LOS ROMPIMIENTOS DE SIMETRÍA INDUCIDOS POR UN KINK NO ABELIANO

Por

Rommel Guerrero Mora

Trabajo de ascenso presentado para optar a la categoría
de Profesor Titular en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
Decanato de Ciencias y Tecnología

Barquisimeto, Abril 2015

Resumen

Se consideran soluciones tipo *kink* para el sector bosónico de dos teorías no abelianas: la primera simétrica respecto al grupo $SU(5)$ y la segunda invariante bajo transformaciones del grupo $SO(10)$. Por cada modelo se determinan dos soluciones que asintóticamente indicen el rompimiento del grupo; mientras en el primer caso las simetrías residuales corresponden a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y $SU(4) \times U(1)$, en el segundo, para ambas soluciones, ésta resulta determinada por $SU(5)$. Todas las soluciones son estables frente a pequeñas perturbaciones inducidas en la dirección de cada generador del grupo, se verifica que la energía del sistema excitado decae a la energía de la configuración determinada por el *kink*. Finalmente, se incluye curvatura en las teorías y se recuperar las versiones auto-gravitantes de los escenarios.

Índice general

Introducción iii

1. Potenciales invariantes bajo Z_2 1
- 1.1. Paredes de Domino . . . 1
- 1.2. Rompimiento espontáneo de simetría . . . 3
  - 1.2.1. Potencial con simetría $U(1)$ . . . 3
  - 1.2.2. Potencial con simetría $SO(3)$ . . . 4
  - 1.2.3. Las paredes y la ruptura de simetrías continuas . . . 5

2. Induciendo el rompimiento de $SU(5)$ con un *kink* no abeliano 6
- 2.1. Solución A . . . 7
- 2.2. Solución B . . . 9
- 2.3. Comentarios sobre las soluciones A y B . . . 11
- 2.4. Estabilidad perturbativa . . . 11
  - 2.4.1. Estabilidad de la Solución A . . . 13
  - 2.4.2. Estabilidad de la Solución B . . . 16

3. Induciendo el rompimiento de $SO(10)$ con un *kink* no abeliano 18
- 3.1. Soluciones . . . 19
- 3.2. Estabilidad perturbativa . . . 22

4. El *kink* no abeliano como un mundo brana auto-gravitante 25
- 4.1. El *kink* auto-gravitante en $SU(5)$ . . . 25
  - 4.1.1. Escenario A . . . 27
  - 4.1.2. Escenario B . . . 28
  - 4.1.3. Comentarios sobre los Escenarios A y B . . . 30
- 4.2. El *kink* auto-gravitante en $SO(10)$ . . . 31

Conclusiones 33

Bibliografía 34

Introducción

En las teorías con dimensiones adicionales extendidas nuestro Universo corresponde a una superficie cuatro-dimensional incrustado en un espacio-tiempo de mayor dimensionalidad. Este escenario puede ser generado por una pared de dominio, una configuranción donde el campo escalar de una teoría con simetría Z_2 interpola asintóticamente entre los vacíos del potencial. En particular, al introducir curvatura y considerar las fluctuaciones de la métrica se encuentra gravitación estándar sobre la pared como consecuencia de la localización del modo cero de las excitaciones en el sector cuatro-dimensional de la teoría [1–8].

Si las paredes de dominio representan una realización de nuestro Universo, además de la gravitación Newtoniana, ellas debe permitir tanto la localización de fermiones como la de los campos asociados a las interacciones fundamentales. Concretamente, cuando se trata de los fermiones y la radiaón electromagnética usualmente se emplean mecanismos de confinamiento no gravitacionales. En el primer caso, se introduce un acoplamiento de Yukawa entre los fermiones y el campo escalar de la pared [9–14]; así, mientras un estado *chiral* permanece localizado el otro es expulsado por la gravitación de la configuración. En el segundo caso, existen dos maneras diferentes de enfocar el problema: introduciendo correcciones a la cinemática de los bosones [15,16] o proponiendo términos de interacción no convencionales entre los bosones y el campo gravitacional de la pared [17–19].

La extensión de estos escenarios a teorías no abelinas también se ha considerado en varias oportunidades; soluciones tipo *kink* para el múltiplete escalar de modelos simétricos respecto a los grupos $SU(5) \times Z_2$ [20] y $SO(10)$ [21], inducen asintóticamente la ruptura de estas simetrías en correspondencia con los patrones $SU(5) \times Z_2 \to SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y $SO(10) \to SU(5)$. Sin ánimo de menospreciar los resultados, dentro del contexto de los mundos brana es preferible encontrar una solución que induzca la simetría del Modelo Estándar en el centro de la configuración mas que en los extremos; lamentablemente, en ninguno de los casos mencionado esto se ha logrado, salvo por la aproximación reportada en [21] donde el grupo encontrado es isomorfo al de interés con un factor abeliano adicional. Propuestas para resolver este problema pero soportadas sobre el grupo E_6 pueden ser revisadas en [22].

En este trabajo consideramos los escenarios no abelianos descritos anteriormente, enfoncándonos en dos temas específicos: la estabilidad de las soluciones bajo pequeñas perturbaciones y las modificaciones requeridas para incluir gravitación en las referidas teorías. En el modelo $SU(5) \times Z_2$ estos tópicos ya han sido abordados, verificando que la energía del sistema excitado es mayor que la energía del *kink* [23] e incluyendo términos de sexto orden en el potencial escalar de la teoría [24]. Tales resultados son el punto de partida para analizar la teoría $SO(10)$ en las direcciones propuestas.

Tenemos particular interés en el anlisis de estabilidad perturbativa, al menos en el caso plano; ya que, a diferencia de los escenarios convencionales donde existe una carga topológica que impide el decaimiento de la pared en una configuración constante en todo el espacio [25], en los escenarios no abelianos todavía no es posible apelar a razones topológicas para argumentar sobre la estabilidad; hasta los momentos no hay generalizaciones del fundamento mencionado que pueda aplicarse para tal fin.

La monografía se encuentra organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 1, que corresponde a los preliminares de este trabajo, discutimos las implicaciones relacionadas con los potenciales que exhiben simetría Z_2, en particular hacemos referencia a la formación de paredes de dominio y al rompimiento espontáneo de simetría. En el Capítulo 2, consideramos el sector bosónico de la teoría $SU(5) \times Z_2$ y hallamos dos soluciones del tipo pared de dominio en correspondencia con los mínimos del potencial. La estabilidad perturbativa de estas soluciones también es discutida aquí. En el Capítulo 3, donde la teoría de partida es simétrica bajo $SO(10)$, guarda similitud con el anterior, nuevamente se obtiene dos soluciones y la estabilidad de ambas bajo pequeñas excitaciones es examinada. Las versiones curvas de las paredes no abelianas encontradas en los Capítulos precedentes es mostrada en el Capítulo 4. Finalmente, la conclusiones son expuestas en la última parte del trabajo.

Como último comentario, en ausencia de gravitación las teorías son $(1 + 1)$ mientras que en su presencia son $(4 + 1)$; z ha sido reservado para identificar la coordenada perpendicular a la pared. A lo largo de todo el trabajo empleamos signatura positiva $(-, +, + \dots)$.

Capítulo 1

Potenciales invariantes bajo Z_2

En este Capítulo revisamos brevemente las implicaciones sobre una teoría de campos cuando se introducen potenciales simétricos bajo una transformaciones de reflexión; en particular, hacemos referencia a las soluciones del tipo pared de dominio y al rompimiento espontáneo de simetría. Para detalles en relación con estos tópicos sugerimos las Refs. [26, 27].

1.1. Paredes de Domino

En las teorías con un potencial escalar $V(\Phi)$, simétrico bajo transformaciones del grupo Z_2, $\Phi \to -\Phi$, es factible encontrar para el campo una solución que interpola suavemente entre los mínimos del potencial; tal configuración se denominan pared de dominio y se caracteriza por generar una densidad de energía que se interpone como un muro entre los vacíos del sistema. Como ejemplo, considérese a continuación el Lagrangiano de un campo escalar estático en auto-interacción,

$$L = -\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi), \tag{1.1}$$

con

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^2 - v^2\right)^2, \tag{1.2}$$

donde el valor de expectación en el vacío (vev) del campo está determinado por

$$< \Phi >= \pm v. \tag{1.3}$$

Si el campo depende únicamente de una coordenada, digamos z, a partir de las ecuaciones de Euler - Lagrange encontramos

$$\Phi_k = v \tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}), \qquad m = v\sqrt{\lambda}, \tag{1.4}$$

en correspondencia con las condiciones de borde

$$\Phi(z = \pm\infty) = \pm v. \tag{1.5}$$

Debido al perfil que exhibe (1.4), también es común referirse a ella como la solución *kink* del sistema (1.1).

Por otro lado, del tensor energía impulso

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \eta_{\mu\nu} L, \tag{1.6}$$

se verifica que la densidad de de energía de la pared viene dada por

$$\rho = \frac{\lambda v^4}{2} \cosh^{-4}(\frac{mz}{\sqrt{2}}), \tag{1.7}$$

que alcanza su máximo en la región de transición entre los vev del campo interponiéndose de esta manera entre los mínimos nulos del potencial. Este último hecho cobra relevancia al introducir gravitación en (1.1) y considerar un espacio-tiempo de alta dimensionalidad, ya que en tales escenarios la pared de dominio se manifiesta como una superficie donde es factible recuperar gravedad cuatro-dimensional estándar [1–3].

En relación con la estabilidad de (1.4), nótese que la regularidad del campo en los extremos permiten definir la siguiente carga conservada de origen topológico (topológico porque no se apela a la dinámica del campo sino a las condiciones de frontera para verificar su conservación. Para detalles ver [25, Capítulo 4, Sección 4.2])

$$Q = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) \tag{1.8}$$

que de acuerdo con (1.5) toma el valor

$$Q = 2v \tag{1.9}$$

impidiendo el decaimiento de la pared a una configuración constante compatible con $\Phi(+\infty) = \Phi(-\infty)$.

Otra manera de probar la estabilidad de (1.4) consiste en considerar pequeñas perturbaciones sobre el campo

$$\Phi = \Phi_k + \epsilon\Psi; \qquad \epsilon \ll 1, \tag{1.10}$$

y verificar que la energía de Φ siempre es mayor a la del *kink* independientemente de la perturbación. En comparación con el argumento anterior, éste es menos elegante, pero su discusión es requerida ya que guarda relación directa con los propósitos de este trabajo. Entonces, en correspondencia con (1.10) considérese la energía que se deriva de (1.6)

$$E = \int dz \left[\frac{1}{2} \left(\Phi_k' + \epsilon \Psi' \right)^2 + V \left(\Phi_k + \epsilon \Psi \right) \right], \tag{1.11}$$

de esta forma encontramos que

$$E = E[\Phi_k] + \epsilon \int dz \left[-\Phi_k'' + \lambda \Phi_k \left(\Phi_k^2 - v^2 \right) \right] \Psi + \epsilon^2 w^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{1.12}$$

donde el término a orden ϵ es nulo ya que es proporcional a la ecuación de movimiento de Φ_k, mientras que el próximo término en el orden perturbativo está en correspondencia con la siguiente ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + 3 \tanh^2 \xi - 1 \right) \Psi = 2 \frac{w^2}{m^2} \Psi, \qquad \xi = \frac{mz}{\sqrt{2}}. \tag{1.13}$$

De acuerdo con este enfoque, el problema de la estabilidad consiste ahora en determinar los autovalores de (1.13), que no siempre es factible; afortunadamente, en este caso el potencial en (1.13) se puede llevar a la forma Pöschl-Teller[1] determinado así los estados ligados del problema de interés

$$\frac{w_0^2}{m^2} = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{w_1^2}{m^2} = \frac{3}{4}. \tag{1.15}$$

Por tanto, el término proporcional a ϵ^2 en (1.11) es positivo y como consecuencia directa de ello, (1.4) es la configuración de menor energía compatible con las condiciones de borde prescritas en infinito.

1.2. Rompimiento espontáneo de simetría

La ruptura de simetría de una teoría es otra consecuencia que guarda relación con los potenciales invariantes bajo Z_2. Por ejemplo, si en (1.1) introducimos la siguiente redefinición del campo

$$\Theta = \Phi - v \tag{1.16}$$

tal que

$$< \Theta >= 0, \tag{1.17}$$

entonces aparece un término cúbico para Θ en el potencial

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\Theta^4 + 4v^2\Theta^2 + 4v\Theta^3\right) \tag{1.18}$$

que induce el rompimiento de la simetría Z_2. Como consecuencia adicional, ahora la masa del campo es real en contraste directo con la masa imaginaria del caso simétrico.

En realidad la simetría está escondida en (1.18) y la clave para ponerla al descubierto es la redefinición (1.16); sin embargo, hacerlo conduce a un vev distinto de cero que no ofrece ninguna ventaja cuando de cuantizar la teoría se trata.

Continuemos con un par de casos adicionales que involucran simetrías continuas asociadas a los grupos $U(1)$ y $SO(3)$.

1.2.1. Potencial con simetría $U(1)$

Ahora el campo escalar es complejo, $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, y el potencial está determinado por

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\Phi^*\Phi - v^2\right)^2 \tag{1.19}$$

[1] El potencial de Pöschl-Teller es un pozo negativo asintóticamente nulo, $V = -\kappa(\kappa+1)/2\cosh^{-2}\xi$, $\kappa > 0$, con dos estados ligados definidos por $\psi_0 = N_0\cosh^{-\kappa}\xi$ con autovalor $-\kappa^2/2$ y $\psi_1 = N_1\cosh^{-\kappa}\xi\ \sinh\xi$ con autovalor $-(\kappa-1)^2/2$. Para detalles, además de [28], ver [29, Capítulo 2, pp 32-33].

el cual es simétrico bajo el grupo $U(1)$, $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$, con $\alpha = 0, 2\pi, \ldots$ Entonces, sin perdida de generalidad escogemos el vev

$$< \Phi_1 >= v, \qquad < \Phi_2 >= 0, \tag{1.20}$$

que corresponde al caso $\alpha = 0$.

Para romper la simetría basta con redefinir los campos como se indica

$$\Theta_1 = \Phi_1 - v, \qquad \Theta_2 = \Phi_2 \tag{1.21}$$

de tal manera que

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\Theta_1^4 + \Theta_2^4 + 2\Theta_1^2\Theta_2^2 + 4v\Theta_1^3 + 4v^2\Theta_1^2\right), \tag{1.22}$$

en correspondencia con un modelo cuyos campos tienen valores de expectación en el vacío nulos y masas reales. En particular, mientras la masa de Θ_1 es $2\lambda v^2$, la Θ_2 es nula; este último en correspondencia con el bosón de Nambu-Goldstone que se espera luego de la ruptura de simetría.

1.2.2. Potencial con simetría $SO(3)$

En la representación fundamental de $SO(3)$ tómese un campo escalar con tres componentes reales

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

tal que la regla de transformación del bosón está determinada por

$$\mathbf{\Phi} \to \mathbf{O}\mathbf{\Phi} \tag{1.24}$$

con $\mathbf{O}$ un elemento de $SO(3)$.

Para inducir el rompimiento de la simetría se escoge el siguiente potencial

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi} - v^2\right) \tag{1.25}$$

de donde se deduce que

$$< \mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi} >= v^2. \tag{1.26}$$

Ahora, si tomamos en cuenta que los diferentes vacíos que dan solución a (1.26) están conectados por una transformación de $SO(3)$, no se pierde generalidad seleccionando

$$\Theta_1 = \Phi_1 - v, \qquad \Theta_2 = \Phi_2, \qquad \Theta_3 = \Phi_3, \tag{1.27}$$

donde se ha considerado que

$$< \mathbf{\Phi} >= \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Entonces, sustituyendo (1.27) en (1.25), encontramos un campo masivo y dos bosones de Nambu-Goldstone

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\Theta_1^2 + 2v\Theta_1 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2\right)^2 . \tag{1.29}$$

El Teorema de Nambu-Goldstone predice el número de bosones no masivos que resultan luego de la ruptura de simetría. Antes de enunciarlo, nótese que de los tres generadores de $SO(3)$

$$\mathbf{J}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

solamente uno aniquila el vacío,

$$\mathbf{J}_1 < \mathbf{\Phi} >= 0, \tag{1.31}$$

y en consecuencia los elementos del sub-grupo generados por él lo dejan invariante,

$$\mathbf{O} < \mathbf{\Phi} > = \; e^{i\alpha\mathbf{J}_1} < \mathbf{\Phi} > = < \mathbf{\Phi} > . \tag{1.32}$$

Tales elementos forman el grupo de la simetría que “sobrevive” a la ruptura. Por tanto, en este caso concluimos que

$$SO(3) \to SO(2) \sim U(1). \tag{1.33}$$

Teorema de Goldstone: Por cada generador que no aniquile el vacío, existe un bosón de Nambu-Goldstone. Para la demostración ver la Ref. [26, Capítulo 3, Caja 3.1].

1.2.3. Las paredes y la ruptura de simetrías continuas

Como comentario final, queremos referimos a la formación de paredes de dominio en teorías con potenciales que inducen el rompimiento de una simetría continua, nótese que ellos deben ser invariantes bajo Z_2 para activar el mecanismo de fractura. Tales soluciones son factibles si las condiciones de borde en infinito no están conectadas por la simetría de calibre; es decir, si los vev del campo no son equivalentes. Un ejemplo donde las paredes están excluidas es discutido en [27, Parte I, Capítulo 3, p. 18], allí el potencial es simétrico respecto a $SU(2) \times U(1)$,

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger - v^2\right)^2 , \tag{1.34}$$

y evidentemente también simétrico con respecto a Z_2; sin embargo, la reflexión es parte de $SU(2)$,

$$e^{i\pi}\mathbf{\Phi} = -\mathbf{\Phi}, \tag{1.35}$$

y por consiguiente las soluciones tipo *kink* son descartadas del modelo.

Capítulo 2

Induciendo el rompimiento de $SU(5)$ con un *kink* no abeliano

Considere el sector bosónico de una teoría invariante bajo el grupo de simetría $SU(5)$

$$L = -\mathrm{Tr}(\partial_m \mathbf{\Phi} \partial^m \mathbf{\Phi}) - V(\mathbf{\Phi}) \tag{2.1}$$

con

$$V(\mathbf{\Phi}) = -m^2 \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + h(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2))^2 + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4) + V_0 \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{\Phi}$, el múltiplete escalar, es una función de la coordenada z y transforma en la representación adjunta del grupo de simetría; es decir,

$$\mathbf{\Phi} \to \mathbf{U}\mathbf{\Phi}\mathbf{U}^{-1}, \tag{2.3}$$

con $\mathbf{U}$ un elemento de $SU(5)$. El término independiente en (2.2) para ajustar el mínimo del potencial a cero. Es bien conocido que existen tres posibles formas para el vev del campo [30]: la trivial,

$$\mathbf{\Phi}_{0A} \sim \mathrm{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \tag{2.4}$$

y

$$\mathbf{\Phi}_{0B} \sim \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -4); \tag{2.5}$$

y que $SU(5)$ rompe espontáneamente a

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{2.6}$$

y

$$SU(4) \times U(1), \tag{2.7}$$

para (2.4) y (2.5), respectivamente.

Debido a la ausencia términos cúbicos en (2.2) el Lagrangiano exhibe simetría Z_2, $\mathbf{\Phi} \to -\mathbf{\Phi}$; por tanto, el grupo de simetría del modelo es $SU(5) \times Z_2$[1] y se espera que la teoría

[1] El centro de $SU(N)$ es Z_N y el campo transforma con respecto a los elementos del centro de la siguiente manera $\mathbf{\Phi} \to \exp(2i\pi/N)\mathbf{\Phi}$. Entonces, para N par $\mathbf{\Phi} \to -\mathbf{\Phi}$ está incluido en el centro de $SU(N)$; sin embargo, para N impar no. Por otra parte, en relación con (2.6, 2.7) y patrones similares, nótese que $Z_N \subset U(1)$; de modo que, en (2.6) debe tomarse módulo $Z_3 \times Z_2$ mientras que en (2.7) debe indicarse módulo Z_4, para evitar sobrecontar las simetrías discretas en los referidos patrones.

admita soluciones tipo *kink* o pared de dominio que asintóticamente, $z \to \pm\infty$, interpolen entre diferentes incrustaciones de (2.6) o (2.7) en $SU(5)$, con esto último nos referimos al intercambio de los elementos sobre la diagonal de los vev del campo. Concretamente, ellas deben satisfacer

$$\mathbf{\Phi}_{A,B}(z=-\infty) = -\mathbf{U}\mathbf{\Phi}_{A,B}(z=+\infty)\mathbf{U}^{-1}; \tag{2.8}$$

donde A, B indican correspondencia con (2.4) y (2.5), respectivamente.

Para obtener estas soluciones conviene expandir el campo en términos de los generadores diagonales de $SU(5)$[2],

$$\mathbf{\Phi} = a(z)\mathbf{T}_3 + b(z)\mathbf{T}_8 + c(z)\mathbf{T}_{23} + d(z)\mathbf{T}_{24} \tag{2.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_3 &= \frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,0,0,0), & (2.10)\\
\mathbf{T}_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{diag}(1,1,-2,0,0), & (2.11)\\
\mathbf{T}_{23} &= \frac{1}{2}\mathrm{diag}(0,0,0,1,-1), & (2.12)\\
\mathbf{T}_{24} &= \frac{1}{2\sqrt{15}}\mathrm{diag}(2,2,2,-3,-3). & (2.13)
\end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de movimiento para los coeficientes están determinadas por

$$\begin{aligned}
a'' &= [-m^2 + (h+\frac{2\lambda}{5})d^2 + (h+\frac{\lambda}{2})(a^2+b^2) + hc^2]a + \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}abd, & (2.14)\\
b'' &= [-m^2 + (h+\frac{2\lambda}{5})d^2 + (h+\frac{\lambda}{2})(a^2+b^2) + hc^2]b + \frac{\lambda}{\sqrt{5}}d(a^2-b^2), & (2.15)\\
c'' &= [-m^2 + (h+\frac{9\lambda}{10})d^2 + (h+\frac{\lambda}{2})c^2 + h(a^2+b^2)]c, & (2.16)\\
d'' &= [-m^2 + (h+\frac{7\lambda}{30})d^2 + (h+\frac{2\lambda}{5})(a^2+b^2) + (h+\frac{9\lambda}{10})c^2]d + \frac{\lambda}{\sqrt{5}}b(a^2-\frac{b^2}{3}), & (2.17)
\end{aligned}$$

donde prima significa derivada con respecto a z.

A continuación consideraremos condiciones de borde adecuadas para el campo e impondremos relaciones entre los coeficientes y los parámetros h y λ con el propósito de desacoplar el sistema de ecuaciones (2.14 - 2.17).

2.1. Solución A

Para este caso proponemos las siguientes condiciones de borde para el campo

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_A(z=+\infty) &= \frac{v}{\sqrt{5}}\mathrm{diag}(2,-3,2,2,-3)\\
&= \sqrt{5}v\left(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_{23}\right) + \frac{v}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{T}_{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}_8\right) & (2.18)
\end{aligned}$$

[2]En relación con los generadores de $SU(5)$ ver [31, Capítulo 9, Sección 9.2, pp. 311 - 314].

y

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_A(z=-\infty) &= \frac{v}{\sqrt{5}}\mathrm{diag}(3,-2,-2,3,-2) \\ &= \sqrt{5}v\,(\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_{23}) - \frac{v}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{T}_{24}-\sqrt{5}\mathbf{T}_8\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Entonces, si escogemos

$$c = a \quad y \quad b = -\sqrt{5}d, \tag{2.20}$$

esto último sugerido por (2.18, 2.19), y adicionalmente pedimos

$$h = -\frac{3}{20}\lambda, \qquad \lambda > 0, \tag{2.21}$$

es posible reducir (2.14 - 2.17) a un par de ecuaciones desacopladas para a y d,

$$a'' = \frac{\lambda}{5}a^3 - m^2 a, \qquad a(z=\pm\infty) = \sqrt{5}v \tag{2.22}$$

$$d'' = 3\lambda d^3 - m^2 d, \qquad d(z=\pm\infty) = \pm\frac{v}{\sqrt{3}}, \tag{2.23}$$

que tienen como solución

$$a = \sqrt{5}v \quad y \quad d = \frac{v}{\sqrt{3}}\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}). \tag{2.24}$$

Por tanto, para este caso particular, el campo (2.9) viene dado por

$$\mathbf{\Phi}_A = \sqrt{5}v\,(\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_{23}) + \frac{v}{\sqrt{3}}\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}})\left(\mathbf{T}_{24}-\sqrt{5}\mathbf{T}_8\right), \qquad v = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.25}$$

Ya que (2.25) es compatible con las condiciones de borde (2.18, 2.19) la simetría residual es la misma en los extremos, pero incrustada de diferentes manera en $SU(5)$. Así pues, asintóticamente se tiene

$$SU(5)\times Z_2 \to \frac{SU(3)_\pm \times SU(2)_\pm \times U(1)_\pm}{Z_3\times Z_2}. \tag{2.26}$$

Por otro lado, dentro del *kink*, $z=0$, (2.25) se reduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_A(0) &= \sqrt{5}v\,(\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_{23}) \\ &= \frac{\sqrt{5}v}{2}\mathrm{diag}(1,-1,0,1,-1)\end{aligned} \tag{2.27}$$

y la simetría residual queda definida por

$$\frac{SU(2)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)}{Z_2\times Z_2}. \tag{2.28}$$

Para verificar (2.26) y (2.28) se debe determinar el conjunto de generadores de $SU(5)$ que aniquila tanto a (2.18, 2.19) como a (2.27); tal conjunto, según sea el caso, forma un subgrupo de

$SU(5)$ que corresponde al grupo de la simetría residual. Con el fin de facilitar la identificación de los subgrupos, es conveniente escoger para el extremo y el centro $\mathbf{\Phi}_A(\infty) \sim \mathrm{diag}(2,2,2,-3,-3)$ y $\mathbf{\Phi}_A(0) \sim \mathrm{diag}(1,1,0,-1,-1)$, respectivamente. De esta manera, tenemos 12 generadores de $SU(5)$ aniquilando a $\mathbf{\Phi}(\infty)$, $\{\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_8;\mathbf{T}_{21},\ldots,\mathbf{T}_{24}$ y 8 a $\mathbf{\Phi}(0)$, $\{\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3;\mathbf{T}_8;\mathbf{T}_{21},\ldots,\mathbf{T}_{24}$, con las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\mathbf{T}_k,\mathbf{T}_l] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} [\boldsymbol{\lambda}_k,\boldsymbol{\lambda}_l] & \mathbf{0}_{3\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 3} & \mathbf{0}_{2\times 2}\end{pmatrix}; \qquad k,l = 1,\ldots,8, \tag{2.29}$$

$$[\mathbf{T}_i,\mathbf{T}_j] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 3} & [\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j]\end{pmatrix}; \qquad i,j = 21,22,23, \tag{2.30}$$

$$[\mathbf{T}_{24},\mathbf{T}_{24}] = 0, \tag{2.31}$$

y

$$[\mathbf{T}_m,\mathbf{T}_n] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} [\boldsymbol{\sigma}_m,\boldsymbol{\sigma}_n] & \mathbf{0}_{2\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 2} & \mathbf{0}_{3\times 3}\end{pmatrix}; \qquad m,n = 1,2,3 \tag{2.32}$$

$$[\mathbf{T}_i,\mathbf{T}_j] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 3} & [\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j]\end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$[\mathbf{T}_8,\mathbf{T}_8] = 0, \tag{2.34}$$

$$[\mathbf{T}_{24},\mathbf{T}_{24}] = 0, \tag{2.35}$$

en el extremo y el centro correspondientemente. Aquí, $\boldsymbol{\sigma}_i$ y $\boldsymbol{\lambda}_k$ son las matrices de Pauli y Gell-Mann, generadores de los grupos $SU(3)$ y $SU(2)$, respectivamente. Las relaciones de conmutación nulas están asociadas al grupo $U(1)$. Entonces, de (2.29 - 2.31) y (2.32 - 2.35) se observa como los grupos de simetría (2.26) y (2.28) quedan incrustados en $SU(5)$.

2.2. Solución B

Ahora consideremos el problema de hallar un *kink* compatible con las siguientes condiciones en infinito

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_B(z=+\infty) &= \frac{v}{5}\mathrm{diag}(1,1,1,1,-4) \\ &= v(\mathbf{T}_{23} + \sqrt{\frac{3}{5}}\mathbf{T}_{24}), \end{aligned} \tag{2.36}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_B(z=-\infty) &= \frac{v}{5}\mathrm{diag}(-1,-1,-1,4,-1) \\ &= v(\mathbf{T}_{23} - \sqrt{\frac{3}{5}}\mathbf{T}_{24}). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Nuevamente, en correspondencia con (2.36, 2.37) escogemos convenientemente $a = b = 0$ en (2.14 - 2.17); por consiguiente, el sistema de ecuaciones se simplifica a

$$c'' = [-m^2 + (h + \frac{9\lambda}{10})d^2 + (h + \frac{\lambda}{2})c^2]c, \tag{2.38}$$

$$d'' = [-m^2 + (h + \frac{7\lambda}{30})d^2 + (h + \frac{9\lambda}{10})c^2]d, \tag{2.39}$$

que evidentemente se desacoplan si

$$\lambda = -\frac{10}{9}h, \qquad h > 0. \tag{2.40}$$

Para el par de ecuaciones remanentes, pedimos

$$c(z = \pm\infty) = v, \tag{2.41}$$

$$d(z = \pm\infty) = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}v; \tag{2.42}$$

de tal manera que

$$c = v \qquad y \qquad d = \sqrt{\frac{3}{5}}v \tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}); \tag{2.43}$$

y como consecuencia de ello, (2.9) toma la forma particular

$$\mathbf{\Phi}_B = v\left[\mathbf{T}_{23} + \sqrt{\frac{3}{5}}\tanh\left(\frac{mz}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{T}_{24}\right], \qquad v = \frac{3m}{2\sqrt{h}}. \tag{2.44}$$

Asintóticamente, $z \to \pm\infty$, (2.44) induce la misma simetría residual pero incrustada en $SU(5)$ de diferentes maneras,

$$SU(5) \times Z_2 \to \frac{SU(4)_\pm \times U(1)_\pm}{Z_4}. \tag{2.45}$$

Por otra parte, en $z = 0$, (2.44) se reduce como sigue

$$\mathbf{\Phi}_B(0) = v\mathbf{T}_{23} = \frac{v}{2}\mathrm{diag}(0, 0, 0, 1, -1), \tag{2.46}$$

en correspondencia con el grupo de simetría

$$\frac{SU(3) \times U(1) \times U(1)}{Z_3}. \tag{2.47}$$

Para verificar los grupos de simetría (2.45) y (2.47), debemos identificar los generadores de $SU(5)$ que aniquilan a (2.36, 2.37) y (2.46) y para ello sólo es necesario escoger en el extremo $\mathbf{\Phi}(\infty) \sim \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -4)$. Entonces, son 16 los generadores de $SU(5)$ que aniquilan a $\mathbf{\Phi}(\infty)$,

$\{\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{14}, \mathbf{T}_{24}; \mathbf{T}_{23}\}$ y 10 los que aniquilan a $\mathbf{\Phi}_B(0)$, $\{\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_8; \mathbf{T}_{23}; \mathbf{T}_{24}\}$. Las relaciones de conmutación que guardan entre ellos, para el extremo y el centro, correspondientemente, son

$$[T_k, T_l] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_l] & \mathbf{0}_{4\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times4} & 0 \end{pmatrix}; \qquad k, l = 1, \ldots, 14, \tag{2.48}$$

$$[T_k, T_{24}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_{15}] & \mathbf{0}_{4\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times4} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

$$[T_{23}, T_{23}] = 0. \tag{2.50}$$

y

$$[T_i, T_j] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\lambda}_j] & \mathbf{0}_{2\times3} \\ \mathbf{0}_{2\times3} & \mathbf{0}_{2\times2} \end{pmatrix}; \qquad i, j = 1, \ldots, 8 \tag{2.51}$$

$$[T_{23}, T_{23}] = 0, \tag{2.52}$$

$$[T_{24}, T_{24}] = 0, \tag{2.53}$$

donde $\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_{15}$ son las matrices 4×4 de traza nula generadoras del grupo $SU(4)$. Los conmutadores nulos en correspondencia con el grupo $U(1)$. Entonces, de (2.48 - 2.50) y (2.51 - 2.53) queda en evidencia la incrustación de las simetrías (2.45) y (2.46) en $SU(5)$.

2.3. Comentarios sobre las soluciones A y B

Antes de continuar, es pertinente realizar algunos comentarios sobre las paredes no abelianas determinadas en las secciones precedentes.

Para hallar $\mathbf{\Phi}_A$ y $\mathbf{\Phi}_B$, (2.25) y (2.44) respectivamente, hemos seguido la estrategia empleada en [20] que consiste en expandir (2.9) en términos de los generadores diagonales de $SU(5)$.

Con respecto a la Solución A, entendemos que (2.25) corresponde a un caso particular de la reportada tanto en [20] como en [23]; en el primero, donde se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones (2.14 - 2.17), (2.25) es la solución de convergencia del resultado numérico luego de considerar las restricciones (2.20) y (2.21); en el segundo, donde $SU(N)$ es el grupo de simetría de (2.1), la solución para $N = 5$ coincide con (2.25). Por otro lado, en relación con la solución B, (2.44) es la versión plana del escenario auto-gravitante reportado en [24], donde se introdujeron términos de sexto orden en el potencial para compensar las condiciones de borde rerequeridas por el modelo. Vale la pena destacar que allí también se reporta la extensión curva de A.

2.4. Estabilidad perturbativa

La ausencia de una carga topológica que guarde relación con las condiciones de borde prescritas en los extremos es motivo suficiente para evaluar la respuesta de estos escenarios frente a ligeras excitaciones del campo; por supuesto, sería preferible abordar el problema desde el punto de vista topológico; sin embargo, por ahora, nuestros objetivos son menos ambiciosos. Revisemos a continuación que ocurre con la integridad de las paredes halladas cuando se introducen pequeñas perturbaciones en la dirección de cada generador de $SU(5)$.

Para estudiar la estabilidad de las soluciones encontradas, se requiere considerar pequeñas desviaciones de $\mathbf{\Phi}_{A,B}$ en la energía del sistema

$$E = \int dz \left[\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}'_{A,B} + \epsilon\mathbf{\Psi}')^2 + V(\mathbf{\Phi}_{A,B} + \epsilon\mathbf{\Psi})\right], \qquad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{2.54}$$

donde

$$\mathbf{\Psi} = \sum_{a=1}^{24} \psi_a \mathbf{T}_a \tag{2.55}$$

con $\mathbf{T}_a$ los generadores de $SU(5)$ normalizados como sigue

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{2.56}$$

A partir de (2.54), a segundo orden en ϵ, encontramos que

$$E = E[\mathbf{\Phi}_{A,B}] + \epsilon^2 \int dz \sum_{a,b=1}^{24} \psi_a \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\delta_{ab} + V_{ab}\right)\psi_b \tag{2.57}$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de movimiento de $\mathbf{\Phi}_{A,B}$ para eliminar el término proporcional a ϵ y adicionalmente hemos considerado que

$$\begin{aligned} V_{ab} &= -\frac{1}{2}m^2\delta_{ab} + h\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2_{A,B})\delta_{ab} + 4h\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_a)\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_b) \\ &+ 4\lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2_{A,B}\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b) + 2\lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_a\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_b). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Por tanto, si las desviaciones a la energía de $\mathbf{\Phi}_{A,B}$, el segundo témino en (2.57), corresponden a una número positivo, las soluciones (2.25) y (2.44) son configuraciones estables del sistema (2.1, 2.2).

Particularmente, la doble suma en (2.57) para $\mathbf{\Phi}_A$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{a,b=1}^{24} \psi_a \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\delta_{ab} + V_{ab}\right)\psi_b &= \sum_{a=1}^{24} w_a^2\psi_a^2 \\ &- \frac{3m^2}{20}\left[\sqrt{5}\left(\psi_3+\psi_{23}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{5}\psi_8 - \psi_{24}\right)\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}})\right]^2 \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2}m^2\left(\psi_3\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}) - \psi_8\right)^2 \\ &+ \sqrt{\frac{3}{5}}m^2\left(\psi_3\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}) - \psi_{24}\right)^2 \\ &+ \frac{m^2}{2\sqrt{5}}\left(5 - 3\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}})\right)\left(\psi_8+\psi_{24}\right)^2 \\ &+ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}m^2\left(\psi_{23}\tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}) + \psi_{24}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.59}$$

mientras que para $\mathbf{\Phi}_B$ como

$$\begin{aligned}\sum_{a,b=1}^{24} \psi_a \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\delta_{ab} + V_{ab} \right) \psi_b &= \sum_{a=1}^{24} w_a^2 \psi_a^2 \\ &+ \frac{9m^2}{16} \left(\psi_{23} + \tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}})\psi_{24} \right)^2 \\ &+ \frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{5}} m^2 \left(\psi_{23} \tanh(\frac{mz}{\sqrt{2}}) - \psi_{24} \right)^2 , \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde en cada caso se ha considerado que w_a^2 es el autovalor de la siguiente ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2} + V_{aa} \right) \psi_a = w_a^2 \psi_a. \tag{2.61}$$

Por tanto, el problema de estabilidad ahora consiste en determinar el autovalor de menor energía en la dirección de cada generador de $SU(5)$. Afortunadamente, tanto para A como para B, en la dirección de varios generadores, se obtiene la misma ecuación de Schrödinger; así , después de agrupar los problemas de autovalores, ocho casos no triviales deben ser revisados para A y sólo cinco para B. Veámos esto con detalle.

En lo que sigue

$$\xi = \frac{mz}{\sqrt{2}}. \tag{2.62}$$

2.4.1. Estabilidad de la Solución A

Revisemos los casos no triviales que se presentan aquí (por triviales entendemos aquellas ecuaciones de Schrödinger con potencial nulo).

Para el conjunto de generadores $\{\mathbf{T}_4, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_{13}, \mathbf{T}_{14}\}$ y $\{\mathbf{T}_6, \mathbf{T}_7, \mathbf{T}_{19}, \mathbf{T}_{20}\}$ a partir de (2.61) tenemos (signo más para el primer conjunto, signo menos para el segundo)

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \tanh\xi\,(\tanh\xi \pm 1) \right] \psi_a = 2\frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{2.63}$$

con un mínimo negativo para el potencial, nótese que éste además de anularse en $\xi = 0$ se encuentra acotado entre $(0, 2)$; sin embargo, no se esperan estados negativos en el espectro de autofunciones ya que (2.63) puede ser factorizado como se indica

$$\left(-\frac{d}{d\xi} + \beta_\pm \right) \left(\frac{d}{d\xi} + \beta_\pm \right) \psi_a = 4\frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{2.64}$$

donde

$$\beta_+ = -2\frac{1 + 3\cosh 2\xi - \sinh 2\xi - (1 - \tanh\xi)\ln\left(\frac{\tanh\xi+1}{\tanh\xi-1}\right)}{4 + e^{2\xi} + e^{-2\xi}\left[3 + 2\ln\left(\frac{\tanh\xi+1}{\tanh\xi-1}\right)\right]}, \tag{2.65}$$

$$\beta_- = 2\frac{1 + 3\cosh 2\xi + \sinh 2\xi + 2(1 + \tanh\xi)\xi}{4 + e^{-2\xi} + e^{2\xi}(3 - 4\xi)}. \tag{2.66}$$

Para comprobar la aseveración anterior, consideremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(\frac{d}{d\xi}+\beta_\pm\right)\psi_a^* \left(\frac{d}{d\xi}+\beta_\pm\right)\psi_a \;\; \geq \;\; 0, \tag{2.67}$$

que corresponde a la norma de $(d/d\xi+\beta_\pm)\psi_a$, autofunción del operador $(d/d\xi+\beta_\pm)(-d/d\xi+\beta_\pm)$. Ahora, integrando por partes y apelando a la regularidad de ψ_a en los extremos, $\psi_a(z=\pm\infty) = 0$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \;\psi_a^* \left(-\frac{d}{d\xi}+\beta_\pm\right)\left(\frac{d}{d\xi}+\beta_\pm\right)\psi_a = \; 4\frac{w_a^2}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \;\psi_a^*\psi_a \;\geq 0, \tag{2.68}$$

donde hemos hecho uso de (2.64). Por tanto, los autovalores de (2.63) están acotados como se muestra

$$\frac{w_a^2}{m^2} \geq 0. \tag{2.69}$$

Recomendamos la revisión de las Refs. [32, 33] para detalles sobre este particular.

En los casos asociados a $\{\mathbf{T}_9, \mathbf{T}_{10}\}$ y $\{\mathbf{T}_{17}, \mathbf{T}_{18}\}$ se obtiene (signo menos para el primer par, signo más para el segundo par)

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 5 \mp 3\tanh\xi\right)\psi_a = 2\frac{w_a^2}{m^2}\psi_a \tag{2.70}$$

donde el potencial, en cualquiera de los casos, corresponde a una barrera acota entre $(2, 8)$. En consecuencia, se estima que

$$\frac{w_a^2}{m^2} > 1. \tag{2.71}$$

Los cuatro últimos casos no triviales están asociados a los generadores diagonales de $SU(5)$ y son distintos entre sí; es decir, se obtiene una ecuación de Schrödinger diferente para cada uno de ellos. Sin embargo, es posible agruparlos de acuerdo a la naturaleza del potencial.

Para $\mathbf{T}_3$ y $\mathbf{T}_{23}$, (2.61) se reduce a

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 5 - \sqrt{3} - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\psi_3 = 2\frac{w_3^2}{m^2}\psi_3 \tag{2.72}$$

y

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 5 - 3\sqrt{\frac{3}{5}}\tanh^2\xi\right)\psi_{23} = 2\frac{w_{23}^2}{m^2}\psi_{23}, \tag{2.73}$$

respectivamente. En ambos casos el potencial es positivo, una constante en el primero y una barrera para el segundo; así pues, los autovalores son positivos y están acotados para el primer y segundo caso como sigue

$$\frac{w_3^2}{m^2} > \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{3} - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \tag{2.74}$$

y

$$\frac{w_{23}^2}{m^2} > \frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \tag{2.75}$$

Vale la pena indicar que en (2.59) conviene considerar las soluciones triviales de (2.72, 2.73) cuando los autovalores se aproximan a su cota inferior[3].

Finalmente, en la dirección de $\mathbf{T}_8$ y $\mathbf{T}_{24}$ encontramos

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 3\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\tanh^2\xi - \sqrt{5}\right]\psi_8 = 2\frac{w_8^2}{m^2}\psi_8 \tag{2.76}$$

y

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{10}\left(1+\sqrt{5}\right) - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\tanh^2\xi + 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right]\psi_{24} = 2\frac{w_{24}^2}{m^2}\psi_{24}. \tag{2.77}$$

En cada ecuación de Schrödinger se tiene un pozo de potencial con dos estados ligados y autovalores negativos, salvo en el primer caso donde el segundo estado ligado tiene autovalor positivo; esto se puede verificar escribiendo cada ecuación en términos del potencial de Pöschl-Teller cuyos estados son bien conocidos [28, 29]. Así, para $\mathbf{T}_8$ tenemos

$$\frac{w_{8,0}^2}{m^2} = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{25 - 8\sqrt{3} + \frac{24}{\sqrt{5}}} < 0, \tag{2.78}$$

$$\frac{w_{8,1}^2}{m^2} = -\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{25 - 8\sqrt{3} + \frac{24}{\sqrt{5}}} > 0; \tag{2.79}$$

mientras que para $\mathbf{T}_{24}$ encontramos

$$\frac{w_{24,0}^2}{m^2} = \frac{1}{40}\left(75 - 20\sqrt{5} - 12\sqrt{15} + \sqrt{5\left(29 + 24\sqrt{5} - 16\sqrt{15}\right)}\right) < 0, \tag{2.80}$$

$$\frac{w_{24,1}^2}{m^2} = \frac{1}{40}\left(55 - 20\sqrt{5} - 12\sqrt{15} + 3\sqrt{5\left(29 + 24\sqrt{5} - 16\sqrt{15}\right)}\right) < 0. \tag{2.81}$$

Para calcular el segundo término del lado derecho de (2.59) estamos considerando que los primeros modos ligados de (2.76) y (2.77), vienen dados por

$$\psi_8 = N_8\cosh^{-\kappa_8}\xi, \qquad N_8 \sim 0{,}85; \quad \kappa_8 \sim 1{,}84; \tag{2.82}$$

$$\psi_{24} = N_{24}\cosh^{-\kappa_{24}}\xi, \qquad N_{24} \sim 0{,}57; \quad \kappa_{24} \sim 0{,}52. \tag{2.83}$$

[3]Para verificar que $\psi_a \to 0$ cuando $w_a^2/m^2 \to 0$, $a = 3, 23$; en el primer caso, basta con determinar el estado base en la caja de potencial de ancho ξ_r, $V = 0$ en $-\xi_r/2 < \xi < \xi_r/2$ y $V = \infty$ en $\xi_r/2 < \xi < -\xi_r/2$, el cual viene dado por $\sqrt{2/\xi_r}\cos(\pi\xi/\xi_r)$ con autovalor $\sim \pi^2/(2\xi_r^2)$. Por consiguiente, cuando $\xi_r \to \infty$ se obtiene el escenario de interés junto con la solución escogida. Como alternativa para el segundo caso, se considera el primer estado ligado de una barrera de ancho $2\xi_0$ en una caja de dimensión $2\xi_r$, $\xi_r > \xi_0$, $V = V0$ en $-\xi_0 < \xi < \xi_0$ y $V = \infty$ en $\xi_r < \xi < -\xi_r$, que para $\xi_0/\xi_r \ll 1$ viene determinado por $\cosh(\sqrt{2V_0}(\xi_0 - |\xi|))/\sqrt{\xi_r}$ para $0 \le |\xi| \le \xi_0$ y $\cos(\pi|\xi|/(2\xi_r))/\sqrt{\xi_r}$ para $\xi_0 \le |\xi| \le \xi_r$, en correspondencia con el autovalor $\sim \pi^2/(8\xi_r^2)$.

A pesar del término negativo en (2.59) y que adicionalmente los autovalores (2.78) y (2.80) son menores que cero, el coeficiente de ϵ^2 en (2.57) va como $5{,}37m^2$ más las suma de 4 cantidades positivas. Por tanto, las perturbaciones (2.55) no inducen el decaimiento de (2.25) en una configuración de menor energía.

2.4.2. Estabilidad de la Solución B

Como se comento anteriormente, aquí son cinco los casos no triviales que requieren ser estudiados; en particular, para $\mathbf{T}_{21}$ y $\mathbf{T}_{22}$ se obtiene la ecuación de Schrödinger para la partícula libre.

Comencemos con el conjuntos de generadores $\{\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_8\}$; entonces, a partir de (2.61) obtenemos

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{4}\left(5 + 3\tanh^2\xi\right)\right]\psi_a = 2\frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{2.84}$$

que tiene dos estados ligados con autovalores positivos

$$\frac{w_{a,0}^2}{m^2} = \left(\frac{\sqrt{7}+4}{8}\right), \tag{2.85}$$

$$\frac{w_{a,1}^2}{m^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}. \tag{2.86}$$

Para verificar (2.85, 2.86), basta con reescribir (2.84) en términos del potencial de Pöuchl-Teller.

En los casos identificados con $\{\mathbf{T}_9, \ldots, \mathbf{T}_{14}\}$ y $\{\mathbf{T}_{15}, \ldots, \mathbf{T}_{20}\}$ tenemos (signo más para el primer conjunto de generadores, signo menos para el segundo conjunto)

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \tanh\xi\left(\tanh\xi \pm 1\right)\right]\psi_a = 2\frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{2.87}$$

que ya estudiamos en la sección anterior y donde verificamos que no presenta en su espectro de autofunciones estados con autovalores negativos.

Finalmente, para $\mathbf{T}_{23}$ y $\mathbf{T}_{24}$ encontramos

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{2}\left(5 + 9\sqrt{\frac{3}{5}}\tanh^2\xi\right)\right]\psi_{23} = 2\frac{w_{23}^2}{m^2}\psi_{23} \tag{2.88}$$

and

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{3}{10}\tanh^2\xi - \left(1 + \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\psi_{24} = 2\frac{w_{24}^2}{m^2}\psi_{24}, \tag{2.89}$$

respectivamente, con potenciales negativos en cada problema. En el primer caso, el potencial corresponde a una barrera acotada entre $(-(5+9\sqrt{3/5})/2, -5/2]$; por tanto

$$\frac{w_{23}^2}{m^2} > -\frac{1}{4}\left(5 + 9\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \tag{2.90}$$

En el segundo caso, luego de reescribir (2.89) en términos del potencial de Pöuchl-Teller, se encuentran dos estados ligados con autovalores negativos

$$\frac{w^2_{24,0}}{m^2} = -\frac{3}{40}\left(15+6\sqrt{15}-\sqrt{85}\right), \tag{2.91}$$

$$\frac{w^2_{24,1}}{m^2} = -\frac{1}{40}\left(25+18\sqrt{15}-\sqrt{85}\right). \tag{2.92}$$

Pese a la inestabilidad en la dirección de lo generadores $\mathbf{T}_{23}$ y $\mathbf{T}_{24}$, el término de orden ϵ^2 en (2.57) va como $3{,}14m^2$ más la suma de dos cantidades positivas y como consecuencia de ello, la energía de (2.44) es menor en comparación con la energía del sistema perturbado.

Capítulo 3

Induciendo el rompimiento de $SO(10)$ con un *kink* no abeliano

El objetivo ahora consiste en hallar soluciones tipo kink a una teoría $SO(10)$. Las configuraciones a las que haremos referencia ya fueron reportadas en las Refs. [21, 22]; no obstante, aquí queremos dar nuestras versión de las mismas como un preliminar tanto del análisis de estabilidad como de la extensión a gravitación de tales escenarios, aspectos no discutidos en las referencias mencionadas.

Entonces, como punto de partida consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial^m \mathbf{\Phi}\partial_m \mathbf{\Phi}) - V(\mathbf{\Phi}), \tag{3.1}$$

$$V(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}m^2\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + \frac{1}{4}h\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2)^2 + \frac{1}{4}\lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4) + V_0, \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{\Phi}$ es un múltiplete escalar en la representación 45 de $SO(10)$ que transforma según la regla

$$\mathbf{\Phi} \to \mathbf{O}\mathbf{\Phi}\mathbf{O}^T, \tag{3.3}$$

con $\mathbf{O}$ un elemento de $SO(10)$, una matriz 10×10 real y ortogonal. Adicionalmente, nótese que $\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) = -\sum(\phi_{ij})^2$ y que cada componente independiente del campo se suma dos veces en $\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2)$; por eso, la ausencia del signo menos en el primer témino del potencial y la presencia del factor de $1/4$ en el término cinético del Lagrangiano. Por otro lado, ya que $\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^3)$ es identicamente nulo, el modelo es simétrico respecto a Z_2. Ahora bien, esto último no implica que Z_2 está contenido en $SO(10)$; de hecho, en una situación más general, por ejemplo tres múltipletes independientes en la representación 45, el término cúbico $\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_3)$ es distinto de cero, además de ser compatible con $SO(10)$ y violar la simetría Z_2.

Es bien conocido que para $\lambda > 0$ el vev del campo está determinado por

$$\mathbf{\Phi}_0 = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}), \qquad \boldsymbol{\kappa} = i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

con $\boldsymbol{\sigma}_2$ la segunda matriz de Pauli, y que $SU(5)$ es el grupo de la simetría residual cuando $SO(10)$ es espontáneamente roto por (3.4) [30]. Del mismo modo ocurre para cualquier comibinación de $\boldsymbol{\kappa}$ y $-\boldsymbol{\kappa}$ en la diagonal de $\mathbf{\Phi}_0$. Las diferentes combinaciones se pueden clasificar en dos clases, donde los miembros de una clase están conectados por una transformación de $SO(10)$ mientras que cada clase está relacionada por un cambio global de signo. Adicionalmente, por clase existen tres miembros representativos, cualquier otro corresponde a una permutación de uno de ellos. Consideremos la siguiente notación $\boldsymbol{\kappa} \to +$, análogamente $-\boldsymbol{\kappa} \to -$; entonces

$$\text{Clase 1:} \qquad (+,+,+,+,+); \qquad (+,+,+,-,-); \qquad (+,-,-,-,-). \tag{3.5}$$

$$\text{Clase 2:} \qquad (-,-,-,-,-); \qquad (-,-,-,+,+); \qquad (-,+,+,+,+). \tag{3.6}$$

Una pared de dominio interpola asintóticamente entre vev del campo ubicados en diferentes clases; es decir, debe satisfacer la condición

$$\boldsymbol{\Phi}(z=-\infty) = -\mathbf{O}\boldsymbol{\Phi}(z=+\infty)\mathbf{O}^T, \tag{3.7}$$

donde $\boldsymbol{\Phi}(z=\pm\infty)$ es un miembro de la Clase 1,2; y de todas las posibilidades sólo tres son diferentes. Sin perdida de generalidad, las podemos asociar a las siguientes condiciones de borde

$$\boldsymbol{\Phi}(z=-\infty) = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\mathrm{diag}(-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa}) \tag{3.8}$$

y

$$\boldsymbol{\Phi}(z=+\infty) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}), \\ \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa}), \\ \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa},-\boldsymbol{\kappa}). \end{cases} \tag{3.9}$$

A continuación, integremos las ecuaciones de movimiento de (3.1) en correspondencia con las condiciones de borde prescritas en infinito.

3.1. Soluciones

Para obtener las solucione tipo *kink* conviene escribir el campo en términos de κ

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa}f_1,\boldsymbol{\kappa}f_2,\boldsymbol{\kappa}f_3,\boldsymbol{\kappa}f_4,\boldsymbol{\kappa}f_5); \qquad f_i = f_i(z), \quad i=1,\ldots,5; \tag{3.10}$$

de esta manera, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange encontramos

$$f_i'' = 2\left(-m^2 + 2h\sum_{j=1}^{5} f_j^2\right) f_i + 2\lambda f_i^3, \tag{3.11}$$

que corresponde a un sistema de cinco ecuaciones acopladas para los f_i. No obstante, escogiendo

$$h = 0, \tag{3.12}$$

es posible hallar soluciones exactas compatibles con las condiciones de bordes indicadas.

La primera solución, la asociada a las condiciones de borde diferenciadas por un signo global, $(-,-,-,-,-)$ y $(+,+,+,+,+)$, viene dada por

$$f_{Ci} = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\tanh(mz), \qquad \text{para } i = 1,\ldots,5. \tag{3.13}$$

Mientras que para las dos condiciones de borde restantes, $(-,-,-,-,-);(+,+,+,-,-)$ y $(-,-,-,-,-);(+,-,-,-,-)$, se tiene

$$f_{Ai} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\tanh(mz), & \text{si } i = 1,\ldots,3; \\ \\ \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, & \text{si } i = 4,5 \end{cases} \tag{3.14}$$

y

$$f_{Bi} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\tanh(mz), & \text{si } i = 1; \\ \\ \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, & \text{si } i = 2,\ldots,5, \end{cases} \tag{3.15}$$

respectivamente; las etiquetas C, A y B para facilitar la identificación de las paredes. Nótese que cada una de ellas guarda relación con un potencial escalar $V(f)$, con $f = \tanh(mz)$; es decir,

$$V_C(f) = \frac{5m^4}{2\lambda}f^4 - \frac{5m^4}{\lambda}f^2 + V_0, \tag{3.16}$$

$$V_A(f) = \frac{3m^4}{2\lambda}f^4 - \frac{3m^4}{\lambda}f^2 - \frac{m^4}{\lambda} + V_0, \tag{3.17}$$

$$V_B(f) = \frac{m^4}{2\lambda}f^4 - \frac{m^4}{\lambda}f^2 - \frac{2m^4}{\lambda} + V_0, \tag{3.18}$$

todos distintos entre sí y por consiguiente en correspondencia con tres escenarios fisicamente diferentes.

La primera solución la excluiremos del análisis subsiguiente, ya que, en comparación con las otras dos, sus propiedades y efectos son menos interesantes. Sugerimos la Ref. [21] para mayores detalles al respecto.

En relación con las paredes de interés, (3.14) y (3.15), los patrones de simetría residuales quedan determinados como sigue: mientras en los extremos interpolan entre

$$SU(5)_- \qquad \text{y} \qquad SU(5)_+^A \tag{3.19}$$

y

$$SU(5)_- \qquad \text{y} \qquad SU(5)_+^B, \tag{3.20}$$

respectivamente; en el centro inducen

$$SO(6) \times SU(2) \tag{3.21}$$

y

$$SU(4) \times SO(2) \tag{3.22}$$

correspondientemente.

Se puede verifica tanto la invarianza de (3.4) bajo transformaciones de $SU(5)$ como las simetrías residuales (3.21) y (3.22) en el centro de las paredes apelando a la genaralización del conocido mapa, $\mathcal{M}$, entre $U(1)$ y $SO(2)$,

$$\mathcal{M}\left(e^{i\theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Revisemos esto con cierto detalle.

Como punto de partida consideremos que $\mathcal{M}$, ahora, es un mapa entre matrices $n \times n$ de números complejos, digamos $\mathbf{U}$, y matrices $2n \times 2n$ de números reales, con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{M}(\mathbf{U}^\dagger) = \mathcal{M}(\mathbf{U})^T$;
2. $\mathcal{M}(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) = \mathcal{M}(\mathbf{1}_{5\times 5}) = \mathbf{1}_{10\times 10}$;
3. $\mathcal{M}(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) = \mathcal{M}(\mathbf{U})\mathcal{M}(\mathbf{U}^\dagger) = \mathcal{M}(\mathbf{U})\mathcal{M}(\mathbf{U})^T$.

Particularmente, si $\mathbf{U}$ es un elemento de $SU(5)$ entonces $\mathcal{M}$ es un mapa entre $SU(5)$ y $SO(10)$. Establecido esto, probemos las aseveraciones anteriores.

En relación con la invarianza del vacío, nótese que

$$\mathbf{\Phi}_0 = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\mathcal{M}(-i\mathbf{1}_{5\times 5}). \tag{3.24}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_0 &= \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\mathcal{M}\left(\mathbf{U}(-i\mathbf{1}_{5\times 5})\mathbf{U}^\dagger\right) \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}}\mathcal{M}(\mathbf{U})\mathcal{M}(-i\mathbf{1}_{5\times 5})\mathcal{M}(\mathbf{U}^\dagger) \\ &= \mathcal{M}(\mathbf{U})\mathbf{\Phi}_0\mathcal{M}(\mathbf{U})^T. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por otra parte, con respecto a las simetrías residuales en el centro de las paredes, la soluciones A y B se reducen a matrices 10×10, antisimétricas, con bloques nulos a lo largo de la diagonal de dimensiones 6×6 para A y 2×2 para B; o dicho de otra manera, con bloques distintos de cero de dimensiones 4×4 y 8×8 para A y B, respectivamente. Los bloques nulos asociados al grupo $SO(N)$; los bloques distintos de cero, de acuerdo con $\mathcal{M}$, en correspondencia con el grupo $SU(N)$.

Por último, para profundizar sobre otros tópicos que guardan relación con la intersección de las simetrías residuales en los extremos y la vinculación del grupo resultante con el mecanismo de localización de Dvali & Shifman [34], aspecto que por estar fuera del alance de este trabajo no es discutido aquí, nuevamente recomendamos las Refs. [21, 22].

3.2. Estabilidad perturbativa

Evaluemos a continuación la respuesta de cada escenario frente a pequeñas excitaciones inducidas sobre las paredes. Para ellos, consideremos

$$E = \int dz \left[-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}'_{A,B} + \epsilon\mathbf{\Psi}')^2 + V(\mathbf{\Phi}_{A,B} + \epsilon\mathbf{\Psi}) \right]; \qquad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{3.26}$$

donde las desviaciones van en la dirección de los 45 generadores de $SO(10)$[1]

$$\mathbf{\Psi} = \sum_{a=1}^{45} \psi_a \mathbf{T}_a \tag{3.27}$$

tal que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{T}_a \mathbf{T}_b\right) = -2\delta_{ab}. \tag{3.28}$$

Entonces, a segundo orden en ϵ obtenemos una ecuación similar a (2.57) pero con V_{ab} dado por

$$V_{ab} = -m^2\delta_{ab} + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2_{A,B}\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b) + \frac{\lambda}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_a\mathbf{\Phi}_{A,B}\mathbf{T}_b), \tag{3.29}$$

donde la doble suma para A y B puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=1}^{45} \psi_a \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\delta_{ab} + V_{ab} \right) \psi_b \;&=\; \sum_{a=1}^{45} w_a^2 \psi_a^2 \\
&+\; m^2 \tanh^2(mz) \sum_{(b,c)} \left(\psi_b - \psi_c\right)^2 + m^2 \tanh^2(mz) \sum_{(d,e)} \left(\psi_d + \psi_e\right)^2 \\
&+\; m^2 \sum_{(k,l)} \left(\tanh(mz)\psi_k - \psi_l\right)^2 + m^2 \sum_{(m,n)} \left(\tanh(mz)\psi_m + \psi_n\right)^2 \\
&+\; m^2 \left(\psi_{43} - \psi_{44}\right)^2 + m^2 \left(\psi_{42} + \psi_{45}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=1}^{45} \psi_a \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\delta_{ab} + V_{ab} \right) \psi_b \;&=\; \sum_{a=1}^{45} w_a^2 \psi_a^2 \\
&+\; m^2 \sum_{(b,c)} \left(\tanh(mz)\psi_b - \psi_c\right)^2 + m^2 \sum_{(d,e)} \left(\tanh(mz)\psi_d + \psi_e\right)^2 \\
&+\; m^2 \sum_{(k,l)} \left(\psi_k - \psi_l\right)^2 + m^2 \sum_{(m,n)} \left(\psi_m + \psi_n\right)^2,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

[1] Los generadores de $SO(N)$ son matrices antisimétricas $N \times N$ reales cuyos elementos están definidos por $(T_{ij})_{kl} = -\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$. Para determinar las 45 matrices asociadas a $SO(10)$ sugerimos el siguiente código en Mathematica: `Do[T[i,j]=Table[-KroneckerDelta[i,k] KroneckerDelta[j,l]+KroneckerDelta[i,l] KroneckerDelta[j,k],{k,10}, {l,10}],{i,1,10},{j,1,10}]; Do[If[i<j,Print[T[i,j]//MatrixForm]], {i,1,10},{j,1,10}]`

respectivamente; con ψ_a, w_a^2 determinados tanto para (3.30) como para (3.31) por el problema de autovalores

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2} + V_{aa}\right)\psi_a = w_a^2\psi_a. \tag{3.32}$$

Los índices entre paréntesis en (3.30) y (3.31) se entienden como pares ordenados y corren, de acuerdo con cada caso, como se indica a continuación:

$$(b,c) = (7,14); (6,15); (9,16); (23,28); \tag{3.33}$$
$$(d,e) = (8,17); (22,29); \tag{3.34}$$
$$(k,l) = (11,18); (13,20); (25,30); (27,32); (35,38); (37,40); \tag{3.35}$$
$$(m,n) = (10,19); (12,21); (24,31); (26,33); (34,39); (36,41) \tag{3.36}$$

y

$$(b,c) = (7,14); (6,15); (9,16); (11,18); (13,20); \tag{3.37}$$
$$(d,e) = (8,17); (10,19); (12,21); \tag{3.38}$$
$$(k,l) = (23,28); (25,30); (27,32); (35,38); (37,40); (43,44); \tag{3.39}$$
$$(m,n) = (22,29); (24,31); (26,33); (34,39); (36,41); (43,45). \tag{3.40}$$

Evaluemos tanto el signo de (3.30) como de (3.31) y para ello conviene cambiar de variable

$$\xi = mz. \tag{3.41}$$

Comencemos con los generadores de Cartan del grupo. Entonces, si consideramos $\{\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_3\}$ para el primer caso y $\mathbf{T}_1$ para el segundo, (3.32) se reduce

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 3\tanh^2\xi - 1\right)\psi_a = \frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{3.42}$$

con dos estados ligados en correspondencia con los autovalores

$$\frac{w_{a,0}^2}{m^2} \;=\; 0, \tag{3.43}$$

$$\frac{w_{a,1}^2}{m^2} \;=\; \frac{3}{2}. \tag{3.44}$$

Por otra parte, cuando se trata de $\{\mathbf{T}_4, \mathbf{T}_5\}$ para A y de $\{\mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_5\}$ para B, encontramos

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\right)\psi_a = \frac{w_a^2}{m^2}\psi_a, \tag{3.45}$$

con autovalores acotados de la siguiente manera

$$\frac{w_a^2}{m^2} > 2. \tag{3.46}$$

Ahora, fuera de los generadores de Cartan estos son los casos encontrados:

Con respecto a los generadores $\{\mathbf{T}_6, \ldots, \mathbf{T}_9;\ \mathbf{T}_{14}, \ldots, \mathbf{T}_{23};\ \mathbf{T}_{28}, \ldots, \mathbf{T}_{33};\ \mathbf{T}_{38}, \ldots, \mathbf{T}_{41}\}$ y $\{\mathbf{T}_6, \ldots, \mathbf{T}_{13}\}$ para A y B, correspondientemente, (3.32) toma la forma

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \tanh^2\xi - 1\right)\psi_a = \frac{w_a^2}{m^2}\psi_a \tag{3.47}$$

con dos autofunciones localizadas de autovalores

$$\frac{w_{a,0}^2}{m^2} = \frac{3}{2}, \tag{3.48}$$

$$\frac{w_{a,1}^2}{m^2} = 2. \tag{3.49}$$

Si nos referimos a los escenarios A y B en relación con $\{\mathbf{T}_{10}, \ldots, \mathbf{T}_{13}; \mathbf{T}_{24}, \ldots, \mathbf{T}_{27}; \mathbf{T}_{34}, \ldots, \mathbf{T}_{37}; \mathbf{T}_{42}, \ldots, \mathbf{T}_{45}\}$ y $\{\mathbf{T}_{14}, \ldots, \mathbf{T}_{45}\}$, respectivamente; las autofunciones correspondientes están asociadas al caso trivial de (3.32): potencial nulo.

En resumen, ya que en todos los casos, tanto para A como para B, el potencial es positivo, es fácil verificar que el término proporcional a ϵ^2 en (2.57) también lo es. Por tanto, (3.14) y (3.15) corresponden a configuraciones estables de la teoría $SO(10)$ (3.1, 3.2).

Capítulo 4

El *kink* no abeliano como un mundo brana auto-gravitante

En lo que sigue consideraremos la extensión a espacio-tiempo curvo de las paredes de dominio no abelianas encontradas en los Capítulos anteriores. En contraste con tales escenarios, donde es suficiente considerar un potencial de cuarto orden para recuperar soluciones en correspondencia con las condiciones de borde prescritas, aquí se requiere incluir términos de sexto orden en el potencial para compensar en las ecuaciones de movimiento de los coeficientes del campo, el término proveniente de la gravitación y de esta manera volver a obtener las soluciones que inducen los rompimiento de simetría estudiados en los Capítulos 2 y 3.

Debemos señalar que el análisis de estabilidad de las soluciones encontradas aquí no forma parte de los objetivos de este trabajo y por tanto no será presentado.

4.1. El *kink* auto-gravitante en $SU(5)$

Para realizar la extensión a espacio-tiempo curvo de las paredes no abelianas encontradas en el Capítulo 2, tomemos como punto de partida la teoría en $(4+1)$ definida por la siguiente Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}R - \mathrm{Tr}(\partial_m \mathbf{\Phi}\partial^m \mathbf{\Phi}) - V(\mathbf{\Phi})\right], \tag{4.1}$$

donde R es el escalar de curvatura, g el determinante de la métrica, y al igual que en el caso plano, $\mathbf{\Phi}$ es un campo que transforma en la reprsentación adjunta de $SU(5)$ y $V(\mathbf{\Phi})$ un potencial invariante bajo la acción del grupo.

Para esta teoría escogeremos un potencial de sexto orden sin términos impares de tal manera que $SU(5)\times Z_2$ corresponde al grupo de simetría de la Lagrangiana y resulte factible encontrar soluciones del tipo pared de dominio,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{\Phi}) &= -m^2\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + h(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2))^2 + \lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4) \\ &+ \alpha(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}^2)^3 + \beta(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}^3)^2 + \gamma\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4)\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + V_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

V_0 será ajustada en correspondencia con la constante cosmológica cinco-dimensional del escenario.

Para la métrica tomamos el siguiente *ansatz* en coordenadas de longitud propia y con simetría plano paralela

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2, \qquad \mu,\nu = 0,\ldots,3, \tag{4.3}$$

con

$$A = -\frac{v^2}{9}\left[2\ln\left(\cosh(kz)\right) + \frac{1}{2}\tanh^2(kz)\right]; \tag{4.4}$$

y donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica cuatro-dimensional de Minkowski; v y k constante que guardan relación con los coeficientes del potencial. Entonces, si expandimos el campo en términos de los generadores diagonales de $SU(5)$, así como en (2.9), a partir de (4.1) se encuentra

$$3A'' = -\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'^2\right), \tag{4.5}$$

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -V(\mathbf{\Phi}), \tag{4.6}$$

y

$$a'' + 4A'a' = \frac{\partial V}{\partial a}, \qquad b'' + 4A'b' = \frac{\partial V}{\partial b}, \tag{4.7}$$

$$c'' + 4A'c' = \frac{\partial V}{\partial c}, \qquad d'' + 4A'd' = \frac{\partial V}{\partial d}. \tag{4.8}$$

Consideremos ahora el problema de hallar dos soluciones, identificadas nuevamente como A y B, al sistema de ecuaciones (4.5 - 4.8) compatibles con las condiciones de borde

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_A(z=+\infty) &= v\sqrt{\frac{3}{5}}\mathrm{diag}(2,-3,2,2,-3)\\ &= v\left[\sqrt{15}\left(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_{23}\right) + \left(\mathbf{T}_{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}_8\right)\right],\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_A(z=-\infty) &= v\sqrt{\frac{3}{5}}\mathrm{diag}(3,-2,-2,3,-2)\\ &= v\left[\sqrt{15}\left(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_{23}\right) - \left(\mathbf{T}_{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}_8\right)\right],\end{aligned} \tag{4.10}$$

si nos referimos al escenario A; y

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_B(z=+\infty) &= \frac{v}{6\sqrt{10}}\mathrm{diag}(1,1,1,1,-4)\\ &= \frac{v}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathbf{T}_{23} + \frac{v}{2\sqrt{6}}\mathbf{T}_{24},\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_B(z=-\infty) &= \frac{v}{6\sqrt{10}}\mathrm{diag}(-1,-1,-1,4,-1)\\ &= \frac{v}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathbf{T}_{23} + \frac{v}{2\sqrt{6}}\mathbf{T}_{24},\end{aligned} \tag{4.12}$$

cuando se trate del escenario B.

4.1.1. Escenario A

En relación con las condiciones de borde (4.9, 4.10), nuevamente es conveniente vincular los coeficientes del campo (2.9) según (2.20). De esta manera, el sistema (4.7 - 4.8) se reduce a un par de ecuaciones acopladas para a y d,

$$\begin{aligned} a''+4a'A' = & -\frac{a}{20}\left[20m^2-6\left(20h+3\lambda\right)d^2-9\left(60\alpha-18\beta+19\gamma\right)d^4\right] \\ & -\frac{a^3}{10}\left[5\left(4h+\lambda\right)+3\left(60\alpha+9\beta+11\gamma\right)d^2\right] \\ & +\frac{3a^5}{4}\left(4\alpha+\gamma\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} d''+4d'A' = & -\frac{d}{20}\left[20m^2-2\left(20h+3\lambda\right)a^2-\left(60\alpha+9\beta+11\gamma\right)a^4\right] \\ & +\frac{3d^3}{10}\left[20h+13\lambda+\left(60\alpha-18\beta+19\gamma\right)a^2\right] \\ & +\frac{27d^5}{20}\left[20\alpha+9\beta+13\gamma\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para desacoplar las ecuaciones anteriores basta con relacionar los parámetros de la siguiente forma

$$h=-\frac{3\lambda}{20}, \qquad \alpha=-\frac{41\gamma}{180}, \qquad \beta=\frac{8\gamma}{27}; \tag{4.15}$$

así pues, el problema se simplifica y ahora consiste en hallar una solución tipo *kink* al conjunto de ecuaciones[1]

$$a''+4a'A' = -m^2a+\frac{\lambda a^3}{5}+\frac{\gamma a^5}{15}, \qquad a(z=\pm\infty)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}v, \tag{4.16}$$

$$d''+4d'A' = -m^2d+3\lambda d^3+15\gamma d^5, \qquad d(z=\pm\infty)\pm\frac{v}{2\sqrt{10}}. \tag{4.17}$$

No es dfícil verificar que la solución al problema anterior está determinada por

$$a=v\sqrt{15}, \qquad d=v\tanh(kz), \tag{4.18}$$

donde

$$v = \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{-\left(\frac{\lambda}{\gamma}+\frac{45}{2}\right)}, \tag{4.19}$$

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\gamma\left(\frac{\lambda}{\gamma}+\frac{45}{2}\right)}, \tag{4.20}$$

$$m = \frac{3}{8\sqrt{5}}\sqrt{-\gamma\left(\frac{\lambda}{\gamma}+\frac{45}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{\gamma}-\frac{15}{2}\right)}, \tag{4.21}$$

[1] En ausencia de los términos de sexto orden indicados en el potencial (4.2), no es posible llegar a (4.17) con el término de quinto orden para d, requerido para obtener un *kink* compatible con las condiciones de borde.

con

$$\lambda > 0, \qquad \gamma < 0, \qquad \frac{\lambda}{\gamma} < -\frac{45}{2}, \tag{4.22}$$

que es el espacio de parámetros donde el *kink* no abeliano es real.

Con respecto a V_0 en (4.2), conviene escogerlo como sigue

$$V_0 = -\frac{3}{80}\gamma\left(\frac{45}{4} - \frac{\lambda}{\gamma}\right)\left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{45}{2}\right)^2; \tag{4.23}$$

tal que, la constante cosmológica del escenario viene dada por

$$\Lambda = -\frac{1}{5}V_0. \tag{4.24}$$

Nótese que $V = V(d) + V(a) + V_0$; entonces, para $V(a) + V_0 = 0$ se tiene que $V(z = \pm\infty) = \Lambda$.

Por tanto, el *kink* no abeliano auto-gravitante,

$$\mathbf{\Phi}_A = v\left[\sqrt{15}\left(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_{23}\right) + \tanh(kz)\left(\mathbf{T}_{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}_8\right)\right], \tag{4.25}$$

además de interpola asintóticamente entre dos espacio-tiempos Anti-de Sitter (AdS_5) con constante cosmológica dada por (4.24); induce, en los extremos, el rompimiento de simetría

$$SU(5) \times Z_2 \to \frac{SU(3)_\pm \times SU(2)_\pm \times U(1)_\pm}{Z_3 \times Z_2}, \tag{4.26}$$

y en el centro, la simetría residual

$$\frac{SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)}{Z_2 \times Z_2}, \tag{4.27}$$

tal y como se esperaba según las condiciones de borde prescritas.

4.1.2. Escenario B

De acuerdo con las condiciones (4.11, 4.12), lo más conveniente es determinar un par de ecuaciones para c y d haciendo $a = b = 0$ en (4.7 - 4.8). De esta manera encontramos

$$\begin{aligned} c'' + 4A'c' = & - \frac{c}{120}\left[120m^2 - 12\left(10h + 9\lambda\right)d^2 - \left(90\alpha + 18\beta + 61\gamma\right)d^4\right] \\ & + \frac{c^3}{20}\left[10\left(2h + \lambda\right) + \left(30\alpha + 27\beta + 23\gamma\right)d^2\right] \\ & + \frac{3}{8}c^5\left(2\alpha + \gamma\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

y

$$\begin{aligned} d'' + 4A'd' = & - \frac{d}{40}\left[40m^2 - 4\left(10h + 9\lambda\right)c^2 - \left(30\alpha + 27\beta + 23\gamma\right)c^4\right] \\ & + \frac{d^3}{60}\left[60h + 14\lambda + \left(90\alpha + 18\beta + 61\gamma\right)c^2\right] \\ & + \frac{d^5}{40}\left(30\alpha + \beta + 7\gamma\right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede desacoplar relacionando los parámetros como sigue

$$\lambda = -\frac{10}{9}h, \qquad \alpha = -\frac{137}{210}\gamma, \qquad \beta = -\frac{8}{63}\gamma, \tag{4.30}$$

y el problema se reduce a resolver dos ecuaciones con condiciones de bordes para c y d compatibles con (4.11, 4.12),

$$c'' + 4A'c' = -m^2 c + \frac{4h}{9}c^3 - \frac{4\gamma}{35}c^5, \qquad c(z = \pm\infty) = \frac{v}{6}\sqrt{\frac{5}{2}} \tag{4.31}$$

$$d'' + 4A'd' = -m^2 d + \frac{20h}{27}d^3 - \frac{20\gamma}{63}d^5, \qquad d(z = \pm\infty) = \pm\frac{v}{2\sqrt{6}}. \tag{4.32}$$

Entonces, para c y d encontramos

$$c = \frac{v}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad d = \frac{v}{2\sqrt{6}}\tanh(kz), \tag{4.33}$$

donde

$$v = \sqrt{14\left(\frac{h}{\gamma} - \frac{27}{14}\right)}, \tag{4.34}$$

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{42}}\sqrt{14\gamma\left(\frac{h}{\gamma} - \frac{27}{14}\right)}, \tag{4.35}$$

$$m = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{5}{21}}\sqrt{\gamma\left(\frac{h}{\gamma} - \frac{27}{14}\right)\left(\frac{h}{\gamma} + \frac{9}{14}\right)}; \tag{4.36}$$

con las siguientes restricciones para el espacio de parámetros

$$h > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \frac{h}{\gamma} > \frac{27}{14}. \tag{4.37}$$

Para determinar la constante cosmológica del espacio-tiempo asociado a este escenario, en (4.2) escogemos, $V(c) + V_0 = 0$, y por eso

$$V_0 = \frac{1225}{17496}\gamma\left(\frac{h}{\gamma} + \frac{27}{28}\right)\left(\frac{h}{\gamma} - \frac{27}{14}\right)^2. \tag{4.38}$$

Así, cuando d toma su valor asintótico, $V(z = \pm\infty) = \Lambda$, con

$$\Lambda = -\frac{3}{5}V_0. \tag{4.39}$$

Por tanto, el escenario B está determinado por el *kink* no abeliano

$$\mathbf{\Phi}_B = v\left[\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathbf{T}_{23} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\tanh(kz)\mathbf{T}_{24}\right], \tag{4.40}$$

que es fuente del espacio-tiempo (4.3) asintóticamente AdS_5. Adicionalmente, como era de esperar, en los extremos y en el centro las simetrías residuales están determinadas por

$$\frac{SU(4)_\pm \times U(1)_\pm}{Z_4} \tag{4.41}$$

y

$$\frac{SU(3) \times U(1) \times U(1)}{Z_3}, \tag{4.42}$$

respectivamente.

4.1.3. Comentarios sobre los Escenarios A y B

Si bien es cierto que los escenarios determinados por la métrica (4.3) y los campos (4.25) y (4.40) inicialmente fueron encontrados en [24], el enfoque que hemos mostrado en las dos secciones precedentes para volverlas a recuperar es diferente. Mientras en [24] se toma como *ansatz* para el campo

$$\mathbf{\Phi} = f(z)\mathbf{M} + g(z)\mathbf{P}, \tag{4.43}$$

con $\mathbf{M}$ y $\mathbf{P}$ matrices diagonales 5×5 de traza nulas y normalizadas a $1/2$, a ser determinadas según las condiciones requeridas para desacoplar las ecuaciones para f y g, enfoque que en nuestra opinión hace más complicado el problema, ya que, además de hallar f y g también se debe encontrar $\mathbf{M}$ y $\mathbf{P}$; aquí, hemos expandido el campos como se indica en (2.9) y, como consecuencia de ello, sólo ha sido necesario hallar una solución para los coeficientes del campo en correspondencias con las condiciones prescritas para cada escenario.

Otro aspecto que marca diferencia con [24], guarda relación con el espacio de parámetros de los escenarios. Tanto en el caso A como en el B, hemos encontrado soluciones triparamétricas únicamente reales bajo las restricciones indicadas en (4.22) y (4.37), respectivamente; aspecto que no se discute suficientemente en la mencionada referencia.

Como último comentario, a parte de toda comparación, queremos indicar que las condiciones de borde $\mathbf{\Phi}_{A,B}(\pm\infty)$ minimizan el potential de sexto orden (4.2) y por consiguiente, al igual que en el caso plano, donde el potencial es de cuarto orden, ellos son vev del campo no abeliano. Determinar los vacíos de (4.2) es una tarea difícil; sin embargo, comprobar que $\mathbf{\Phi}_{A,B}(\pm\infty)$ efectivamente lo son, no es tan complicado; basta con verificar que satisfacen respectivamente

$$\begin{aligned} - \quad & 2m^2 \mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^2(\pm\infty) + \lambda \left[-\frac{3}{5}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^2(\pm\infty))^2 + 4\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^4(\pm\infty) \right] \\ + \quad & \gamma \left[-\frac{41}{30}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^2(\pm\infty))^3 + \frac{16}{9}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^3(\pm\infty))^2 + 6\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}^2\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_A^4(\pm\infty) \right] = 0, \end{aligned} \tag{4.44}$$

y

$$\begin{aligned} - \quad & 2m^2 \mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^2(\pm\infty) + h \left[4(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}^2)_B^2(\pm\infty) - \frac{40}{9}\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^4(\pm\infty) \right] \\ + \quad & \gamma \left[-\frac{137}{35}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^2(\pm\infty))^3 - \frac{16}{21}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^3(\pm\infty))^2 + 6\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^2(\pm\infty)\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}_B^4(\pm\infty) \right] = 0, \end{aligned} \tag{4.45}$$

que son las condiciones para extremar el potencial (4.2) en cada caso.

4.2. El *kink* auto-gravitante en $SO(10)$

Para obtener las versiones auto-gravitantes de las soluciones encontradas en la Sección 3.1, tomaremos como punto de partida la teoría $SO(10)$ en $(4+1)$

$$L = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial_m \mathbf{\Phi}\partial^m \mathbf{\Phi}) - V(\mathbf{\Phi})\right], \tag{4.46}$$

donde la métrica viene dada por (4.3, 4.4) y

$$\begin{aligned} V(\mathbf{\Phi}) &= \frac{m^2}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + \frac{h}{4}(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2))^2 + \frac{\lambda}{4}\lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4) \\ &+ \frac{\alpha}{6}(\mathrm{Tr}\mathbf{\Phi}^2)^3 + \frac{\gamma}{6}\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^4)\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^2) + \frac{\mu}{6}\mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^6) + V_0. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Nuevamente conviene expandir el campo como en (3.10); de tal manera que a partir de las ecuaciones de movimiento de (4.46), encontramos

$$3A'' = -\sum_{i=1}^{5} f_i^2 \tag{4.48}$$

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -V(\mathbf{\Phi}) \tag{4.49}$$

y

$$\begin{aligned} f_i'' + 4A'f_i' &= 2\left(-m^2 + 2h\sum_{j=1}^{5} f_j^2\right) f_i + 2\lambda f_i^3 - 2\mu f_i^5 \\ &- 8\alpha f_i\left(\sum_{j=1}^{5} f_j^2\right)^2 + \frac{4\gamma}{3} f_i\left(2f_i^2\sum_{j=1}^{5} f_j^2 - \sum_{j=1}^{5} f_j^4\right); \quad i = 1, \ldots, 5. \end{aligned} \tag{4.50}$$

El sistema de ecuaciones (4.50) podría admitir soluciones numéricas en un espacio de parámetros adecuado; sin embargo, nuestra instensión en esta parte del trabajo consiste en hallar las versiones curvas de (3.14) y (3.15); y para ello, es necesario desacoplar (4.50) imponiendo las siguientes restricciones

$$h = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \gamma = 0, \tag{4.51}$$

que es equivalente a eliminar directamente los términos mezclados.

Entonces, luego de imponer las condiciones de borde,

$$\mathbf{\Phi}(z = -\infty) = v\ \mathrm{diag}(-\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}) \tag{4.52}$$

y

$$\mathbf{\Phi}(z = +\infty) = \begin{cases} v\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \\ \\ v\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \end{cases} \tag{4.53}$$

encontramos

$$f_{Ai} = \begin{cases} v\tanh(kz), & \text{si } i = 1,\ldots,3 \\ \\ v, & \text{si } i = 4,5 \end{cases} \tag{4.54}$$

y

$$f_{Bi} = \begin{cases} v\tanh(kz), & \text{si } i = 1 \\ \\ v, & \text{si } i = 2,\ldots,5 \end{cases} \tag{4.55}$$

en correlación con (4.52, 4.53), donde

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}}, \tag{4.56}$$

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}\right)}, \tag{4.57}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}\right)}, \tag{4.58}$$

supeditados como sigue

$$\lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \frac{\lambda}{\mu} > \frac{9}{2}. \tag{4.59}$$

Nótese que (4.56) satisface la siguiente relación

$$-2v\left(m^2 - \lambda v^2 + \mu v^4\right) = 0, \tag{4.60}$$

que es la condición, restringida por (4.51), para determinar los mínimos de (4.47). Por consiguiente, (4.52, 4.53) son efectivamente vev del campo no abeliano.

Por otra parte, con el fin de hallar la constante cosmológica de cada espacio-tiempo, conviene fijar a V_0 como a continuación se indica por escenario:

$$V_{0A} = \frac{1}{24}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{9}{4}\right)\mu \tag{4.61}$$

para el primero y

$$V_{0B} = \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{9}{4}\right)\mu \tag{4.62}$$

para el segundo. Así, las constantes cosmológicas quedan determinadas como

$$\Lambda_A = -\frac{3}{2}V_{0A} \tag{4.63}$$

y

$$\Lambda_B = -\frac{1}{4}V_{0B}, \tag{4.64}$$

correspondientemente.

Por tanto, los vacíos asociados a estos escenarios son AdS_5 e inducen en los extremos y en el centro los patrones de simetría indicados en (3.19, 3.21) y (3.20, 3.22), según sea el caso.

Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el rompimiento espontáneo de los grupos de simetría $SU(5)$ y $SO(10)$ en correspondencia con una estructura tipo *kink* para el multiplete escalar de las teorías (2.1) y (3.1). Para ello se han integrado las ecuaciones de movimiento respectivas bajo condiciones de borde compatibles con los vev del campo que desencadenan los patrones de ruptura típicos de los grupos señalados.

En el primer modelo, el asociados a la teoría $SU(5)$ definida por (2.1, 2.2), se han recuperado las soluciones (2.25) y (2.44) en correlación con los mínimos no triviales de (2.2); de esta manera en los extremos y el centro de cada escenario se obtienen los patrones de simetría (2.26, 2.28) y (2.45, 2.47), respectivamente. Particularmente en los extremos, debido a la condiciones de borde impuestas para el *kink* se obtienen diferentes incrustaciones de los grupos residuales en $SU(5)$.

Similarmente, para el segundo modelo descrito por (3.1, 3.2), simétrico bajo $SO(10)$, y en correspondencia con las condiciones de borde (3.8, 3.9), las soluciones (3.14) y (3.15) han sido determinadas, las cuales asintóticamente inducen distintas incrustaciones de $SU(5)$ en $SO(10)$. A pesar de tratarse de una teoría $SO(10)$ tales configuraciones son factible, ya que los vev del campo impuestos como condiciones de borde no están conectados por una transformación de calibre del grupo [21]. Por otro lado, las simetrías residuales en el centro de cada escenario, (3.21) y (3.22), no guardan relación en ninguno de los casos con la simetría del Modelo Estándar.

Con respecto a la estabilidad de los escenarios, se observa que las excitaciones de la pared en cada modelo se propagan en correspondencia con una ecuación de Schrödinger para cada generador del grupo de simetría respectivo. Recordemos que existen dos paredes por modelo etiquetadas como A y B. En el primero modelo, a pesar de haber encontrado autovalores negativos en la dirección de algunos generadores, (2.78, 2.80) para A y (2.90, 2.91) para B, $E > E[\mathbf{\Phi}_{A,B}]$ y por tanto $\mathbf{\Phi}_{A,B}$ representan las configuraciones de menor energía compatibles con las condiciones de borde respectivas. Para el segundo modelo se llega a la misma conclusión pero de forma más sencilla, ya que en este caso todos los autovalores son positivos.

Finalmente, para introducir gravitación en las paredes no abelianas se requiere considerar en cada modelo el potencial de sexto orden más general posible: (4.2) para el modelo $SU(5)$ y (4.47) para el modelo $SO(10)$. Afortunadamente, la curvatura no impide prescribir las condiciones de bordes requeridas en el caso plano y por tanto las soluciones extendidas, restringidas según el espacio de parámetros respectivo, preservan las simetrías residuales anteriormente discutidas. El efecto de la curvatura se manifiesta en la constante cosmológica negativa de cada espacio-tiempo cinco-dimensional, y está asociada a las condiciones de borde impuestas para cada solución. Por ejemplo, para el modelo $SU(5)$ las constantes cosmológicas (4.24) y (4.39) guardan relación con los vev (4.9, 4.10) y (4.11, 4.12), para A y B respectivamente. Lo propio para el modelo $SO(10)$; es decir, (4.63, 4.64) correlacionadas con (4.52) y (4.53).

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. R. Omar Rodríguez todos sus comentarios y sugerencias generosamente formulados a lo largo de las diferentes etapas de este trabajo. Considérese el presente documento como un producto del proyecto CDCHT 007-RCT-2014.

Bibliografía

[1] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.

[2] M. Gremm. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett.*, B478:434–438, 2000.

[3] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.

[4] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood, and Y. Shirman. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys.*, B581:309–338, 2000.

[5] A. z. Wang. Thick de sitter brane worlds, dynamic black holes and localization of gravity. *Phys. Rev.*, D66:024024, 2002.

[6] D. Bazeia, C. Furtado, and A. R. Gomes. Brane structure from scalar field in warped spacetime. *JCAP*, 0402:002, 2004.

[7] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja, and A. Ramirez. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004.

[8] R. Guerrero, R. O. Rodriguez, and R. Torrealba. De sitter and double asymmetric brane worlds. *Phys. Rev.*, D72:124012, 2005.

[9] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett.*, B125:136–138, 1983.

[10] B. Bajc and G. Gabadadze. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de sitter space. *Phys. Lett.*, B474:282–291, 2000.

[11] C. Ringeval, P. Peter, and J. P. Uzan. Localization of massive fermions on the brane. *Phys. Rev.*, D65:044016, 2002.

[12] R. Koley and S. Kar. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 22:753–768, 2005.

[13] A. Melfo, N. Pantoja, and J. D. Tempo. Fermion localization on thick branes. *Phys. Rev.*, D73:044033, 2006.

[14] R. Guerrero, A. Melfo, N. Pantoja, and R. O. Rodriguez. Hierarchy in a double braneworld. *Phys.Rev.*, D74:084025, 2006.

[15] G.R. Dvali, G. Gabadadze, and M. A. Shifman. (Quasi)localized gauge field on a brane: Dissipating cosmic radiation to extra dimensions? *Phys.Lett.*, B497:271–280.

[16] R. Guerrero, A. Melfo, N. Pantoja, and R. O. Rodriguez. Gauge field localization on brane worlds. *Phys.Rev.*, D81:086004.

[17] A. Kehagias and K. Tamvakis. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504:38–46, 2001.

[18] K. Ghoroku and A. Nakamura. Massive vector trapping as a gauge boson on a brane. *Phys.Rev.*, D65:084017.

[19] R. Guerrero and R. O. Rodriguez. Including gauge symmetry in the localization mechanism of massive vector fields. *Publicaciones en Ciencias y Tecnología*, 7, No. 2:115–126, 2013.

[20] L. Pogosian and T. Vachaspati. Domain walls in $SU(5)$. *Phys.Rev.*, D62:123506, 2000.

[21] E. M. Shin and R. R. Volkas. $O(10)$ kinks: Clash of symmetries on the brane and the gauge hierarchy problem. *Phys.Rev.*, D69:045010, 2004.

[22] A. Davidson, D. P. George, A. Kobakhidze, R. R. Volkas, and K. C. Wali. $SU(5)$ grand unification on a domain-wall brane from an E_6 - invariant action. *Phys.Rev.*, D77:085031, 2008.

[23] T. Vachaspati. A Class of kinks in $SU(N) \times Z_2$. *Phys.Rev.*, D63:105010, 2001.

[24] A. Melfo, R. Naranjo, N. Pantoja, A. Skirzewski, and J. Vasquez. Self-gravitating non-abelian kinks as brane worlds. *Phys.Rev.*, D84:025015, 2011.

[25] B. Felsager. Geometry, Particles and Fields. Spriger, 1st ed. 1983.

[26] A. Melfo and G. Senjanović. Nota para un curso introductorio al Modelo Estándar de Partículas Elementales. *Universidad de Los Andes*, 2004.

[27] G. Senjanović, L. Herrera, and J. Jiménez. II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica. *Universidad de Los Andes*, 1996.

[28] G. Poschl and E. Teller. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Z.Phys.*, 83:143–151, 1933.

[29] R. O. Rodriguez. Campos de calibre, resonancias gravitacionales y mundos brana (Tesis Doctoral). *Universidad de Los Andes*, 2014.

[30] L.-F. Li. Group Theory of the Spontaneously Broken Gauge Symmetries. *Phys.Rev.*, D9:1723–1739, 1974.

[31] W. Greiner and B. Muller. Gauge theory of weak interactions. Spriger, 3rd ed. 2000.

[32] C. V. Sukumar. Supersymmetric quantum mechanics of one-dimensional Systems. *J.Phys.*, A18:2917–2936, 1985.

[33] K. Avinash. Supersymmetry in quantum mechanics. *AIP Conf.Proc.*, 744:133–165, 2005.

[34] G. Dvali and M. Shifman. Domain walls in strongly coupled theories. *Phys.Lett.*, B396:64–69, 1997.