dí cuenta de que no había una mejor elección que ella. Me ha acompañado durante estos diez semestres, en las buenas y en las malas. Su amistad siempre ha sido incondicional: nunca me ha dado la espalda, incluso cuando varias veces no la entendía. Es tan grande su belleza que me hace feliz de tan sólo pensar en ella. Siento que Dios me la obsequio para no vagar errado por ahí, como quien no tiene horizonte. Lo curioso es que "ella" no existe. Lector: ¿sábes de quien hablo?. Es evidente que me refiero a la reina de todas las ciencias: "*la matemática*".

Capítulo 2

Resumen

El presente trabajo desarrolla una generalización de los conceptos de tangencia y ortogonalidad dados por Pascali en [1]. Vamos a estudiar son espacios métricos cuyas métricas no necesariamente provengan de un norma (la noción de tangencia en espacio normados se remite el estudio de la diferenciabilidad para funciones entre estos espacios, y esto último ya es bien conocido).

Para justificar las definiciones que se van a dar se realizarán comparaciones con los conceptos usuales de recta tangente y normal a una curva $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$. Al final se presenta también una generalización del concepto de curvatura.

Capítulo 3

Preliminares

En Matemática, existe una disciplina bastante extensa llamada *topología*, la cual se ocupa del concepto de continuidad en su sentido mas general. Entre los espacios topológicos destacan los *espacios métricos*, debido a la riqueza de resultados que ofrece.

En esta primera sección presentaremos las definiciones referentes a espacios métricos y enunciaremos (dando la demostración muy pocas veces) las proposiciones clásicas de esta teoría. Las referencias de estos resultados se pueden encontrar en [4] (respecto a espacios métricos) y [5] (respecto a límites superior e inferior de funciones y sucesiones).

3.1. Espacios Métricos

3.1.1. Topología: conceptos iniciales

Definición 3.1 Una *topología* en un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ también es un elemento de $\mathcal{T}$
3. Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ también es un elemento de $\mathcal{T}$

En caso de que $\mathcal{T}$ satisfaga las anteriores condiciones, diremos que $(X, \mathcal{T})$ *espacio topológico*, y cada elemento $A \in \mathcal{T}$ será llamado *conjunto abierto* en X respecto a $\mathcal{T}$.

Nótese que en el postulado 1, el conjunto de índices I no necesariamente es finito.

Ejemplo 3.1 Se tiene que la recta $\mathbb{R}$ es un espacio topológico, definiendo topología $\mathcal{T}$ como sigue: diremos que $A \in P(\mathbb{R})$ es abierto si existen un conjunto de índices J y una familia $\{A_j : j \in J\}$ de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j$$

A esta topología se le denomina *topología usual de* $\mathbb{R}$ o *topología de la recta.*

Definición 3.2 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subset X$. Sobre Y definimos la *topología de subespacio* $\mathcal{T}_Y$ como sigue:

$$B \in \mathcal{T}_Y \text{ si y sólo si existe } A \in \mathcal{T} \text{ tal que } Y = X \cap A$$

A $Y \subset X$ le llamaremos *subespacio topológico.*

Definición 3.3 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que $C \subset X$ es un *conjunto cerrado* en X respecto a $\mathcal{T}$ si su complemento $X \setminus A$ es abierto en X respecto a $\mathcal{T}$.

Proposición 3.1 *Si* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, entonces se cumple lo siguiente:*

(I) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(II) *Si* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *es una familia finita de cerrados en* X, *entonces* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *también es cerrado*

(III) *Si* $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia arbitraria de cerrados en* X, *entonces* $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ *también cerrado en* X

3.1.2. Métrica: conceptos iniciales

Definición 3.4 Una *métrica* o *distancia* en un conjunto no vacío M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que asocia a cada par de puntos x, y en M un número real $d(x, y)$, llamado la *distancia* del punto x al punto y, tal que para cualesquiera $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0$ "no-negatividad"
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ "simetría"
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ "desigualdad triangular"

Definición 3.5 Un *espacio métrico* es un par (M, d) formado por un conjunto M y una métrica d en M.

Definición 3.6 Dado un espacio métrico (M, d), cualquier subconjunto X de M también es un espacio métrico considerando en X la métrica d. De este modo, a X lo llamaremos un *subespacio métrico.*

Observación 3.1 En lo que sigue, cuando mencionemos la letra M, se sobreentenderá como un espacio métrico (M, d).

Ejemplo 3.2

1) La función "valor absoluto" induce una métrica en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. En efecto, definiendo $d_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$d_u(x, y) = |\, x - y \,|$$

La validez de los axiomas para métrica son consecuencia de las propiedades elementales del valor absoluto. A d_u se le conoce como *métrica usual* de $\mathbb{R}$.

2) En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ hay tres métricas fundamentales: dados $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ las métricas d_e, d_s y d_m son dadas por

$$\begin{aligned} d_e(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \ \text{ métrica euclidiana} \\ d_s(x,y) &= |\, x_1 - y_1 \,| + \cdots + |\, x_n - y_n \,|, \quad \text{métrica de la suma} \\ d_m(x,y) &= \text{máx}\,\{\, |\, x_1 - y_1 \,|, \ldots, |\, x_n - y_n \,|\,\}, \ \text{ métrica del máximo} \end{aligned}$$

Nótese que cuando $n = 1$, $d_e = d_u$.

3) Un *espacio normado* es un espacio vectorial V, en donde se define una aplicación $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$ que satisface para cualesquiera $x, y, z \in V$ y cual quier escalar α:

   a) $\|\ x\ \| \geq 0$
   b) $\|\ x\ \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
   c) $\|\ \alpha \cdot x\ \| = |\alpha| \cdot \|\ x\ \|$
   d) $\|\ x + y\ \| \leq \|\ x\ \| + \|\ y\ \|$ "desigualdad triangular"

   Todo espacio normado V es un espacio métrico, definiendo para $x, y \in V$ la aplicación $d(x,y) = \|\ x - y\ \|$ (la cual es una métrica en V).

4) Dado un conjunto cualquiera $M \neq \emptyset$, es posible dotarlo de una métrica muy sencilla: dados $x, y \in M$ definimos $d_{cu} : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$d_{cu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

   A d_{cu} se acostumbra llamar la *métrica discreta*.

5) El producto cartesiano de dos espacios métricos es un espacio métrico. En efecto sean M, N cuyas métricas indicaremos con d_1 y d_2 respectivamente. Podemos definir al menos tres métricas en el producto cartesiano $M \times N$: dados $z = (x, y), z' = (x', y') \in M \times N$

$$d_s(z, z') = d_1(x, x') + d_2(y, y')$$

$$d_m(z, z') = \text{máx}\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\}$$

$$d_e(z, z') = \sqrt{d_1(x, x')^2 + d_2(y, y')^2}$$

Observación 3.2 A propósito de los espacios normados, la siguiente es una consecuencia de la desigualdad triangular

$$\big|\ \|\ x\ \| - \|\ y\ \|\ \big| \leq \|\ x - y\ \|$$

En efecto

$$\begin{aligned} \|\ x\ \| &= \|\ x + 0\ \| \\ &= \|\ x - y + y\ \| \\ &\leq \|\ x - y\ \| + \|\ y\ \| \end{aligned}$$

$$\therefore \parallel x \parallel - \parallel y \parallel \leq \parallel x - y \parallel$$

$$\begin{aligned} \parallel y \parallel &= \parallel y + 0 \parallel \\ &= \parallel y - x + x \parallel \\ &\leq \parallel y - x \parallel + \parallel x \parallel \\ &= \parallel x - y \parallel + \parallel x \parallel \end{aligned}$$

$$\therefore \parallel y \parallel - \parallel x \parallel \leq \parallel x - y \parallel$$

$$\therefore \; - \parallel x - y \parallel \leq \parallel x \parallel - \parallel y \parallel$$

Definición 3.7 Sean $a \in M$ y $\epsilon > 0$.

a) La *bola abierta* de centro a y radio ϵ es el conjunto $B(a;\epsilon)$ dado por

$$B(a;\epsilon) = \{x \in M : \, d(x,a) < \epsilon\}$$

b) La *bola cerrada* de centro a y radio ϵ es el conjunto $B[a;\epsilon]$ dado como

$$B[a;\epsilon] = \{x \in M : \, d(x,a) \leq \epsilon\}$$

c) La *bola perforada* de centro a y radio ϵ es el conjunto $B^*(a;\epsilon)$ definido como

$$B^*(a;\epsilon) = \{x \in M : \, 0 < d(x,a) < \epsilon\}$$

Definición 3.8 Sean $x \in M$ y $A, B \subset M$.

a) La *distancia del punto x al conjunto A* se denota $d(x,A)$ y viene dada por

$$d(x,A) = \text{ínf}\,\{d(x,a) : \, a \in A\}$$

b) La *distancia entre los conjuntos A y B* se denota $d(A,B)$ y se define por

$$d(A,B) = \text{ínf}\,\{d(a,b) : \, a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo 3.3

1. En el espacio $\mathbb{R}^3$, sea un punto x y una recta r que pasa por x_0 y tiene como vector director v. Se tiene

$$d(x,r) = \frac{\parallel v \times (x - x_0) \parallel}{\parallel v \parallel}$$

2. Sea nuevamente $\mathbb{R}^3$. Dados un punto x y un plano Π que pasa por x_0 y con vector normal n, se tiene[1]

$$d(x_0,\Pi) = \frac{\mid n \bullet (x - x_0) \mid}{\parallel n \parallel}$$

Proposición 3.2 *Dados $x, y \in M$ y un conjunto no vacío $A \subset M$, se cumple*

$$\mid d(x,A) - d(y,A) \mid \leq \; d(x,y)$$

[1]Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ usaremos la notación $x \bullet y$ para indicar el producto interno de x con y.

3.1.3. La Topología Métrica: vocablos básicos

Definición 3.9 Sea $A \subset M$.

a) Diremos que $x \in A$ es un *punto interior* de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x;\epsilon) \subset A$

b) Denominaremos *interior* de A al conjunto $\mathrm{int}(A)$ definido como

$$\mathrm{int}(A) = \{x \in M : \ x \text{ es un punto interior de } A\}$$

c) Diremos que A es abierto en M respecto a d si $A = int(A)$.

Definición 3.10 Sea $A \subset M$.

a) Diremos que $x \in M$ es un *punto adherente* de A si para todo $\epsilon > 0$ se satisface $B(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

b) Denominaremos *clausura* de A al conjunto $\overline{A}$ dado por

$$\overline{A} = \{x \in M : \ x \text{ es un punto adherente de } A\}$$

c) Diremos que A es *cerrado* en M respecto a d si $A = \overline{A}$.

Proposición 3.3 Dados un conjunto no vacío $A \subset M$ y $x \in M$, se cumple

$$d(x, A) = d\big(x, \overline{A}\big)$$

Definición 3.11 Sea $A \subset M$. Diremos que $a \in M$ es un *punto de acumulación* de A si para todo $\epsilon > 0$ se satisface $B^*(a;\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

El siguiente resultado establecerá que una métrica d en un espacio M induce una topología $\mathcal{T}$ en dicho espacio[2].

Proposición 3.4 *Dado un espacio métrico (M, d), se cumplen las siguientes propiedades:*

(I) *$\emptyset, M$ son abiertos en M respecto a d*

(II) *Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia arbitraria de abiertos en M respecto a d, entonces $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ también es un abierto en M respecto a d*

(III) *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de abiertos en M respecto a d, entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ también es abierto en M respecto d*

Así, ser "abierto respecto a una topología" y ser "abierto respecto a una métrica" son conceptos equivalentes. De este hecho se sigue que los conceptos respecto a una topología y respecto a una métrica son los mismos.

Proposición 3.5 *Sean $A \subset M$ y $x_0 \in M$. Si A es abierto, entonces $A\backslash\{x_0\}$ también es abierto.*

[2] El recíproco no es cierto, esto es, no todo espacio topológico es un espacio métrico.

Demostración

Supongamos la hipótesis. Sea $x \in A\backslash\{x_0\}$. Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B(x;\epsilon_0) \subset A$ y además, $d(x,x_0) > 0$. Hagamos $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_0, d(x,x_0)\}$. Vemos que

$$\begin{aligned} y \in B(x;\epsilon) &\Longrightarrow d(y,x) < \epsilon \\ &\Longrightarrow d(y,x) < \epsilon_0 \quad \text{y} \quad d(y,x) < d(x,x_0) \\ &\Longrightarrow y \in B(x,\epsilon_0) \quad \text{e} \quad y \neq x_0 \\ &\Longrightarrow y \in A \quad \text{e} \quad y \neq x_0 \\ &\Longrightarrow y \in A\backslash\{x_0\} \end{aligned}$$

$$\therefore \; B(x,\epsilon) \subset A\backslash\{x_0\}$$

Se sigue que $A\backslash\{x_0\}$ es abierto.

$\square$

3.1.4. Sucesiones en Espacios Métricos

Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Definición 3.12 Una *sucesión* en M es una función $x : \mathbb{N} \to M$. El valor de la suseción x en un número $n \in \mathbb{N}$ será denotado x_n en vez de $x(n)$, y será llamado el *n-ésimo* término de la sucesión. Por comodidad vamos a usar la notación (x_n) para representar la sucesión.

Definición 3.13 Sea (x_n) una sucesión en M. Se dice que $a \in M$ *es el límite* de (x_n) o que (x_n) *converge* a a cuando dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow d(x_n, a) < \epsilon$$

En tal caso escribimos $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ o simplemente $x_n \to a$. También se dice que (x_n) *es convergente.*

Observación 3.3 Que una sucesión (x_n) converja a $a \in M$ es equivalente a que la sucesión real $(d(x_n, a))$ converja a cero.

Proposición 3.6 (Unicidad del límite) *Si una sucesión (x_n) es convergente, entonces su límite es único.*

Definición 3.14 Sea (x_n) una sucesión en M. Una *subsucesión* de (x_n) es una restricción de la funciíon $n \mapsto x_n$ a un subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Tal subsucesión sera indicada por la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ o simplemente $(x_{n'})$.

Proposición 3.7 *Si una sucesión (x_n) converge* a a, *entonces toda subsucesión de (x_n) también converge* a a.

Sea $M = M_1 \times M_2$ el producto cartesiano de dos espacios métricos M_1 y M_2. Dada una suceción (z_n) en M, esta puede escribirse como $z_n = (x_n, y_n)$. Entonces (z_n) induce dos sucesiones (x_n) en M_1 y (y_n) en M_2 llamadas *primera* y *segunda sucesión componente* de (z_n) respectivamente.

Proposición 3.8 *Sea $M = M_1 \times M_2$ el producto cartesiano de dos espacios métricos M_1 y M_2. Una sucesión $(z_n) = (x_n, y_n)$ en M converge* a *$c = (a, b) \in M$ si y sólo si (x_n) converge* a *a e (y_n) converge* a *b.*

Definición 3.15 Diremos que una sucesión real (x_n) es *acotada* si existe una constante $c > 0$ tal que $\mid x_n \mid < c$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.16 Sea (x_n) una sucesión real acotada. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sup\{x_k : x \geq n\}$$

$$l_n = \text{ínf}\{x_k : k \geq n\}$$

a) El *límite superior* de (x_n), denotado por $\overline{\text{lím}}\, x_n$, se define como

$$\overline{\text{lím}}\, x_n = \text{ínf}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

b) El *límite inferior* de (x_n), denotado por $\underline{\text{lím}}\, x_n$, se define como

$$\underline{\text{lím}}\, x_n = \sup\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Observación 3.4 Debe observarse que al exigir a una sucesión real (x_n) que sea acotada, se garantiza la existencia de los límites superior e inferior de la misma.

Proposición 3.9 *Sea (x_n) una sucesión real acotada y $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(I) $\underline{\text{lím}}\, x_n \leq \overline{\text{lím}}\, x_n$

(II) $\text{lím}\, x_n = x_0 \Longleftrightarrow \underline{\text{lím}}\, x_n = \overline{\text{lím}}\, x_n = x_0$

Proposición 3.10 *Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones reales acotadas. Si para todo n se tiene $x_n \leq y_n$, entonces*

(I) $\overline{\text{lím}}\, x_n \leq \overline{\text{lím}}\, y_n$

(II) $\underline{\text{lím}}\, x_n \leq \underline{\text{lím}}\, y_n$

Proposición 3.11 *Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones reales acotadas.*

(I) $\overline{\text{lím}}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\text{lím}}\, x_n + \overline{\text{lím}}\, y_n$

(II) $\underline{\text{lím}}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\text{lím}}\, x_n + \underline{\text{lím}}\, y_n$

(III) $\overline{\text{lím}}\,(-x_n) = -\underline{\text{lím}}\, x_n$

(IV) $\underline{\text{lím}}\,(-x_n) = -\overline{\text{lím}}\, x_n$

(V) $\overline{\text{lím}}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\text{lím}}\, x_n \cdot \overline{\text{lím}}\, y_n$

(VI) $\underline{\text{lím}}\,(x_n \cdot y_n) \geq \underline{\text{lím}}\, x_n \cdot \underline{\text{lím}}\, y_n$

3.1.5. Límite en Espacios Métricos

Definición 3.17 Sea (M, d_1) y (N, d_2) espacios métricos, $a \in M$ un punto de acumulación de A y $f : A \to N$ una función. Diremos que $l \in N$ es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a a, cuando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A : \, 0 < d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), l) < \epsilon$$

En caso de que tal número l satisfaga la condición anterior, denotaremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Proposición 3.12 (Unicidad del límite) *Si una función $f : M \to N$ tiene límite l cuando x tiende a a, entonces su límite es único.*

Proposición 3.13 (Caracterización del límite por sucesiones) *Sean $f : A \subset M \to N$ y $a \in M$ un punto de acumulación de A. Para que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ es necesario y suficiente que, para toda sucesión (x_n) de puntos en $A - \{a\}$ con $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se cumpla $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.*

Definición 3.18 Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se dice *acotada* si existe una constante $c > 0$ tal que $| f(x) | < c$ para cualquier $x \in M$.

Definición 3.19 Sea $f : A \subset M \to \mathbb{R}$ una función acotada y $a \in M$ un punto de acumulación de A. Para cada $\epsilon > 0$ denotamos

$$\eta(\epsilon) = \sup\{f(x) : \, x \in A \cap B^*(a; \epsilon)\}$$

$$\mu(\epsilon) = \inf\{f(x) : \, x \in A \cap B^*(a; \epsilon)\}$$

a) El *límite superior* de $f(x)$ cuando x tiende a a, se denota por $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$ y se define como

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \inf\{\eta(\epsilon) : \, \epsilon > 0\}$$

b) El *límite inferior* de $f(x)$ cuando x tiende a a, se denota por $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$ y se define como

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \sup\{\mu(\epsilon) : \, \epsilon > 0\}$$

Observación 3.5 Al exigir a una función f ser acotada, se garantiza que existen tanto el límite superior como el límite inferior.

Proposición 3.14 *Sean $f : A \subset M \to \mathbb{R}$ una función acotada y $a \in M$ un punto de acumulación de A.*

I) *Si $U = \limsup\limits_{x \to a} f(x)$, entonces existe una sucesión (x_n) en $A \backslash \{a\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = U$$

II) *Si $L = \liminf\limits_{x \to a} f(x)$, entonces existe una sucesión (u_n) en $A \backslash \{a\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to \infty} f(u_n) = L$$

Proposición 3.15 *Sean $f : A \subset M \to \mathbb{R}$ una función acotada y $a \in M$ un punto de acumulación de A.*

I) *Si $U = \limsup_{x \to a} f(x)$ y (x_n) es una sucesión en $A \setminus \{a\}$ que converge* a a, *entonces*

$$\overline{\lim}\, f(x_n) \leq U$$

II) *Si $L = \liminf_{x \to a} f(x)$ y (x_n) es una sucesión en $A \setminus \{a\}$ que converge* a a, *entonces*

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \geq L$$

3.2. Continuidad en espacios métricos

Definición 3.20 Sea M, N espacios métricos, $f : A \subset M \to N$ y $a \in A$ un punto de acumulación de A.

a) Se dice que f es *continua* en a si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a y es

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

b) Diremos simplemente que f es *continua* si f es continua en cada punto $a \in A$.

Ejemplo 3.4

1. Sea A un subconjunto no vacio de M y definamos la función $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x, A)$. De la Proposición (3.2) se tiene que para cualesquiera $x, y \in M$

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq d(x, y)$$

   Así, se tiene que f es continua.

2. Sea x_0 un punto de M. Haciendo $A = \{x_0\}$, del ejemplo anterior se tiene que la función $g : M \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, x_0)$ es continua. En efecto $g(x) = d(x, x_0) = d(x, \{x_0\})$, luego se trata de un caso particular del ejemplo anterior.

3. Sean $f, g : A \subset M \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se tiene que

   - Las funciones $f + g, f \cdot g$ son continuas.
   - Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces f/g es continua.

4. En un espacio normado V, la función norma es continua. En efecto sea $\zeta : V \to \mathbb{R}$ dado por $\zeta(x) = \parallel x \parallel$. De la Observación (3.2)

$$\left|\zeta(x) - \zeta(y)\right| = \left| \parallel x \parallel - \parallel y \parallel \right| \leq \parallel x - y \parallel$$

   Luego la norma es una contracción débil.

5. Fijemos un vector no nulo $a \in \mathbb{R}^3$. Definamos $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $\xi(u) = a \times u$.

$$\begin{aligned}
\| \xi(u) - \xi(v) \| &= \| a \times u - a \times v \| \\
&= \| a \times (u - v) \| \\
&= \| a \| \cdot \| u - v \| \cdot \ \operatorname{sen} \sphericalangle(a, u - v) \\
&\leq \| a \| \cdot \| u - v \|
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \| \xi(u) - \xi(v) \| \leq \| a \| \cdot \| u - v \|$$

Así, la función ξ es lipschitziana y por ello es continua.

Existe una forma de caracterizar la continuidad de una función en términos de conjuntos abiertos. En efecto, enunciamos el siguiente resultado.

Proposición 3.16 *Dada una función $f : M \to N$, las siguientes proposiciones son equivalentes*

i) *f es continua*

ii) *dado cualquier abierto U en N, se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en M*

iii) *dado cualquier cerrado V en N, se cumple que $f^{-1}(V)$ es cerrado en M*

Ejemplo 3.5

1. Toda bola cerrada $B[a; r]$ en un espacio M, es un conjunto cerrado. En efecto, definiendo la función $f : M \to \mathbb{R}$ como $f(x) = d(x, a)$ se tiene que $B[a; r] = f^{-1}([0, r])$ y sabemos que $[0, r]$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

2. Todo plano Π en $\mathbb{R}^3$ es cerrado. En efecto Π admite una ecuación $n \bullet (x - x_0) = 0$. Definiendo la función $\phi(x) = n \bullet (x - x_0)$, el plano es la imágen inversa de 0 mediante la función continua ϕ, por lo cual Π es cerrado.

3. Cualquier recta r en $\mathbb{R}^3$ también es un conjunto cerrado, pues siempre se puede interpretar como la intersección de dos planos. Para probar esto sea $x = x_0 + tv$ una ecuación de r. Denotanto $x = (x_1, x_2, x_3), x_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ y $v = (a, b, c)$ supongamos sin pérdida de generalidad que $a \neq 0$. Nos proponemos encontrar dos vectores (linealmente independientes) y ortogonales a v

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

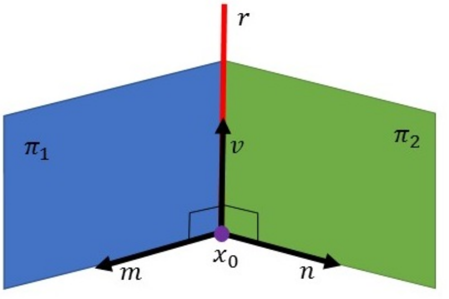
$$(x_2, x_3) = (1, 0) \Longrightarrow ax_1 + b = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{b}{a} \Longrightarrow m = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)$$

$$(x_2, x_3) = (0, 1) \Longrightarrow ax_1 + c = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{c}{a} \Longrightarrow n = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)$$

Sean los planos

$$\pi_1 : x = x_0 + tv + sm$$

$$\pi_2 : x = x_0 + tv + sn$$



Probemos que la recta está contenida en la intersección de los planos.

$$\begin{aligned} x \in r &\implies x = x_0 + tv\,, \text{ para algún } t \in \mathbb{R} \\ &\implies \begin{cases} x = x_0 + tv + 0m & , \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R} \\ x = x_0 + tv + 0n & , \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\implies x \in \pi_1 \text{ y } x \in \pi_2 \\ &\implies x \in \pi_1 \cap \pi_2 \end{aligned}$$

Ahora probemos la inclusión contraria.

$$\begin{aligned} x \in \pi_1 \cap \pi_2 &\implies x \in \pi_1 \text{ y } x \in \pi_2 \\ &\implies \begin{cases} x = x_0 + t_1 v + s_1 m & , \quad \text{para ciertos } t_1, s_1 \in \mathbb{R} \\ x = x_0 + t_2 v + s_2 n & , \quad \text{para ciertos } t_2, s_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\implies 0 = t_1 v + s_1 m - (t_2 v + s_2 n) \\ &\implies 0 = (t_1 - t_2)v + s_1 m - s_2 n \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(t_1 - t_2)v = s_2 n - s_1 m \tag{3.2}$$

Supongamos por absurdo que $t_1 \neq t_2$. Despejando a v de la ecuación anterior

$$v = \frac{s_2}{t_1 - t_2} n - \frac{s_1}{t_1 - t_2} m$$

Como m y n son ortogonales a v, entonces $\frac{s_2}{t_1 - t_2} n - \frac{s_1}{t_1 - t_2} m$ también es ortogonal a v, y así de la ecuación anterior v es ortogonal a sí mismo lo cual implica que $v = 0$, y esto último es contradictorio por ser v un vector director de r. Entonces $t_1 = t_2$, de modo que la ecuación (3.2) equivale a

$$0 = s_2 n - s_1 m$$

De la independencia lineal de m y n se infiere que $s_1 = s_2 = 0$. Sustituyendo estos valores en (3.1)se tiene que $x = x_0 + t_1 v$. Se sigue que $x \in r$. De estos resultados obtenemos que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ y luego por el ejemplo anterior se sigue que r es cerrado.

Proposición 3.17 (Caracterización de la continuidad por sucesiones) *Una función $f : M \to N$ es continua en $a \in M$ si y sólo si para cualquier sucesión (x_n) en M con $x_n \to a$ se cumple que $f(x_n) \to f(a)$.*

Definición 3.21 Diremos que $f : M \to N$ es *abierta* cuando envía abiertos en abiertos, es decir, si dado U abierto en M se cumple que $f(U)$ es abierto en N.

De esta definición se sigue que un función invertible es continua si su inversa es abierta.

3.3. Compacidad

Definición 3.22 Sea $X \subset M$. Un *cubrimiento* de X es una familia $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$$

Si existe un subconjunto $L' \subset L$ tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$$

entonces la subfamilia $\mathfrak{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ se llama un *subcubrimiento* de $\mathfrak{C}$.

Definición 3.23 Sean $X \subset M$ y $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ una cubrimiento de X.

a) Diremos que $\mathfrak{C}$ es *abierto* cuando C_λ es abierto en M para todo $\lambda \in L$.

b) Diremos que $\mathfrak{C}$ es *finito* cuando L es un conjunto finito. En este caso, tenemos que $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y escribimos

$$X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$$

Definición 3.24 Un espacio M se denomina *compacto* cuando todo cubrimiento abierto $\mathfrak{C}$ de M admite un subcubrimiento finito. Abreviadamente, M es compacto si se cumple

$$M = \cup C_\lambda \text{ , con cada } C_\lambda \text{ abierto } \Longrightarrow M = C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$$

Definición 3.25 Diremos que $X \subset M$ es un *conjunto compacto* cuando es compacto como subespacio métrico. Abreviadamente, $X \subset M$ es un subespacio compacto si se cumple

$$X \subset \cup C_\lambda \text{ , con cada } C_\lambda \text{ abierto } \Longrightarrow X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$$

Proposición 3.18 *Sea $f : M \to N$ continua. Si $X \subset M$ es un conjunto compacto, entonces $f(X)$ es un conjunto compacto.*

Ejemplo 3.6 Cualquier intervalo no degenerado $[a, b]$ de la recta es compacto.

Proposición 3.19 *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.*

Proposición 3.20 *Todo sunconjunto compacto es cerrado.*

Corolario 3.1 *Sean $X \subset M$ compacto no-vacio y $a \in M$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $d(a, X) = d(a, x_0)$.*

Proposición 3.21 *Sea M compacto. Si $f : M \to N$ es una biyección continua, entonces su inversa $f^{-1} : N \to M$ también es continua.*

Definición 3.26 Un subconjunto X de un espacio métrico M se denomina *localmente compacto* cuando para todo $x \in X$ existe un compacto $K \subset M$ tal que $x \in \text{int}(K)$.

Proposición 3.22 *Todo subconjunto cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.*

Ejemplo 3.7

1. Es inmediato que todo conjunto compacto es localmente compacto.
2. $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Dada $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ continua, su traza $\Gamma = \{\lambda(t) : t \in [0, 1]\}$ es un conjunto cerrado (ya que es compacto por la Proposición (3.18) y finalmente es localmente compacto por la Proposición (3.22).
4. Análogamente al item anterior, se prueba que toda recta $r \subset \mathbb{R}^3$ y todo plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ son localmente compactos (pues son cerrados)

3.4. Conexidad

Definición 3.27 Sea M un espacio métrico.

a) Una *disconexión* en un espacio M es una descomposición $M = A \cup B$ tal que A y B son abiertos y disjuntos.

b) Una disconexión $M = A \cup B$ se dice *trivial* cuando $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Definición 3.28 Sea M un espacio métrico.

a) Diremos que M es *conexo* si admite sólamente la disconeción trivial.

b) Diremos que $X \subset M$ es un *conjunto conexo* si es conexo como subespacio métrico.

Ejemplo 3.8

1. La recta es un espacio conexo.
2. Los únicos subconjuntos conexos no vacíos de la recta son los intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos).

Proposición 3.23 Sea $f : M \to N$ continua. Si $X \subset M$ es un conjunto conexo, entonces $f(X)$ es un conjunto conexo.

Proposición 3.24 Sea $X \subset M$ y $x_0 \in X$. Si X es un conjunto conexo, entonces x_0 es un punto de acumulación de X

Demostración

Sean $X \subset M$ un conjunto conexo y $x_0 \in X$. Supongamos por reducción al absurdo que x_0 no es un punto de acumulación de X. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $B^*(x_0, \epsilon) \cap X = \emptyset$, es decir, $B(x_0, \epsilon) \cap X = \{x_0\}$. Por definición, $\{x_0\}$ es abierto en X. De la Proposición (3.5) se tiene que $X \backslash \{x_0\}$ también es abierto en X. Como $\{x_0\}$ y $X \backslash x_0$ son disjuntos y $X = \{x_0\} \cup X \backslash x_0$ se sigue que X es un conjunto disconexo, lo cual es una contradicción.

$\square$

Corolario 3.2 Sean $f : M \to N$ y $x_0 \in f(M)$. Si M es conexo y f es continua entonces x_0 es un punto de acumulacíon de $f(M)$.

Demostración

Supongamos la hipótesis. De la Proposición (3.23) $f(M)$ es un conjunto conexo. Luego de la Proposición (3.24) se concluye que x_0 es un punto de acumulación de $f(M)$.

$\square$

3.5. Funciones reales diferenciables

Dada una función $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ y un punto $p = (a, f(a)) \in G_f$ (su gráfico[3]), nos interesa calcular la recta tangente l a G_f en p. Consideremos inicialmente un punto $q = (x, f(x)) \in G_f$, con $x \neq a$, y computemos la pendiente m_{pq} de la recta secante l_{pq} a que pasa por p y q

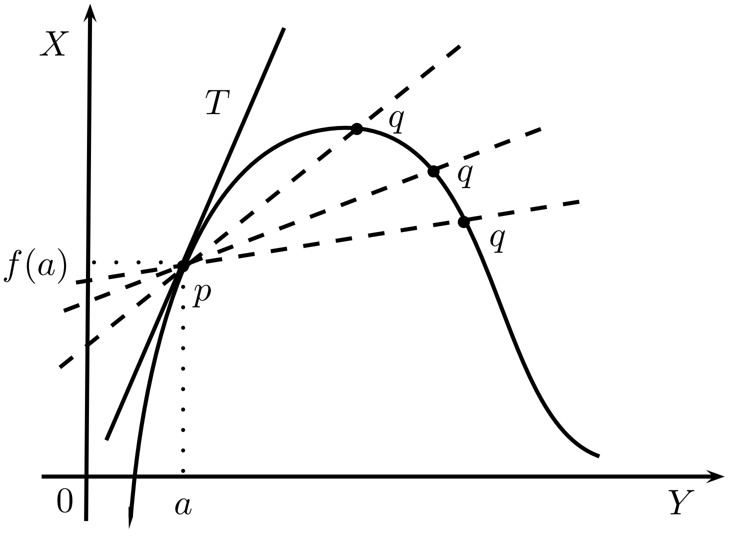
$$m_{pq} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Procedemos a aproximar q al punto p, aproximando x a a. Si m_{pq} se aproxima a un valor real, pongamos m, entonces definimos a m como la pendiente de l:

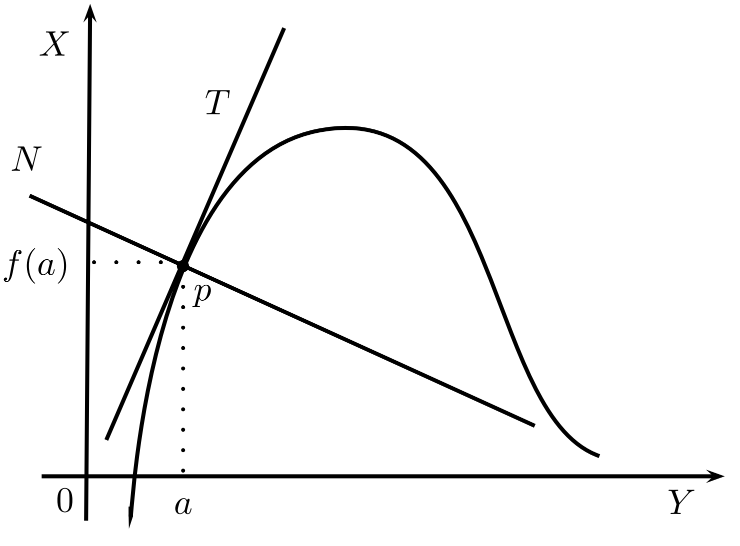
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.3}$$

Dicho de otra forma, la *recta tangente* a G_f en p se define como la linea recta que es la posición límite [4] de las rectas secantes l_{pq} cuando q se aproxima a p.

[3]Indicamos con G_f al gráfico de f, es decir $G_f = \big\{(x, f(x)) : x \in [\alpha, \beta]\big\}$.
[4]Cuando $a = \alpha$ o $a = \beta$, tal límite se entiende como el límite lateral.



La *recta normal* a G_f en p, se define como la linea recta N que pasa por p y es perpendicular a T, es decir, forma un ángulo de $90°$ con T



Resulta mas cómodo expresar el límite (3.3) haciendo el cambio $h = x - a$. En tal caso $x \to a$ es equivalente a $h \to 0$ y

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En el contexto formal del cálculo, la existencia de este límite introduce los conceptos de derivada y diferenciabilidad que definimos a continuación.

Definición 3.29 Dada una función $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in [\alpha, \beta]$, diremos que f es *diferenciable* en a si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En tal caso, al límite anterior lo denotamos con $f'(a)$ y le llamamos *derivada* de f en a. Queda así definida una función real denotada por f' y llamada *derivada* de f, dada para los x en $[\alpha, \beta]$ como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si dicho límite existe.

Procederemos ahora a extender estos conceptos al espacio $\mathbb{R}^3$ para finalizar con el concepto de curvatura que nos interesa.

3.6. Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^3$

Definición 3.30 Una *curva* en $\mathbb{R}^3$ es una función $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, la cual asigna a cada $t \in [a, b]$ un vector $\lambda(t)$ del espacio $\mathbb{R}^3$. En tal caso, λ viene dada por una ecuación del tipo

$$\lambda(t) = \big(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\big)$$

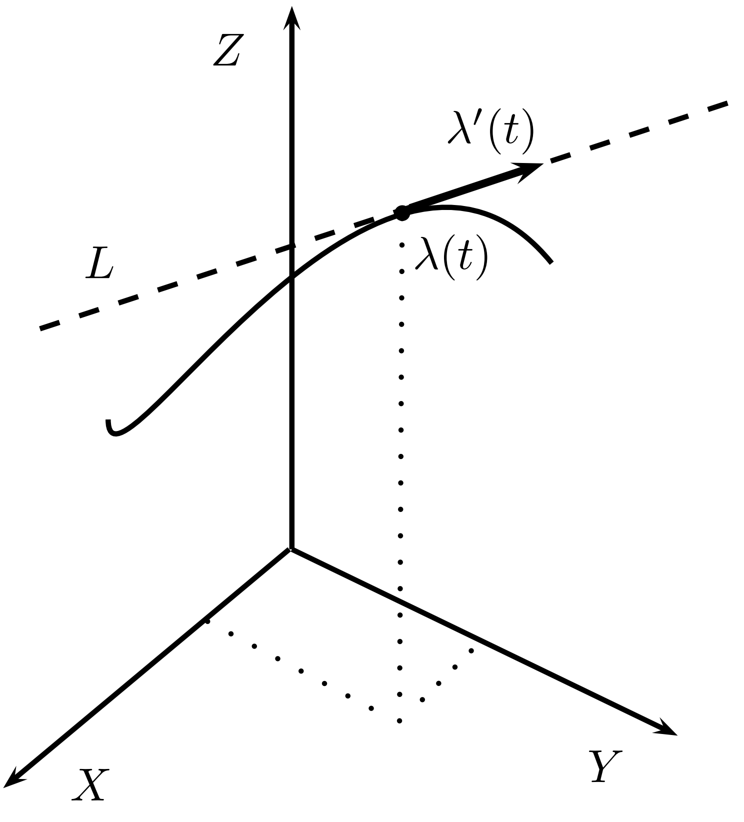
donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$ llamadas *funciones componente* de λ. El conjunto $\Gamma = \{\lambda(t) : t \in [a, b]\}$ recibe el nombre de *traza* de λ.

Definición 3.31 Una curva $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se dice *diferenciable en* $t \in [a, b]$ si cada una de sus funciones componente es diferenciable en t. En tal caso la *derivada* de λ en t la denotamos como $\lambda'(t)$ y viene dada por

$$\lambda'(t) = \big(\lambda'_1(t), \lambda'_2(t), \lambda'_3(t)\big)$$

Diremos simplemente que λ es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto de su dominio.

La noción de derivada de curvas $\lambda : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ tiene una interpretación geométrica similar a la de funciones reales $f : (a, b) \to \mathbb{R}$: si $\lambda'(t) \neq 0$, entonces este vector es la dirección de la recta L en $\mathbb{R}^3$ que es tangente a Γ en $\lambda(t)$.



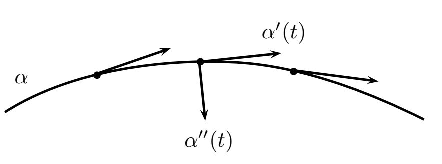
3.7. Curvatura

Definición 3.32 Una curva $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se dice *regular* si $\lambda'(t) \neq 0$ pra todo $t \in [a, b]$.

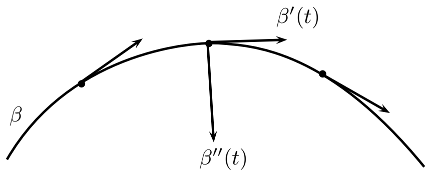
Definición 3.33 Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Diremos que λ está *parametrizada por longitud de arco* si $\| \lambda'(t) \| = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

Definición 3.34 Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, dos veces diferenciable y $t \in [a, b]$. El número $\kappa(t) = \| \lambda''(t) \|$ se denomina *curvatura* de λ en t.

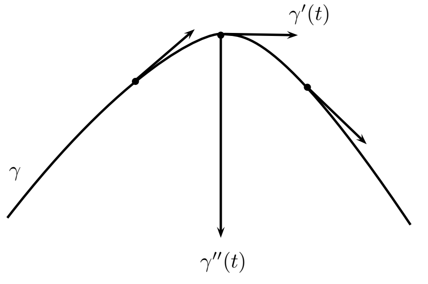
Observación 3.6 Nótese que cuando una curva $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco, entonces su curvatura en un punto $t \in [a, b]$ mide la tasa de cambio del ángulo que tangentes próximas forman con la tangente en t . Por está razón, $\kappa(t)$ proporciona una medida de cuán rápidamente se desvía la curva de la recta tangente en t, en un entorno de t. En otras palabras: *la curvatura mide la flexión de una curva en un punto dado.*



Curva poco flexionada



Curva medianamente flexionada



Curva muy flexionada

En caso de curvas regulares y dos veces diferenciables que no necesariamente están parametrizadas por longitud de arco, el cálculo de la curvatura se establece como sigue

Proposición 3.25 *Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular y dos veces diferenciable. Entonces vale*

$$\kappa(t) = \frac{\parallel \lambda'(t) \times \lambda''(t) \parallel}{\parallel \lambda'(t) \parallel^3}$$

A continuación enunciamos un resultado muy importante, el cual es una caracterización de las líneas rectas.

Proposición 3.26 *Una curva λ tiene curvatura nula en todos sus puntos si y sólo si es un segmento de recta.*

Capítulo 4

El operador de Pascali

En lo que sigue, por comodidad, emplearemos la notación $A\backslash x_0$ para indicar la diferencia entre los conjuntos A y $\{x_0\}$.

4.1. Distancia superior e inferior

Definición 4.1 Sean $A, B \subset M$ localmente compactos y cerrados y $x_0 \in A \cap B$ un punto de acumulación de A.

I) Definimos la *distancia superior* de A a B en x_0 al número

$$\overline{D}_{x_0}(A,B) = \limsup_{A\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,B)}{d(x,x_0)}$$

II) Definimos la *distancia inferior* de A a B en x_0 al número

$$\underline{D}_{x_0}(A,B) = \liminf_{A\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,B)}{d(x,x_0)}$$

Observación 4.1

1. Sean A, B y x_0 como en la Definición anterior. Dado $x \in A\backslash x_0$

   $$d(x,B) = \inf\{d(x,y) : y \in B\} \leq d(x,x_0)$$

   $$\therefore d(x,B) \leq d(x,x_0)$$

   Así

   $$0 \leq \frac{d(x,B)}{d(x,x_0)} \leq 1\,, \qquad \forall x \in A\backslash x_0$$

   entonces siempre existen $\overline{D}_{x_0}(A,B)$ y $\underline{D}_{x_0}(A,B)$.

2. En general se tiene que

   $$0 \leq \underline{D}_{x_0}(A,B) \leq \overline{D}_{x_0}(A,B) \leq 1$$

3. No obstante, cuando se cumple la igualdad $\underline{D}_{x_0}(A,B) = \overline{D}_{x_0}(A,B)$, a tal número lo denoteremos con $D_{x_0}(A,B)$ y le llamaremos *distancia de Pascali* de A a B en x_0 (no confundir con la noción de distancia entre conjuntos $d(A,B)$ dada en la definición (3.8)).

4. Los operadores $\overline{D}_{x_0}$ y $\underline{D}_{x_0}$ no son conmutativos, esto es, si x_0 es un punto de acumulación para A y B, se tiene en general

$$\overline{D}_{x_0}(A,B) \neq \overline{D}_{x_0}(B,A)$$

$$\underline{D}_{x_0}(A,B) \neq \underline{D}_{x_0}(B,A)$$

Así, queda claro que ni $\overline{D}_{x_0}$ ni $\underline{D}_{x_0}$ son métricas.

5. Es fácil probar que

$$\overline{D}_{x_0}(A,B) = \overline{D}_{x_0}(A,\overline{B})$$

$$\underline{D}_{x_0}(A,B) = \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})$$

en efecto, de la Proposición (3.3) $d(x,B) = d(x,\overline{B})$, de allí que

$$\limsup_{A\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,B)}{d(x,x_0)} = \limsup_{A\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,\overline{B})}{d(x,x_0)}$$

$$\overline{D}_{x_0}(A,B) = \overline{D}_{x_0}(A,\overline{B})$$

La otra igualdad se verifica análogamente.

Ejemplo 4.1 Sea $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y consideremos dos rectas r y s en el espacio $\mathbb{R}^3$ que pasan por x_0 y con vectores directores v w respectivamente, de modo que sus ecuaciones son

$$r:\ x = x_0 + tv,\ t \in \mathbb{R}$$

$$s:\ x = x_0 + tw,\ t \in \mathbb{R}$$

Tiene sentido la expresión $D_{x_0}(r,s)$, pues de los ejemplos (3.5) y (3.7) toda recta es localmente compacta y cerrada; además x_0 es un punto de acumulación de r en virtud del Corolario (3.2) (nótese que la recta r es la imágen del conexo $\mathbb{R}$ mediante la función continua $f(t) = x_0 + tv$).

Calculemos

$$\lim_{r\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,s)}{d(x,x_0)}$$

Para $x \in r\backslash x_0$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = x_0 + tv$. Del ejemplo (3.1.2)

$$d(x,s) = \frac{\parallel w \times (x - x_0) \parallel}{\parallel w \parallel}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x,s)}{d(x,x_0)} &= \frac{\frac{\| w\times(x-x_0)\|}{\| w\|}}{\| x-x_0 \|} \\
&= \frac{\| w\times(x-x_0) \|}{\| w \| \cdot \| x-x_0 \|} \\
&= \frac{\| w\times(tv) \|}{\| w \| \cdot \| tv \|} \\
&= \frac{\| t(w\times v) \|}{\| w \| \cdot | t | \cdot \| v \|} \\
&= \frac{\cancel{| t |}\cdot \| v\times w \|}{\| w \| \cdot \cancel{| t |}\cdot \| v \|} \\
&= \frac{\| w\times v \|}{\| w \| \cdot \| v \|} \\
&= \frac{\cancel{\| w \|}\cdot \cancel{\| v \|}\cdot\ \operatorname{sen}\sphericalangle(w,v)}{\cancel{\| w \|}\cdot \cancel{\| v \|}} \\
&= \operatorname{sen}\sphericalangle(w,v)
\end{aligned}
$$

Luego[1]

$$
\lim_{r\setminus x_0\ni x\to x_0} \frac{d(x,s)}{d(x,x_0)} = \frac{\| w\times v \|}{\| w \| \cdot \| v \|} = \operatorname{sen}\sphericalangle(w,v)
$$

Se sigue que existe $D_{x_0}(r,s)$ y es

$$
D_{x_0}(r,s) = \frac{\| w\times v \|}{\| w \| \cdot \| v \|} = \operatorname{sen}\sphericalangle(w,v)
$$

La meta que se persigue en este trabajo es caracterizar las nociones de tangencia, ortogonalidad y curvatura de una curva en términos del operador de Pascali. Previo a eso, es necesario establecer algunos resultados.

4.2. Propiedades de la distancia superior e inferior

El siguiente es una especie de copia del Corolario (3.1)

Lema 4.1 *Sean $U\subset M, x_0\in U$ y (x_n) una sucesión en M que converge a x_0. Si $B[x_0;\epsilon]$ es compacta para algún $\epsilon>0$, entonces existe un número $N\in\mathbb{N}$ y una sucesión (y_n) en $\overline{U}$ tales que*

$$
d\big(x_n,\overline{U}\,\big) = d(x_n,y_n)
$$

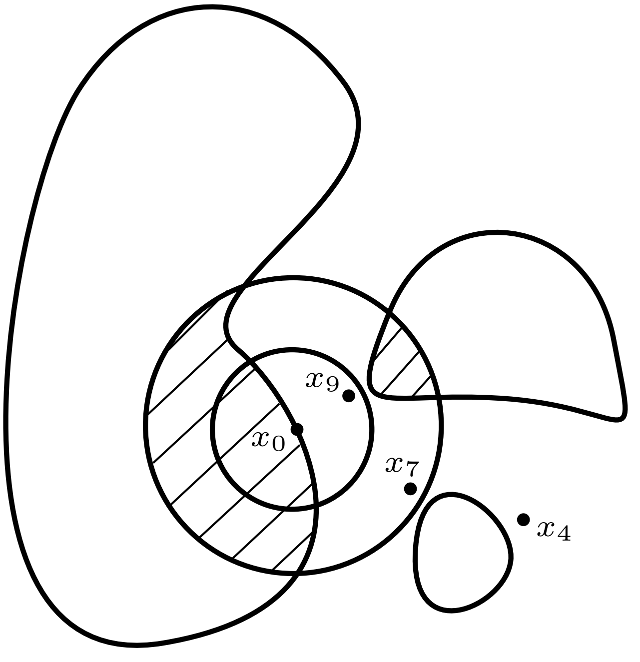
para todo $n>N$.

[1] Simbolizamos con $\sphericalangle(w,v)$ al ángulo entre w y v.

Demostración

Supongamos la hipótesis. Por el Ejemplo (3.5) $B[x_0;\epsilon]$ es cerrado. Sabemos que $\overline{U}$ es cerrado, luego $B[x_0;\epsilon]\cap\overline{U}$ es un subconjunto cerrado del compacto $B[x_0;\epsilon]$, así, por la Proposición (3.19) $B[x_0;\epsilon]\cap\overline{U}$ es compacto.

Consideremos la bola $B(x_0;\epsilon/2)$.



Por la convergencia de (x_n) a x_0, para $\dfrac{\epsilon}{2}>0$, existe $N>0$ tal que

$$d(x_n,x_0)<\frac{\epsilon}{2}\,,\qquad \forall n>N \tag{4.1}$$

Tomando $k\in\mathbb{N}$, sea $n=N+k$. Se tiene que

$$B[x_0;\epsilon]\cap\overline{U}\subset\overline{U}$$

$$\Longrightarrow\quad \{d(x_n;y):y\in B[x_0;\epsilon]\cap\overline{U}\}\subset\{d(x_n,y):y\in\overline{U}\}$$

$$\Longrightarrow\quad \inf\{d(x_n;y):y\in B[x_0;r]\cap\overline{U}\}\geq\inf\{d(x_n,y):y\in\overline{U}\}$$

$$\therefore\quad d(x_n,\overline{U})\leq d(x_n,B[x_0;\epsilon]\cap\overline{U}) \tag{4.2}$$

Ahora probemos que

$$d(x_n, B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}) \leq d(x_n, \overline{U})$$

Para ello, basta verificar que $d(x_n, B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U})$ es una cota inferior de $\{d(x_n, y) : y \in \overline{U}\}$.

Sea $y \in \overline{U}$.

- Si $y \in B[x_0;\epsilon]$, entonces $y \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}$

$$\begin{aligned} &\implies d(x_n, y) \in \{d(x_n, z) : z \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}\} \\ &\implies \inf\{d(x_n, z) : z \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}\} \leq d(x_n, y) \end{aligned}$$

$$\therefore \; d(x_n, B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}) \leq d(x_n, y)$$

- Sea ahora $y \notin B[x_0;\epsilon]$

$$\therefore \; d(y, x_0) > \epsilon \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} x_0 \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U} &\implies d(x_n, x_0) \in \{d(x_n, z) : z \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}\} \\ &\implies \inf\{d(x_n, z) : z \in B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}\} \leq d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{de } (4{,}1) \end{aligned}$$

$$\therefore \; d(x_n, B[x_0;\epsilon] \cap \overline{U}) < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.4}$$

Multiplicando por -1 en ambos lados de (4.1)

$$-d(x_n, x_0) > -\frac{\epsilon}{2}$$

sumando esta desigualdad a (4.3)

$$d(y, x_0) - d(x_n, x_0) > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

por desigualdad triangular $d(x_n, y) \geq d(x_0, y) - d(x_0, x_n)$, luego de esto y lo anterior

$$d(x_n, y) \geq \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) < \frac{\epsilon}{2} \leq d(x_n, y) \Longrightarrow d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) < d(x_n, y)$$

$$\therefore \;\; d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) < d(x_n, y)$$

Así, de los casos estudiados conluímos que para todo $y \in \overline{U}$

$$\therefore \;\; d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) \leq d(x_n, y)$$

osea, $d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U})$ es una cota inferior de $\{d(x_n, z) : z \in \overline{U}\}$. Así

$$d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) \leq \inf\{d(x_n, z) : z \in \overline{U}\}$$

$$\therefore d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) \leq d(x_n, \overline{U})$$

de lo anterior y (4.2)

$$d(x_n, \overline{U}) = d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U})$$

de la compacidad de $B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}$ y por la Proposición (3.1) existe $z_k \in B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U})$ (recordar que $n = N + k$) tal que

$$d(x_n, B[x_0; \epsilon] \cap \overline{U}) = d(x_n, z_k) \;, \qquad n = N + k$$

Definiendo la sucesión (y_n) para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$y_n = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad n \leq N \\ z_k & \text{si} \quad n = N + k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

vemos que para todo $n > N$

$$d(x_n, \overline{U}) = d(x_n, y_n)$$

□

A continuación demostraremos tres desigualdades importantes para el desarrollo de la teoría. En dichas pruebas será vital el lema que acabamos de probar.

Proposición 4.1 *Sean $A, B, C \subset M$ localmente compactos y cerrados y $x_0 \in A \cap B \cap C$ un punto de acumulación de A, B y C. Entonces*

$$\underline{D}_{x_0}(A, C) - \underline{D}_{x_0}(A, B) \leq \overline{D}_{x_0}(B, C) \cdot [1 + \underline{D}_{x_0}(A, B)]$$

Demostración

Supongamos la hipótesis. Por definición

$$\underline{D}_{x_0}(A, \overline{B}) = \liminf_{A \backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x, \overline{B})}{d(x, x_0)}$$

Por la Proposición (3.14) existe una sucesión (a_n) en $A \backslash x_0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d\big(a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)} = \underline{D}_{x_0}(A, \overline{B}) \tag{4.5}$$

Por compacidad local de A existe $\epsilon > 0$ tal que $B[x_0; \epsilon]$ es compacto. Del Lema (4.1) existe $N_1 > 0$ y dos sucesiones $(b_n) \subset \overline{B}$ y $(c_n) \subset \overline{C}$ tales que para $n > N_1$

$$d(a_n, \overline{B}) = d(a_n, b_n) \tag{4.6}$$

$$d(a_n, \overline{C}) = d(a_n, c_n) \tag{4.7}$$

Como (a_n) converge a x_0 y por la Proposición (3.15)

$$\liminf_{A\setminus x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x, \overline{C})}{d(x, x_0)} \leq \underline{\lim} \frac{d(a_n, \overline{C})}{d(a_n, x_0)}$$

$$\therefore \quad \underline{D}_{x_0}(A, \overline{C}) \leq \underline{\lim} \frac{d(a_n, \overline{C})}{d(a_n, x_0)} \tag{4.8}$$

Se tiene que $b_n \to x_0$, en efecto, definiendo $f : A \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = d\big(x, \overline{B}\,\big)$$

vemos que ella es continua por el Ejemplo (3.4), además

$$\begin{array}{rcl} d(b_n, x_0) & \leq & d(b_n, a_n) + d(a_n, x_0) \\ & \leq & d(a_n, b_n) + d(a_n, x_0) \\ & \leq & d\big(a_n, \overline{B}\,\big) + d(a_n, x_0) \\ & \leq & f(a_n) + d(a_n, x_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} d(b_n, x_0) & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, x_0) \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + 0\,, \quad \text{pues } a_n \to x_0 \\ & \leq & f(x_0) + 0\,, \quad \text{por Prop. (3,17)} \\ & = & d\big(x_0, \overline{B}\,\big) \\ & = & d(x_0, B)\,, \quad \text{pues } B \text{ es cerrado} \\ & = & 0\,, \quad \text{pues } x_0 \in B \end{array}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$$

de esto último y por la Proposición (3.15)

$$\overline{\lim} \frac{d\big(b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \leq \limsup_{\overline{B}\setminus x_0 \ni y \to x_0} \frac{d\big(y, \overline{C}\,\big)}{d(y, x_0)}$$

$$\overline{\text{lím}}\frac{d\big(b_n,\overline{C}\,\big)}{d(b_n,x_0)} \leq \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C}) \tag{4.9}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $N_2 > 0$ tal que $b_n \neq x_0$ para todo $n > N_2$.

Por compacidad de $B[x_0,\epsilon]$ y nuevamente por el Lema (4.1) existe $N_3 > 0$ y una sucesión $(\widetilde{c}_n)$ en $\overline{C}$ tal que para todo $n > N_3$

$$d(b_n,\overline{C}) = d(b_n,\widetilde{c}_n) \tag{4.10}$$

Hagamos $N = \text{máx}\{N_1,N_2,N_3\}$. Sea $n > N$. De la desigualdad triangular tenemos

$$d(a_n,\widetilde{c}_n) - d(a_n,b_n) \leq d(b_n,\widetilde{c}_n) \tag{4.11}$$

$$d(b_n,x_0) \leq d(a_n,x_0) + d(a_n,b_n) \tag{4.12}$$

De (4.7)

$$\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} = \frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)} \leq \frac{d(a_n,\widetilde{c}_n)}{d(a_n,x_0)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} &\leq \frac{d(a_n,\widetilde{c}_n)}{d(a_n,x_0)} - \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} \\
&= \frac{d(a_n,\widetilde{c}_n) - d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} \\
&\leq \frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(a_n,x_0)}, \qquad \text{de } (4{,}11) \\
&= \frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)} \cdot \frac{d(b_n,x_0)}{d(a_n,x_0)} \\
&\leq \frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)} \cdot \left[\frac{d(a_n,x_0) + d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right], \qquad \text{de } (4{,}12) \\
&= \frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)} \left[1 + \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right]
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} \leq \frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)} \left[1 + \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right]\ ,\ \forall n > N \tag{4.13}$$

Ya que siempre existe el límite inferior de una sucesión acotada y por la Proposición (3.10)

$$\underline{\text{lím}}\left(\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right) \leq \underline{\text{lím}}\left(\frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)}\left[1 + \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right]\right) \tag{4.14}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\underline{D}_{x_0}(A,\overline{C}) - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) &\leq \underline{\lim}\frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)} - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) \quad \text{de } (4.8)\\
&= \underline{\lim}\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) \quad \text{de } (4.7)\\
&= \underline{\lim}\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \lim_{n\to\infty}\frac{d(a_n,\overline{B})}{d(a_n,x_0)} \quad \text{de } (4.5)\\
&= \underline{\lim}\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \overline{\lim}\frac{d(a_n,\overline{B})}{d(a_n,x_0)} \quad \text{de la Prop. } (3.9) \text{ y } (4.5)\\
&= \underline{\lim}\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \overline{\lim}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} \quad \text{de } (4.6)\\
&= \underline{\lim}\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} + \underline{\lim}\left(-\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right) \quad \text{por la Prop. } (3.11)\\
&\leq \underline{\lim}\left(\frac{d(a_n,c_n)}{d(a_n,x_0)} - \frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right) \quad \text{Por la Prop. } (3.11)\\
&\leq \underline{\lim}\left(\frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)}\left[1+\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right]\right) \quad \text{de } (4.14)\\
&\leq \overline{\lim}\left(\frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)}\left[1+\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right]\right) \quad \text{por la Prop. } (3.9)\\
&\leq \overline{\lim}\frac{d(b_n,\widetilde{c}_n)}{d(b_n,x_0)}\left[1+\overline{\lim}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right] \quad \text{por la Prop. } (3.11)\\
&= \overline{\lim}\frac{d(b_n,\overline{C})}{d(b_n,x_0)}\left[1+\overline{\lim}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right] \quad \text{de } (4.10)\\
&\leq \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\left[1+\overline{\lim}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\right] \quad \text{de } (4.9)\\
&= \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\left[1+\overline{\lim}\frac{d(a_n,\overline{B})}{d(a_n,x_0)}\right] \quad \text{de } (4.6)\\
&= \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\left[1+\lim_{n\to\infty}\frac{d(a_n,\overline{B})}{d(a_n,x_0)}\right] \quad \text{de la Prop. } (3.9) \text{ y } (4.5)\\
&= \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\left[1+\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})\right] \quad \text{de } (4.5)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \underline{D}_{x_0}(A,\overline{C}) - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) \leq \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot\left[1+\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})\right]$$

En caso de que exista una subsucesión $(b_{n'})$ de (b_n) tal que $b_{n'} = x_0$ para todo n', entonces de (4.5),(4.6) y la Proposición (3.7)

$$\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) = \lim_{n\to\infty}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)} = \lim_{n'\to\infty}\frac{d(a_{n'},b_{n'})}{d(a_{n'},x_0)} = \lim_{n'\to\infty}\frac{d(a_{n'},x_0)}{d(a_{n'},x_0)} = 1$$

$$\therefore\ \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) = 1$$

Como $\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})$ y $\overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})$ están en $[0,1]$

$$\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) - \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C}) \leq 1$$

$$\therefore \;\; \underline{D}_{x_0}\big(A,\overline{C}\,\big) - 1 \leq \overline{D}_{x_0}\,\big(\,\overline{B},\overline{C}\,\big) \leq \overline{D}_{x_0}\big(\,\overline{B},\overline{C}\,\big)\cdot 2 = \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot[1+1]$$

$$\therefore \;\; \underline{D}_{x_0}(A,\overline{C}) - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) \leq \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot[1+\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})]$$

De los casos estudiados se sigue

$$\therefore \;\; \underline{D}_{x_0}(A,\overline{C}) - \underline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) \leq \overline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot[1+\underline{D}_{x_0}(A,\overline{B})]$$

y como los conjuntos A,B y C son cerrados, se tiene la desigualdad deseada.

□

Corolario 4.1 *Sean $A,B,C \subset M$ localmente compactos y cerrados y $x_0 \in A\cap B\cap C$ un punto de acumulación de A,B y C. Entonces*

$$\mid \underline{D}_{x_0}(A,C) - \underline{D}_{x_0}(A,B) \mid \leq 2\,\text{máx}\left\{\overline{D}_{x_0}(B,C),\overline{D}_{x_0}(C,B)\right\}$$

Demostración

Supongamos la hipótesis. De la Proposisición (4.1) y del hecho que $\underline{D}_{x_0}(A,B) \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\underline{D}_{x_0}(A,C) - \underline{D}_{x_0}(A,B) &\leq \overline{D}_{x_0}(B,C)\cdot[1+\underline{D}_{x_0}(A,B)]\\
&\leq \overline{D}_{x_0}(B,C)[1+1]\\
&\leq 2\,\overline{D}_{x_0}(B,C)\\
&\leq 2\,\text{máx}\left\{\overline{D}_{x_0}(B,C),\overline{D}_{x_0}(C,B)\right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \;\; \underline{D}_{x_0}(A,C) - \underline{D}_{x_0}(A,B) \leq 2\,\text{máx}\{\overline{D}_{x_0}(B,C),\overline{D}_{x_0}(C,B)\} \tag{4.15}$$

Cambiando C por B y B por C en la Proposición (4.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\underline{D}_{x_0}(A,B) - \underline{D}_{x_0}(A,C) &\leq \overline{D}_{x_0}(C,B)\cdot[1+\underline{D}_{x_0}(A,C)]\\
&\leq \overline{D}_{x_0}(C,B)[1+1]\\
&\leq 2\,\overline{D}_{x_0}(C,B)\\
&\leq 2\,\text{máx}\left\{\overline{D}_{x_0}(C,B),\overline{D}_{x_0}(B,C)\right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \;\; -2\,\text{máx}\{\overline{D}_{x_0}(B,C),\overline{D}_{x_0}(C,B)\} \leq \underline{D}_{x_0}(A,C) - \underline{D}_{x_0}(A,B) \tag{4.16}$$

De (4.15) y (4.16) se sigue la desigualdad.

□

Proposición 4.2 *Sean $A, B, C \subset M$ localmente compactos y cerrados y $x_0 \in A \cap B \cap C$ un punto de acumulación de A, B y C. Entonces*

$$\overline{D}_{x_0}(A,C) + \overline{D}_{x_0}(A,B) \geq \underline{D}_{x_0}(B,C) \cdot [1 - \overline{D}_{x_0}(A,B)]$$

Demostración

Supongamos la hipótesis. Existe una sucesión (a_n) en $A \backslash x_0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d\big(a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)} = \overline{D}_{x_0}\big(A, \overline{B}\,\big)$$

Como en la demostración de la Proposición (4.1), obtenemos un número $N > 0$ y dos sucesiones $(b_n) \subset \overline{B}$, $(c_n) \subset \overline{C}$ tales que para todo $n > N$

$$d\big(a_n, \overline{B}\,\big) = d(a_n, b_n)$$

$$d\big(a_n, \overline{C}\,\big) = d(a_n, c_n)$$

Asumimos sin pérdida de generaidad que $b_n \neq x_0$, para todo $n > N$. Se tiene

$$d(a_n, x_0) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, x_0) \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(a_n, \overline{C}\,\big)}{d(a_n, x_0)} + \frac{d\big(\,a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)} &= \frac{d(a_n, c_n)}{d(a_n, x_0)} + \frac{d(a_n, b_n)}{d(a_n, x_0)} \\
&= \frac{d(a_n, c_n) + d(a_n, b_n)}{d(a_n, x_0)} \\
&\geq \frac{d(c_n, b_n)}{d(a_n, x_0)} \qquad \text{por desigualdad triangular} \\
&= \frac{d(b_n, c_n)}{d(b_n, x_0)} \cdot \frac{d(b_n, x_0)}{d(a_n, x_0)} \\
&\geq \frac{d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \cdot \frac{d(b_n, x_0)}{d(a_n, x_0)} \qquad \text{por ser } c_n \in \overline{C} \text{ y de la def. de } d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big) \\
&\geq \frac{d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \cdot \frac{d(a_n, x_0) - d(a_n, b_n)}{d(a_n, x_0)} \qquad \text{de } (4{,}17) \\
&\geq \frac{d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \cdot \left[1 - \frac{d(a_n, b_n)}{d(a_n, x_0)}\right] \\
&\geq \frac{d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \cdot \left[1 - \frac{d\big(a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d\big(a_n, \overline{C}\,\big)}{d(a_n, x_0)} + \frac{d\big(\,a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)} \geq \frac{d\big(\,b_n, \overline{C}\,\big)}{d(b_n, x_0)} \cdot \left[1 - \frac{d\big(a_n, \overline{B}\,\big)}{d(a_n, x_0)}\right] \tag{4.18}$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{x_0}(A,\overline{C})+\overline{D}_{x_0}(A,\overline{B}) &= \overline{D}_{x_0}(A,\overline{C})+\lim_{n\to\infty}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\\
&= \limsup_{A\setminus x_0\ni x\to x_0}\frac{d(x,\overline{C})}{d(x,x_0)}+\lim_{n\to\infty}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\\
&\geq \overline{\lim}\frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)}+\lim_{n\to\infty}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\\
&= \overline{\lim}\frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)}+\overline{\lim}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\\
&\geq \overline{\lim}\left(\frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)}+\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right)\\
&\geq \underline{\lim}\left(\frac{d(a_n,\overline{C})}{d(a_n,x_0)}+\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right)\\
&\geq \underline{\lim}\left(\frac{d\big(\,b_n,\overline{C}\,\big)}{d(b_n,x_0)}\cdot\left[1-\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right]\right)\quad \text{de (4.18)}\\
&\geq \underline{\lim}\frac{d\big(\,b_n,\overline{C}\,\big)}{d(b_n,x_0)}\cdot\left[1+\underline{\lim}\left(-\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right)\right]\\
&= \underline{\lim}\frac{d\big(\,b_n,\overline{C}\,\big)}{d(b_n,x_0)}\cdot\left[1-\overline{\lim}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right]\\
&\geq \liminf_{\overline{B}\setminus x_0\ni y\to x_0}\frac{d(y,\overline{C})}{d(y,x_0)}\cdot\left[1-\overline{\lim}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right]\\
&= \underline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot\left[1-\overline{\lim}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right]\\
&= \underline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot\left[1-\lim_{n\to\infty}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\right]\\
&= \underline{D}_{x_0}(\overline{B},\overline{C})\cdot[1-\overline{D}_{x_0}(A,\overline{B})]
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \overline{D}_{x_0}(A,\overline{C})+\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big)\geq \underline{D}_{x_0}\big(\overline{B},\overline{C}\,\big)\cdot\big[1-\overline{D}_{x_0}(A,\overline{B})\big]$$

En caso de que exista una subsucesión $(b_{n'})$ de (b_n) tal que $b_{n'}=x_0$ para todo n', entonces

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{d\big(a_n,\overline{B}\,\big)}{d(a_n,x_0)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{d(a_n,b_n)}{d(a_n,x_0)}\\
&= \lim_{n'\to\infty}\frac{d(a_{n'},b_{n'})}{d(a_{n'},x_0)}\\
&= \lim_{n'\to\infty}\frac{d(a_{n'},x_0)}{d(a_{n'},x_0)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ 1-\overline{D}_{x_0}(A,\overline{B}\,)=0$$

$$\underline{D}_{\,x_0}\big(\overline{B},\overline{C}\,\big)\cdot[1-\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big)]=0\leq\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{C}\,\big)+\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big)$$

$$\therefore\ \ \overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{C}\,\big)+\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big)\geq\underline{D}_{x_0}\big(\overline{B},\overline{C}\,\big)\cdot[1-\overline{D}_{x_0}\big(A,\overline{B}\,\big)]$$

$\square$

Capítulo 5

Generalización de la Tangencia y la Ortogonalidad

En lo que sigue, cuando consideremos una curva $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, se entenderá que Γ simboliza su traza, esto es

$$\Gamma = \big\{\lambda(t) : t \in [0,1]\big\}$$

Teorema 5.1 (Caracterización del concepto de recta tangente)
Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio métrico euclidiano. Sea $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular en inyectiva y para $t_0 \in [0,1]$ denotemos $x_0 = \lambda(t_0)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

I) *r es la recta tangente a Γ en x_0*

II) *$D_{x_0}(\Gamma, r) = 0$ y $D_{x_0}(\Gamma, s) > 0$ para toda recta $s \neq r$ que pasa por x_0*

Demostración

Sea r una recta que pasa por x_0 con vector director v. Su ecuación es

$$x = x_0 + tv\,,\ \ t \in \mathbb{R}$$

Se tiene que x_0 es un punto de acumulación de Γ en virtud del Corolario (3.2), además Γ y r son localmente compactos y cerrados por el Ejemplo (3.7). Calculemos

$$\lim_{\Gamma\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,r)}{d(x,x_0)}$$

Sea (x_n) una sucesión en $\Gamma\backslash x_0$ con $x_n \to x_0$. Para cada n, sea $t_n \in [0,1]\backslash t_0$ tal que $x_n = \lambda(t_n)$. Se tiene que $t_n \to t_0$, en efecto, por la Proposición (3.21) λ^{-1} es continua, así

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-1}(x_n) = \lambda^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\right) = \lambda^{-1}(x_0) = t_0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x_n,r)}{d(x_n,x_0)} &= \frac{\frac{\| v\times(x_n-x_0)\|}{\|v\|}}{\| x_n - x_0 \|} \quad \text{ver Ejemplo (3.3)}\\
&= \frac{\| v \times (x_n - x_0) \|}{\| v \| \cdot \| x_n - x_0 \|}\\
&= \frac{\frac{\| v\times(x_n-x_0)\|}{|t_n-t_0|}}{\frac{\|v\|\cdot\|x_n-x_0\|}{|t_n-t_0|}}\\
&= \frac{\left\| \frac{1}{t_n-t_0}\,(v\times(x_n-x_0)) \right\|}{\| v \| \cdot \left\| \left(\frac{1}{t_n-t_0}\right)(x_n-x_0) \right\|}\\
&= \frac{\left\| v \times \left(\frac{x_n-x_0}{t_n-t_0}\right) \right\|}{\| v \| \cdot \left\| \frac{x_n-x_0}{t_n-t_0} \right\|}\\
&= \frac{\left\| v \times \left(\frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0}\right) \right\|}{\| v \| \cdot \left\| \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0} \right\|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,r)}{d(x_n,x_0)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left\| v \times \left(\frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0}\right) \right\|}{\| v \| \left\| \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0} \right\|}\\
&= \frac{\left\| v \times \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0}\right) \right\|}{\| v \| \cdot \left\| \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0} \right\|} \quad \text{del Ejemplo (3.4)}\\
&= \frac{\| v \times \lambda'(t_0) \|}{\| v \| \cdot \| \lambda'(t_0) \|}\\
&= \frac{\cancel{\| v \|} \cdot \cancel{\| \lambda'(t_0) \|}\ \operatorname{sen} \sphericalangle(v,\lambda'(t_0))}{\cancel{\| v \|} \cdot \cancel{\| \lambda'(t_0) \|}}\\
&= \operatorname{sen} \sphericalangle(v,\lambda'(t_0))
\end{aligned}
$$

Luego, existe $D_{x_0}(\Gamma,r)$ y es $D_{x_0}(\Gamma,r) = \operatorname{sen} \sphericalangle(v,\lambda'(t_0))$.

$$
\begin{aligned}
D_{x_0}(\Gamma,r) = 0 &\iff \operatorname{sen} \sphericalangle(v,\lambda'(t_0)) = 0\\
&\iff \sphericalangle(v,\lambda'(t_0)) = 0\\
&\iff v \text{ y } \lambda'(t_0) \text{ son paralelos}
\end{aligned}
$$

De lo anterior se desprende que $D_{x_0}(\Gamma, r) = 0$ si y sólo si r es la recta tangente a Γ en x_0 (entonces para cualquier recta $s \neq r$ que pasa por x_0: $D_{x_0}(\Gamma, r) > 0$).

□

El teorema anterior induce la noción de tangencia en términos del operador de Pascali.

Definición 5.1 Sean $A, B \subset M$ localmente compactos y cerrados, y $x_0 \in A \cap B$ un punto de acumulación de A y B.

a) Diremos que A *es tangente* a B en x_0 si[1] $\overline{D}_{x_0}(A, B) = 0$.

b) Diremos que A y B *son tangentes* en x_0 si A es tangente a B en x_0 y B es tangente a A en x_0.

Teorema 5.2 (Caracterización del concepto de recta normal)
Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio métrico euclidiano. Sea $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular e inyectiva y para $t_0 \in [0, 1]$ denotemos $x_0 = \lambda(t_0)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

I) *r es una recta normal a Γ en x_0*

II) *$D_{x_0}(\Gamma, r) = 1$ y $D_{x_0}(\Gamma, s) < 1$ para toda recta s que pasa por x_0 que no es normal a Γ en x_0*

Demostración

Sea r una recta que pasa por x_0 con vector director v.

Con un razonamiento análogo al usado en la prueba del Teorema (5.1) se tiene que existe $D_{x_0}(\Gamma, r)$ y es $D_{x_0}(\Gamma, r) = \operatorname{sen} \sphericalangle(v, \lambda'(t_0))$.

$$\begin{aligned} D_{x_0}(\Gamma, r) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen} \sphericalangle(v, \lambda'(t_0)) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sphericalangle(v, \lambda'(t_0)) = \frac{\pi}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad v \text{ y } \lambda'(t_0) \text{ son ortogonales} \end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que $D_{x_0}(\Gamma, r) = 1$ si y sólo si r es una recta normal a Γ en x_0 (entonces para cualquier recta s que pasa por x_0 que no es normal a Γ: $D_{x_0}(\Gamma, r) < 1$).

□

El hecho de que en el plano $\mathbb{R}^2$ una curva tiene a lo mas una recta normal en un punto, justifica el siguiente resultado.

Corolario 5.1 *Sea el espacio métrico $\mathbb{R}^2$. Sea $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable en $t_0 \in [0, 1]$ y denotemos $x_0 = \lambda(t_0)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

[1] La condición $\overline{D}_{x_0}(A, B) = 0$ equivale a que existe $D_{x_0}(A, B)$ y es cero.

I) *r es la recta normal a Γ en x_0*

II) *$D_{x_0}(\Gamma, r) = 1$ y $D_{x_0}(\Gamma, s) < 1$ para toda recta $s \neq r$ que pasa por x_0*

Es natural la siguiente definición

Definición 5.2 Sean $A, B \subset M$ localmente compactos y $x_0 \in A \cap B$ un punto de acumulación de A y B.

a) Diremos que A *es ortogonal* a B en x_0 si[2] $\underline{D}_{x_0}(A, B) = 1$.

b) Diremos que A y B *son ortogonales* en x_0 si A es ortogonal a B en x_0 y B es ortogonal a A en x_0.

[2] La condición $\underline{D}_{x_0}(A, B) = 1$ equivale a que existe $D_{x_0}(A, B)$ y es uno.

Capítulo 6

Espacios L-SMS

En virtud del capítulo anterior, vamos a introducir una estructura abstracta sobre un espacio métrico M, asignando a cada punto $x_0 \in M$ una familia $\mathfrak{R}(x_0)$ de subconjuntos de M cuyas propiedades serán similares a las que tienen las líneas rectas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Esto nos permitirá la generalización de los conceptos: "recta tangente", "recta normal" y "curvatura".

Definición 6.1 Un espacio métrico con estructura lineal o L-SMS (del inglés Line-Structured Metric Space), es un espacio métrico (M, d) dotado de una función[1] $\mathfrak{R} : M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ que satisface los siguientes axiomas para cualquier $x_0 \in M$:

1. $\mathfrak{R}(x_0)$ es una familia de subconjuntos localmente compactos y cerrados de M
2. $x_0 \in r$ para todo $r \in \mathfrak{R}(x_0)$
3. Para cualesquiera $r, s \in \mathfrak{R}(x_0)$, existen $D_{x_0}(r, s)$ y $D_{x_0}(s, r)$ y ocurre $D_{x_0}(r, s) = D_{x_0}(s, r)$
4. Dados $r, s \in \mathfrak{R}(x_0)$ vale[2]: $D_{x_0}(r, s) = 0 \Longrightarrow r = s$
5. Existe $\delta = \delta(x_0) > 0$ tal que

$$x \in M : 0 < d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(x_0) \neq \emptyset$$

A cada elemento r del conjunto $\mathfrak{R}(x_0)$ le llamaremos *dirección que pasa por* x_0.

Observación 6.1 En [1] Pascali menciona que en un L-SMS $(M, d_1, \mathfrak{R})$, si d_2 es otra métrica en M, el espacio $(M, d_2, \mathfrak{R})$ no necesariemente es un L-SMS (ni siquiera si las métricas son equivalentes).

Ejemplo 6.1 ($\mathbb{R}^3$ como L-SMS por rectas)

Consideremos el espacio métrico eucludiano $\mathbb{R}^3$. Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, definimos la función $\mathfrak{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$

$$x \mapsto \mathfrak{R}(x)$$

donde $\mathfrak{R}(x)$ es el conjunto de todas las rectas que pasan por x. Se tiene que $(\mathbb{R}^3, d, \mathfrak{R})$ es un L-SMS. En efecto sea $x_0 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

[1] Usamos la notación $\mathcal{P}(A)$ para indicar el conjunto de partes de un conjunto A.
[2] El recíproco es evidentemente cierto.

Parte (1) :

Sea $r \in \mathfrak{R}(x_0)$. Del Ejemplo (3.7) se sigue que r es localmente compacto y del Ejemplo (3.5) se tiene que r es cerrado.

Parte (2) :

Dado $r \in \mathfrak{R}(x_0)$, como r es una recta que pasa por x_0 se sigue que $x_0 \in r$.

Parte (3) :

Sean $r, s \in \mathfrak{R}(x_0)$. Sean v y w dos vectores directores de r y s respectivamente. Del Ejemplo (4.1) se tiene que existen $D_{x_0}(r,s)$ y $D_{x_0}(s,r)$ y son

$$D_{x_0}(r,s) = \frac{\| w \times v \|}{\| w \| \cdot \| v \|} \qquad D_{x_0}(s,r) = \frac{\| v \times w \|}{\| v \| \cdot \| w \|}$$

mas aún

$$\begin{aligned} D_{x_0}(r,s) &= \frac{\| w \times v \|}{\| w \| \cdot \| v \|} \\ &= \frac{\| -(v \times w) \|}{\| v \| \cdot \| w \|} \\ &= \frac{\| v \times w \|}{\| v \| \cdot \| w \|} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad D_{x_0}(r,s) = D_{x_0}(s,r)$$

Parte (4) :

Para r, s vemos que

$$\begin{aligned} D_{x_0}(r,s) = 0 &\implies \operatorname{sen} \sphericalangle(w,v) = 0 \\ &\implies \sphericalangle(w,v) = 0 \ \text{ o } \ \sphericalangle(w,v) = \pi \\ &\implies w \text{ y } v \text{ son paralelos} \\ &\implies r = s \end{aligned}$$

Parte (5) :

Tomemos $\delta = 1$. Sea $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $0 < d(x, x_0) < \delta$.

Sea r la recta que pasa por x_0 y tiene como vector director a $v = x - x_0$, de modo que $r \in \mathfrak{R}(x_0)$. Es inmediato que r también pasa por x, esto es, $r \in \mathfrak{R}(x)$.

$$\therefore \quad r \in \mathcal{R}(x_0) \cap \mathcal{R}(x)$$

$\square$

Observación 6.2 Es tentativo pensar que el espacio $\mathbb{R}^3$ también puede ser dotado con otra estructura de L-SMS por planos, sin embargo, esto es falso y acontinuación desarrollamos un contraejemplo.

Primeramente, del Ejemplo (3.7) observamos que todo plano es un conjunto localmente compacto y cerrado.

Sean Π el plano XY y Ω el plano YZ con vectores normales $\widehat{k} = (1,0,0)$ e $\widehat{i} = (0,0,1)$ respectivamente. Notemos que ambos planos pasan por $x_0 = (0,0,0)$ y recordemos que todo plano es la imágen inversa del conexo $\{0\}$ mediante una función continua, luego de la Proposición (3.24) x_0 es un punto de acumulación de Π. No existe el límite

$$\lim_{\Pi\backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{d(x,\Omega)}{d(x,x_0)}$$

Para justificar esto sea $x \in \Pi\backslash x_0$

$$\begin{aligned}
\frac{d(x,\Omega)}{d(x,x_0)} &= \frac{\frac{|\,\widehat{i}\bullet(x-x_0)\,|}{\|\,\widehat{i}\,\|}}{\|\ x-x_0\ \|} \quad \text{ver Ejemplo (3.3)}\\
&= \frac{|\ \widehat{i}\bullet(x-x_0)\ |}{\|\ x-x_0\ \|}\\
&= \frac{\|\ \widehat{i}\ \|\cdot\cancel{\|\ x-x_0\ \|}\cdot|\cos\sphericalangle\big(\ \widehat{i}, x-x_0\big)\ |}{\cancel{\|\ x-x_0\ \|}}\\
&= |\cos\sphericalangle(\ \widehat{i}, x-x_0)\ |
\end{aligned}$$

Estudiamos el límite en dos taryectorias: $T_1 = \{x_0 + t\,\widehat{i},\ t \in \mathbb{R}\backslash 0\}$ y $T_2 = \{x_0 + t\,\widehat{j},\ t \in \mathbb{R}\backslash 0\}$ donde $\widehat{j} = (0,1,0)$.

$$\lim_{T_1 \ni x \to x_0} \frac{d(x,\Omega)}{d(x,x_0)} = |\cos\sphericalangle\big(\ \widehat{i}, x-x_0\ \big)\ | = |\cos(0)\ | = 1$$

$$\lim_{T_2 \ni x \to x_0} \frac{d(x,\Omega)}{d(x,x_0)} = |\cos\sphericalangle\big(\ \widehat{i}, x-x_0\ \big)\ | = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0$$

Concluimos entonces que no existe $D_{x_0}(\Pi,\Omega)$.

$\square$

De ahora en adelante consideraremos a $\mathbb{R}^3$ como L-SMS por rectas. Mas aún llamaremos a $\mathbb{R}^3$ el L-SMS euclidiano.

Con esta nueva estrutura de *direcciones que pasan por un punto* estamos listos para imitar los conceptos de “recta tangente” y “recta normal” de una curva, en base a la Definición (5.1)

Definición 6.2 Sea M un L-SMS, $A \subset M$ localmente compacto y cerrado y $x_0 \in A$. Diremos $r \in \mathfrak{R}(x_0)$ es *la dirección tangente a A en x_0* si $\overline{D}_{x_0}(A,r) = 0$.

Nótese que esta definición es consistente, pues si existe otro $r' \in \mathfrak{R}(x_0)$ tal que $\overline{D}_{x_0}(A, r') = 0$, vemos que de la Proposición (4.2)

$$0 = \overline{D}_{x_0}(A, r) + \overline{D}_{x_0}(A, r') \geq \underline{D}_{x_0}(r', r) \cdot [1 - \overline{D}_{x_0}(A, r')] \geq \underline{D}_{x_0}(r', r)$$

$$\therefore \ \underline{D}_{x_0}(r', r) = 0$$

Mas aún, sabemos que existe $D_{x_0}(r', r)$, entonces tiene que ser $D_{x_0}(r', r) = 0$. Así $r' = r$, quedando probada la unicidad.

Proposición 6.1 *Si existen $r, s \in \mathfrak{R}(x_0)$ tales que $\overline{D}_{x_0}(A, r) = \overline{D}_{x_0}(s, A) = 0$, entonces necesariamente $r = s$.*

Demostración

Supongamos la hipótesis. De la Proposición (4.1)

$$\underline{D}_{x_0}(s, r) - \underline{D}_{x_0}(s, A) \leq \overline{D}_{x_0}(A, r) \cdot [1 + \underline{D}_{x_0}(s, A)]$$

$$\therefore \ \underline{D}_{x_0}(s, r) - 0 \leq 0 \cdot [1 + 0]$$

$$\therefore \ \underline{D}_{x_0}(s, r) = 0$$

Se sigue que $r = s$.

$\square$

Definición 6.3 Se M un L-SMS, $A \subset M$ localmente compacto y cerrado y $x_0 \in A$. Diremos que $r \in \mathfrak{R}(x_0)$ es *una dirección normal a A en x_0* si $\underline{D}_{x_0}(A, r) = 1$.

Observación 6.3 A diferencia de la dirección tangente, una curva puede tener varias direcciones normales en un punto, ejemplo de ello es el Teorema (5.2).

El siguiente resultado establece que el operador D_{x_0} (evaluado sobre direcciones que pasan por x_0) satisface una condición de Lipschitz respecto a una variable

Proposición 6.2 *Sea M un L-SMS y $x_0 \in M$. Para cualesquiera $r, s, t \in \mathfrak{R}(x_0)$, se cumple la desigualdad*

$$| D_{x_0}(t, r) - D_{x_0}(t, s) | \leq 2D_{x_0}(r, s)$$

Demostración

Dados $r, s, t \in \mathfrak{R}(x_0)$, del Corolario (4.1)

$$| \underline{D}_{x_0}(t, r) - \underline{D}_{x_0}(t, s) | \leq 2 \max \left\{ \overline{D}_{x_0}(s, r), \overline{D}_{x_0}(r, s) \right\}$$

Ya que existen $D_{x_0}(t, r), D_{x_0}(t, s)$ y $D_{x_0}(r, s)$

$$| D_{x_0}(t, r) - D_{x_0}(t, s) | \leq 2 \max \left\{ D_{x_0}(s, r), D_{x_0}(r, s) \right\}$$

como además $D_{x_0}(s, r) = D_{x_0}(r, s)$, se infiere

$$| D_{x_0}(t, r) - D_{x_0}(t, s) | \leq 2D_{x_0}(r, s)$$

$\square$

Corolario 6.1 *Sean* $(r_n), (s_n)$ *dos sucesiones en* $\mathfrak{R}(x_0)$ *y* $r, s \in \mathfrak{R}(x_0)$*. Si se cumple que*
$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, r) = \lim_{n\to\infty} D_{x_0}(s_n, s) = 0$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, s_n) = D_{x_0}(r, s)$$

Demostración

Supongamos la hipótesis.

Sea $\epsilon > 0$. Para $\frac{\epsilon}{4} > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$

$$D_{x_0}(r_n, r), D_{x_0}(s_n, s) < \frac{\epsilon}{4}$$

Para $n > N$

$$\begin{aligned}
| D_{x_0}(r_n, s_n) - D_{x_0}(r, s) | &= | D_{x_0}(r_n, s_n) - D_{x_0}(s_n, r) + D_{x_0}(s_n, r) - D_{x_0}(r, s) | \\
&\leq | D_{x_0}(r_n, s_n) - D_{x_0}(s_n, r) | + | D_{x_0}(s_n, r) - D_{x_0}(r, s) | \\
&\leq | D_{x_0}(s_n, r_n) - D_{x_0}(s_n, r) | + | D_{x_0}(r, s_n) - D_{x_0}(r, s) | \\
&\leq 2D_{x_0}(r_n, r) + 2D_{x_0}(s_n, s), \quad \text{por Prop. (6.2)} \\
&< 2\frac{\epsilon}{4} + 2\frac{\epsilon}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore \ | D_{x_0}(r_n, s_n) - D_{x_0}(r, s) | < \epsilon$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, s_n) = D_{x_0}(r, s)$$

.

$\square$

Observación 6.4 La no-negatividad del operador D_{x_0} junto con los axiomas 3 y 4 de la definición de L-SMS, hacen pensar que este operador es una métrica en $\mathfrak{R}(x_0)$, no obstante de la Propoposición (6.2) apenas se puede inferir para $r, s, t \in \mathfrak{R}(x_0)$

$$D_{x_0}(t, r) \leq D_{x_0}(t, s) + 2\, D_{x_0}(s, r)$$

Capítulo 7

Generalización de la curvatura

En este capítulo consideraremos en $M \times M$ la métrica d_s dada en el Ejemplo (3.2) y usaremos la notación $x, y \to x_0$ para indicar la tendencia $(x, y) \to (x_0, x_0)$.

En lo que sigue asumiremos que M es un L-SMS tal que para cada par de puntos $x \neq y$ en M existe un único elemento en $\mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y)$, el cual denotaremos r_{xy}. Nótese que $\mathfrak{R}(x) \cap \mathfrak{R}(y) = \mathfrak{R}(y) \cap \mathfrak{R}(x)$ y en consecuencia $r_{xy} = r_{yx}$.

Definición 7.1 Sea $t_0 \in [0, 1]$, $\lambda : [0, 1] \to M$ un curva continua y $x_0 = \lambda(t_0)$. Si existe el límite

$$\lim_{\Gamma \ni x, y \to x_0} \frac{D_{x_0}(r_{xx_0}, r_{x_0 y})}{d(x, y)}$$

entonces le llamaremos *curvatura débil* de λ en x_0 y lo denotaremos $C(x_0)$.

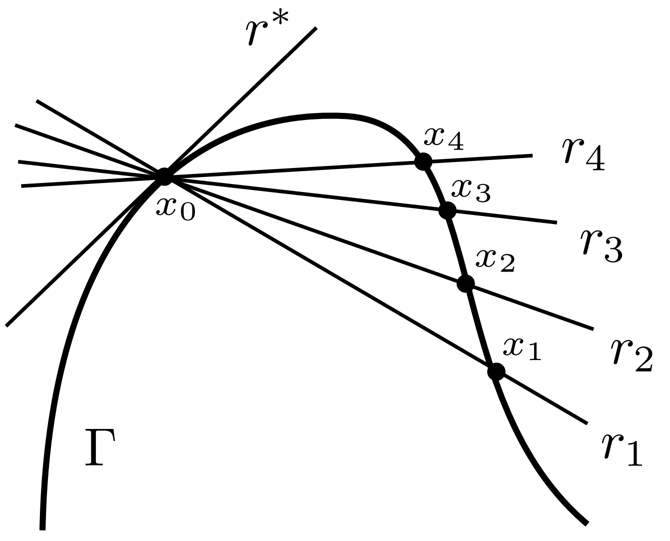
Observación 7.1 El L-SMS euclidiano cumple con la hipótesis de la anterior definición.

En la teoría clásica de tangencia, la recta tangente a una curva se interpreta como *el límite de rectas secantes* a dicha curva. Esta idea la plasmamos a continuación

Lema 7.1 *Sea $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular e inyectiva, $t_0 \in [0, 1]$, $x_0 = \lambda(t_0)$ y (x_n) una sucesión en $\Gamma \backslash x_0$ que converge a x_0. Entonces la sucesión (r_n) dada por $r_n = r_{x_n x_0}$ satisface*

$$\lim_{n \to \infty} D_{x_0}(r_n, r^*) = 0$$

donde r^* es la dirección tangente a Γ en x_0



Demostración

Supongamos la hipótesis. Para cada n sea $t_n \in [0,1]\backslash t_0$ tal que $x_n = \lambda(t_n)$. Se tiene que $t_n \to t_0$. Cada dirección r_n tiene por ecuación

$$x = x_0 + t(x_n - x_0)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

Como r^* es la dirección tangente a Γ en x_0, por el Teorema (5.1) r^* es la recta tangente a Γ en x_0 (entonces $\lambda' = \lambda'(t_0)$ es un vector director de r^*)

$$\begin{aligned}
D_{x_0}(r_n, r^*) &= \frac{\| \lambda' \times (x_n - x_0) \|}{\| \lambda' \| \cdot \| x_n - x_0 \|} \\
&= \frac{\frac{\|\lambda' \times (x - x_0)\|}{|t_n - t_0|}}{\frac{\|\lambda'\| \cdot \|x_n - x_0\|}{|t_n - t_0|}} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{x_n - x_0}{t_n - t_0}\right) \right\|}{\| \lambda' \| \cdot \left\| \frac{x_n - x_0}{t_n - t_0} \right\|} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0}\right) \right\|}{\| \lambda' \| \cdot \left\| \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0} \right\|}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, r^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0}\right) \right\|}{\| \lambda' \| \cdot \left\| \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0} \right\|} = \frac{\| \lambda' \times \lambda' \|}{\| \lambda' \| \cdot \| \lambda' \|} = 0$$

□

Para facilitar el cálculo de la curvatura débil de curvas en $\mathbb{R}^3$, se tiene la siguiente proposición, vital para la demostración del último resultado de este trabajo.

Proposición 7.1 *Sea* $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *regular e inyectiva y* $x_0 = \lambda(t_0)$*. Si* γ *tiene curvatura débil en* x_0*, entonces*

$$C(x_0) = \lim_{\Gamma \backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{D_{x_0}(r_{xx_0}, r^*)}{d(x, x_0)} \tag{7.1}$$

donde r^* *es la dirección tangente a* Γ *en* x_0

Demostración

Supongamos la hipótesis.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$:

$$d_s\big((x,y),(x_0,x_0)\big) < \delta_1 \Longrightarrow \left| C(x_0) - \frac{D_{x_0}(r_{xx_0}, r_{x_0 y})}{d(x,y)} \right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{7.2}$$

Sea (x_n) una sucesión en $\Gamma \backslash x_0$ tal que $x_n \to x_0$. Definimos la sucesión (r_n) en $\mathfrak{R}$ como $r_n = r_{x_n x_0}$. Por el Lema (7.1)

$$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, r^*) = 0 \tag{7.3}$$

Hagamos $\delta = \dfrac{\delta_1}{2}$ y sea $y \in \Gamma$ tal que $0 < d(y, x_0) < \delta$.

Como (x_n) converge a x_0, existe $N > 0$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ para todo $n > N$

$$d_s\big((x_n,y),(x_0,x_0)\big) = d(x_n,x_0) + d(y,x_0) < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$$

Luego por (7.2)

$$\left| C(x_0) - \frac{D_{x_0}(r_{x_n x_0}, r_{x_0 y})}{d(x_n,y)} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \left| C(x_0) - \frac{D_{x_0}(r_n, r_{x_0 y})}{d(x_n,y)} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \left| C(x_0) - \frac{D_{x_0}(r_n, r_{x_0 y})}{d(x_n,y)} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \\
\Longrightarrow \quad & \left| C(x_0) - \frac{\lim\limits_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, r_{x_0 y})}{\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y)} \right| < \epsilon
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la función $f(x) = d(x,y)$ es continua por el ejemplo (3.4) y ya que $x_n \to x_0$

$$\left| C(x_0) - \frac{\lim\limits_{n\to\infty} D_{x_0}(r_n, r_{x_0 y})}{d\,(x_0,y)} \right| < \epsilon$$

Por otro lado, la sucesión constante (s_n) dada por $s_n = r_{x_0 y}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} D_{x_0}(s_n, r_{x_0 y}) = 0$$

entonces de (7.3) y por la Proposición (6.1)

$$\left| C(x_0) - \frac{D_{x_0}(r^*, r_{x_0 y})}{d\,(x_0, y)} \right| < \epsilon$$

$\square$

Cabe destacar que en [1] Pascali sólo hace un estudio teórico del concepto de curvatura débil. Finalizamos este trabajo aportando la justificación de dicha definición, esto es, estableciendo la conexión entre las nociones de curvatura débil y curvatura usual.

Teorema 7.1 (Relación entre las curvaturas débil y usual)
Sea $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, inyectiva, dos veces diferenciable y sea $t_0 \in [0,1]$. Si λ tiene curvatura débil en $x_0 = \lambda(t_0)$ entonces esta coincide con la mitad de la curvatura de λ en t_0. En símbolos

$$C(x_0) = \frac{1}{2}\kappa(t_0)$$

Demostración

Supongamos la hipótesis. De la Proposoción (7.1)

$$C(x_0) = \lim_{\Gamma \backslash x_0 \ni x \to x_0} \frac{D_{x_0}(r_{x x_0}, r^*)}{d(x, x_0)} \tag{7.4}$$

donde r^* es la recta tangente a λ en x_0 ($\lambda' = \lambda'(t_0)$ es un vector director de r^*).

Sea (x_n) una sucesión en $\Gamma \backslash x_0$ que converge a x_0. Para cada n sea $t_n \in [0,1] \backslash t_0$ tal que $x_n = \lambda(t_n)$. Se tiene que $t_n \to t_0$. Sea la sucesión (r_n) dada por $r_n = r_{x_n x_0}$. Cada dirección r_n tiene por ecuación

$$x = x_0 + t(x_n - x_0)\,,\; t \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{D_{x_0}(r^*, r_{x_n x_0})}{d(x_n, x_0)} &= \frac{\frac{\|\lambda' \times (x_n - x_0)\|}{\|\lambda\| \cdot \|x_n - x_0\|}}{\| x_n - x_0 \|} \\
&= \frac{\| \lambda' \times (x_n - x_0) \|}{\| \lambda \| \cdot \| x_n - x_0 \|^2} \\
&= \frac{\| \lambda' \times (x_n - x_0 + 0) \|}{\| \lambda \| \cdot \| x_n - x_0 \|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda' + (t_n - t_0)\lambda' \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \| x_n - x_0 \|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda' \right) + \lambda' \times \left((t_n - t_0)\lambda' \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \| x_n - x_0 \|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda' \right) + 0 \right\|}{\| \lambda \| \cdot \| x_n - x_0 \|^2} \\
&= \frac{\frac{\left\| \lambda' \times \left(x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda' \right) \right\|}{|t_n - t_0|^2}}{\frac{\|\lambda\| \cdot \|x_n - x_0\|^2}{|t_n - t_0|^2}} \\
&= \frac{\left\| \frac{1}{(t_n - t_0)^2} \lambda' \times \left(x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda' \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \left\| \frac{1}{t_n - t_0} (x_n - x_0) \right\|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{x_n - x_0 - (t_n - t_0)\lambda'}{(t_n - t_0)^2} \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \left\| \frac{x_n - x_0}{t_n - t_0} \right\|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0) - (t_n - t_0)\lambda'}{(t - t_0)^2} \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \left\| \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0)}{t_n - t_0} \right\|^2}
\end{aligned}
$$

Por la Fórmula de Taylor (aplicado a las funciones componentes de λ)

$$\lambda_1''(t_0) = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(t_n)_1 - \lambda(t_0)_1 - (t_n - t_0)\lambda_1'}{(t_n - t_0)^2}$$

$$\lambda_2''(t_0) = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(t_n)_2 - \lambda(t_0)_2 - (t_n - t_0)\lambda_2'}{(t_n - t_0)^2}$$

$$\lambda_3''(t_0) = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(t_n)_3 - \lambda(t_0)_3 - (t_n - t_0)\lambda_3'}{(t_n - t_0)^2}$$

luego, la versión vectorial de la Fórmula de Taylor para λ'' es

$$\lambda'' = \lambda''(t_0) = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(t_n) - \lambda(t_0) - (t_n - t_0)\lambda'}{(t_n - t_0)^2}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{D_{x_0}(r^*, r_{x_n x_0})}{d(x_n, x_0)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)-(t_n-t_0)\lambda'}{(t_n-t_0)^2} \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \left\| \frac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t_n-t_0} \right\|^2} \\
&= \frac{\left\| \lim_{n\to\infty} \lambda' \times \left(\dfrac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)-(t_n-t_0)\lambda'}{(t_n-t_0)^2} \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \left\| \lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda(t_n)-\lambda(t_0)}{t-t_0} \right\|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda(t)-\lambda(t_0)-(t_n-t_0)\lambda'}{(t_n-t_0)^2} \right) \right\|}{\| \lambda \| \cdot \| \lambda' \|^2} \\
&= \frac{\left\| \lambda' \times \left(\frac{1}{2}\lambda'' \right) \right\|}{\| \lambda' \|^3} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\| \lambda' \times \lambda'' \|}{\| \lambda' \|^3}
\end{aligned}
$$

Así,

$$C(x_0) = \frac{1}{2}\kappa(t_0)$$

□

Si definimos la *curvatura débil coregida* $\mathfrak{C}(x_0) = 2C(x_0)$, está coincide con la noción de curvatura usual.

Bibliografía

[1] Pascali, E. “Tangency and Orthogonality in Metric Spaces”. Departments of Matemathics “Ennio De Giorgi”, University of Lecce, Italy (2005).

[2] Pascali, E. “Some Questions on Plane Curves”. Departments of Matemathics “Ennio De Giorgi”, University of Salento, Lecce, Italy (2012).

[3] Lima, E. “Espacos Métricos”. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Segunda edicao, Projeto Euclides. Rio de Janeiro (1977).

[4] Lima, E. “Curso de Análise Volume 1”. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Séptima edicao. Projeto Euclides. Rio de Janeiro (1992)

[5] Royden, H. “Real Analysis”. Stanford University. 3th edition. Macmillan Publishing Company. New York (1988).

[6] Bartle, R. “The Elements of Real Analysis”. John Wiley & Sons, Inc. New York (1964).

[7] Ross, K. “Elementary Analysis. The Theory of Calculus”. Undergraduate Texts in Mathematics, 2th edition. Springer, New York (2013).

[8] Saenz, J. “Cálculo Vectorial”. Hipotenusa, Barquisimeto (2013).

[9] Stewart, J. “Calculus. Early trascendetals”. McMaster University, 6th edition. Thomson (2008).

[10] Do Carmo, M. “Differential Geometry of Curves and Surfaces”. Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1976).