UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Una aplicación de las simetrías no triviales "El teorema de Bianchi-Lie".

Autor: Br. Celismar Roa
Tutor: M.cs. Luis Moreno

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Marzo, 2016

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Una aplicación de las simetrías no triviales “El teorema de Bianchi-Lie”.

Autor: Br. Celismar Roa
Tutor: M.cs. Luis Moreno

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la ilustre
Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Licenciado en Ciencias Matemáticas.

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Marzo, 2016

Dedicado, a mis padres.

Agradecimientos.

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mis padres María Rincon y Merardo Roa por su apoyo incondicional, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser el mejor ejemplo seguir.

A mi tutor Luis Moreno por brindarme sus conocimientos y por todo el tiempo que me ha dado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado, por el respaldo y la amistad.

A Yves Nogier por su incomparable ayuda.

A mis hermanas Simonelis Roa y Meraldi Roa por siempre haberme dado su fuerza, por llenar mi vida de alegria, amor cuando más las he necesitado y por su apoyo incondicional.

A mi novio Carlos cestra, mi pilar y compañero gracias bbe

A mi mejor he incondicional amiga Isamar Cifuente por aguantarme y por escucharme en todo momento, por motivarme a seguir adelante en los momentos de desesperación y sobre todo por hacer de su familia una familia para mi.

A todas aquellas personas que de alguna u otra forma han influido en mi vida para cumplir mis metas.

RESUMEN

En el campo de las matemáticas, un tema de estudio muy importante es el caso de las ecuaciones diferenciales (ED). Existen algunos tipos de ecuaciones diferenciales elementales para las cuales se cuenta con procedimientos canónicos que permiten resolverlas y que reducen las soluciones al cálculo de integrales. En este caso se dice que las ecuaciones diferenciales se resuelven por cuadraturas o por integración.

En consecuencia la siguiente investigación busca mostrar y desarrollar la estructura geométrica de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer y segundo orden, asociando una variedad ξ a la ecuación diferencial junto con un sistema diferencial D (una distribución) que permita interpretar las curvas integrales de D que pertenecen a la variedad como las soluciones de la ecuación diferencial en estudio. De este modo , las variedades integrales maximales del sistema diferencial D se pueden describir haciendo uso de la teoría de simetrías. En consecuencia, la siguiente investigación se enfoca en comprender y detallar la prueba del teorema de $Bianchi - Lie$, el cual muestra el uso de las simetrás no triviales para integrar ecuaciones por cuadratura.

.

CONTENIDO

Capítulo 1

Introducción

Desde los comienzos del cálculo diferencial los matemáticos han visto la necesidad de construir conjuntos cuyos elementos fuesen funciones, como en las ecuaciones diferenciales donde la solución de un problema conduce a estudiar el conjunto de funciones solución de dicho problema y al estudio de sus propiedades.

En 1895, el matemático noruego *Sophus Lie* $(1842-1899)$ hace un aporte muy importante a las matemáticas en el área de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, con la contribución de nuevas líneas de estudio bajo el enfoque de álgebra y de geometría diferencial, *Lie* desarrollo la teoría de *Galois* de ecuaciones diferenciales de donde se origino el análisis de los grupos de Lie y simetrías de Lie que es de una de las más poderosas herramientas para encontrar la solución general de ecuaciones diferenciales ordinarias, *Lie* plantea asociar una variedad ξ a la ecuación diferencial junto con un sistema diferencial D (una distribución) que permita interpretar las curvas integrales de D que pertenecen a la variedad como las soluciones de la ecuación diferencial en estudio. Luego el matemático italiano *Luigi Bianchi* $(1865-1928)$ influenciado por el trabajo de *sophus Lie* establece que si una ecuación diferencial ordinaria de orden k posee una k-dimensional álgebra de *Lie* soluble no degenerada de simetrías, entonces ésta es integrable por cuadratura, este teorema es el famoso teorema de $Bianchi - Lie$ .En este trabajo nos enfocaremos en comprender y detallar la prueba de este teorema, el cual da una condición y un algoritmo constructivo para la integrabilidad en cuadraturas de una distribución , en términos de un álgebra de Lie soluble de las simetrías no triviales.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presenta el material básico que nos servirá en los desarrollos de los capítulos posteriores. Concretamente, se estudian conceptos de la geometría de contacto, campos vectoriales , formas diferenciales, derivada de Lie, sistemas diferenciales, para una mayor comprención del desarrollo de la estructura geométrica de las EDO de primer y segundo orden, tambien estudiaremos los grupos de Lie y derivada de Lie, teorema de Frobenius pues se pretende desarrollar en los capitulos posteriores la demostración del teorema de $Bianchi - Lie$.
Además trabajaremos solamente, salvo mensión de lo contrario,con variedades diferenciables M $(n - dimensional)$ de clase C^{∞} sin borde.

2.1. Campos vectoriales

Definición 2.1 Un *campo vectorial* X sobre M es una aplicación que asigna a cada punto p de M un vector tangente $X_p \in T_pM$ .Así, podemos ver el *campo vectorial* X a lo largo de una curva $\alpha : [a, b] \to M$ como una aplicación $X : [a, b] \to TM$ la cual levanta a α en TM, esto es, $\pi \circ X = \alpha$.

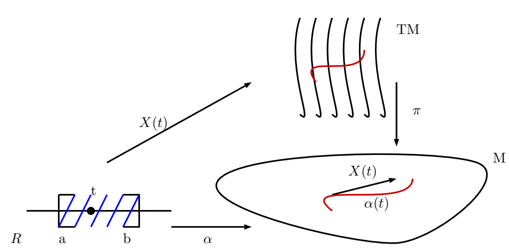


Figura 2.1: Campo vectorial

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M.

DEFINICIÓN 2.2 Un campo vectorial X es llamado *campo vectorial suave* (C^∞) a lo Largo de α si la aplicación $X : [a, b] \to TM$ es C^∞.

Sea X un campo vectorial sobre M. Para cada punto p de M, $X(p) = X_p$ es un vector tangente a M en p y, por consiguiente, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos vectoriales se pueden considerar como derivaciones sobre el álgebra de las funciones diferenciables sobre la variedad.

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

Dada por

$$\begin{gathered} X(f) : M \to \mathbb{R} \\ p \mapsto X(f)(p) := X_p(f) \end{gathered}$$

Esta interpretación permite caracterizar a los campos de vectores como aquellos que transforman funciones diferenciables en funciones diferenciables.

PROPOSICIÓN 2.1 *Un campo de vectores X es diferenciable si, y solo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable f*

OBSERVACIÓN 2.1 Si $(U, x_1, ..., x_m)$ es un sistema de coordenadas locales de M, para cada punto $p \in U$, X puede ser escrito como

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad \text{y} \qquad X(f)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

donde a_i y λ_i son funciones definidas en U. Diremos que X_p es de clase C^∞ si $a_i \in C^\infty(M)$ para i=1,...,m.

OBSERVACIÓN 2.2 Notemos que:

1. Si X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la operación $X + Y : C^\infty(M) \mapsto C^\infty(M)$ por:

$$\begin{gathered} (X+Y)(f) : M \to \mathbb{R} \\ (X+Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f) \end{gathered}$$

2. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$ definimos la operación $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ por:

$$\begin{gathered} (fX)(g) : M \to \mathbb{R} \\ (fX)(g)(p) = f(p)X_p(g) \end{gathered}$$

con las operaciones anteriores el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

Veamos a continuación que es posible caracterizar un campo de vectores como una derivación sobre $C^\infty(M)$

Definición 2.3 Una *derivación* sobre $C^\infty(M)$ es una función $D : C^\infty(M) \mapsto C^\infty(M)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. (linealidad): $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$, para a,$b \in \mathbb{R}$ y f, $g \in C^\infty(M)$.

2. (Regla de Leibnitz): $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

Como una consecuencia de esta definición, todo campo diferenciable de vectores X es una derivación sobre $C^\infty(M)$, considerando X como una aplicación $f \to X(f)$.

2.1.1. Flujos de campos de vectores

Comenzamos dando un nombre, posiblemente ya conocido, a las trayectorias obtenidas a partir de un campo de vectores.

Definición 2.4 Sea X un campo vectorial suave sobre M. Una curva α sobre M es un *curva integral de* X si el vector velocidad $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}M$ coincide con el valor de X en cada punto, es decir,

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$$

para cada $t \in Dom(\alpha)$.

Definición 2.5 Dado $p \in M$, se dice que α es una *curva integral maximal* con $\alpha(0) = p$ de un campo X si su dominio de definición I es el mayor posible en el sentido de la inclusión.

Definición 2.6 Se dice que un *campo de vectores* en una variedad es *completo* si las curvas integrales maximales $\alpha = \alpha(t)$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.7 El *flujo* de un campo vectorial X sobre M es una transformación:

$$\begin{aligned} \Phi : M \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (p,t) &\mapsto \Phi(p,t) = \alpha_p(t) \end{aligned}$$

donde $\alpha_p(t)$ es la curva integral maximal del campo X que en $t = 0$ pasa por $p \in M$.

Si en $\Phi(p,t)$ p es mantenido fijo entonces $\Phi(p,t)$ es justamente la curva integral $\alpha_p(t)$, por otro lado si se mantiene $t = cnste$ $\Phi(p,t)$ define un difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi_t : M &\to M \\ p &\mapsto \Phi_t(p) \end{aligned}$$

en cual envia un punto p de la variedad al punto $\Phi_t(p)$ que esta localizado a una distancia paramétrica t sobre la curva integral $\alpha_p(t)$.

Si el campo vectorial X es completo las transformaciones Φ_t forman un grupo de transformaciones de M parametrizadas por los números reales llamado *el grupo 1-parámetro de* X.

PROPOSICIÓN 2.2 *El flujo Φ_t es un grupo local $1-$paramétrico de difeomorfismos ,es decir, Φ_t satisface:*

1. *Φ_0 es la identidad*
2. *la ley de composición : sean $t, s \in \mathbb{R}$ y Φ_t y Φ_s ,con dominio $\mathfrak{D}_t = \{p \in M/t \in (a_p, b_p)\}$,$\mathfrak{D}_s = \{p \in M/s \in (c_p, d_p)\}$ respectivamente , luego:*

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

3. *existe un inverso $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$*

2.1.2. Corchete de Lie

Sobre $\mathfrak{X}(M)$ definiremos una operación binaria llamada el *corchete de Lie*

DEFINICIÓN 2.8 Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos

$$[X, Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$[X, Y]\, f = X(Yf) - Y(Xf)$$

PROPOSICIÓN 2.3 *El corchete de Lie satisface:*

1) $[X, Y] = -[Y, X]$
2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$. *($\mathbb{R}-$ Linealidad)*
3) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
4) *Identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

PROPOSICIÓN 2.4 *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.*

DEFINICIÓN 2.9 Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial junto con una operación bilineal $[.,.]$ que satisface:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$

2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

3) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$. $(\mathbb{R} - Linealidad)$

El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente:

Proposición 2.5 $\mathfrak{X}(M)$ *con el corchete de Lie, es un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$.

Observación 2.3 La identidad de Jacobi nos sugiere que, en general, un álgebra de Lie no es un álgebra asociativa.

Sea $\mathcal{Y}$ un espacio vectorial, para efectos de notación W $\leqslant \mathcal{Y}$ significa que W es un subespacio de $\mathcal{Y}$ y $[y, w] \in$ W para todo $w, y \in$ w.

Definición 2.10 Sea $\mathcal{Y}$ un algebra de Lie y $K \leqslant \mathcal{Y}$
diremos que K es un *ideal* de $\mathcal{Y}$ si $[x, y] \in K$ para todo $x \in \mathcal{Y}$ y todo $y \in K$. Es claro que $\{0\}$ y $\mathcal{Y}$ son ideales de $\mathcal{Y}$, estos ideales se denominan ideales triviales.

Definición 2.11 Sea $\mathcal{Y}$ un álgebra de Lie definamos

$$\mathcal{Y}^{(1)} = span\{[x, y]/x, y \in \mathcal{Y}\}$$

Así sucesivamente se define:

$$\mathcal{Y}^{(n)} = span\{[x, y]/x, y \in \mathcal{Y}^{(n-1)}\}$$

de esta manera obtenemos la serie de derivaciones que es simplemente:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^{(0)} \supset \mathcal{Y}^{(1)} \supset ... \mathcal{Y}^{(k)} \supset ...$$

teniendo así una cadena de ideales de $\mathcal{Y}$ diremos que el *álgebra de Lie* $\mathcal{Y}$ es *soluble*, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{Y}^{(n)} = 0$

2.2. Formas diferenciales

Definición 2.12 Sea V un espacio vectorial real de dimension finita con $dimV = n$. Decimos que la función $\omega : V^k \to \mathbb{R}$, donde

$$V^k = \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{k-veces}$$

es una $k-$*forma* si ω es una aplicación multilineal alternada en V, es decir, si verifica las siguientes condiciones:

1) ω es multilineal, es decir, lineal en cada coordenada:

$$\omega(v_1, ..., av_i + w_i, ..., v_k) = a\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + \omega(v_1, ..., w_i, ..., v_k)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ y $v_1, ..., v_k, w_i \in V$ y todo $i = 1, ..., k$.

2) ω es alternante, es decir

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$$

para cada $i, j = 1, ..., k$ y $i \neq j$.

Observación 2.4 Escribiremos

$$\bigwedge\nolimits^k(V) = \{\ \omega\colon \underbrace{V \times ... \times V}_{k} \to \mathbb{R} : \omega \text{ es una } k\text{−forma}\},\ k = 1, 2, ..., n$$

El conjunto $\bigwedge^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial definiendo:

1. $(\eta + \omega)(v_1, ..., v_k) = \eta(v_1, ..., v_k) + \omega(v_1, ..., v_k)$
2. $(a\omega)(v_1, ..., v_k) = a\omega\ (v_1, ..., v_k)$.

Donde $v_1, ..., v_k \in V, \eta, \omega \in \bigwedge^k(V)$ y $a \in \mathbb{R}$.

En el caso donde $k = 1$, $\bigwedge^1(V) = V^*$, el espacio dual de V y de la segunda parte de la definición anterior tenemos que $\bigwedge^k(V) = 0$ si $k > n$.

Definición 2.13 Sean $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in V^*$. Definimos el *producto exterior* de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ por

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k(v_1, v_2, ..., v_k) = det(\varphi_i(v_j))$$

donde $v_1, v_2, ..., v_k \in V$

Observación 2.5 El producto exterior es también llamado *producto cuña*. Las propiedades básicas de la función determinante nos garantizan que la transformación dada es de hecho multilineal y alternante. De este modo,$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k \in \bigwedge^k(V)$

Denotemos por T_pM^* el espacio dual de T_pM. Si $(x_1, ..., x_n)$ es un sistema coordenado de M, entonces

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$$

es una base de T_pM de donde tenemos que

$$\{(dx_1)_p, ..., (dx_n)_p\}$$

es una base para T_pM^*. El elemento $(dx_{i_1})_p \wedge ... \wedge (dx_{i_k})_p \in \bigwedge^k T_pM^*$ será denotado por $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$ para $i_1 < ... < i_k$ con $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$. En base a esto y en virtud de la observación (2.5) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6 *El conjunto* $B = \{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p\}$, $i_1 < ... < i_k$, *donde* $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$, *forma una base para* $\bigwedge^k T_pM^*$.

Definición 2.14 Sea M una variedad C^∞. Diremos que ω es una *k-forma* sobre M si esta asigna $\omega_p \in \bigwedge^k T_pM^*$ para cada punto $p \in M$ y ω_p es de clase C^∞ con respecto de p.

Como $\omega_p \in \bigwedge^k T_pM^*$ tenemos que

$$\omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$$

y en virtud de la proposición (2.6), existen funciones $f_{i_1 < \cdots < i_k}$ tales que ω_p se puede escribir como

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{2.1}$$

La expresión (2.1) es llamada la *expresión local de la k-forma* sobre M. Cuando las $f_{i_1 < \cdots < i_k}$ son diferenciables, diremos que la k-forma es diferenciable.

Observación 2.6 Usando la terminología de fibrados, podemos definir

$$\bigwedge^k TM^* = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k T_pM^*.$$

El cual también es un fibrado. Notemos que $\bigwedge^1 T_pM^* = T_pM^*$. En estos términos, las k-formas sobre M no son nada mas que secciones de $\bigwedge^k TM^*$ de clase C^∞. Además Con la finalidad de simplificar la notación indicaremos por I a la $k-$upla $(i_1, \cdots, i_k)$, con $i_1 < \cdots < i_k$ y $i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y escribiremos a ω como

$$\omega = \sum_I f_I dx_I.$$

Es importante mencionar que por convenio una $0-forma$ en M es una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$.

Definición 2.15 Sean ω y φ dos $k-formas$ con $\omega = \sum_I f_I dx_I$ y $\varphi = \sum_I g_I dx_I$ y ψ una $s-forma$ con $\psi = \sum_J h_J dx_J$ donde $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $i_1 < \cdots < i_k$ y $J = (j_1, \cdots, j_s)$, $j_1 < \cdots < j_s$.
Definimos las operaciones:

$$\omega + \varphi = \sum_I (f_I + g_I) dx_I$$

como la *suma* de $k-formas$ dando como resultado otra $k-forma$ y

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} f_I h_J dx_I \wedge dx_J$$

como el *producto exterior* de una $k-forma$ con una $s-forma$ dando como resultado una $(k+s)-forma$.

Proposición 2.7 *Si ω es una k-forma, φ es una s-forma y ψ es una r-forma, entonces:*

a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$;
b) $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;
c) $w \wedge (\varphi + \psi) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \psi$, *cuando* $r = s$.

Observación 2.7 Aunque $dx_i \wedge dx_i = 0$ puede ocurrir el casos donde alguna forma diferencial ω cumpla que $w \wedge w \neq 0$.
En efecto, si $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$, entonces

$$\omega \wedge w = 2x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Ahora veremos un ejemplo clásico de gran importancia para nuestro trabajo

Definición 2.16 Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Definimos la aplicación f^* : lleva $k-formas$ en N en $k-formas$ en M de manera tal que, si ω es una $k-forma$ en N, $p \in M$ y $v_1, ..., v_k \in T_pM$, entonces:

$$f^*(\omega_p)(v_1, ..., v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), ..., df_p(v_k))$$

Para $k = 0$ definimos $f^*(g) = g \circ f$. Decimos que $f^*(\omega)$ es el $pull-back$ de ω por f.

Esta transformación lineal cumple las siguientes propiedades:

Proposición 2.8 *Si $f : M^n \to N^m$ es diferenciable y $\omega, \omega_1, \omega_2$ formas en M^m y g una 0-forma. Entonces*

a) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
b) $f^*(g\omega) = f^*(g) f^*(\omega)$
c) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$
d) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$

Vamos a mostrar f^* equivale a una sustitución de variable. Tomemos a M^n como $\mathbb{R}^n$ y N^m como $\mathbb{R}^m$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable que a cada $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ asocia una $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ de forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Si $\omega = \sum_I a_I dy_I$ es una k-forma en $\mathbb{R}^m$, Usando la proposición anterior, tenemos que

$$f^*\omega = \sum_I f^*(a_I) f^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_{i_k}).$$

Por otra parte,

$$f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v).$$

Así

$$f^*\omega = \sum_I a_I(f(x_1, \cdots, x_n))(df_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (df_{i_k}).$$

donde las f_i y df_i son funciones de $(x_1, \cdots, x_n)$. En conclusión, aplicar f^* a ω, es equivalente a sustituir en ω las variables y_i junto con sus diferenciales dy_i por las funciones de x_k y dx_k obtenidas de (2.2).

Observación 2.8 Todas estas definiciones y propiedades también son validas al restringirnos a un subconjunto abierto U de M^n..

Definición 2.17 Si $\omega = \sum_I f_I dx_I$ es una $k-forma$, definimos la *diferencial exterior* de ω como la siguiente $(k+1)-forma$

$$dw = \sum_I df_I \wedge dx_I$$

Veamos algunas de sus propiedades.

Proposición 2.9 *Sean ω_1, ω_2 k-formas, ω una s-forma y f una función diferenciable. Entonces*

a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$
c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$
d) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

Veamos las formas diferenciables desde otro punto de vista. Sea w una k-forma sobre M. Entonces el valor de w_p de w en cada punto $p \in M$ determina una forma alternante $T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$ de grado k. Sobre la colección de todos los p, w induce una aplicación multilineal alternante

$$w : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \tag{2.3}$$

Recordando que $\mathfrak{X}(M)$ no solo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, sino que también es un módulo sobre $C^{\infty}(M)$. Entonces el significado de (2.3) siendo multilineal, es que también es lineal con respecto a la multiplicación de campos vectoriales por funciones. Mas precisamente

$$w(X_1, \cdots, fX_i + g\widehat{X}_i, \cdots, X_k) = fw(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_k) + gw(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_k).$$

Vemos que cualquier aplicación de la forma (2.3) con esas dos propiedades definen una forma diferencial.

El siguiente teorema nos dará una caracterización de la diferencial exterior sin el uso de la expresión local

Teorema 2.1 *Sea ω una $1-forma$ diferencial sobre una variedad M y sean X y Y dos campos diferenciales en M entonces*

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$$

Demostración: Ver [M].

2.3. Derivada de Lie

Definición 2.18 Llamaremos *derivada de Lie* en relación con el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ al operador lineal $L_X : \bigwedge^k TM^* \to \bigwedge^k TM^*$ dado por

$$L_X(w)(X_1, \cdots, X_k) = Xw(X_1, \cdots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} w(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k).$$

$L_X w$ es una forma diferencial.

Proposición 2.10 *La derivada del Lie L_X de formas diferenciales sobre una variedad M, respecto a un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, verifica las siguientes propiedades para todo $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^{\infty}(M)$:*

1. *Conserva el grado de las formas:* $L_X(\Omega^k(M)) \subset \Omega^k(M)$
2. L_X *es* $\mathbb{R}$ *lineal* : $L_X\ (\alpha + \beta) = L_X\alpha + L_X\beta$ *y* $L_X(\lambda\alpha) = \lambda L_X\alpha$
3. $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta)$
4. L_X *conmuta con la diferencial exterior:* $L_X \circ d = d \circ L_X$
5. $L_X f = X\ f$
6. $L_X(df) = d(Xf)$

Demostración Ver [J].

Notemos que usando el flujo las definiciones anteriores se pueden ver de la siguiente marena:
Supongamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ y consideremos a X como una asignación de una dirección de $X_p \in T_pM$ en cada punto p de M. podemos derivar a f en la dirección de X. Esto es Xf.Como las funciones son $0 - formas$ podríamos tratar de derivar a una forma diferencial general ω en la dirección de X.

Primero, entre la diferencial Xf de una función $f \in C^\infty(M)$ por X y el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales la relación seria

$$(Xf)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_t^* f)(p) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t} = X_p f \tag{2.4}$$

El corchete de Lie $[X, Y]$ de campos vectoriales puede ser considerado como la derivada de Lie de Y por X es decir $L_X Y$ esto es

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_{-t})_* Y - Y}{t} \tag{2.5}$$

Así, la derivada de Lie para formas diferenciales esta dada de la siguiente manera.

Proposición 2.11 *Sean X un campo vectorial sobre una variedad M de clase C^∞ y $\{\Phi_t\}$ el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales de M generadas por X. Entonces para una k-forma $w \in \bigwedge^k TM$ arbitraria, tenemos que*

$$L_X \omega = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^* \omega - \omega}{t} \tag{2.6}$$

2.4. Sistemas diferenciales, variedades integrales

Definición 2.19 Sea M una variedad C^∞. Una *distribución* o *sistema diferencial* $\mathcal{D}$ de dimensión r sobre M es una asignación de un subespacio r-dimensional $\mathcal{D}_p$ de T_pM en cada punto $p \in M$ tal que $\mathcal{D}_p$ es de clase C^∞ con respecto a p. en otras palabras es una sección del fibrado tangente de M

Además $\mathcal{D}_p$ es de clase C^∞ con respecto a p si existen $X_1, \cdots, X_r$ campos vectoriales definidos en una vecindad del punto p de clase C^∞ tal que $\{X_1, \cdots, X_r\}$ sea una base para $\mathcal{D}_p$ en todo punto q de la vecindad de p.

Definición 2.20 Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, sin singularidades, definimos $\mathcal{D}_p = [X_p]$ para todo $p \in M$. La distribución $\mathcal{D}$ es de dimensión 1 y es llamado *campo de direcciones*.

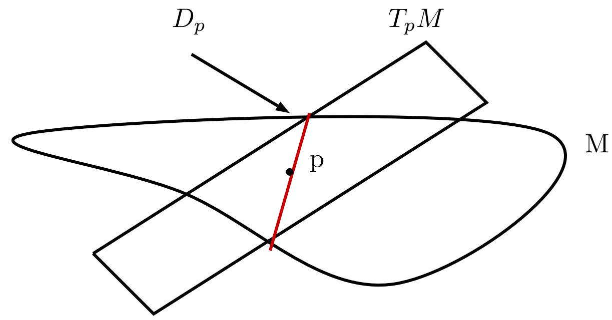


Figura 2.2: Campo de direcciones

Ejemplo 2.1 Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Consideremos la ecuación diferencial

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

donde $P, Q, R \in C^\infty(V)$, no nulas simultáneamente sobre V. Definimos la siguiente aplicación

$$p \mapsto \mathcal{D}_p = \text{ Plano perpendicular al vector definido por } \overrightarrow{v} = (P, Q, R) \text{ que pasa por el punto } p.$$

$\mathcal{D}$ es un sistema diferencial 2-dimensional y de clase C^∞.

Definición 2.21 Una subvariedad N^s de M^n es llamada *variedad integral de* $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}_p \subset T_pN$ para cada punto $p \in N$. Si existe una variedad integral en cada punto de M, se dice que $\mathcal{D}$ es *completamente integrable*.

Diremos que un campo vectorial X sobre M pertenece a $\mathcal{D}$ si $X_p \in PD$ para cualquier punto $p \in M$.

Proposición 2.12 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución sobre una variedad M de clase C^∞. Si $\mathcal{D}$ es completamente integrable, entonces para cualesquiera dos campos vectoriales X, Y pertenecientes a $\mathcal{D}$, el corchete $[X, Y]$ también pertenece a $\mathcal{D}$.*

Definición 2.22 Una distribución $\mathcal{D}$ sobre una variedad C^∞ se dice *involutiva*, si el corchete $[X, Y]$ de dos campos vectoriales arbitrarios X e Y pertenecientes a $\mathcal{D}$, también pertenece a $\mathcal{D}$.

Podemos concluir que:

Proposición 2.13 *Toda distribución completamente integrable es involutiva*

Teorema 2.2 (Teorema de Frobenius) *(via campos) Una condición necesaria y suficiente para que una distribución $\mathcal{D}$ sobre una variedad C^∞ sea completamente integrable es que $\mathcal{D}$ sea involutiva.*

Demostración Ver [M].

PROPOSICIÓN 2.14 *Dado una distribución $\mathcal{D}$ de dimensión r sobre una variedad M^n de dimensión n, existen para cada punto $p \in M$, $n-r$ formas diferenciales lineales linealmente independientes $w^1, \cdots, w^{n-r}$, definidas en una vecindad coordenada V del punto p, tal que*

$$w_q^i(X_q) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-r) \Leftrightarrow X_q \in \mathcal{D}_q, \forall q \in V$$

Demostración Ver [M].

Una familia de formas diferenciales lineales como en la proposición anterior es llamada una *representación local de $\mathcal{D}$* en p.

PROPOSICIÓN 2.15 *Sea $\mathcal{D}^r$ una distribución completamente integrable sobre una variedad M^n, y $\{w^1, \cdots, w^{n-r}\}$ una representación local en $p \in M$ de $\mathcal{D}^r$, entonces existen $(n-r)^2$ formas diferenciales lineales $\sigma_j^l, (j = 1, \cdots, n-r)$ definidas en una vecindad coordenada V del punto p, tal que*

$$dw^l = \sum_{j=1}^{n-r} w^j \wedge \sigma_j^l, \qquad (l = 1, 2, \cdots, n-r)$$

Demostración Ver [M].

Colocaremos esta condición de una manera equivalente más conveniente.

LEMA 2.1 *Dadas $n-r$ formas diferenciales lineales $w^1, \cdots, w^{n-r}$ definidas en una vecindad coordenada V de un punto en M. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *Existen $(n-r)^2$ formas σ_j^l en V tales que*

$$dw^i = \sum_{j=1}^{n-r} w^j \wedge \sigma_j^i$$

2. *Para $i = 1, \cdots, n-r$*

$$dw^i \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^{n-r} = 0.$$

Ahora si podemos enunciar el Teorema de Frobenius en términos de formas.

TEOREMA 2.3 (Teorema de Frobenius) *(via formas) Una distribución $\mathcal{D}$ definida en una variedad M con representación local $w^1, \cdots, w^{n-r}$ en una vecindad coordenada V de $p \in M$, es completamente integrable si y sólo si*

$$dw^i \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^{n-r} = 0, \qquad (i = 1, \cdots, n-r).$$

Demostración Ver [M].

Capítulo 3

Geometrización de E.D.O

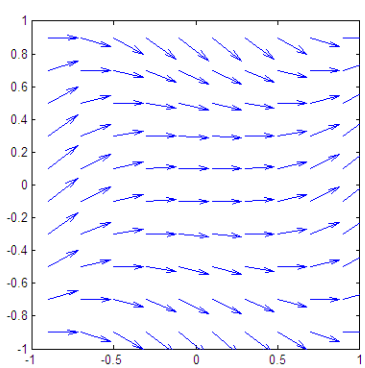
3.1. Descripción geométrica de las E.D.O de primer orden. La distribución de Cartan

En esta sección vamos a describir la estructura geométrica de las E.D.O de primer orden, con la finalidad de comprender las condiciones necesarias y suficientes para su integración, desde el punto de vista geométrico.

Para ello, comenzaremos por dar la definición clásica de E.D.O

Ejemplo 3.1 Para la ecuación diferencial $u' = x^2 - u^2$ el campo correspondiente es

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - u^2)\frac{\partial}{\partial u}$$



Ahora bien, teniendo clara la definición clásica de E.D.O veamos como esta se puede interpretar desde el punto de vista geométrico:

Tomemos el espacio $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas (x, u, p), y la superficie $\xi \subset \mathbb{R}^3$ dada por la ecuación

$$F(x, u, p) = 0 \tag{3.1}$$

Sea $u = f(x)$ una función. Recordemos que el gráfico Γ_f de la función $f(x)$ es la curva $(x, f(x))$ en $\mathbb{R}^2$.
Luego, definamos $1-$grafico de la función $u = f(x)$ como la curva

$$\Gamma_f^1\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3 \text{ dada por las ecuaciones}$$

$$x = x \ , \ u = f(x) \ , \ p = f'(x)$$

Así para cada solución $u = f(x)$ de la ecuación (**??**) corresponde la curva Γ_f^1

$$u = f(x), \quad p = u' = f'(x). \tag{3.2}$$

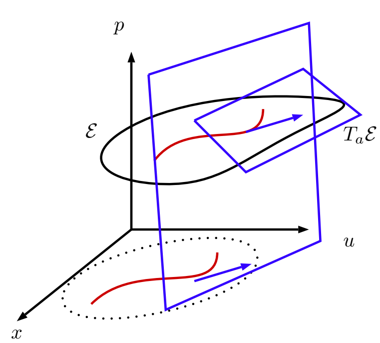
donde la coordenada x es tomada como un parámetro, es decir, la proyección de esta curva al eje x es un difeomorfismo. Más aún, las funciones u y p expresadas en términos de x no son arbitrarias, de esta manera no cualquier curva en $\mathbb{R}^3$ puede ser expresada como (3.2).

luego utilizando el hecho que $p = f'(x)$, el vector tangente a la curva Γ_f^1 en el punto $a_0 = (x_0, u_0, p_0)$ se puede expresar como :

$$\frac{\partial}{\partial x} + p_0 \frac{\partial}{\partial u} + f''(x_0) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Este vector vive en el plano $u - u_0 = p_0(x - x_0)$, el cual es el único plano que contiene a los vectores $\frac{\partial}{\partial x} + p_0 \frac{\partial}{\partial u} + f''(x_0) \frac{\partial}{\partial p}$ y $\frac{\partial}{\partial x} + p_0 \frac{\partial}{\partial u}$, en otras palabras, pertenecen al Kernel de la 1-forma en el punto a dada por

$$w = du - pdx \tag{3.3}$$



Recíprocamente, una curva en $\mathbb{R}^3$ proyectada de manera difeomorfa al eje x y que es curva integral de la 1-forma w tiene la expresión (3.2).

La distribución 2-dimensional dada por la 1-forma (3.3) es la estructura geométrica que distingue de una manera natural las clases de curvas que corresponden a las soluciones de EDO de primer orden. Esta distribución es llamada *distribución de Cartan* y es denotada por $\mathcal{C}$.

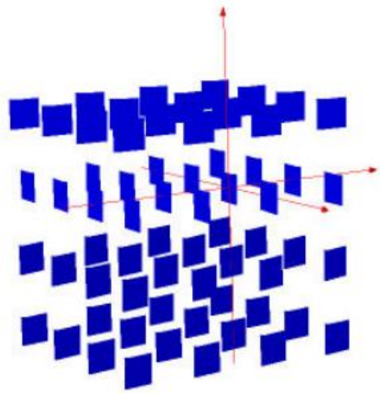


Figura 3.1: distribución de Cartan en $\mathbb{R}^3$

Definición 3.1 Una *ecuación diferencial ordinaria* es una *superficie* ξ en el espacio de E.D.O de primer orden.

Mediante la distribución de Cartan, las soluciones de una ecuación diferencial $\xi \subset \mathbb{R}^3$ pueden ser interpretadas como curvas integrales de la distribución $\mathcal{C}$ que pertenecen a la superficie ξ y que se proyecta al eje x sin degeneración.

Observación 3.1 Un 1-gráfico es una curva integral de la distribución de Cartan, pero En general una curva integral de la distribución de Cartan no es un $1-$gráfico.
Por ejemplo, la recta vertical $x = 0$, $u = 0$, $p = t$ es una curva integral de $\mathcal{C}$ pero se proyecta a un punto en $\mathbb{R}^2$ entonces no es un $1-$gráfico

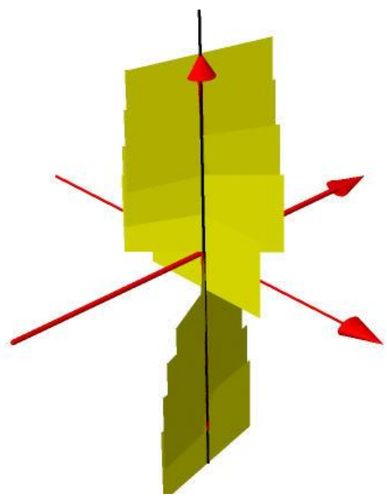


Figura 3.2: la recta negra es tangente a la distribución de cartan pero no es un 1-grafico

veamos mediante el teorema (2.3) que la distribución de Cartan no es completamente integrable.

En efecto. Calculemos la 2-forma dw

$$dw = d(du - pdx) = d^2u - (dp \wedge dx + pd^2x) = dx \wedge dp.$$

Consideremos la 1-forma $\gamma = adx + bdu + cdp$ y vemos que

$$\gamma \wedge w = bpdx \wedge du + cpdx \wedge dp + adx \wedge du - cdu \wedge dp.$$

Para que $\mathcal{C}$ sea completamente integrable, se debe cumplir que $dw = \gamma \wedge w$, lo cual da lugar a un sistema inconsistente.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ no es completamente integrable.

Luego, tenemos que las variedades integrales maximales de la distribución de Cartan son 1-dimensional y así , el conjunto de puntos donde el plano de la distribución de Cartan es tangente a la superficie ξ es un subconjunto cerrado nunca denso de ξ. Estos puntos los llamaremos *puntos singulares*. Así, el conjunto de puntos no-singulares de la superficie ξ es abierto y denso en todas partes.

Para encontrar los puntos singulares de la ecuación en estudio, basta con analizar la condición de que el diferencial dF y la forma w son colineales en ese punto, más precisamente

$$\begin{aligned} dF \wedge w = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; (\tfrac{\partial F}{\partial x}dx + \tfrac{\partial F}{\partial u}du + \tfrac{\partial F}{\partial p}dp) \wedge (du - pdx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; (p\tfrac{\partial F}{\partial u} + \tfrac{\partial F}{\partial x})dx \wedge du + p\tfrac{\partial F}{\partial p}dx \wedge dp + \tfrac{\partial F}{\partial x}dp \wedge du = 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; \tfrac{\partial F}{\partial x} + p\tfrac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \tfrac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, esta condición se puede escribir como las relaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

DEFINICIÓN 3.2 Una *solución generalizada* de una ecuación diferencial $\xi \subset \mathbb{R}^3$ es una curva tal que: es una curva integral de la distribución de Cartan y pertenece a ξ.

DEFINICIÓN 3.3 Sea $a \in \xi$ un punto no-singular, definimos la distribución 1-dimen- sional $a \mapsto \mathcal{L}_a = T_a\xi \cap \mathcal{C}_a$, donde $T_a\xi$ es el plano tangente a ξ en a y $\mathcal{C}_a$ es el plano determinado por la distribución de Cartan en el punto a. Esta distribución es llamada *campo de direcciones* y es denotada por $\mathcal{C}(\xi)$.

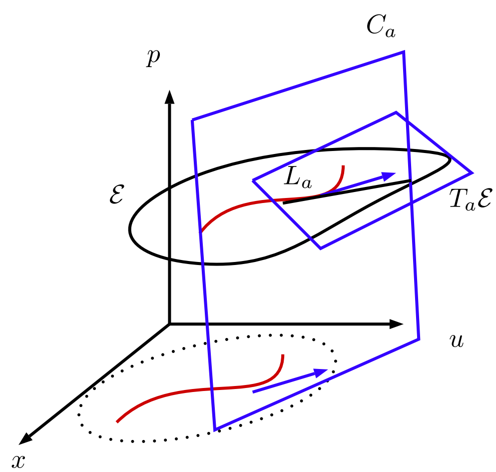


Figura 3.3: Campo de direcciones y soluciones generalizadas

PROPOSICIÓN 3.1 *Una curva Γ es una curva integral para el campo de direcciones $\mathcal{C}(\xi)$ si y solo si es una curva integral de la distribución $\mathcal{C}$ y vive en ξ (con la excepción del conjunto de puntos singulares).*

por medio de esta proposición podemos ver que las soluciones de la ecuación ξ son las curvas integrales del campo de direcciones $\mathcal{C}(\xi)$ proyectadas al eje x sin degeneración.

EJEMPLO 3.2 Consideremos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^3 - u + x & = & 0 \\ 3u^2p - p + 1 & = & 0. \end{array} \right.$$

Las curvas dadas por este sistema de ecuaciones viven sobre la superficie determinada por $(3x - 2u)p = u$ y son curvas integrales de la distribución de Cartan, pero estas soluciones no son de la forma (3.2). Esta curvas son soluciones multivaluadas de la ecuación diferencial $(3x - 2u)u' = u$. Más adelante mostraremos estos cálculos.

EJEMPLO 3.3 Estudiemos la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 = 1.$$

Desde el punto de vista geométrico esta ecuación representa un cilindro ξ en el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas x, u, p donde $p = \frac{du}{dx}$, es decir, $p^2 + u^2 = 1$. Consideremos el sistema de coordenadas (x, φ) sobre ξ, donde φ esta determinado por

$$u = sen(\varphi), \qquad p = cos(\varphi).$$

Si restringimos la distribución $\mathcal{C}$ a ξ obtenemos

$$\begin{aligned} w|_\xi &= w_\xi = d(sen(\varphi)) - cos(\varphi)dx \\ &= cos(\varphi)d\varphi - cos(\varphi)dx = cos(\varphi)d(\varphi - x) \end{aligned}$$

Nuestro interes es saber cuales son los puntos sobre la superficie donde los vectores tangentes anulan a la 1-forma w, es decir,

$$\begin{aligned} w_\mathcal{E} = 0 &\Leftrightarrow cos(\varphi)d(\varphi - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow cos(\varphi) = 0 \qquad \text{ó} \qquad d(\varphi - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ó} \qquad \varphi = x + C, \qquad k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Luego cuando $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ tenemos los puntos singulares de la ecuación diferencial, para la cual las soluciones singulares son $u = \pm 1$ que corresponden a la s envolventes para las soluciones en los puntos no-singulares. Por otra parte, las curvas integrales de la distribución $\mathcal{C}(\xi)$ son las hélices circulares $\varphi = x + C$.

Estas curvas se proyectan sin degeneración al eje x y dan lugar a las soluciones usuales. En este caso, podemos dar la solución de manera explícita colocando φ en términos de u, es decir,

$$u = sen(x + C), \qquad C \in \mathbb{R}$$

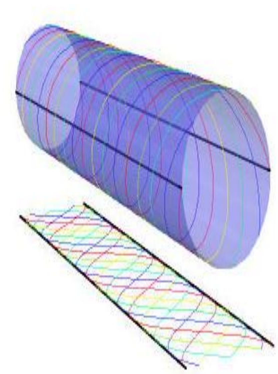


Figura 3.4: Las soluciones generalizadas y soluciones clasicas, las rectas son soluciones singulares

3.2. E.D.O. de segundo orden

Consideremos la ecuación diferencial

$$F(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}) = 0$$

la cual puede ser interpretada como una hipersuperficie en el espacio $\mathbb{R}^4$ con coordenadas x, u, p_1, p_2 definida por $F(x, u, p_1, p_2) = 0$. Ahora bien Consideremos la distribución 2-dimensional

$$\begin{aligned} \omega_0 &= du - p_1 dx \\ \omega_1 &= dp_1 - p_2 dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cuando $p_2 = 0$ obtenemos la Distribución de Cartan definida anteriormente. Siguiendo la misma notación, llamaremos a esta también *Distribución de Cartan* y la seguiremos denotando por $\mathcal{C}$.

Al considerar una función de la forma $u = f(x)$. El gráfico de f y sus 2 primeras derivadas es una curva en $\mathbb{R}^4$

$$\Gamma_f^2 = \{(x, u, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 / u = f(x), p_1 = \frac{du}{dx}, p_2 = \frac{d^2u}{dx^2}\}$$

si y solo si esta se proyecta al eje x sin degeneración. En efecto, las formas (3.4) restringidas a Γ_f^2 se anulan, así Γ_f^2 es curva integral de $\mathcal{C}$. Por otro lado, sea Γ una curva en $\mathbb{R}^4$ la cual se puede proyectar al eje x sin degeneración, es decir, se puede escribir como $\Gamma(x) = (x, a_1(x), a_2(x), a_3(x))$. Por ser Γ una curva integral de $\mathcal{C}$, tenemos que $a_i(x) = a_1^{(i-1)}(x), \quad i = 2, 3$, es decir, Γ es como Γ_f^2.

Como ya se vio anteriormente, la restricción $\mathcal{C}_(\mathcal{E})$ de la distribución 2-dimensional $\mathcal{E}$ sobre $\mathbb{R}^4$ sera 1-dimensional en todos sus puntos excepto en los singulares, así esta distribución estará generada por un campo vectorial. Describamos este campo.

Sea $Y = a\frac{\partial}{\partial x} + b_0\frac{\partial}{\partial u} + b_1\frac{\partial}{\partial p_1} + b_2\frac{\partial}{\partial p_2}$. Como $Y \in \mathcal{C}_(\mathcal{E})$, obtenemos que $\omega_0(Y) = 0$ y $\omega_1(Y) = 0$, luego $b_0 = p_1 a$ y $b_1 = p_2 a$. Por otro lado en cada punto $p \in \mathcal{E}$ no singular, el vector ∇F es normal a $\mathcal{E}$, por tanto $\nabla F(p) \cdot Y_p = 0$. Así obtenemos la siguiente condición

$$a\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + b_2\frac{\partial F}{\partial p_2} = 0,$$

la cual se puede satisfacer fácilmente haciendo

$$a = -\frac{\partial F}{\partial p_2}, \qquad b_k = \frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_1}.$$

Luego nuestro campo vectorial queda de la siguiente manera

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p_2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + p_2\frac{\partial}{\partial p_1}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\frac{\partial}{\partial p_2}$$

Este campo vectorial es llamado *Campo Caracteristico*.

EJEMPLO 3.4 Para una E.D.O. de primer orden de la forma $F(x,u,p) = 0$, el campo vendría dado por la expresión

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p}, \tag{3.5}$$

y si la E.D.O se puede expresar de la forma $F(x,u,p) = f(x,u) - p$, el campo seria

$$Y_F = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p} \tag{3.6}$$

que al proyectarlo al plano x, u nos queda nuestro conocido campo

$$\frac{\partial}{\partial x} + f(x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Notemos que las curvas integrales para este campo son determinadas por el sistemas de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ u'(t) & = & f(x(t),u(t)). \end{array}\right.$$

EJEMPLO 3.5 Consideremos la E.D.O. $(3x-2u)u' = u$, es decir, $F(x,u,p) = (3x-2u)p-u$. Apliquemos la fórmula (3.5).

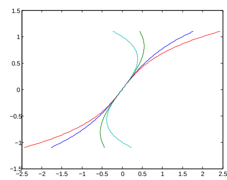
$$\begin{array}{rcl} Y_F & = & (2u-3x)\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}\right) + (2p-p^2)\frac{\partial}{\partial p} \\ & = & (2u-3x)\frac{\partial}{\partial x} + (2u-3x)p\frac{\partial}{\partial u} + (2p-p^2)\frac{\partial}{\partial p} \\ & = & (2u-3x)\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} + (2p-p^2)\frac{\partial}{\partial p} \end{array}$$

Tomando x, u como coordenadas sobre $\mathcal{E}$, las trayectorias del campo Y_F están determinadas por el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2u-3x \\ u'(t) & = & -u \end{array}\right. \quad \text{cuya solución es} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} \\ u(t) & = & C_1e^{-t}. \end{array}\right.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial está dada por $x = u + Cu^3$, donde $C \in \mathbb{R}$

Además, en el punto singular $(0,0,0)$ de la ecuación, no es válido el teorema de *unicidad de soluciones de E.D.O.*



EJEMPLO 3.6 Consideremos la *E.D.O.* $u^{''} - 3u^{'} - 18u = 0$, es decir, $F(x, u, p_1, p_2) = p_2 - 3p_1 - 18p$.Aplicando la ecuación (3.6) y procediendo de manera análoga al ejemplo anterior tenemos que

$$Y_F = -\frac{\partial}{\partial x} - p_1\frac{\partial}{\partial u} + p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + (3p_2 - 18p_1)\frac{\partial}{\partial p_2}$$

Tomando los valores x, u, p_1 como las coordenadas sobre $\mathcal{E}$, las trayectorias del campo Y_P están determinadas por el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -1 \\ u'(t) & = & -p_1 \\ p_1'(t) & = & -p_2 \end{array}\right. \text{ cuya solución es } \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -t + C_1 \\ u(t) & = & \frac{C_1}{36}e^{-6t} + \frac{C_2}{9}e^{3t} - C_3t + C_4 \\ p_1(t) & = & \frac{C_1}{6}e^{-6t} - \frac{C_2}{3}e^{3t} + C_3 \end{array}\right.$$

Al proyectar estas trayectorias al plano x, u, la solucion de la ecuacion diferencial esta dada por $Ae^{6x} + Be^{-3x}$ donde $A, B \in \mathbb{R}$.

3.3. Simetrías

DEFINICIÓN 3.4 Un difeomorfismo $\varphi : M \to M$ es llamado una *simetría* (finita) de la distribución P, si esta preserva a la distribución, es decir, $\varphi_*(P_a) \subset P_a$ para todo $a \in M$.

EJEMPLO 3.7 La distribución de Cartan sobre $\mathbb{R}^3$ dada por $w = du - pdx$ es invariante bajo traslaciones a lo largo de los ejes x y u, es decir, el difeomorfismo $\varphi(x, u, p) = (x + a, u + b, p)$ es una simetría para todo $a, b \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(w) & = & d(u + b) - pd(x + a) \\ & = & du - pdx = w. \end{array}$$

OBSERVACIÓN 3.2 Denotaremos por $SymP$ al conjunto formado por todas las simetrías de la distribución P. Si $\varphi, \psi \in SymP$, entonces $\varphi \circ \psi \in SymP$, más aún, $\varphi^{-1} \in SymP$. Así, $SymP$ es una grupo con respecto a la composición.

Observación 3.3 Denotaremos por PD el $C^\infty(M)-$Módulo de campos vectoriales X tales que $X_a \in P_a$, para todo $a \in M$.

Ahora, supongamos que la distribución P es determinada localmente por los campos vectoriales $X_1, \cdots, X_r$. Si $\varphi \in SymP$, entonces

$$\varphi_*(X_i) = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} X_j, \qquad i = 1, \cdots, r$$

donde $\mu_{ij} \in C^\infty(M)$.

Ahora bien, Expresemos esta condición en términos de formas.

Proposición 3.2 *Sean $w_1, \cdots, w_{n-r}$ las 1-formas que determinan a la distribución P*

Demostración 1 Supongamos que $\varphi \in SymP$, luego

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_i)(X_j) &= w_i(\varphi_*(X_j)) = w_i(\textstyle\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} X_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} w_i(X_k) = 0. \end{aligned}$$

Así $\varphi^*(w_i)$ pertenece al ideal de P el cual es denotado por $\mathcal{I}(P)$. Por tanto, existen funciones $\lambda_{ij} \in C^\infty(M)$ tal que

$$\varphi^*(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j. \tag{3.7}$$

Ahora, supongamos que (3.7) se cumple, entonces

$$\begin{aligned} w_i(\varphi_*(X_j)) &= \varphi^*(w_i)(X_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_i(X_j) = 0. \end{aligned}$$

Así, $\varphi_*(X_j) \in PD$ y por tanto φ es una simetría.

luego con estas propiedades podemos notar lo siguiente.

Sean $\varphi \in SymP$ y $w_1, \cdots, w_{n-r}$ las 1-formas que determinan a la distribución P. Supongamos que $(x_1, \cdots, x_n)$ son coordenadas locales de M. Luego, $w_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} dx_j$.

Como $\varphi \in SymP$, por la proposición anterior

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_i) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-r} \lambda_{ik} w_k \\ &= \textstyle\sum_{k,j} \lambda_{ik} w_{kj} dx_j. \end{aligned}$$

con $i = 1, .., n-r$ y $j = 1, ..., n$ Por otra parte,

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_i) &= \varphi^*\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} w_{ij} dx_j\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \circ \varphi d(\varphi_j) \\ &= \textstyle\sum_{j,s} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx_s. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{j,s} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} dx_s = \sum_{k,j} \lambda_{ik} w_{kj} dx_j.$$

Así, obtenemos las *ecuaciones no lineales de Lie*

$$\sum_{j} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k} \lambda_{ik} w_{ks} \tag{3.8}$$

El problema de resolver (3.8) no es tan sencillo, de echo puede que no sea mas fácil que el problema de encontrar variedades integrales de la distribución en consideración.
por lo que veremos esto desde otro punto de vista.

Definición 3.5 Un campo vectorial X se dice que es una *simetría infinitesimal* de la distribución P, si el flujo A_t generado por X consiste de simetrías finitas. esto es :

$$(A_t)_*(P(a)) \subset P(A_t a)$$

Denotaremos por D_P el conjunto de todas las simetrías infinitesimales de la distribución P.

Teorema 3.1 *Sea P una distribución sobre M. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $X \in D_P$.

ii) *Si, $X_1, \cdots, X_r$ son campos vectoriales generando a P, entonces existen funciones diferenciables μ_{ij} tales que*

$$[X, X_i] = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} X_j$$

iii) *Si, $w_1, \cdots, w_{n-r}$ son 1-formas generando a P, entonces existen funciones diferenciables λ_{ij} tales que*

$$L_X(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j$$

Demostración 2 *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Sean $X \in D_P$ y A_t el flujo generado por X. Cada A_t preserva la distribución P para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, si $X_i \in PD$, entonces $(A_t)_*(X_i) \in PD$. Más precisamente, existen funciones diferenciables $\alpha_{ij}(t)$ tales que

$$(A_t)_*(X_i) = \sum_{j} \alpha_{ij}(t) X_j.$$

Derivando esta expresión con respecto a t en $t = 0$, tenemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A_t)_*(X_i) = \sum_{j} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{ij}(t) X_j = -\sum_{j} \mu_{ij}(t) X_j$$

donde $\mu_{ij}(t) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\alpha_{ij}(t)$.

Por otra parte

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t)_*(X_i) & = & \lim_{t\to 0}\frac{(A_t)_*(X_i)-X_i}{t} \\ & = & \lim_{t\to 0}\frac{(A_{-t})_*(X_i)-X_i}{-t} = -[X,X_i] \qquad por(2.5) \end{array}$$

Así, obtenemos que

$$[X,X_i] = \sum_{j=1}^{r}\mu_{ij}X_j$$

$ii) \Rightarrow iii)$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} L_X(w_i)(X_j) & = & X(w_i(X_j)) - w_i([X,X_j]) \\ & = & -w_i(\sum_{k=1}^{r}\mu_{jk}X_k) \\ & = & -\sum_{k=1}^{r}\mu_{jk}w_i(X_k) = 0. \end{array}$$

Así, obtenemos que $L_X(w_i) \in \mathcal{I}(P)$ y por tanto, existen funciones diferenciables λ_{ij} tales que

$$L_X(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r}\lambda_{ij}w_j.$$

$iii) \Rightarrow i)$. Veamos primero que $X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t^*)$.

Sean $p \in M$ y $f \in C^\infty(M)$.

$$\begin{array}{rcl} X_p(f) & = & \lim_{t\to 0}\frac{f(A_t(p))-f(p)}{t} \qquad por(2.4) \\ & = & \lim_{t\to 0}\frac{A_t^*(f)(p)-A_0^*(f)(p)}{t} \\ & = & \lim_{t\to 0}\frac{A_t^*-A_0^*}{t}(f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t^*)(f)(p). \end{array}$$

Así, $X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t^*)$. Ahora

$$\begin{array}{rcl} X(w) & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}A_t^*(w) \\ & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}A_{t-s}^*(w) \\ & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}A_{-s}^*(A_t^*(w)) \\ & = & A_{-s}^*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}A_t^*(w)\right) \\ \Rightarrow A_s^*(X(w)) & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}A_t^*(w). \end{array}$$

Consideremos la (n-r+1)-forma dependiente del parámetro t

$$\Omega_i(t) = A_t^*(w_i) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r}.$$

Ya que $A_0^*(w_i) = w_i$, tenemos que $\Omega_i(0) = 0$

Notemos que $\Omega_i(t) = 0$, para todo t.

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\Omega_i(t) & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} A_t^*(w_i)\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_{n-r} & \\ & = & A_s^*(X(w_i))\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_{n-r} & \\ & = & A_s^*(\sum_{j=1}^{n-r}\lambda_{ij}w_j)\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_{n-r}, & X(w)=L_X(w) \\ & = & \sum_{j=1}^{n-r}\lambda_{ij}A_s^*(w_j)\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_{n-r} & \\ & = & \sum_{j=1}^{n-r}\lambda_{ij}\Omega_j(s). & \end{array}$$

De esta manera vemos que $\Omega_i(t)$ es solución del sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales $\Omega_i(0)=0$, por tanto $\Omega_i(t)\equiv 0$.

Así, $A_t^*(w_i)$ es combinación lineal de $w_1,\cdots,w_{n-r}$ para todo t, es decir, A_t es una simetría de la distribución P.

□

Este teorema nos permite describir de manera local las condiciones para que un campo vectorial X sea una simetría infinitesimal de la distribución P.

Consideremos sobre M las coordenadas locales $(x_1,\cdots,x_n)$, un campo vectorial $X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ y las 1-formas $w_1,\cdots,w_{n-r}$ que determinan la distribución P, donde $w_i=\sum_{j=1}^n w_{ij}dx_j$. Ahora,

$$\begin{array}{rcl} L_X(w_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right) & = & X(w_i\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)) - w_i\left([X,\frac{\partial}{\partial x_s}]\right) \\ & = & \left(\sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\sum_k w_{ki}dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)) - w_i\left([\sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_s}]\right) \\ & = & \sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} - \sum_j w_i\left(X^j[\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_s}] - \frac{\partial X^j}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ & = & \sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} + \sum_j\frac{\partial X^j}{\partial x_s}w_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ & = & \sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} + \sum_j\frac{\partial X^j}{\partial x_s}\sum_k w_{ki}dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ & = & \sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} + \sum_j\frac{\partial X^j}{\partial x_s}w_{ij} \end{array}$$

Por tanto,

$$L_X(w_i) = \sum_{js}\left(X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} + \frac{\partial X^j}{\partial x_s}w_{ij}\right)dx_s.$$

Utilizando la condición (iii) del teorema anterior , la 1-forma $L_X(w_j)$ la podemos escribir como $\sum_i\lambda_{ij}w_i$, de donde obtenemos

$$\sum_j\left(X^j\frac{\partial}{\partial x_j}w_{si} + \frac{\partial X^j}{\partial x_s}w_{ij}\right) = \sum_j\lambda_{ij}w_{js} \tag{3.9}$$

el cual es llamado *sistema de ecuaciones lineales de Lie* correspondientes al sistema de ecuaciones no-lineales de Lie (3.8).

OBSERVACIÓN 3.4 A partir de aqui, utilizaremos la palabra simetría para referirnos a las simetrías infinitesimales a menos que se indique lo contrario

Corolario 3.1 *El conjunto $SymP$ es un $\mathbb{R}$-algebra con respecto al conmutador de campos vectoriales*

Demostración 3 queremos probar las siguientes afirmaciones:

1. X,$Y \in$ Sym(P) $\Rightarrow X + Y \in$ Sym(P)
2. $X \in$ Sym(P),$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda X \in$ Sym(P)
3. X, $Y \in$ Sym(P) $\Rightarrow [X, Y] \in$ Sym(P).

las cuales se prueban facilmente con la propiedad iii) del teorema (3.1) y propiedades de la derivada de Lie.

Ejemplo 3.8 supongamos que tenemos un campo vectorial Y y consideramos el campo de direcciones generado por Y, el cual es una distribución 1-dimensional. En virtud del teorema 3.1 las simetrías de la distribución son campos X tales que tales que $[X, Y] = \lambda Y$, para alguna función λ. En efecto consideremos el campo vectorial $Y = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ de la esfera con las coordenadas geógraficas φ y θ y tomemos un campo $X = \alpha\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\ \frac{\partial}{\partial\alpha}$ y calculemos $[X, Y]$ $= -\alpha_\varphi\ \frac{\partial}{\partial\theta} - \beta_\varphi\ \frac{\partial}{\partial\varphi}$.
Asi, X es una simetría, si $\alpha_\varphi = 0$. Luego las simetrías de la distribución en estudio son los campos de la forma $X = \alpha\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\ \frac{\partial}{\partial\alpha}$, donde β es una función arbitraria sobre la esfera y α es función constante sobre los paralelos.

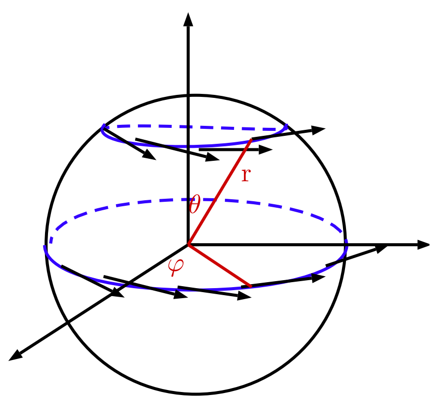


Figura 3.5:

Ejemplo 3.9 En este ejemplo discutiremos la estructura local del álgebra de simetrías de una distribución completamente integrable, es claro que para cualquier distribución P completamente integrable. Existe un sistema de coordenadas especiales, llamadas coordenadas slices de M tal que P es dado por la base

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, X_r = \frac{\partial}{\partial x_r}.$$

Sea $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ una simetría de P, entonces

$$\begin{array}{rcl} [X, X_i] & = & \sum_{j=1}^{n} [X^j \frac{\partial}{\partial x_j}, Xi] \\ & = & -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{array}$$

Así, la condición de que $[X, X_i] \in PD$ es equivalente a que $\frac{\partial X^j}{\partial x_i} = 0, i > r \geqslant j$.

En este caso, el campo X se puede descomponer de la siguiente manera

$$X = \sum_{i \leqslant r}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i > r}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} = X_L + X_T$$

donde X_L es la *componente longitudinal* y X_T es la *componente transversal* del campo X. En estos términos, el campo X es una simetría de la distribución completamente integrable P, si los coeficientes de la componente transversal del campo X son constantes en cada variedad integrable de dimensión máxima.

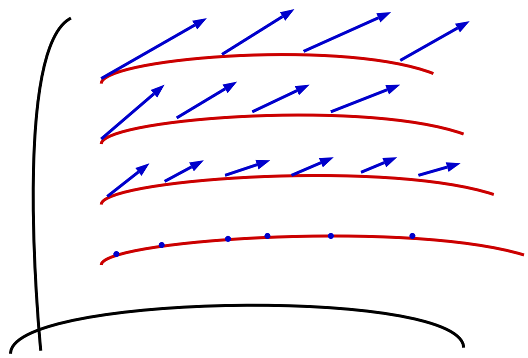


Figura 3.6:

Ejemplo 3.10 Encontremos las simetrías de la distribución de Cartan $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$. Recordemos que $w = du - pdx$ determina a nuestra distribución. Sea

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial p} \tag{3.10}$$

una simetría de $\mathcal{C}$. Utilizando la fórmula (3.9), obtenemos

$$L_X(\omega) = (b_x - pa_x - c)dx + (b_u - pa_u)du + (b_p - pa_p)dp. \tag{3.11}$$

En efecto:

$$\begin{array}{rcl} L_X(\omega)(\frac{\partial}{\partial x}) & = & (a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial p})((du - pdx)(\frac{\partial}{\partial x})) - (du - pdx([X, \frac{\partial}{\partial x}])) \\ & = & (a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial p})(-p) - (du - pdx([X, \frac{\partial}{\partial x}])) \\ & = & -c - (du - pdx([a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}])) \\ & = & -c - (du - pdx([a\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}] + [b\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial x}] + [c\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}])) \\ & = & -c(du - pdx(a_x\frac{\partial}{\partial x} - b_x\frac{\partial}{\partial u} - c_u\frac{\partial}{\partial p})) \\ & = & -c - pa_x + b_x \end{array}$$

Análogamente calculamos a $L_X(\omega)(\frac{\partial}{\partial u})$ y $L_X(\omega)(\frac{\partial}{\partial p})$ y así obtenemos (3.11).

Utilizando la parte iii) del teorema (3.1), tenemos que existe una función λ tal que $L_X(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j$, es decir:

$$\begin{cases} b_x - pa_x - c &= -\lambda p \\ b_u - pa_u &= \lambda \\ b_p - pa_p &= 0. \end{cases}$$

De donde podemos deducir que

$$\begin{cases} c &= b_x + pb_u - pa_x - p^2 a_u \\ b_p &= pa_p. \end{cases} \tag{3.12}$$

Este sistema nos dice que las simetrías de la distribución $\mathcal{C}$ son campos vectoriales de la forma (3.10) tales que a, b y c son funciones arbitrarias relacionadas por (3.12). Consideremos la función $f = b - pa$. Luego

$$\begin{array}{rcl} a &=& -f_p \\ b &=& f - pf_p \\ c &=& f_x + pf_u \end{array}$$

Así, una simetría infinitesimal de la distribución de Cartan en $\mathbb{R}^3$, está dada por

$$X = (-f_p)\frac{\partial}{\partial x} + (f - pf_p)\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + pf_u)\frac{\partial}{\partial p}$$

de donde observamos que que el campo característico Y_F en (3.5) es una simetría infinitesimal de la distribución $\mathcal{C}$ ya que al tomar $f(x, u, p) = F(x, u, p) = 0$ obtenemos la misma expresión.

Sea X una simetría de una distribución P y sea A_t el flujo correspondiente a lo largo de X, $A_t(N)$ es una variedad integral de P para cualquier variedad integral N esto refleja la principal propiedad de las simetrías: el grupo de transformaciones $1-$paramétrico de P generado por simetrías actúa sobre el cojunto de variedades integrales. Sin embargo, existe una clase muy distinguida de simetrías que transforman cada variedad integral maximal en sí misma, las cuales definiremos a continuación

Definición 3.6 Sea P una distribución. Llamaremos *simetrías características* o *simetría trivial* de la distribución P y lo denotaremos por $Char(P)$, a los elementos del conjunto

$$Char(P) = D_P \cap PD.$$

Las simetrías que no pertenecen a PD son llamadas *no triviales.*

Corolario 3.2 *1. $Char(P)$ es un ideal del álgebra de Lie Sym(P)*

2. $Char(P)$ es un $C^\infty(M)-$ módulo:

Demostración Ver [AV]

PROPOSICIÓN 3.3 *Una simetría características de la distribución P es tangente a cada variedad integral maximal de P*

COROLARIO 3.3 *El conjunto $CharP$ consiste en campos de vectores tangentes a la distribución*

Notemos que $CharP$ es subconjunto del álgebra D_P y es un ideal de D_P lo que da pie a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.7 Llamaremos *algebra de Lie de las simetrias no triviales* al cociente del álgebra de Lie

$$symP = D_p/CharP,$$

los elementos de $symP$ son llamados simetrías barajando a P ,el termino simetrías barajando en el sentido geométrico se puede explicar de la siguiente manera : denotemos por $Sol(P)$ el conjunto de todas las variedades integrales maximales de P, entonces cualquier simetria $X \in SymP$ genera un flujo sobre $Sol(P)$ y como hemos visto, las simetrías características generan flujos triviales, por otra parte si consideramos dos simetrías $X, Y \in SymP$ la diferencia $X-Y \in CharP$ entonces los flujos correspondientes en $Sol(P)$ son los mismos.

EJEMPLO 3.11 Sea la distribución P en el plano $\mathbb{R}^2 -\{0\}$ con coordenadas x,y dadas por $\omega = xdx + ydy$
las variedades integrales de esta distribución son circulos $x^2 + y^2 = const$, el campo vectorial:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

genera simetrías características y es un módulo sobre $\mathbb{R}^2 -\{0\}$
las clases de simetrías

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \text{ es una simetría no trivial barajando } P$$

Capítulo 4

Aplicaciones de simetrías

En los capitulos anteriores vimos que las soluciones de una E.D.O se pueden interpretar mediante la distribución de Cartan, como curvas integrales de dicha distribución que se proyectan al eje x sin degeneración , por lo que primer aspecto de las aplicaciones de las simetrías no triviales, a tratar, es como ellas distorcionan una solución de la ecuación diferencial a lo largo de las trayectorias del campo, generando así todas las soluciones de dicha ecuación diferencial.
Sea X una simetría de la distribución P y A_t el flujo correspondiente, dada una variedad integral L de la distribución P podemos construir la familia entera $A_t(L)$ de tales variedades.

Ejemplo 4.1 consideremos la ecuación $(3x-2u)u' = u$, el campo $\mathrm{X} = u^3\frac{\partial}{\partial x}$ escrito en coordenadas locales (x,u) en ξ conmuta con el campo caracteristico Y_F restricto a la superficie ξ pues $[\mathrm{X}, Y_f] = 0$.

Así X es una simetria de la distribución $1-$dimensional $C(\xi)$ en ξ.

Tomemos una solución $L = \{u = x\}$ de la ecuación $(3x-2u)u' = u$.
Los cambios de esta solución a lo largo de las trayectorias del campo X generan todas las soluciones de la ecuación (excepto para el cero)
de hecho los cambios de estas soluciones a lo largo de las trayectorias del campo X en el tiempo vienen dadas de la siguiente manera :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u_0^3 t - x_0 \\ u & = & u_0 \end{array}\right.$$

A partir de estas ecuaciones deducimos que la imagen de la recta $L = \{u = x\}$ es la curva $A_t(L) = \{x = tu^3 + u\}$

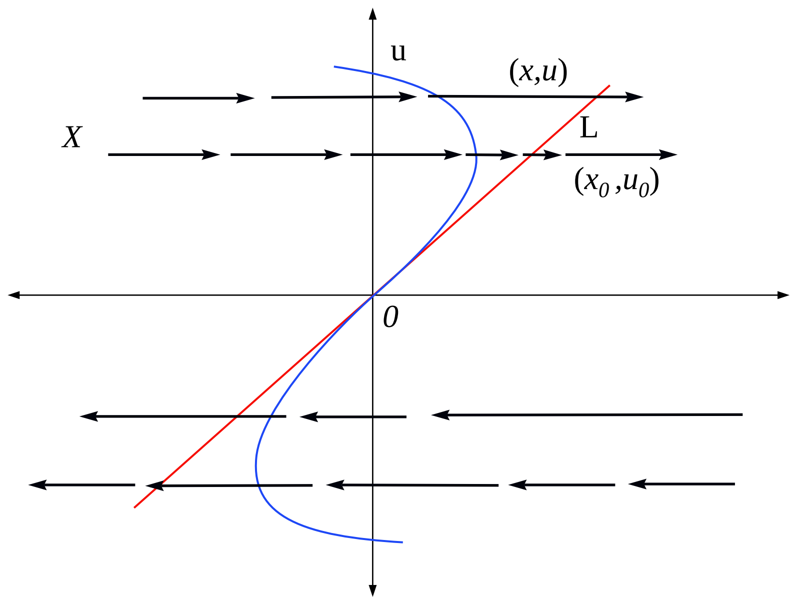


Figura 4.1:

4.1. Integración de ecuaciones por cuadratura

El segundo aspecto de las aplicaciones de las simetrías no triviales al que queremos hacer referencia es la integración de ecuaciones por cuadratura. El punto es que si para una distribución completamente integrable conocemos un algebra de Lie soluble de las simetrias no triviales cuya dimensión es igual a la codimensión de la distribución, entonces podemos hallar las variedades integrales de esta distribución mediante cuadraturas.

Antes de describir este procedimiento daremos la siguiente definición:

Definición 4.1 Una función $f \in C^{\infty}(M)$ es llamada *primera integral* de la distribución P si $\mathrm{X}(f) = 0$ para cualquier $\mathrm{X} \in PD$.

Observación 4.1 Si f es una primera integral de la distribución P, entonces esta es constante en cada variedad integral de la distribución P, o en otras palabras, cada variedad integral de P esta contenida en una superficie de nivel $\{f = c\}$ de la primera integral.

Ejemplo 4.2 Encontremos las primeras integrales del ejemplo(3.8)
en este ejemplo el campo viene dado por $\mathrm{X} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ donde φ es la coordenada acimutal de la esfera como lo muestra la figura

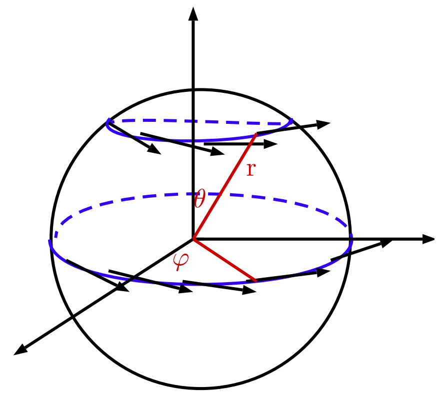


Figura 4.2:

Luego como la esfera es una variedad integral tenemos por la observación anterior que las primeras integrales del campo $\mathrm{X} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ son funciones constantes en los paralelos de la esfera.

Este ejemplo es fácil de generalizar en el caso de una distribución $1-$dimensional arbitraria.

Las primeras integrales de una distribución completamente integrable dada localmente por los campos:

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\ , ..., \ \mathrm{X}_\mathrm{l} = \frac{\partial}{\partial x_l}$$

son dadas de la siguente manera $f(\mathrm{X}_{\mathrm{l}+1}, ..., \mathrm{X}_\mathrm{n})$ donde f es una función arbitraria.

Ejemplo 4.3 La distribución de Cartan no posee primeras integrales no triviales en efecto, consideremos el ejemplo (3.10) y encontremos sus primeras integrales.

En este ejemplo la distribución a tratar es la distribución de Cartan la cual viene dada por $\omega = du - pdx$, supongamos que f es una primera integral de esta distribución.

A demás sabemos que los campos $\mathrm{X} = \frac{\partial}{\partial p}$ y $\mathrm{Y} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}$ están contenidos en la distribución de Cartan. Así, X y Y $\in PD$, luego de la definición de primera integral tenemos que $\mathrm{X}(f) = 0$ y $\mathrm{Y}(f) = 0$ esto es : $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ Luego ésta ecuación tiene sentido siempre y cuando f sea constante, por tanto la distribución de Cartan no posee primeras integrales no triviales.

Definición 4.2 Un subespacio lineal $\mathcal{Y} \subset symP$ es denominado *no degenerativo* si para algún punto $x \in M$ y algún campo $X \in \mathcal{Y}$

$$X_x \in P_x \Leftrightarrow X = 0$$

Sea $x \in M$ y $\mathcal{Y}_x = \{X_x / X \in \mathcal{Y}\}$ si el subespacio es no degenerativo entonces por la definición anterior tenemos :

$$dim\mathcal{Y} = dim\mathcal{Y}_x \leq codimP$$

Sean ω_1,..., ω_k representantes locales de la distribución P y $X_1, ..., X_l$ una base del subespacio no degenerativo $\mathcal{Y} \subset symP$, es evidente que $l < k$ y la matriz $\| \omega_i(X_j) \|$ tiene rango l en algun punto de la variedad M si $l = k$ entonces $det \| \omega_i(X_j) \| = 0$, podemos elegir otro conjunto de formas que definen la distribución P.

Sean ω'_1,..., ω'_k tal que $\omega'_i(X_j) = \delta_{ij}$ para esto es suficiente multiplicar la columna $(\omega_1, ..., \omega_k)^t$ por la matriz inversa de $\| \omega_i(X_j) \|$, asumamos que el espacio $\mathcal{Y}$ es cerrado con respecto a la conmuación, entonces tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.1 *Sea P una distribución completamente integrable definida por el conjunto de $1-$formas $\omega_1, ..., \omega_k$ y sea $X_1, ..., X_k$ una base de un álgebra de Lie no degenerativo Y de simetrías de esta distribución.*
supongamos que $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ y $[X_i, X_j] = \sum_j C^s_{ij} X_s$, donde C^s_{ij} son constantes, entonces :

$$d\omega_s = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} C^s_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$$

Demostración Por el teorema de frobenius existe una $1-$forma γ_{ij} tal que :

$$dw_s = \sum_j \gamma_{sj} \wedge w_j$$

Además como $X_i \in SymP$ tenemos que la $1-$forma $X_i(w_s) = X_i(dw_s)$ se anula en vectores de la distribución P, esto es :
$X_i(dw_s) = \sum_j \gamma_{sj}(X_i) w_j - \gamma_{si}$ implica que la forma γ_{sj} se anula en vectores de P y por tanto $\gamma_{ij} = \sum_s a^s_{ij}\ w_s$ para algunas funciones $a^s_{ij} \in C^\infty(M)$
Asi $dw_s = \sum_{i<j} a^s_{ij}\ w_i \wedge w_j$.
Luego,tenemos que:

$$dw_s(X_i, X_j) = a^s_{ij} \text{ con } i < j$$

Por otro lado:

$$dw_s(X_i, X_j) = X_i(w_s(X_j)) - X_j(w_s(X_i)) - w_s[X_i, X_j] = -w_s(\textstyle\sum_t c^t_{ij} X_t) = -c^s_{ij}$$

Por tanto $a^s_{ij} = -c^s_{ij}$ y así

$$dw_s = -\sum_{i<j} c^s_{ij}\ w_i \wedge w_j = -\frac{1}{2} \sum_{ij} c^s_{ij}\ w_i \wedge w_j$$

□

Corolario 4.1 *Bajo las condiciones del teorema anterior, asumamos que el álgebra $\mathcal{Y}$ es conmutativa, entonces todas las formas ω_i son cerradas y por consiguiente, localmente exactas $\omega_i = dh_i$ para alguna función diferenciable h_i estas primeras integrales pueden ser encontradas localmente computando las integrales:*

$$h_i(a) = \int_{a_0}^{a} \omega_i$$

donde a_0 es un punto fijo da la variedad.

En particular desde la que las ecuaciones diferenciales ordinarias son identificadas con distribuciones 1−dimensionales en variedades $(k+1)-$ dimensional el corolario anterior implica lo siguiente

COROLARIO 4.2 *si la distribución correspondiente a una ecuación diferencial ordinaria de orden k, tiene un algebra de Lie no degenerativa conmutativa k dimensional de simetrias, entonces esta ecuación es integrable por cuadratura.*

EJEMPLO 4.4 Consideremos una ecuación de primer orden $\frac{du}{dx}=f(u)$ y asumamos que el lado derecho de la ecuación no depende de x.
la distribución correspondiente a esta E.D.O es la distribución de Cartan $\mathcal{C}$ la cual es definida en la superficie $p=f(u)$ por la 1−forma $w=du-fdx$.
Luego consideremos el campo $X=\frac{\partial}{\partial x}$ y notemos que este campo es tangente a la superficie y es una simetría no trivial de la dictribución $\mathcal{C}(\xi)$, luego por el Teorema 4.1 y el corolario 4.2 la forma $w_{\xi/f}$ es exacta, de hecho:

$$w_{\xi/f} = \underbrace{\frac{1}{f}(du-fdx)}_{(1)} = d(\int \tfrac{du}{f(u)} - x)$$

observando (1) uno facilmente reconoce los metodos de separación de variables para resolver ecuaciones del tipo considerado, por tanto este metodo transforma la 1−forma definiendo la ecuación en una exacta.

El ejemplo anterior sirve para ilustrar que si X es una simetría no trivial de la distribución P dada por la 1− forma w entonces la forma fw con $f=\frac{1}{w(x)}$ es cerrada, en este caso las hojas de P coinciden con la superficie de nivel de la integral de estas formas. esto es (las soluciones de esta ecuación se pueden encontrar mediante cuadratura)

EJEMPLO 4.5 consideremos la distribución como el ejemplo anterior, donde los coeficientes de la forma

$$w = du + \tfrac{1-cos(u)}{y}dx - \tfrac{sen(u)}{y}dy$$

no dependen de x , el campo $X=\frac{\partial}{\partial x}$ es una simetria de P y además $w(X)=\frac{(1-cos(u))}{y}\neq 0$ Así X es una simetría no trivial y por tanto $f=\frac{1}{w(X)}=\frac{y}{1-cos(u)}$ y

$$fw = dx - \tfrac{sen(u)}{1-cos(u)}dy + \tfrac{y}{1-cos(u)}du = d(x - ycot(\tfrac{u}{2}))$$

La ecuación $x-ycot(\frac{u}{2})=c$, $c=const$ define todas las hojas de la distribución excepto la hoja $\{u=0\}$ pues la función f es indefinida en $u=0$.

EJEMPLO 4.6 La ecuación de primer orden homogénea ξ

$$u' = \varphi(\tfrac{u}{x})$$

tiene la simetría $X = \lambda\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$ de hecho en las coordenadas x y u la distribución de Cartan en ξ es dada de la siguiente manera :

$$w_\xi = du - \varphi(\tfrac{u}{x})dx$$

facilmente podemos notar que $X(\varphi) = 0$ y $X(w_\xi = w_\xi$
Luego X es una simetría para un factor integrate Así $f = \frac{1}{w_\xi(X)} = \frac{1}{u - x\varphi(\frac{u}{x})}$ en particular para la ecuación del ejemplo (3.8) la cual es equivalente a la ecuación

$$u' = \tfrac{u}{3x-2u}$$

en todos lados excepto en la recta $3x - 2 = 0$ tenemos:

$$\varphi(\xi) = \tfrac{\xi}{3-2\xi} \;\; f = \tfrac{3x-2u}{2u(x-u)}$$

por lo tanto

$$w'_\xi = \tfrac{3x-2u}{2u(x-u)} \; w_\xi = d(\tfrac{1}{2}Ln\tfrac{u^3}{x-u}$$

Así Como anteriormente, esto produce las soluciones de la ecuación en estudio:

$$\tfrac{u^3}{(x-u)} = c \text{ donde } c = const$$

4.2. Teorema de Bianchi-Lie

Teorema 4.2 *Si una distribución completamente integrable P de codimension k tiene un algebra de Lie soluble no degenerativo k dimensional $Y \subset symP$ entonces P es integrable por cuadratura (esto es : podemos encontrar un conjunto completo de primeras integrales de P.*

Teorema 4.3 *si una ecuación diferencial ordinaria de orden k tiene un algebra de Lie soluble no degenerativa $k-$dimensional entonces es integrable por cuadratura.*

Demostración
consideremos la ecuación diferencial ordinaria de orden k

$$a_k u^{(k)} + ... + a_1\, u^{(1)} + a_0\, u = f$$

y sea $\mathcal{Y}$ un algebra de Lie soluble $k-$dimensional no degenerativa de simetrías de una distribución completamente integrable P .
consideremos el subalgebra conmutador :

$$\mathcal{Y}^1 = [\mathcal{Y}, \mathcal{Y}] = \{\sum [X, Y]/X, Y \in \mathcal{Y}\}$$

supongamos que $\mathcal{Y}^{(1)} \neq \mathcal{Y}$ y $l = codim\; \mathcal{Y}^{(1)}$ asi podemos escoger campos basicos X_1,...,X_l,...,X_n de $\mathcal{Y}$ tal que:

$$X_1,...,X_l \notin \mathcal{Y}^{(1)} \text{ pero } X_{l+1},...,X_n \in \mathcal{Y}^{(1)}$$

luego consideremos w_i con $i = 1, ..., l$ las formas que generan la distribución P y por el teorema de frobenius $dw_i = 0$
sean :

$$H_1 = \int_\Gamma w_1 \ , ..., \ H_l = \int_\Gamma w_l$$

las correspondientes primeras integrales,entonces definimos la subvariedad:

$$M_c = \{ \ H_1 = c_1 \ , ..., \ H_l = c_l \ \}$$

donde c_1 ,...,$c_l \in \mathbb{R}^l$ son constantes con respecto al conmutador $\mathcal{Y}^{(1)}$ de esta manera tenemos que:

$$X_i(H_j) = dH_j(X_i) = w_j(X_i) = 0 \text{ con } i = l + 1, ..., n \text{ y } j = 1, ..., l$$

denotemos por P_c la restriccion de P en M_c, donde H_i son las primeras integrales de P_c ademas como P es completamente integrable por el teorema (4.1)

$$d\omega_s = -\tfrac{1}{2} \sum_{i,j} C^s_{ij}\omega_i \wedge \omega_j$$

con $s > l + 1$
y como la forma w_i se anula en H_c tenemos por el teorema de frobenius que P_c es completamente integrable, de dimension n y $codim = \dim\mathcal{Y}^{(1)}$,un cambio a lo largo de las trayectorias de cualquier campo $X \in \mathcal{Y}^{(1)}$ mueve las hojas de P y preserva la variedad H_c por lo tanto tambien debe mover las hojas de P_c pues es la resctricción de P en H_c y asi $\mathcal{Y}^{(1)}$ es un algebra de simetría para P_c
Mas aún $\mathcal{Y}^{(1)}$ es no degenerativa pues $\|w_i(X_j)\|$ con $i > r$ y $j < k$ es la matriz unitaria. si realizamos este procedimiento a la distribución P_c en el proximo conmutador

$$\mathcal{Y}^{(2)} = [\mathcal{Y}^{(1)}, \mathcal{Y}^{(1)}]$$

donde $\mathcal{Y}^{(2)} \neq \mathcal{Y}^{(1)}$ ocurre lo mismo. ademas como $\mathcal{Y}$ es soluble tenemos que existe un r tal que $\mathcal{Y}^{(r)} = 0$ y obtenemos la secuencia :

$$\mathcal{Y} \supset \mathcal{Y}^{(1)} \supset \mathcal{Y}^{(2)} \supset ... \supset \mathcal{Y}^{(r-1)} \supset \mathcal{Y}^{(r)} = 0$$

este procedimiento muestra que podemos encontrar la secuencia completa de las primera integrales. Mas aun la solubilidad de $\mathcal{Y}$ garantiza que $\mathcal{Y}$ es un algebra conmutativa y asi satisface las hipotesis del colorario (4.2) y por tanto

$$a_k u^{(k)} + ... + a_1 \ u^{(1)} + a_0 \ u = f$$

es integrable por cuadratura

Ejemplo 4.7 consideremos la ecuación de segundo orden

$$(u'' - u')u = 1$$

como la variable independiente x no esta e la ecuación explicita tenemos que el campo

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

es una simetría. por otro lado, es fácil probar que el campo

$$X_2 = e^x[\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial p}]$$

es una simetría de la ecuacion diferencial en consideración.

La interpretación geómetrica de esta ecuación diferencial de dada por la hipersuperficie $\mathcal{E}$ en el espacio cuatro-dimensional con coordenadas x, u, p, q donde p y q son u' y u'' respectivamente, definida por la ecuación

$$(q - p)u = 1$$

junto con la distribución unidimensional en $\mathcal{E}$ dada por las formas

$$\omega_1 = du - pdx$$
$$\omega_2 = dp - qdx$$

Las funciones x, u, p pueden darse por coordenadas en $\mathcal{E}$. Consideremos la matriz

$$M = \|\omega_i(X_j)\| = \begin{pmatrix} -p & e^x(u-p) \\ -q & e^x(u-q) \end{pmatrix}.$$

la matriz inversa es de la forma

$$M^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} e^x(u-q) & -e^x(u-p) \\ q & -p \end{pmatrix}.$$

donde $\triangle = detM = e^x T$ con $T = u(q - p)$.
Multiplicando M^{-1} por la columna que consiste en ω_1 y ω_2 obtenemos nuevas formas básicas definiendo $\mathcal{C}(\mathcal{E})$

$$\omega_1' = \tfrac{1}{T}[(u-q)du - (u-p)dp] + dx$$
$$\omega_2' = \tfrac{1}{\triangle}qdu - pdp$$

y por el teorema (4.1) la forma ω_1' es cerrada, además $[X_1, X_2] = X_2$ .Notemos que $f = T$ es una primera integral de la distribución y por el teorema (4.1) la ecuación diferencial es integrable por cuadratura.

Ejemplo 4.8 consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' = u' + u^n - \tfrac{2n+2}{(n+3)2}u$$

donde $n \neq 3$, $n \in \mathbb{R}$.
la variable independiente x no esta en la ecuación explicta por tanto el campo

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ es una simetria}$$

por otro lado no es dificil probar que

$$X_2 = e^{kx}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k+1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} + (\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p)\frac{\partial}{\partial p}$$

donde $k = \frac{(1-n)}{(n+3)}$, es una simetría de la ecuación diferencial en consideración .
desde el punto de vista geómetrico esta ecuación representa una hipersuperficie $\mathcal{E}$ en el espacio cuatro dimensional con coordenadas x, u, p, q donde p y q son u' y u'' respectivamente, definida por la ecuación

$$q = p + u^n - \frac{2n+2}{(n+3)^2}u$$

junto con la distribución unidimensional en $\mathcal{E}$ dada por las formas

$$\omega_1 = du - pdx$$
$$\omega_2 = dp - qdx$$

Las funciones x, u, p pueden darse por coordenadas en $\mathcal{E}$. Consideremos la matriz

$$M = \|\omega_i(X_j)\| = \begin{pmatrix} -p & e^{kx}(\frac{k+1}{2}u - p) \\ -q & e^{kx}(\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p - q) \end{pmatrix}.$$

la matriz inversa es de la forma

$$M^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} e^{kx}(\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p - q) & -e^{kx}(\frac{k+1}{2}u - p) \\ q & -p \end{pmatrix}.$$

donde $\triangle = detM = e^{kx}T$ con $T = -\frac{k(k+1)}{2}up + \frac{1-k}{2}p^2 + \frac{k+1}{2}uq$.
Multiplicando M^{-1} por la columna que consiste en ω_1 y ω_2 obtenemos nuevas formas básicas definiendo $\mathcal{C}(\mathcal{E})$

$$\omega_1' = \frac{1}{T}[(\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p - q)du - (\frac{k(k+1)}{2}u - p)dp] + dx$$
$$\omega_2' = \frac{1}{\triangle}qdu - pdp$$

y por el teorema (4.1) la forma ω_1' es cerrada, además $[X_1, X_2] = X_2$.
Ahora bien, para encontrar las primeras integrales notemos que

1. $\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{1-k^2}{2}p + (1-k)u^n + \frac{(k+1)^2(k-1)}{4}\text{u}$

2. $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1-k^2}{2}u - (1-k)p$

por tanto, si $k \neq 1$ podemos escribir la forma ω_1' de la siguente manera:

$$\omega_1' = \frac{1}{(k-1)T}(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial p}dp) + dx = \frac{1}{k-1}dln(Te^{(k-1)x}$$

así $f = Te^{(k-1)x}$ es una primera integral de la distribución. Tenga en cuenta que hemos reducido el orden de la ecuación diferencial, ya que es equivalente a la familia de primer orden ecuaciones de la forma

$$\tfrac{k-1}{2}p^2 + \tfrac{1-k^2}{2}up + \tfrac{k+1}{2}u^{n+1} + \tfrac{(k+1)^2(k-1)}{8}u^2 - ce^{(1-k)x} = 0$$

donde c es una constante arbitraria . Vamos ahora a restringir la distribución C (E) a la superficie Hc denfidas por (4.2). en esta superficie p es expresada en términos de x y u de la siguiente manera :

$$p = \tfrac{k+1}{2}u \pm \sqrt{\tfrac{1+k}{1-k}u^{n+1} + \tfrac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}}$$

por lo tanto note que en Hc tenemos $\triangle = ce^x$ y así

$$\omega_2' \mid_{Hc} = -d(\tfrac{e^{-xp^2}}{2c}) + \tfrac{e^{-x}}{c}(p + u^n + \tfrac{k^2-1}{4}u)du - \tfrac{e^{-x}}{2c}p^2dx$$

luego por el teorema (refteorema) a partir de la demostración del Teorema 4.4 se se deduce que esta forma es cerrada ; su integral es

$$g = -\tfrac{e^{-x}}{2c}(\tfrac{k+1}{2}u \pm \sqrt{\tfrac{1+k}{1-k}u^{n+1} + \tfrac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}})^2 + \tfrac{e^{-kx}}{k(k+1)} + \tfrac{e^{-x}}{c}(\tfrac{u^{n+1}}{n+1} + \\ \tfrac{(k+1)^2}{8}u^2) \pm \tfrac{e^{-x}}{c}\int_0^u \sqrt{\tfrac{1+k}{1-k}\eta^{n+1} + \tfrac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}d\eta)}$$

Todas las soluciones de la ecuación diferencial vienen dadas por la implícita relación $g = c_1$, $c_1 = const$. El teorema de $Chebyshev$ implica que la integral g es una función elemental siempre $2 = (n+1)$es entero.

Bibliografía

[AI] VINOGRADOV, A.M; KRASILSHCHIK I.S. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations in Mathematical Physics.* Moscow Institute for Municipal Economy. Russia (1999).

[F] WARNER, FRANK W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer. New York, (1983).

[J] SAENZ, JORGE *Variedades Diferenciales* U.C.L.A. Venezuela.

[M] DO CARMO, MANFREDO P. *Formas Diferenciais E Aplicações.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, (1983).

[JL] LEE, J *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer - Verlag, (2003).

[MS] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol.1, second edition, Inc, Berkeley, (1970).

[YV] VILLARROEL, Y. *On completely Integrable Systems.* Publicationes Mathematicae, Debbrecen,(1995).

[AV] VINOGRADOV, A. *Geometry of nonlinear differential equations.* J.Sov.Math.17, (1981).

[LM] MORENO.L *Sistemas Diferenciales y Simetria.* U.C.L.A. Venezuela (2013).

[CG] ALEXEI KUSHNER, VALENTIN LYCHAGYN AND VLADIMIR RUBTSOV . *Contact Geometry and Non-linear Differential Equations* . Publicationes Mathematicae,Debbrecen,(2007).