

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA



**PRECESIÓN DE PERIHELIO
VÍA GEODÉSICAS DE LA MÉTRICA
DE UNA SOLUCIÓN MUNDO BRANA**

Por:
Msc. José Luis García R.

Barquisimeto, Enero 2015

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

**PRECESIÓN DE PERIHELIO
VÍA GEODÉSICAS DE LA MÉTRICA
DE UNA SOLUCIÓN MUNDO BRANA**

Por:
Msc. José Luis García R

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoría de
Agregado en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

Barquisimeto, Enero 2015

AGRADECIMIENTOS

La realización del presente trabajo no hubiera sido posible sin todas las personas que me han prestado su apoyo.

Primeramente expreso los más profundos agradecimientos a toda mi familia, la cual me ha apoyado siempre y me han inculcado el sentido de “lucha” por nuestro país. Agradezco especialmente a:

Mis padres Eliseo García y Carmen Rodríguez. Siempre me han regalado sus consejos cuando los he necesitado.

Agradezco a los profesores del Departamento de Física de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”; pues ellos me han prestado su colaboración a nivel personal y profesional en gran medida.

A mis compañeros de la UICM, por ser un ejemplo de profesionalismo y compañerismo. Siempre sale algo provechoso de las tertulias; a todos ustedes mil gracias!!!

Pido disculpas a todos los que se me escaparon de esta lista de agradecimientos y deben estar en ella; bien saben que no gozo de una buena memoria.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1 Modelo de Randall-Sundrum y teorías efectivas sobre una brana	4
1.1 Modelo de Randall-Sundrum	4
1.1.1 Modo cero.	5
1.1.2 Modos masivos	6
1.2 Teorías Efectivas en mundos brana	9
1.2.1 Ecuación de campo efectiva sobre la brana	10
2 Precesión de Perihelio para la solución de Schwarzschild	13
3 El mundo Brana de DMPR	19
3.1 La solución DMPR	19
3.2 Precesión de Perihelio para la solución DMPR	23
4 Precesión de Perihelio vía geodésicas de la métrica DMPR: Un enfoque alternativo	28
Appendices	34
A La ecuación de Gauss	34

B Tensor Energía-Momento 5D	38
C Condiciones de Juntura de Darmois-Israel sobre una 3-brana	40
REFERENCIAS	43

Introducción

Desde hace un poco más de una década una propuesta de mundo brana conocida como el escenario de Randall y Sundrum ha llamado enormemente la atención de una gran parte de la comunidad científica de la física teórica. Las razones de esto se encuentran impresas en un par de artículos publicados por L. Randall y R. Sundrum, en donde en ambos trabajos, el universo cuadridimensional que conocemos es una 3-brana embebida en un espaciotiempo cincodimensional o bulk. También en el modelo se dota a la geometría del bulk con curvatura (Λ) y a la brana con una tensión σ , volviendo a la brana un objeto gravitante que interactúa dinámicamente con el bulk. Esto hace que los modelos sean muy interesantes desde el punto de vista de la Relatividad General.

En el primer artículo [1] se aborda y se resuelve el Problema de Jerarquía que consiste en una enorme brecha entre las escalas naturales de la fuerza gravitacional comparada con las escalas de las otras tres fuerzas fundamentales. Se proponen dos branas de tensión σ_1 y σ_2 embebidas en un bulk AdS_5 localizadas en $y = 0$ y $y = L$ siendo y la coordenada adicional. Se impone además simetría Z_2 por la identificación (x^μ, y) con $(x^\mu, -y)$ y tomando y periódica i.e, que la dimensión extra es compacta con la topología de orbifold S_1/Z_2 . Las ecuaciones de Einstein a resolver son:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \Lambda_5 g_{ab} \quad (1)$$

Requiriendo que la brana preserve la invariancia Lorentz, se elige un ansatz métrico

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (2)$$

Con la métrica y la condiciones de contorno se obtiene que la solución a las ecuaciones de Einstein viene dada por

$$a(y) = e^{-2|y|/L} \quad (3)$$

Además se encuentra que las tensiones en las branas son iguales y opuestas. El término $a(y)$ se conoce como el factor warped y decae exponencialmente desde la brana de tensión positiva a la negativa. Si vivimos en la brana de tensión negativa se muestra (en [1]) que la masa de Plank efectiva M_p medida sobre la brana está dada por:

$$M_p^2 = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}] \quad (4)$$

donde M está en la escala de masa electrodébil y r_c es radio de compactificación de la coordenada adicional. Así podemos entonces ajustar el factor $2kr_c\pi$ hasta alcanzar los ordenes de magnitud que requiere el Problema de Jerarquías.

En el segundo artículo [2] el modelo consta de una sola brana de tensión positiva cuya coordenada adicional y puede ser infinita i.e, no-compacta. La métrica es la misma que en el primer modelo y posee simetría Z_2 . En este trabajo se encuentra la expresión para el potencial newtoniano y se observa que un modo masivo normalizable genera el potencial newtoniano cuadridimensional y que una torre de estados masivos provenientes del hecho que y es infinita genera correcciones a altas energías en el potencial newtoniano. En la sección 1.1 se discute este modelo con más detalle.

Los trabajos de Randall-Sundrum han tenido desde su publicación, varias generalizaciones ([3],[4],[5],[6],[7],[8]) entre otras, basados en branas de espesor finito originadas por paredes de dominio provenientes de un campo escalar y considerando que la brana de Randall-Sundrum (que tienen espesor infinitesimal) son el límite de espesor cero de estas branas gruesas.

Una descripción no perturbativa de la gravitación sobre una 3-brana delgada fué hecha por Shiromizu, Maeda y Sasaki en 2000 [10], donde la idea central es usar las ecuaciones de Gauss-Codazzi de la Geometría Riemanniana para proyectar las ecuaciones de Einstein 5D sobre la brana para obtener ecuaciones de campo de Einstein cuadridimensionales efectivas sobre ella. Estas ecuaciones efectivas poseen dos términos adicionales a la ecuación de Einstein conocida: uno de ellos es un término local a la brana y el otro es un término no-local que proviene del bulk. Si se considera que el espaciotiempo es esféricamente simétrico, estático y vacío, el término local, proporcional a $\tau_{\alpha\beta}$ se anula quedando solamente el no-local jugando un papel de tensor energía-momento inducido en la ecuación de campo de Einstein. Este tensor posee propiedades análogas al tensor energía-momento para la solución de Reissner-Nordström (R-N) de la relatividad general. Por eso es de esperar obtener soluciones de mundos brana cuyo espaciotiempo tenga una estructura matemática semejante a (R-N).

Las primeras soluciones de mundo brana esféricamente simétricos, estáticos y en el vacío fueron encontradas por Dhadich, Maartens, Papadopoulos, Rezanian [11] y por Germani y Maartens en 2001 [12]. En el primero de estos trabajos la solución tiene la forma de la solución (R-N) donde el parámetro Q llamado carga *tídal* juega un papel parecido a la carga eléctrica de (R-N). La solución se encuentra imponiendo $\tau_{\alpha\beta} = 0$ y un tensor de curvatura de Weyl no nulo sobre la brana.

En este contexto, las solución de vacío esféricamente simétrica y estática de las ecuaciones de campo de Einstein fueron encontradas por Schwarzschild en 1916 [13], justo un año después de la formulación de la Relatividad General. De acuerdo al Relatividad General, la métrica de Schwarzschild es la única que describe el espaciotiempo alrededor de un objeto esférico en el universo y forman las bases para el estudio teórico de las pruebas observacionales clásicas de la Relatividad: precesión de perihelio, deflexión

de la luz por un objeto masivo y tiempo de retardo en la señal de radar. En [21], [22] se estudian estas pruebas para el espaciotiempo generado por la solución DMPR encontrando una cota superior para el parámetro Q , usando un formalismo general para espaciotiempos esféricamente simétricos y estáticos desarrollado Bohemer, Harko, De Risi y Lobo (BHLR)

El siguiente trabajo queda estructurado como sigue. En el capítulo 1 se discute acerca del modelo de Randall-Sundrum 2 (RS2), se encuentra el potencial newtoniano perturbando el background métrico. También se desarrollan las ecuaciones de Einstein sobre una 3-brana usando un enfoque no perturbativo muy elegante desarrollado por Shiromizu, Maeda y Sasaki. En el capítulo 2 se estudia la precesión de perihelio para espaciotiempos tipo Schwarzschild. En el capítulo 3, se desarrolla el formalismo BHLR y se estudia la precesión de perihelio para la métrica de Schwarzschild y para la métrica de la solución DMPR. Finalmente se estudia la precesión de perihelio vía las geodésicas de la métrica para la solución DMPR, realizando la integración en las variables $u(\phi)$ y expandiendo a primer orden el término Q/r_0 .

Modelo de Randall-Sundrum y teorías efectivas sobre una brana

1.1 Modelo de Randall-Sundrum

El modelo de mundo brana de Randall-Sundrum 2 (RS-2) [2] consiste de una hipersuperficie ó 3-brana embebida en un espaciotiempo cinco dimensional AdS, con una simetría Z_2 ó de reflexión a lo largo de la dimensión extra z . El background curvo soporta un estado no masivo ligado localizado sobre la brana, con el añadido de una torre de modos masivos de Kaluza-Klein. El estado ligado reproduce la gravedad cuatridimensional sobre la brana, mientras que los modos KK producen correcciones pequeñas al potencial Newtoniano sobre esta. En lo que sigue daremos una breve descripción de este escenario.

Consideremos la métrica de RS-2 en coordenadas conformes

$$g_{ab} = e^{2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dz_a^\mu dz_b^\nu) \quad (1.1)$$

donde $A(z) = -\ln(1+k|z|)$, $k = (|\Lambda|/6)^{1/2}$ asociada a la constante cosmológica negativa del bulk AdS_5 y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Para encontrar la expansión en modos KK del gravitón se parametriza las fluctuaciones del gravitón en la forma estandar

$$g_{ab} = e^{2A(z)} \left((\eta_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}) dx_a^\mu dx_b^\nu + dz_a^\mu dz_b^\nu \right), \quad (1.2)$$

donde el gravitón viene descrito por la componente transversa y sin traza de la perturbación métrica h_{ab} . Imponiendo además en calibre axial \hat{h}_{za} en [6] se encontró que la perturbación viene determinada por la solución a

$$-\frac{1}{2} \nabla^c \nabla_c \hat{h}_{ab} + R_{(ab)}^c{}^d \hat{h}_{cd} + R_{(a}^c \hat{h}_{b)c} = \frac{2}{3} V \hat{h}_{ab}, \quad (1.3)$$

siendo $R_{(ab)}^c{}^d$ y R_a^c los tensores de Riemann y Ricci para la métrica sin perturbar (1.1).

El potencial V para esta métrica viene dado por:

$$V(z) = -\frac{3}{2}A''(z) - 6A'^2(z). \quad (1.4)$$

Sustituyendo los tensores de Riemann, Ricci en (1.3) se obtiene

$$(\partial_z^2 + 3A'(z)\partial_z + \partial^\alpha\partial_\alpha)\hat{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.5)$$

Proponiendo el cambio de variables $\hat{h}_{\mu\nu} = e^{ip \cdot x} e^{A(z)/2} \psi_{\mu\nu}(z)$ se tiene que los modos gravitacionales $\psi_{\mu\nu}(z)$ satisfacen la ecuación tipo Schrodinger

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + V_{QM}\right)\psi_{\mu\nu}(z) = m^2\psi_{\mu\nu}(z) \quad (1.6)$$

donde $p^2 = m^2$, con m la masa cuadridimensional de las excitaciones de Kaluza-Klein. El potencial tipo Mecánico Cuántico escrito en función de la variable métrica $A(z)$ viene dado por

$$V_{QM} = \frac{9}{4}A'^2(z) + \frac{3}{2}A''^2(z), \quad (1.7)$$

que para el caso de Randall-Sundrum es

$$V_{QM} = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(1+k|z|)} - 3k\delta(z). \quad (1.8)$$

El procedimiento a seguir para encontrar la solución a (1.6) es el siguiente: Se encuentra la función de onda del gravitón para el modo cero $m = 0$, se prueba si el modo cero es normalizable. En el caso afirmativo, esto implica que se puede recuperar gravedad Newtoniana sobre la brana. Luego, los modos masivos $m \neq 0$ proveeran las correcciones al potencial debido a la coordenada extra del modelo.

1.1.1. Modo cero.

Para el caso de masa cero, la ecuación (1.6) queda

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + V_{QM}\right]\psi_0(z) = 0. \quad (1.9)$$

El potencial (1.7) puede escribirse

$$V_{QM} = \frac{d^2}{dz^2} (e^{3/2A(z)}) e^{-3/2A(z)}, \quad (1.10)$$

y al sustituirse en (1.9) queda

$$\frac{d^2\psi_0(z)}{dz^2}\psi_0^{-1}(z) = \frac{d^2e^{3/2A(z)}}{dz^2} (e^{3/2A(z)})^{-1} \quad (1.11)$$

de donde se obtiene

$$\psi_0(z) = N_0 e^{3/2A(z)}. \quad (1.12)$$

Normalizando el modo no masivo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(z)|^2 dz = 1, \quad (1.13)$$

haciendo la integración en las regiones $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ y despejando se tiene

$$N_0 = \sqrt{k} \quad (1.14)$$

1.1.2. Modos masivos

La solución a (1.6) viene dada en forma general

$$\psi_m(z) = \psi_{m_l}(z)\Theta(-z) + \psi_{m_R}(z)\Theta(+z) \quad (1.15)$$

donde $\psi_{m_l}(z)$, $\psi_{m_R}(z)$ son las soluciones a ambos lados de la brana, las cuales vienen dadas por

$$\psi_{m_l}(z) = \frac{N_m}{f_l^{-1/2}(z)} [AJ_2(mf_l(z)) + BY_2(mf_l(z))] \quad (1.16)$$

$$\psi_{m_R}(z) = \frac{N_m}{f_R^{-1/2}(z)} [CJ_2(mf_R(z)) + DY_2(mf_R(z))] \quad (1.17)$$

donde $J_2(x)$ y $Y_2(x)$ son las funciones de Bessel de primer y segunda especie; $f_l(z) = (k^{-1} - z)$ y $f_R(z) = (k^{-1} + z)$. Las constantes A, B, C, D son constantes que se determinaran por las condiciones de integrabilidad de la ecuación de Schrodinger (1.6). La constante N_m viene determinada por la condición de ortonormalización

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{m'}^*(z)\psi_m(z) = \delta(m - m') \quad (1.18)$$

Sin embargo para $m = m'$ la delta de Dirac del lado derecho de la ecuación anterior diverge, y por tanto es necesario usar algún mecanismo de regularización. En [7] se colocan branas reguladoras a cada lado de la brana, posicionadas en z_+ y z_- , truncando así el espacio. Al final se toma $z_{\pm} \rightarrow \infty$. De esta manera, la condición (3.33) queda:

$$\lim_{z_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \int_{z_-}^{z_+} \psi_m^c(z)\psi_m^c(z) dz = 1; \quad (1.19)$$

donde $\psi^c(z)$ es la solución clásica (1.15) de la ecuación (1.6). Usando (1.16), (1.17) y escribiendo convenientemente (1.19) se tiene

$$\frac{1}{z_r N_m^2} = \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{1}{z_r} \left\{ \int_{-z_r}^0 f_l(z) [A J_2[m f_l(z)] + B Y_2[m f_l(z)]]^2 + \int_0^{z_r} f_R(z) [C J_2[m f_R(z)] + D Y_2[m f_R(z)]]^2 \right\} \quad (1.20)$$

cuya integración se realiza considerando el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel cuando sus argumentos son grandes. Integrando e invirtiendo (1.20) queda:

$$N_m^c = \sqrt{\frac{\pi m}{z_r} (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)^{-1}} \quad (1.21)$$

Fijando una constante, digamos $C = 1$ y usando los vínculos (ver [7])

$$\psi_m^c(0) = 0 \quad (1.22)$$

$$\psi_m^c(0^+) = \psi_m^c(0^-) \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dz} \psi_m^c(0^+) - \frac{d}{dz} \psi_m^c(0^-) = -3k \psi_m^c(0) = 0, \quad (1.24)$$

se obtiene el valor para las 3 constantes restantes

$$A = -1 \quad ; \quad B = -D = \frac{J_2[mk^{-1}]}{Y_2[mk^{-1}]} \quad (1.25)$$

Un procedimiento análogo se usa para encontrar la solución distribucional de la ecuación (1.6). La constante de normalización se haya de la misma forma que para la solución clásica

$$N_m^d = \sqrt{\frac{\pi m}{z_r} [\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 + \bar{D}^2]^{-1}}, \quad (1.26)$$

pero ahora los vínculos que determinan las constantes son:

$$\psi_m^d(0^+) = \psi_m^d(0^-) \quad (1.27)$$

$$\eta_m^d(0^+) = -\eta_m^d(0^-) \quad (1.28)$$

donde $\eta_m(z)$ es igual a $\psi_m(z)$ pero son funciones de Bessel de orden 1. El tercer vínculo se obtiene de imponer la ortogonalidad de las soluciones clásica y distribucional

$$(\psi_m^c(z), \psi_m^d(z)) = \int_{-z_r}^{+z_r} \psi_m^c(z) \psi_m^d(z) dz = 0, \quad (1.29)$$

con lo cual se obtiene:

$$A\bar{A} + B\bar{B} + C\bar{C} + D\bar{D} = 0. \quad (1.30)$$

Ahora, de las ecuaciones (1.27) y (1.28) se tiene

$$\bar{A} J_2[mk^{-1}] + \bar{B} Y_2[mk^{-1}] = \bar{C} J_2[mk^{-1}] + \bar{D} Y_2[mk^{-1}] \quad (1.31)$$

$$\bar{A}J_1[mk^{-1}] + \bar{B}Y_1[mk^{-1}] = -\bar{C}J_1[mk^{-1}] + \bar{D}Y_1[mk^{-1}]. \quad (1.32)$$

Fijando $\bar{C} = 1$, el sistema dado por (1.30), (1.31) y (1.32) admite como solución

$$A = -1 \quad ; B = D = -\frac{J_1[mk^{-1}]}{Y_1[mk^{-1}]} \quad (1.33)$$

Usando el valor de las constantes, expandiendo la solución para $m \ll k$ y evaluando la solución distribucional sobre la brana ($z = 0$) queda

$$\psi_m^d(0) \approx -\left(\frac{\pi}{2z_r k}\right)^{1/2} \left[m^{1/2} - \frac{1}{2k^2} \left(\ln\left(\frac{m}{2k}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right) m^{5/2} \right]. \quad (1.34)$$

Las correspondientes densidades de estados para el modo cero $\psi_0(z)$ y para los modos masivos $\psi_m^c(z)$ y $\psi_m^d(z)$, son usados para calcular el Potencial Newtoniano, el cual está dado en el espacio de coordenadas por (ver [8]):

$$V(r) = \frac{e^{-3A(z_b)} m_1 m_2}{4\pi M^3 r} \left[|\psi_0(z_b)|^2 + \frac{4}{3\pi} \int_0^{+\infty} \sum_i |\psi_m^i(z_b)|^2 e^{-mr} z_r dm \right] \quad (1.35)$$

donde se observa la contribución del modo cero gravitacional localizado y una torre de estados masivos de KK. Sustituyendo $\psi_0(z)$, $\psi_m^c(z)$, $\psi_m^d(z)$, evaluando en $z_b = 0$ y realizando la integración se tiene

$$V(r) \simeq \frac{k}{4\pi M^3} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{4}{k^4 r^4} \left(\ln 2kr - \frac{4}{3} \right) \right] + O\left(\frac{1}{r^7}\right) \quad (1.36)$$

El primer término de (1.36) es el potencial newtoniano cuatridimensional usual, el segundo término es la corrección a primer orden reportada por Randall-Sundrum y el último es la corrección a segundo orden reportada por Callin y Finn [8].

Un procedimiento análogo al anterior es usado en [9] pero sin la simetría Z_2 ; lo que implica tener un escenario mundo brana con dos constantes cosmológicas diferentes a cada lado de la brana y por ende se genera una modificación del potencial Newtoniano sobre ella.

En lo que sigue, se derivaran las ecuaciones de Einstein efectivas sobre la 3-brana. El bulk del espaciotiempo se asumira cincodimensional. En principio no se impondrá ninguna condición sobre el bulk, pero luego se asumira simetría Z_2 y confinamiento del tensor energía-momento sobre la brana, en concordancia con los escenarios de mundos brana como el de RS2.

1.2 Teorías Efectivas en mundos brana

En el escenario de mundos brana, nuestro mundo 4-dimensional está descrito por una pared de dominio infinitamente delgada (3-brana ó hipersuperficie), considerada como un subvariedad M con métrica $h_{\alpha\beta}$ embebida en una variedad V con métrica g_{ab} que corresponde con el espaciotiempo 5-dimensional. La curvatura de la brana es *inducida* vía proyección del tensor de curvatura de la variedad M sobre V por medio de la ecuación de Gauss [10] escrita de la forma ¹

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{abcd}e_{\alpha}^a e_{\beta}^b e_{\gamma}^c e_{\delta}^d + K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma} - K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} \quad (1.37)$$

donde $a, b = 0, \dots, 4$ y $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, R_{abcd} es el tensor de Riemann 5-dimensional, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ el tensor de Riemann 4-dimensional, $K_{\alpha\beta}$ el tensor de curvatura extrínseca de M y $e_{\alpha}^a = dx^a/dy^{\alpha}$ el vector tangente a las curvas contenidas en la hipersuperficie (ver apéndice A)

Subiendo el índice α con $h^{\alpha\beta} = g^{ab}e_{\alpha}^a e_{\beta}^b$ (métrica inducida) y realizando la contracción de índices en la ecuación (1.37), se obtiene el escalar de Ricci

$$R_{\beta\delta} = R_{bcd}^a e_{\alpha}^c e_{\beta}^b e_{\delta}^d + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\beta\alpha}. \quad (1.38)$$

Intercambiando índices convenientemente y contrayendo el tensor de Ricci en (1.38) obtenemos el escalar de curvatura 4-dimensional ⁽⁴⁾ R en función del escalar de curvatura 5-dimensional ⁽⁵⁾ R .

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R - R_b^a \eta_a \eta^b - K^{\gamma\alpha} K_{\gamma\alpha} + K^2, \quad (1.39)$$

Ahora, a partir del tensor de Einstein 4-dimensional:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}{}^{(4)}R h_{\alpha\beta} \quad (1.40)$$

y de la ecuación de Gauss contraída, se obtiene para el tensor de Einstein 4-dimensional

$$G_{\alpha\beta} = G_{ab}e_{\alpha}^a e_{\beta}^b + \frac{1}{2}R_b^a \eta_a \eta^b h_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}(K^2 - K^{\gamma\rho} K_{\gamma\rho})h_{\alpha\beta} - E'_{\alpha\beta} \quad (1.41)$$

donde se ha definido $E'_{\alpha\beta} = R_{bcd}^a \eta_a \eta^c e_{\alpha}^b e_{\beta}^d$

Por otra parte, el tensor de Riemann 5D puede descomponerse en el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Weyl [14] de la forma

$$R_{bcd}^a = \frac{2}{3} [g_{[c}^a R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]}^a] - \frac{1}{6} R g_{[c}^a g_{d]b} + \omega_{bcd}^a \quad (1.42)$$

¹notación usada en el libro *General Relativity* de Eric Poisson

con el tensor de Weyl cumpliendo las mismas propiedades geométricas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}\omega_{abc}{}^d &= -\omega_{bac}{}^d \\ \omega_{[abc]}{}^d &= 0 \\ \omega_{abcd} &= -\omega_{abdc}\end{aligned}$$

con el agregado que es de traza nula $\omega^a{}_{bad} = 0$. Se obtiene a partir de (1.41) la ecuación de campo de Einstein sobre la hipersuperficie ó brana

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} &= \left\{ \left[R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] - \frac{2}{3} \{ g_{[c}^d R_{b]a} - g_{a[c} R_{b]}^d \} \eta_d \eta^c + \frac{1}{6} R g_{[c}^d g_{b]a} \eta_d \eta^c \right\} e_\alpha^a e_\beta^b \\ &+ \left\{ \frac{1}{3} [g_{[c}^d R_{a]a} - g_{a[c} R_{a]}^d] \eta_d \eta^c - \frac{1}{12} R g_{[c}^d g_{a]a} \eta_d \eta^c + \frac{1}{12} \omega_c^d \eta_d \eta^c \right\} h_{\alpha\beta} \\ &- K_\beta^\gamma K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (K^2 - K_{\alpha\gamma}^{\gamma\alpha}) h_{\alpha\beta} - \omega_{acb}^d \eta_d \eta^c e_\alpha^a e_\beta^b\end{aligned}$$

Usando la ecuación de Einstein en cinco dimensiones $R_{ab} - \frac{1}{2}{}^{(5)}R g_{ab} = k^2 T_{ab}$, siendo T_{ab} el tensor de energía-momento y k la constante asociada a la gravitación 5D, se obtiene la ecuación de campo de Einstein cuadridimensional sobre la hipersuperficie

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} &= \frac{2k^2}{3} \left\{ T_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b + \left[T_{ab} \eta^a \eta^b - \frac{1}{4} T_a^a \right] h_{\alpha\beta} \right\} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\gamma} \\ &+ K K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (K^2 - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}) - E_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (1.43)$$

donde se ha definido $E_{\alpha\beta} = \omega_{acb}^d \eta_d \eta^c e_\alpha^a e_\beta^b$.

1.2.1. Ecuación de campo efectiva sobre la brana

El tensor Energía-Momento en cinco dimensiones del mundo brana viene dado por

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \left[(\tau_{\alpha\beta} - \sigma h_{\alpha\beta}) e_\alpha^a e_\beta^b \right] \delta(y) \quad (1.44)$$

donde Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo cinco dimensional, $\tau_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento convencional sobre la brana, σ es la tensión de la brana y $\delta(y)$ la función delta de Dirac evaluada en la coordenada adicional y (ver apéndice B).

La forma singular del tensor energía-momento, la cual viene representada por la función $\delta(y)$, permite localizar este último sobre la brana. Integrando (1.44) a lo largo de la dimensión extra desde $y = -\epsilon$ a $y = +\epsilon$ y tomando luego el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se llega a las condiciones de juntura de Darmois-Israel sobre la brana [15],[16].

$$h_{\alpha\beta}^+ - h_{\alpha\beta}^- = 0 \quad \text{Continuidad de la métrica} \quad (1.45)$$

$$K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^- = -k^2 \left[(\tau_{\alpha\beta} - \sigma h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (\tau - \sigma) \right] \quad (1.46)$$

Imponiendo la simetría Z_2 en la brana, esto es $K_{\alpha\beta}^+ = -K_{\alpha\beta}^-$, se encuentra de (1.46) la curvatura extrínseca en función del tensor energía-momento (ver apéndice B)

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} k^2 \left(-\frac{2}{3} \sigma h_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \tau h_{\alpha\beta} \right) \quad (1.47)$$

Usando la definición para la traza del tensor de curvatura extrínseca $K = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$ se obtiene

$$K = -\frac{1}{3} k^2 (\tau - \sigma) \quad (1.48)$$

Junto con las ecuaciones (1.47) y (1.48) se pueden reescribir los términos $K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma}$, $KK_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta} K^2$, y $K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}$; y usando (1.44) la ecuación de campo de Einstein (1.43) queda

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + k^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} \quad (1.49)$$

donde $\Lambda_4 = \frac{1}{2} k^2 (\Lambda + \frac{1}{6} k^2 \sigma^2)$ es la constante cosmológica sobre la hipersuperficie, la cual depende de la constante cosmológica cinco dimensional y de la tensión sobre la brana; $k^4 = 6k_4^2/\sigma$ ó lo que es lo mismo $G_N = \frac{k^4}{48\pi} \sigma$, donde G_N representa la constante de gravitación cuadrimensional, y los tensores

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{12} \tau \tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8} h_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} \tau^{\gamma\delta} - \frac{1}{24} h_{\alpha\beta} \tau^2 \quad (1.50)$$

y

$$E_{\alpha\beta} = \omega_{acb}^d \eta_d \eta^c e_{\alpha}^a e_{\beta}^b \quad (1.51)$$

que representan los términos adicionales en la ecuación de campo de Einstein estandar (1.49), consecuencia directa de haber introducido una dimensión adicional al modelo.

El tensor $E_{\alpha\beta}$ se interpreta como la proyección del tensor de Weyl sobre la brana. Además este tensor también posee las mismas propiedades geométricas del tensor de Weyl, válgame decir entre otras, *antisimetría en los índices* $E_{\alpha\beta} = -E_{\beta\alpha}$ y *traza nula* $E_{\alpha}^{\alpha} = 0$ (ver 1.42)

El primer término $\Lambda_4 = \frac{1}{2} k^2 (\Lambda + \frac{1}{6} k^2 \sigma^2)$ es la constante cosmológica sobre la brana. Nótese que si la brana es Minkowskiana ($\Lambda_4 = 0$) se tiene que la constante cosmológica del bulk $\Lambda = -\frac{1}{6} k^2 \sigma^2$ al igual que para el modelo RS-2 (vease sección 1.1).

El segundo término $8\pi G_N \tau_{\alpha\beta}$ corresponde a la contribución de la materia cuadrimensional. En el modelo $G_N = \frac{k^4 \sigma}{48\pi}$, está determinada por la tensión de la brana y la constante gravitacional cincodimensional. Se esperaría entonces que en modelo $\sigma \propto k^{-4}$

al menos para asegurar que G_N permanezca fija en el límite $k \rightarrow 0$ (bajas energías) y así poder recuperar la ecuación de campo estandar.

El tercer término corresponde al primer término adicional en la ecuación de Einstein. Este es cuadrático en $\tau_{\alpha\beta}$ y por tanto es un término *local*, en el sentido que no proviene del bulk, y es una corrección a la física de altas energías. Se espera que se anule en el límite de bajas energías; para esto es necesario demostrar que en tal límite, este sea despreciable frente al tensor energía-momento sobre la brana. Se observa entonces que

$$\frac{k^4 |\Pi_{\alpha\beta}|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim \frac{k^4 |\tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta}^{\gamma} + \dots|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim 0, \quad (1.52)$$

en el límite $k \rightarrow 0$.

Finalmente el cuarto término $E_{\alpha\beta}$ (el segundo término adicional) es visto, desde el punto de vista de un observador en la brana, como un efecto *no local* ya que este lleva la información del campo gravitacional exterior a la brana.

Precesión de Perihelio para la solución de Schwarzschild

El espaciotiempo generado alrededor de una fuente de campo gravitacional de masa M , estático y con simetría esférica viene dado por la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

con componentes métricas diagonales

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right); \quad g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.2)$$

que determinan el Lagrangeano que rige la dinámica del sistema

$$\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.3)$$

Así

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (2.4)$$

donde $\dot{t} = dt/d\tau$, $\dot{\theta} = d\theta/d\tau$, ect. Esto es, las trayectorias de una partícula moviéndose en el campo gravitacional están parametrizadas por el tiempo propio τ . Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Euler Lagrange.

- Para t .

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad (2.5)$$

- Para ϕ

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) = 0 \quad (2.6)$$

■ Para θ

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \dot{\theta} \right) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (2.7)$$

Las órbitas en la solución de Schwarzschild están restringidas al plano definido por la fuente del campo gravitacional y la partícula que se mueve en él. Es decir, $\theta = \pi/2$; $\dot{\theta} = 0$. Así la ecuación (2.7) se satisface idénticamente mientras que las ecuaciones (2.5) y (2.6) implican que:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = E = \text{constante} \quad (2.8)$$

$$r^2 \dot{\phi} = L = \text{constante} \quad (2.9)$$

donde E está relacionado con la energía y L con el momento angular del sistema. Considerando el movimiento de partículas masivas, las geodésicas descritas son del tipo tiempo, esto es $(ds/dt)^2 = -1$. Usando este hecho, despejando \dot{t} , $\dot{\phi}$ de (2.8), (2.9) y sustituyendo en la ecuación (2.1) queda.

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} \quad (2.10)$$

Para estudiar la trayectoria seguida por la partícula, es conveniente tener una dependencia angular de r , $r(\phi)$ es vez de tener dependencia temporal como aparece en (2.10). Proponiendo el cambio de variable.

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{r^2}{L} \dot{r} \quad (2.11)$$

Despejando \dot{r} de la ecuación (2.11) y sustituyendo en la ecuación (2.10) se tiene:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) = E^2 - L^2 \frac{r'^2}{r^4} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{L^2}{r^2} \quad (2.12)$$

Con el proposito de tener una ecuación diferencial más sencilla de resolver, se propone el siguiente cambio

$$r = \frac{1}{u}; \quad r' = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} = -\frac{u'}{u^2} \quad (2.13)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.12) y despejando u'

$$u'^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2M}{L^2} u - u^2 + 2Mu^3 \quad (2.14)$$

Existen varias formas de realizar la integración de la ecuación (2.14): Una de ellas es encontrar las raíces del polinomio

$$P(u) = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2M}{L^2} u - u^2 + 2Mu^3 \quad (2.15)$$

del lado derecho de (2.15) para las cuales $u' = 0$. Sean u_1 , u_2 , u_3 las tres raíces del polinomio $P(u)$. La factorización se escribe:

$$P(u) = r_0(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (2.16)$$

siendo $r_0 = 2M$.

Análisis de las raíces.

- Considerando que la trayectoria que sigue el planeta es elíptica, el afelio $u_a = 1/r_a$ - la distancia más grande entre el planeta y el Sol- y el perihelio $u_p = 1/r_p$ - la distancia más corta- corresponden a los valores extremos de la función $u(\phi)$ donde $u' = 0$. De esta manera $u_1 = u_a$ y $u_2 = u_p$.
- La tercera raíz se obtiene a partir de la formula de Vieta

$$\sum_{n=1}^n u_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (2.17)$$

Para el polinomio de grado 3 de la ecuación (2.15): $a_{n-1} = -1$; $a_n = r_0$, de esta manera

$$u_3 = \frac{1}{r_0} - (u_a + u_p) \quad (2.18)$$

De (2.18)y (2.16), la ecuación (2.14) queda:

$$u' = \pm \sqrt{(u - u_a)(u - u_p) [r_0 u - (1 - r_0(u_a + u_p))]} \quad (2.19)$$

donde el signo será positivo si u es creciente ($u' > 0$) y negativo en caso contrario. Para efectos de hacer la integración más facil, se reescribe el término entre corchetes de (2.19) como,

$$[r_0 u - (1 - r_0(u_a + u_p))] = -[1 - r_0(u_a + u_p)] \left[1 - \frac{r_0}{(1 - r_0(u_a + u_p))} u \right] \quad (2.20)$$

así, la ecuación (2.19) queda en su forma integral

$$\int d\phi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u) [1 - r_0(u_a + u_p)] \left[1 - \frac{r_0}{1 - r_0(u_a + u_p)} u \right]}} \quad (2.21)$$

donde la integración del lado derecho puede hacerse expandiendo los dos términos entre corchetes del numerador.

Justificación de la expansión: Para el caso de mercurio ¹, en unidades naturales se tiene

$$\frac{r_0}{r} = \frac{2G_N M}{c^2 r} \approx 5 \times 10^{-8} \quad (2.22)$$

¹ver Moller *General Relativity*

siendo G_N la constante gravitacional, r la distancia media Sol-Mercurio, M la masa del Sol y c la velocidad de la luz. Para otros planetas esta relación es más pequeña aun.

Con esto en mano podemos hacer la expansión en serie de Taylor a primer orden en $x = r_0/r \ll 1$.

- Primera expansión

$$[1 - r_0(u_a + u_p)]^{-1/2} = (1 - ax)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}ax + O(x^n) \quad (2.23)$$

donde $a = r(u_a + u_p)$

- Segunda expansión

$$\left[1 - \frac{r_0}{1 - r_0(u_a + u_p)}u\right]^{-1/2} = [1 - bx(1 - ax)^{-1}]^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}bx + O(x^n) \quad (2.24)$$

donde $b = ru$

Sustituyendo las aproximaciones (2.23) y (2.24) en (2.21) se tiene

$$\int d\phi = \pm \left[1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right] \int \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du \quad (2.25)$$

La integración de la ecuación anterior se realiza de la siguiente manera: Partiendo del afelio (ϕ_{afe}) y cuando se pasa al perihelio siguiente ($\phi_{per.sig}$) u crece; se tiene entonces

$$\phi_{per.sig} - \phi_{afe} = + \left[1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right] \int_{u_a}^{u_p} \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du \quad (2.26)$$

De forma análoga cuando se pasa del perihelio anterior (ϕ_{ant}) al afelio presente (ϕ_{afe}) u decrece, se tiene

$$\phi_{afe} - \phi_{per.ant} = - \left[1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right] \int_{u_p}^{u_a} \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du \quad (2.27)$$

Sumando las ecuaciones (2.26) y (2.27) se tiene que la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos (ver figura2.1) viene dada por:

$$\delta\phi = 2 \left[1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right] \int_{u_a}^{u_p} \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du - 2\pi \quad (2.28)$$

donde el factor 2π proviene de que se dá una vuelta completa en la trayectoria.

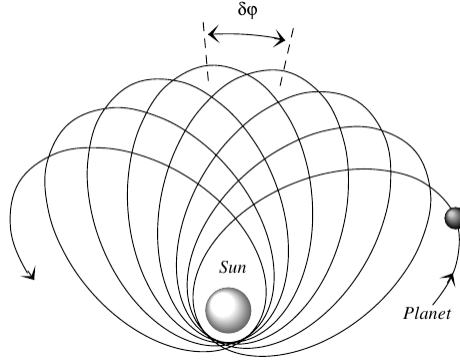


Figura 2.1: Precesión de perihelio mostrando la variación de $\delta\phi$

Realizando la integración se obtiene:

$$\delta\phi = \frac{3}{2}\pi r_0(u_a + u_p) \quad (2.29)$$

En unidades naturales $r_0 = 2GM/c^2$, además $u_a = 1/r_a$, $u_p = 1/r_p$. Por otra parte el perihelio y el afelio [20] están relacionados con la excentricidad ε por:

$$r_p = a(1 - \varepsilon); \quad r_a = a(1 + \varepsilon) \quad (2.30)$$

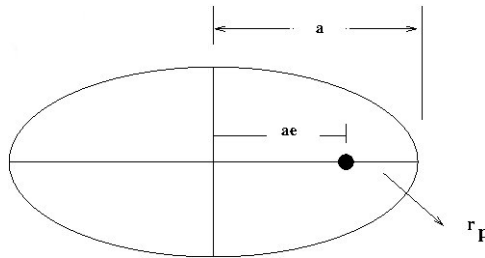


Figura 2.2: Parámetros para una órbita elíptica

donde a es el semieje mayor de la elipse (ver figura2.2). Finalmente sustituyendo r_0 y (2.30) en (2.29) queda

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - \varepsilon^2)} \quad (2.31)$$

el cual es el resultado estandar relativista para la precesión de perihelio.

Ahora se estimara el valor para la precesión de perihelio para Mercurio, tomando $M = 1,989 \times 10^{33} gr$ la masa del Sol, $a = 57,91 \times 10^{11} cm$ el semieje mayor de Mercurio-Sol, $\varepsilon = 0,2056$ la excentricidad de la órbita, $G = 6,67 \times 10^{-8} cm^3 gr^{-1} s^{-2}$ la constante

gravitacional y $c = 2,998 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ la velocidad de la luz en el vacío. Por otra parte, se sabe que la duración de la órbita es de 88 días y dá 415 órbitas cada 100 años. Con estos datos, el valor del ángulo de precesión en cada vuelta será $5,0165 \times 10^{-7} \text{ rad}$ y que al ser multiplicado por las 415,0139 órbitas por siglo, se obtiene $2,0819 \times 10^{-4} \text{ rad/siglo}$. Finalmente al convertir a segundos de arco (") da

$$\Delta\phi = 42,94''/\text{siglo} \tag{2.32}$$

El mundo Brana de DMPR

3.1 La solución DMPR

Consideremos una solución de vacío de 1.49, esto implica tomar $\tau_{\alpha\beta} = 0$ con lo cual $\Pi_{\alpha\beta} = 0$ (ver 1.50). Impongamos además una brana de Minkowski ($\Lambda_4 = 0$) con lo que se tiene que el espaciotiempo en el bulk es AdS_5 con constante cosmológica $\Lambda = -\frac{1}{6}k^2\sigma^2$. Las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein (1.49) se resumen en resolver

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}R = -E_{\alpha\beta}. \quad (3.1)$$

Tomando la traza se tiene

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\hat{R} &= -h^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} \\ \hat{R} - \frac{1}{2}4\hat{R} &= -E^\alpha{}_\alpha \end{aligned}$$

pero el tensor $E_{\alpha\beta}$ es de traza nula, lo que implica que el escalar de curvatura cuadridimensional $\hat{R} = 0$. En la ecuación de campo 3.1, $E_{\alpha\beta}$ juega el papel de un tensor energía-momento no convencional en el sentido que este tensor es inducido por la proyección del tensor de curvatura del Weyl. Es decir, los efectos del bulk sobre la física en la brana son vistos a través del tensor $E_{\alpha\beta}$, determinado por $E_{ab}(\xi = 0) = E_{\alpha\beta}\delta_a^\alpha\delta_b^\beta$ [19].

Las ecuaciones de campo se reducen a resolver

$$R_{\alpha\beta} = -E_{\alpha\beta}, \quad E^\alpha{}_\alpha = 0, \quad (3.2)$$

y junto con la ecuación proveniente de la identidad de Bianchi

$$\nabla^\alpha E_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.3)$$

forman un sistema de ecuaciones cerrado sobre la brana, ya que el sistema de ecuaciones que surgen (3.2) no determinan la solución completamente debido a que el término $E_{\alpha\beta}$ agrega grados de libertad al sistema provenientes del bulk cincodimensional, como se verá más adelante. Para encontrar una solución al sistema se necesita en primer lugar conocer la geometría $4D$ sobre la brana, i.e, la forma funcional de la métrica y de segundo saber la estructura tensorial completa del tensor $E_{\alpha\beta}$.

Debido a que $E_{\alpha\beta}$ es desconocida desde el punto de vista de la brana, y ya que este actúa como un tensor de energía-momento inducido por el bulk sobre la brana; en 3.1 este tensor se descompone con respecto a un campo de velocidades u^α ; ver [18].

$$E_{\alpha\beta} = - \left(\frac{k}{k_4} \right)^4 \left[U \left(u_\alpha u_\beta + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \right) + P_{\alpha\beta} + 2q_{(\alpha} u_{\beta)} \right] \quad (3.4)$$

donde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$. $E_{\alpha\beta}$ se considera como un *flujo de Weyl efectivo*, con densidad de energía inducida U , densidad de momento q_α y un tensor de flujo anisotrópico $P_{\alpha\beta}$, dados por

$$U = -E_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (3.5)$$

$$q_\mu = h_\mu^\alpha E_{\alpha\beta} u^\beta \quad (3.6)$$

$$P_{\alpha\beta} = \left[\frac{1}{3} h_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \right] E_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Si la geometría del espaciotiempo es esféricamente simétrica y estática, $q^\alpha = 0$; $P_{\alpha\beta} = P(r) \left(r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \right)$, siendo r^α un vector radial unitario y $P(r)$ una función de anisotropía radial, 3.3 queda

$$\frac{1}{3} D_\alpha U(r) + \frac{4}{3} U(r) a_\alpha + D^\beta P_{\alpha\beta} + a^\beta P_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.8)$$

siendo $a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha$ la 4-aceleración de una partícula sobre la brana y $D_\alpha = h_\alpha^\mu \nabla_\mu$.

Por otra parte, siendo $E_{\alpha\beta}$ antisimétrico y de traza nula, posee las mismas propiedades algebraicas del tensor energía-momento electromagnético de la Relatividad General $T_{\alpha\beta}^{em}$, lo que conduce a hacer la correspondencia $-E_{\alpha\beta} \leftrightarrow T_{\alpha\beta}^{em}$. Por tanto, es de esperar que *soluciones del sistema Einstein-Maxwell en RG conduzcan soluciones de mundos brana en el vacío en una geometría 5-dimensional*.

Solución Reissner-Nordström:

La métrica de Reissner-Nordström es una solución estática a las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, que corresponde al campo gravitacional de un cuerpo de masa M , con carga q , no rotante y esféricamente simétrico y donde $T_{\alpha\beta}$ está dado por

$$T_{\alpha\beta}^{em} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\sigma} F_{\alpha\lambda} F_{\beta\sigma} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right)$$

el cual posee *traza nula*, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor de Maxwell con la propiedad $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, i.e, es *antisimétrico* que satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} J^\mu &= 0, & \text{sin fuente} \\ F_{;\mu}^{\mu\nu} &= 0, & \text{Identidad Bianchi} \\ \partial_{[\mu} F_{\nu]} &= 0 \end{aligned}$$

La solución a estas ecuaciones viene dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Nótese que para $q = 0$ se recupera la solución de Schwarzschild.

Considerando la métrica esféricamente simétrica y estática dada por

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.9)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es el elemento de ángulo sólido de una 2-esfera, las ecuaciones de campo de Einstein (3.1) junto con la ecuación de conservación para $E_{\alpha\beta}$ dada por 3.8 se escriben

$$R_t^t = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{48\pi G}{k^4 \sigma} U(r) \quad (3.10)$$

$$R_r^r = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{16\pi G}{k^4 \sigma} (U(r) + 2P(r)) \quad (3.11)$$

$$R_\theta^\theta = R_\phi^\phi = e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) = \frac{32\pi G}{k^4 \sigma} (U(r) - P(r)) \quad (3.12)$$

$$\nu'(2U + P) = -(U' + 2P') - \frac{6P}{r} \quad (3.13)$$

Nótese que en el límite $1/\sigma \rightarrow 0$ las ecuaciones de campo (3.10), (3.11) y (3.12) se convierten en la ecuaciones de campo relativistas para la métrica de Schwarzschild [13].

Asumiendo $\nu(r) = -\lambda(r)$ se tiene de las ecuaciones (3.10) y (3.11)

$$U(r) = -\frac{1}{2}P(r). \quad (3.14)$$

Usando (3.14), la ecuación (3.13) queda

$$0 = -(U' - 4U') - \frac{12}{r}U \quad \text{y separando variables}$$

$$-\frac{1}{4} \frac{dU}{U} = \frac{dr}{r} \quad \text{integrando queda}$$

$$U(r) = \frac{\beta}{r^4} \quad (3.15)$$

donde β es una constante de integración. Definiendo $e^{-\lambda(r)} = \alpha(r)$ y haciendo

$$Q = \frac{48\pi G\beta}{k^4\sigma}, \quad (3.16)$$

en 3.10 se obtiene

$$\alpha' + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} - \frac{Q}{r^3}$$

cuya solución es:

$$\alpha = 1 + \frac{C}{r} + \frac{Q}{r^2},$$

donde la constante de integración C se identifica bajo el requisito de que la solución tienda a la solución de Schwarzschild cuando el parámetro $Q \rightarrow 0$. Por tanto, $C = -2M$. La forma final de la solución encontrada originalmente por Dadhich, Marteens, Papadopoulos y Rezania (DMPR) [11] es

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2} \quad (3.17)$$

Así, el elemento de línea de la solución DMPR corresponde a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.18)$$

Nótese que en la solución DMPR el parámetro Q juega un papel parecido a la carga eléctrica de la solución Reissner-Norström de la Relatividad General, pero en este caso esa carga *tidal* es originada por los efectos del bulk sobre la brana.

En la siguiente sección se estudiará la precesión de perihelio en el espaciotiempo generado por el mundo brana de DMPR.

3.2 Precesión de Perihelio para la solución DMPR

A continuación se desarrolla un formalismo general [21],[22] que facilita el análisis de las pruebas de la Relatividad General para cualquier métrica esféricamente simétrica. Luego se usara la métrica DMPR para encontrar el ángulo de perihelio de un planeta en el sistema Solar, en particular para Mercurio.

Partiendo de la ecuación que relaciona la coordenada radial $u = 1/r$ con el ángulo ϕ (2.14) escrita para una métrica esféricamente simétrica y estática en general

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 \equiv \Omega(u) \quad (3.19)$$

donde se ha definido

$$\Omega(u) = u^2 f(u) + \frac{e^{-(\lambda+\nu)} E^2}{c^2 L^2} - \frac{e^{-\lambda}}{L^2} \quad (3.20)$$

y

$$f(u) = 1 - e^{-\lambda}, \quad (3.21)$$

donde λ y ν son las funciones métricas de (3.9).

La ecuación diferencial ordinaria (3.19) no lineal puede escribirse como una ecuación diferencial de segundo orden. Derivando con respecto a ϕ

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} = \frac{d\Omega}{du} \frac{du}{d\phi}, \quad (3.22)$$

simplificando

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \chi(u) \quad (3.23)$$

donde se ha definido

$$\chi(u) = \frac{1}{2} \frac{d\Omega(u)}{du}. \quad (3.24)$$

La integración de la ecuación (3.23) se realiza considerando una solución perturbada $u(\phi) = u_0(\phi) + \varepsilon u_1(\phi)$ a primer orden en el parámetro ε alrededor de una solución conocida u_0 tal que $u_0 = \chi(u_0)$ y donde $u_1(\phi)$ es la solución perturbada

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \left[1 - \left(\frac{d\chi}{du}\right)_{u=u_0}\right] u_1 = 0, \quad (3.25)$$

la cual admite como solución

$$u_1(\phi) = A \cos(\omega\phi + \beta), \quad (3.26)$$

con A y β constantes de integración y $\omega \equiv \sqrt{1 - \gamma}$ siendo $\gamma = \left(\frac{d\chi}{du}\right)_{u=u_0}$.

Apelando a la periodicidad de la órbita

$$\phi = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.27)$$

y sabiendo que el ángulo de perihelio varía poco en una rotación completa (ver capítulo 2) se expande ω alrededor de $\gamma \ll 1$, teniendo así que ϕ queda

$$\phi = 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\gamma\right). \quad (3.28)$$

Finalmente, en una rotación completa la variación del ángulo de precesión es

$$\Delta\phi = \phi - 2\pi,$$

de donde se obtiene

$$\Delta\phi = \pi\gamma = \pi \left(\frac{d\chi}{du} \right)_{u=u_0} \quad (3.29)$$

La secuencia para la determinación del perihelio de un planeta en una orbita alrededor del Sol es

$$e^{\nu(r)}, e^{\lambda(r)} \rightarrow f(u), E, L \rightarrow \Omega(u) \rightarrow \chi(u) \rightarrow \gamma \rightarrow \Delta\phi \quad (3.30)$$

Usando primeramente este formalismo para el espaciotiempo de Scwharzschild se tiene

$$e^\nu = e^\lambda = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{2GM}{c^2} u$$

Usando (3.21)

$$f(u) = \frac{2GM}{c^2} u,$$

de la ecuacionesn (3.20) y (3.24)

$$\begin{aligned} \Omega(u) &= \frac{2GM}{c^2} u^3 + \frac{2GM}{c^2 L^2} u - \frac{1}{L^2} \\ \chi(u) &= \frac{3GM}{c^2} u^2 + \frac{GM}{L^2 c^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando la condición de $u_0 = ctte$, $u_0 = \chi(u_0)$ se obtiene

$$\frac{3GM}{c^2} u_0^2 + \frac{GM}{L^2 c^2} = u_0,$$

cuya solución aproximada a primer orden en el parámetro $r_0^2/L^2 \ll 1$, siendo $r_0 = 2GM/c^2$ es

$$u_0 = \frac{GM}{c^2 L^2} \quad (3.32)$$

Así de (3.29) se tiene

$$\Delta\phi = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^4} \frac{1}{L^2} \quad (3.33)$$

En lo siguiente se encuentra una expresión para el momento angular en función de los parámetros de una órbita elíptica. De (3.23) con $\chi(u) = GM/L^2 c^2$ proveniente de (3.31) donde se ha despreciado el primer término si se supone que este último no afecta significativamente la trayectoria de la órbita elíptica. Así se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2 c^2} \quad (3.34)$$

cuya solución es

$$u = \frac{GM}{L^2 c^2} (1 + \varepsilon \cos(\phi)). \quad (3.35)$$

Esta es la ecuación en coordenadas polares de una elipse si hacemos $u = 1/r$. Así podemos identificar la constante ε con la excentricidad de la órbita. Si evaluamos en $r = r_a = a(1 + \varepsilon)$ para $\phi = \pi$ se tiene

$$\frac{1}{a(1 + \varepsilon)} = \frac{GM}{L^2 c^2} (1 - \varepsilon), \quad (3.36)$$

despejando se obtiene

$$\frac{1}{L^2} = \frac{c^2}{GMa(1 - \varepsilon^2)} \quad (3.37)$$

Finalmente, sustituyendo (3.37) en (3.33) se obtiene

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \varepsilon^2)} \quad (3.38)$$

el cual concuerda con la solución para el perihelio obtenida en el capítulo 2.

Ahora, usando el formalismo para el espaciotiempo de DMPR, se obtiene de (3.21) en unidades SI

$$f(u) = \frac{2MG}{c^2} u - \frac{GQ}{c^2} u^2, \quad (3.39)$$

de la ecuación (3.20)

$$\Omega(u) = \frac{2MG}{c^2} u^3 - \frac{GQ}{c^2} u^4 + \frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{L^2} + \frac{2MG}{c^2 L^2} u - \frac{GQ}{c^2 L^2} u^2, \quad (3.40)$$

y de la ecuación 3.24

$$\chi(u) = \frac{3MG}{c^2} u^2 - \frac{2GQ}{c^2} u^3 + \frac{MG}{c^2 L^2} - \frac{GQ}{c^2 L^2} u. \quad (3.41)$$

Usando nuevamente la condición $\chi(u_0) = u_0$ se obtiene

$$\chi(u_0) = \frac{3MG}{c^2}u_0^2 - \frac{2GQ}{c^2}u_0^3 + \frac{MG}{c^2L^2} - \frac{GQ}{c^2L^2}u_0 = u_0, \quad (3.42)$$

la cual es una ecuación cúbica para u_0 . Asumiendo $(Q/L^2) \ll 1$ [22] y tomando solo el término lineal en u_0 , se tiene

$$u_0 = \frac{MG}{c^2L^2} \quad (3.43)$$

el cual es el mismo para el caso de Schwarzschild.

El avance de perihelio dado por (3.29) viene dado por

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2a(1-\varepsilon^2)} - \frac{\pi c^2 Q}{GMa(1-\varepsilon^2)} \quad (3.44)$$

Nótese que el primer término de (3.44) corresponde a la expresión relativista para la precesión de perihelio (ver 2.31) con un término adicional proveniente del modelo cincodimensional.

Se conoce que el valor para el avance del perihelio de Mercurio observacional es $\Delta\phi_{obs} = 43,11 \pm 0,21$ arcseg por siglo. La expresión analítica estandar para la precesión de Mercurio da el valor $\Delta\phi_{RG} = 42,94$ arcseg por siglo. Entonces, la diferencia

$$\Delta\phi_{DMPR} = \Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{RG} = 0,17 \text{arcseg/siglo},$$

puede deberse a otros efectos. Si se asume que esta diferencia es debido al segundo término de (3.44), i.e, a los efectos del bulk cincodimensional sobre la estructura local de nuestro universo cuadridimensional, que modifica la geometría del espaciotiempo, podemos inferir un valor para el parámetro Q

$$Q = -\frac{GM_s a(1-\varepsilon^2)}{\pi c^2} \Delta\phi_{DMPR} \quad (3.45)$$

El valor numérico para el parámetro de carga tidal es $|Q| \leq 5,17 \times 10^8 \text{cm}^2$.

Si comparamos la expresión para el parámetro Q de la ecuación (3.45) con la ecuación (3.16) y despejando la tensión en la brana se tiene

$$\sigma = -\frac{48\pi^2 c^2 \beta}{Mak^4(1-\varepsilon^2)\Delta\phi_{DMPR}}, \quad (3.46)$$

Para tener consistencia con la constante gravitacional cuadridimensional del modelo de branas $G_N = \frac{k^4}{48\pi}\sigma > 0$ se debe imponer que la constante β sea negativa con lo que se tiene que la tensión de la brana debe ser positiva al igual que en el modelo de Randall-Sundrum.

Además, tener un parámetro Q negativo en la métrica DMPR (3.18) indica que este término (el cual es la contribución debido a la dimensión adicional) contribuye *positivamente* con el potencial gravitacional ya que la componente $g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{|Q|}{r^2}$ tiene dos términos negativos. Esto implica que el campo gravitacional se hace más intenso, caso contrario al de R-N donde el potencial electrostático lo debilita, trayendo consigo implicaciones en la formación de los horizontes en el caso de colapso gravitacional, el cual no fué tratado en este trabajo (ver [11]).

Precesión de Perihelio vía geodésicas de la métrica DMPR: Un enfoque alternativo

En el escenario mundo brana de DMPR (3.18), la dinámica que rige el movimiento de una partícula viene dada por el Lagrangeano

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{Q}{r^2} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{Q}{r^2} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (4.1)$$

donde $r_0 = 2Gm/c^2$ en unidades del SI.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (4.2)$$

donde $x_i = t, r, \theta, \phi$; se desprende

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{t} = \frac{C_1}{\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{Q}{r^2} \right)} \quad (4.3a)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{C_2}{r^2} \quad (4.3b)$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración asociadas con la energía y el momento angular del sistema.

Sustituyendo las expresiones para \dot{t} y $\dot{\phi}$ y considerando el movimiento de partículas materiales, es decir, geodésicas tipo tiempo ($ds^2/dt^2 = -1$) se tiene de (3.18)

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 \quad (4.4)$$

donde $a_0 = \frac{C_1^2 - 1}{C_2^2}$; $a_1 = \frac{r_0}{C_2^2}$; $a_2 = -\frac{(C_2^2 + Q)}{C_2^2}$; $a_3 = r_0$; $a_4 = -Q$

Haciendo el cambio de variable $u = 1/r$, (4.4) queda

$$u' = \pm \sqrt{G(u)} \quad (4.5)$$

donde $u' = du/d\phi$. El signo será positivo si u es creciente ($u' > 0$) y negativo en caso contrario ($u' < 0$) y $G(u)$ es un polinomio de grado 4 dado por

$$G(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0. \quad (4.6)$$

La integración de (4.5) requiere conocer las 4 raíces de $G(u)$, los cuales son los puntos donde $u' = 0$, además esta se vuelve complicada debido a la estructura matemática de $G(u)$. Si suponemos el caso en que $Q = 0$, es decir que la geometría del espaciotiempo cuadridimensional es la de Schwarzschild clásica, y por ende, el polinomio $G(u)$ es igual al polinomio $P(u)$ definido en el capítulo 2. Para la integración de (4.5) se comienza y escribiendo el polinomio $G(u)$ como

$$G(u) = -Q (u - u_1) (u - u_2) (u - u_3) (u - u_4), \quad (4.7)$$

donde los u_i corresponden a las raíces del polinomio $G(u)$. Tres de las raíces corresponden con las raíces del polinomio $P(u)$ y la cuarta raíz se obtiene de la formula de Vieta (2.17, así se tiene

$$G(u) = -Q (u - u_a) (u - u_p) \left[u - \left(\frac{1}{r_0} - (u_a + u_p) \right) \right] \left[u - \frac{1}{Q} \left(r_0 - \frac{Q}{r_0} \right) \right] \quad (4.8)$$

Por otra parte, escribamos la forma integral de (4.5)

$$\int d\phi = \int \frac{1}{\pm \sqrt{G(u)}} du, \quad (4.9)$$

y supongamos que partimos del afelio hasta el perihelio siguiente ($\varphi_{p.s}$); en este caso u crece mientras que cuando vamos del perihelio anterior ($\varphi_{p.a}$) al afelio u decrece. Integrando en estas dos regiones

$$\varphi_{p.s} - \varphi_{af} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{G(u)}} du \quad (4.10a)$$

$$\varphi_{af} - \varphi_{p.a} = - \int_{u_p}^{u_a} \frac{1}{\sqrt{G(u)}} du \quad (4.10b)$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos

$$\Delta\phi = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{G(u)}} du - 2\pi \quad (4.11)$$

cuyo integrando queda

$$\frac{1}{\sqrt{G(u)}} = \frac{(1 - r_0(u_a + u_p))^{-1/2} (1 - \frac{Q}{r_0^2})^{-1/2} \left[1 - \frac{r_0}{1 - r_0(u_a + u_p)} u\right]^{-1/2} \left[1 - \frac{Q/r_0}{1 - Q/r_0^2} u\right]^{-1/2}}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}}. \quad (4.12)$$

Demostración: Si comparamos (4.7) con (4.8) se tiene

$$\begin{aligned} u - u_3 &= u - \left(\frac{1}{r_0} - (u_a + u_p)\right) \\ &= -\frac{1 - r_0(u_a + u_p)}{r_0} \left(1 - \frac{r_0 u}{(1 - r_0(u_a + u_p))}\right) \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} u - u_4 &= u - \frac{1}{Q} \left(r_0 - \frac{Q}{r_0}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{Q}{r_0^2}\right) \left[1 - \frac{\frac{Q}{r_0} u}{\left(1 - \frac{Q}{r_0^2}\right)}\right] \frac{r_0}{Q} \end{aligned}$$

Nótese que los dos primeros términos de (4.12) son constantes para efectos de la integración; aun así, tal integración es extensa. Recordando que la solución (3.44) es una solución aproximada a primer orden en $Q/L^2 \ll 1$, realizaremos una aproximación en (4.12), esto es, consideraremos al igual que para el caso de Schwarzschild puro ($\frac{r_0}{r} \ll 1$), la aproximación adicional ($Q/r_0^2 \ll 1$) la cual es justificable si los efectos del bulk sobre la brana no alteran en gran medida la física que conocemos. Esto permite escribir (4.11) como

$$\Delta\phi = 2 \left(1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right) \int_{u_a}^{u_p} \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} \left[1 + \frac{Q}{2r_0}u + \frac{Q}{2r_0^2} + O((Q/r_0^2)^2)\right] du - 2\pi \quad (4.13)$$

Reescribiendo la integral convenientemente, como la suma de tres integrales

$$\left[2 \left(1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right) \int \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du - 2\pi\right] \quad (4.14)$$

$$\frac{Q}{2r_0} \left[2 \left(1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p)\right) \int \frac{(1 + \frac{r_0}{2}u) u}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du\right] \quad (4.15)$$

$$\frac{Q}{2r_0^2} \left[2 \left(1 + \frac{r_0}{2}(u_a + u_p) \right) \int \frac{\left(1 + \frac{r_0}{2}u \right)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du \right] \quad (4.16)$$

Al realizar cada una de las tres integraciones, se tiene que la integral (4.14) se corresponde con la integral (2.28) para la precesión de perihelio en la geometría de Schwarzschild. Esta dá la contribución relativista. La contribución a la precesión de perihelio debido al mundo brana proviene de las otras dos integrales. Las integrales (4.15) y (4.16) quedan

$$- \frac{\pi}{2}(u_a + u_p) \frac{Q}{r_0} + \frac{5}{8} \pi r_0 (u_a + u_p)^2 \frac{Q}{r_0} + \frac{2r_0^3}{a^3(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{Q}{r_0^2} \quad (4.17)$$

Finalmente, sumando las contribuciones de (4.17) a (4.13) y sabiendo que $u_p = 1/r_p$ donde $r_p = a(1 - \varepsilon)$ y $u_a = 1/r_a$ siendo $r_a = a(1 + \varepsilon)$ (ver [20]), el ángulo de precesión entre dos perihelios consecutivos 4.13 queda:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi Gm}{c^2 a(1 - \varepsilon^2)} - \frac{2\pi}{a(1 - \varepsilon^2)} \left(1 - \frac{5}{4} \frac{r_0}{a(1 - \varepsilon^2)} \right) \frac{Q}{r_0} + \frac{2r_0^3}{a^3(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{Q}{r_0^2} \quad (4.18)$$

Análisis de la solución: Si definimos

$$x = \frac{r_0}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad (4.19)$$

y evaluamos numéricamente usando los datos del capítulo 2 para el planeta Mercurio, donde la precesión de perihelio es más notoria, se tiene que $r_0 \approx 10^5 cm$ y el factor $a(1 - \varepsilon^2) \approx 10^{11} cm$. Se tiene entonces que el factor $x \approx 10^{-6}$, el cual es un término muy pequeño comparado con 1. Así este tercer término es despreciable frente al segundo, que corresponde exactamente con el obtenido por Bohemer, Harko, De Ricci y Lobo [22] en (3.44).

Por otra parte es de notar que en el último término, el cual es la corrección a primer orden en el parámetro Q/r_0^2 , posee un término $x^3 \approx 10^{-18}$ el cual es mucho más pequeño que el tercer término y puede despreciarse si $Q/r_0^2 \ll 1$, como es el caso.

CONCLUSIONES

- Una solución mundo brana para un espaciotiempo con geometría esférica y estática (DMPR), permitió establecer una relación entre los parámetros provenientes del bulk cincodimensional y los parámetros cuadridimensionales de la brana.
- Estudiando las geodésicas de la métrica para la solución DMPR, la cual corresponde con la solución mundo brana para un espaciotiempo con simetría esférica y estática del tipo Reissner-Nordström de la Relatividad General, permitió recobrar el resultado encontrado en [22],
- El mayor resultado de este trabajo es que se puede obtener la precesión entre dos perihelios consecutivos haciendo la aproximación $Q/r_0^2 \ll 1$, que sería equivalente a la aproximación $Q/L^2 \ll 1$ hecha en [22]. Tal aproximación es justificable si los efectos del bulk cincodimensional son muy pequeños comparados con los efectos de la gravedad cuadridimensional a escalas de energías "pequeñas". Se espera que al igual que en modelos de branas como Randall-Sundrum los efectos de los parámetros físicos del bulk empiezen a jugar un papel importante en la física a energías considerablemente grandes.
- Como comentario adicional, se espera usar este formalismo alternativo para las otras pruebas de la Relatividad General: deflexión de la luz y tiempo de retardo del eco de radar para espaciotiempos mundo brana y contrastarlos con los estudiados en [22].

APORTES

Considerando la solución DMPR [11], la cual corresponde a una solución de mundo brana de las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica y estática, es decir, una generalización de la solución de Schwarzschild, [21], [22] encuentran que los parámetros asociados con la dimensión adicional proveen una corrección a la expresión relativista clásica de la precesión de perihelio de Mercurio. Los datos observacionales de la precesión fijan una cota para el parámetro de carga tidal Q del bulk cincodimensional. En el presente trabajo se consideraron las geodésicas de la métrica de la solución DMPR en el plano $\theta = \pi/2$, vinculando las variables r y ϕ , permitiendo generar un mecanismo alternativo para encontrar la variación del ángulo para la precesión de perihelio en el límite cuando Q/r_0^2 es pequeño.



La ecuación de Gauss

En el presente apéndice se deduce la ecuación de Gauss de la Geometría Riemanniana

Definiendo ecuaciones

En una variedad espaciotemporal cincodimensional (V, g_{ab}) , una hipersuperficie Σ es una subvariedad espaciotemporal cuadridimensional $(M, h_{\alpha\beta})$ la cual se define por la ecuación paramétrica

$$x^a = x^a(y^\alpha) \quad ; \quad a = 0, 1, \dots, 4; \alpha = 0, 1, \dots, 3 \quad (\text{A.1})$$

donde y son las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie. Nótese que $x^a(y^\alpha)$ describe curvas contenidas en Σ .

Un vector unitario η^a ortogonal a Σ posee la propiedad

$$\eta^a \eta_a = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo,} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio} \end{cases}$$

Métrica inducida

La métrica inducida se obtiene restringiendo el elemento de línea para desplazamientos sobre la hipersuperficie Σ . De las ecuaciones paramétricas $x^a(y^\alpha)$ se tiene que los vectores

$$e_\alpha^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial y^\alpha} \quad (\text{A.2})$$

son tangentes a las curvas contenidas en el Σ . Para desplazamientos en Σ

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{ab}dx^a dx^b \\
&= g_{ab} \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^b}{\partial y^\beta} dy^\beta \right) \\
&= g_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b dy^\alpha dy^\beta \\
&= h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$h_{\alpha\beta} = g_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b, \quad (\text{A.3})$$

la cual se conoce como la métrica inducida. Lo anterior refleja que g_{ab} -la métrica de la variedad V - induce una métrica sobre Σ vía los vectores tangentes.

Derivada covariante intrínseca

Para el caso de vectores tangentes a la hipersuperficie se tiene

$$A^a = A^\alpha e_\alpha^a; \quad A^a \eta_a = 0; \quad A_a = A_\alpha e_\alpha^a \quad (\text{A.4})$$

Se define la derivada covariante intrínseca de A_α como la proyección de $A_{a;b}$ sobre Σ .

$$D_\beta A_\alpha = A_{a;b} e_\alpha^a e_\beta^b. \quad (\text{A.5})$$

Veamos que la derivada covariante está definida en la forma usual en términos de una conexión $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ compatible con la métrica $h_{\alpha\beta}$. En principio sabemos que

$$(A_a e_\alpha^a)_{;b} e_\beta^b = A_{a;b} e_\alpha^a e_\beta^b + A_a e_{\alpha;b}^a e_\beta^b \quad (\text{A.6})$$

entonces

$$\begin{aligned}
A_{a;b} e_\alpha^a e_\beta^b &= (A_a e_\alpha^a)_{;b} e_\beta^b - A_a e_{\alpha;b}^a e_\beta^b \\
&= A_{\alpha;b} e_\beta^b - A^a e_{a\alpha;b} e_\beta^b \\
&= A_{\alpha;b} e_\beta^b - A^\gamma e_\gamma^a e_{a\alpha;b} e_\beta^b \\
&= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^b} \frac{\partial x^b}{\partial y^\beta} - e_\gamma^a e_{a\alpha;b} e_\beta^b A^\gamma \\
&= A_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta} A^\gamma
\end{aligned}$$

donde se ha definido $\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = e_\gamma^a e_{a\alpha;b} e_\beta^b$. Entonces

$$D_\beta A_\alpha = \partial_\beta A_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma \quad (\text{A.7})$$

Derivada extrínseca

La ecuación (A.5) puede verse como las componentes tangenciales del vector $A^a_{;b}e^b_\beta$. A continuación se encontraran las componentes ortogonales ¹ de este vector.

Expresando el vector $A^a_{;b}e^b_\beta$ como $g^a_m A^m_{;b}e^b_\beta$ y descomponiendo la métrica en sus partes tangencial y normal de la forma $g^{ab} = \varepsilon\eta^a\eta^b + h^{\alpha\beta}e^a_\alpha e^b_\beta$ se tiene

$$A^a_{;b}e^b_\beta = (\varepsilon\eta^a\eta_m + h^{\alpha\mu}e^a_\alpha e_{\mu m}) A^m_{;b}e^b_\beta \quad (\text{A.8})$$

. Usando la ecuación (A.4) y (A.5) se tiene

$$A^a_{;b}e^b_\beta = D_\beta A^\alpha e^a_\alpha - \varepsilon A^\alpha (\eta_{m;b} e^m_\alpha e^b_\beta) \eta^a \quad (\text{A.9})$$

Definiendo ahora

$$K_{\alpha\beta} \equiv \eta_{a;b} e^a_\alpha e^b_\beta \quad (\text{A.10})$$

Así,

$$A^a_{;b}e^b_\beta = D_\beta A^\alpha e^a_\alpha - \varepsilon A^\alpha K_{\alpha\beta} \eta^a \quad (\text{A.11})$$

de donde se observa que el primer término del lado derecho corresponde a la parte tangencial y el segundo término es la parte normal. De (A.11) se concluye que la componente normal es cero si su curvatura extrínseca es cero.

Haciendo $A^\alpha = \delta^\alpha_\xi = dy^\alpha/dy^\xi$, lo cual implica de (A.4) que $A^a = \delta^\alpha_\xi e^a_\alpha = e^a_\alpha$, y sustituyendo en (A.11) queda:

$$e^a_{\alpha;b} e^b_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e^a_\gamma - \varepsilon K_{\alpha\beta} \eta^a \quad (\text{A.12})$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Gauss-Weingarten, y será usada para el cálculo de la ecuación de Gauss.

Ecuación de Gauss

Teniendo la definición de la métrica inducida y la derivada intrínseca, podemos definir un tensor de curvatura intrínseca sobre Σ mediante

$$D_\beta D_\alpha A^\gamma - D_\alpha D_\beta A^\gamma = -R^\gamma_{\delta\alpha\beta} A^\delta, \quad (\text{A.13})$$

y usando la ecuación (A.7), se tiene que

$$R^\gamma_{\delta\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\delta\beta,\alpha} - \Gamma^\gamma_{\delta\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} \Gamma^\mu_{\delta\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\beta} \Gamma^\mu_{\delta\alpha} \quad (\text{A.14})$$

Partiendo de la ecuación de Gauss-Weingarten (A.12) y desarrollando cada lado

¹ perpendicular a la brana

- lado izquierdo

$$\begin{aligned}
(e^a_{\alpha;b}e^b_{\beta})_{;c}e^c_{\gamma} &= e^a_{\alpha;bc}e^b_{\beta}e^c_{\gamma} + e^a_{\alpha;b}e^b_{\beta;c}e^c_{\gamma} \\
&= e^a_{\alpha;bc}e^b_{\beta}e^c_{\gamma} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}e^a_{\alpha;b}e^b_{\gamma} - \varepsilon K_{\beta\gamma}e^a_{\alpha;b}\eta^b \\
&= e^a_{\alpha;bc}e^b_{\beta}e^c_{\gamma} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}(\Gamma^{\xi}_{\alpha\delta}e^a_{\xi} - \varepsilon K_{\alpha\delta}\eta^a) - \varepsilon K_{\beta\gamma}e^a_{\alpha;b}\eta^b
\end{aligned}$$

- lado derecho

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}e^a_{\delta} - \varepsilon K_{\alpha\beta}\eta^a)_{;c}e^c_{\gamma} &= \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta;c}e^a_{\delta}e^c_{\gamma} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}e^a_{\delta;c}e^c_{\gamma} - \varepsilon K_{\alpha\beta;c}e^c_{\gamma}\eta^a - \varepsilon K_{\alpha\beta}\eta^a_{;c}e^c_{\gamma} \\
&= \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta;\gamma}e^a_{\delta} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}(\Gamma^{\xi}_{\delta\gamma}e^a_{\xi} - \varepsilon K_{\delta\gamma}\eta^a) - \varepsilon K_{\alpha\beta;\gamma}\eta^a \\
&\quad - \varepsilon K_{\alpha\beta}\eta^a_{;c}e^c_{\gamma}
\end{aligned}$$

Restando ambos lados, luego despejando $e^a_{\alpha;bc}e^b_{\beta}e^c_{\gamma}$ y restandole después una expresión para $e^a_{\alpha;cb}e^c_{\gamma}e^b_{\beta}$ se genera el término $-R^a_{mbc}e^m_{\alpha}e^b_{\beta}e^c_{\gamma}$. Arreglando términos se obtiene

$$R^m_{abc}e^a_{\alpha}e^b_{\beta}e^c_{\gamma} = R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}e^m_{\mu} + \varepsilon(D_{\gamma}K_{\alpha\beta} - D_{\beta}K_{\alpha\gamma})\eta^m + \varepsilon(K_{\alpha\beta}\eta^m_{;c}e^c_{\gamma} - K_{\alpha\gamma}\eta^m_{;b}e^b_{\beta}) \quad (\text{A.15})$$

Proyectando esta ecuación a lo largo de $e_{\delta m}$

$$R_{abcd}e^a_{\alpha}e^b_{\beta}e^c_{\gamma}e^d_{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon(K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma} - K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta}) \quad (\text{A.16})$$

se obtiene la ecuación de Gauss. Esta se traduce en que la curvatura inducida viene dada por la proyección de la curvatura de la variedad ambiente o bulk y la curvatura extrínseca sobre la hipersuperficie.

B

Tensor Energía-Momento 5D

La acción de un sistema correspondiente a una 3-brana embebida en un bulk cinco dimensional es

$$S = S_{bulk} + S_{brana}, \quad (\text{B.1})$$

con

$$S_{bulk} = \int_V \sqrt{-g^{(5)}} \left[\frac{1}{2k_5^2} R - \Lambda \right] d^5x, \quad (\text{B.2})$$

siendo $g^{(5)}$ la métrica en todo el bulk, R el escalar de curvatura y Λ la constante cosmológica en el bulk

La acción para una 3-brana viene dada por

$$S_{brana} = \int_M \sqrt{-g} \left[\frac{1}{k_5^2} K^\pm - \sigma \right] d^4x \quad (\text{B.3})$$

donde g es la métrica definida sobre la subvariedad M ; K^\pm la traza de la curvatura extrínseca a cada lado de la brana; σ la tensión en la brana y $k_5^2 = 8\pi G_5$ la constante gravitacional 5D.

Efectuando la variación de la acción del bulk se tiene

$$\frac{1}{2k_5^2} \delta \left(\sqrt{-g^{(5)}} g^{ab} R_{ab} \right) - \Lambda \delta \left(\sqrt{-g^{(5)}} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Variaciones de cada término

▪

$$\delta \left(\sqrt{-g^{(5)}} \right) g^{ab} R_{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{-g^{(5)}} g_{cd} (\delta g^{cd}) g^{ab} R_{ab}$$

▪

$$\sqrt{-g^{(5)}} \delta(g^{ab}) R_{ab} = -\sqrt{-g^{(5)}} g^{ac} g^{bd} \delta(g_{cd}) R_{ab} \quad (\text{B.5})$$

$$\sqrt{-g^{(5)}}g^{ab}\delta(R_{ab}) = \partial_l \left(\sqrt{-g^{(5)}}g^{ab} \right) \delta(\Gamma_{ab}^l) - \partial_b \left(\sqrt{-g^{(5)}}g^{ab} \right) \delta(\Gamma_{al}^l)$$

Considerando que la coordenada adicional y es compacta, además, usando (B.4),(B.5) y empleando el teorema de Gauss (para anular los términos con la conecciones Γ) se obtiene la variación completa de la acción para el bulk

$$\delta S_{bulk} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{-g^{(5)}} \frac{1}{2k_5^2} \left(-\frac{1}{2}g_{ab}R + R_{ab} + k_5^2\Lambda g_{ab} \right) \delta g^{ab} \quad (B.6)$$

La variación para la acción de la brana queda

$$\delta S_{brana} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} h^{\mu\nu} \left(\frac{1}{k_5^2} K^\pm - \sigma \right) \delta h_{\mu\nu} \quad (B.7)$$

Usando el hecho de que $\delta(h_{\mu\nu}) = \delta(g_{ab}e_\mu^a e_\nu^b)$, la acción completa queda

$$\delta S = \int d^4x \int dy \left\{ \frac{1}{2k_5^2} \sqrt{-g^{(5)}} \left[R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + k_5^2\Lambda g_{ab} \right] - \frac{1}{2} \sqrt{-g} e_\mu^a e_\nu^b h_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k_5^2} K^\pm - \sigma \right) \delta(y) \right\} \delta g^{ab} \quad (B.8)$$

Finalmente, para $\delta S = 0$ se tiene

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = k_5^2 \left[\Lambda g_{ab} + (e_\mu^a e_\nu^b h_{\mu\nu} K^\pm - e_\mu^a e_\nu^b h_{\mu\nu} \sigma) \delta(y) \right], \quad (B.9)$$

donde hemos considerado que $\sqrt{-g}/\sqrt{-g^{(5)}} = 1$ como para el caso de un mundo brana tipo Randall-Sundrum. Así

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = k_5^2 T_{ab} \quad (B.10)$$

cuyo tensor Energía-Momento cinco dimensional es

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} + (\tau_{\mu\nu} - \sigma h_{\mu\nu}) e_\mu^a e_\nu^b \delta(y) \quad (B.11)$$

donde se ha hecho uso de la traza $K = -\frac{1}{3}k_5^2(\tau - \sigma)$ (1.48) y donde podemos definir sin pérdida de generalidad, el tensor energía-momento sobre la brana como

$$S_{\alpha\beta} = (\tau_{\alpha\beta} - \sigma h_{\alpha\beta}) \quad (B.12)$$



Condiciones de Juntura de Darmois-Israel sobre una 3-brana

En las ecuaciones de campo sobre una hipersuperficie Σ (3- brana) se formula el tensor energía-momento sobre ella. En forma general se escribe

$$\check{T}_{\mu\nu} = cS_{\mu\nu}\delta(\Phi(x)) \quad (\text{C.1})$$

donde c es una constante, $\Phi(x)$ es una curva paramétrica sobre Σ , δ la delta de Dirac y $S_{\mu\nu}$ la contribución del tensor energía-momento proporcional a δ .

Exigiendo continuidad de la métrica sobre Σ se tiene que $[h_{ab}] = 0$; escribiendo entonces la métrica en la forma

$$g_{ab} = g_{ab}^+\Theta(\Phi(x)) + g_{ab}^-\Theta(-\Phi(x)) \quad (\text{C.2})$$

Además, las ecuaciones de campo de Einstein son válidas sobre ambos lados de la hipersuperficie, así que el interés es trabajar sobre Σ donde se espera que la curvatura y el tensor de Einstein sean proporcionales a δ . Entonces las componentes del Ricci tendrán términos proporcionales a δ^2 , las cuales se ignoran.

Derivando (C.2) se obtiene

$$g_{ab,c} = \partial_c g_{ab} + (g_{ab}^+ - g_{ab}^-) \delta(\Phi(x)) \partial_c \Phi(x) \quad (\text{C.3})$$

Pero el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es cero debido a la exigencia de la continuidad de la métrica

$$[g_{ab}] = g_{ab}^+ - g_{ab}^- = 0 \quad (\text{C.4})$$

Derivando (C.3)

$$g_{ab,cd} = [g_{ab,c}]\partial_a\Phi(x)\delta(\Phi(x)) \quad (\text{C.5})$$

Los únicos términos del tensor de Ricci que contribuyen a primer orden el δ son

$$R_{ab} = \Gamma_{ac,b}^c - \Gamma_{ab,c}^c \quad (\text{C.6})$$

donde

$$\Gamma_{ac,b}^c = \frac{1}{2g}g_{,ab} \quad (\text{C.7})$$

y

$$\Gamma_{ab,c}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{da,bc} + g_{db,ac} - g_{ab,dc}) \quad (\text{C.8})$$

Usando (C.7) y (C.8) el tensor de Ricci queda

$$R_{ab} = \left(\frac{1}{2g}[g_{,a}]\partial_b\Phi(x) - [\Gamma_{ab}^c]\partial_c\Phi(x) \right) \delta(\Phi(x)) \quad (\text{C.9})$$

Definiendo el tensor Q_{ab} como:

$$Q_{ab} = \left(\frac{1}{2g}[g_{,a}]\delta_b^c - [\Gamma_{ab}^c] \right) \partial_c\Phi(x) \quad (\text{C.10})$$

Se puede escribir la ecuación de campo de Einstein como:

$$Q_{ab} - \frac{1}{2}Q = -k^2 S_{ab} \quad (\text{C.11})$$

siendo S_{ab} el tensor energía-momento con soporte sobre la hipersuperficie (Ver A.1) y $Q = g^{ab}Q_{ab}$

Finalmente con (C.10),(C.11) y sabiendo que $Q_{\alpha\beta} = [K_{\alpha\beta}]$ sobre la hipersuperficie se obtiene la versión 4D de la ecuación de Sen.

$$[K_{\alpha\beta}] = -k^2 \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} S \right) \quad (\text{C.12})$$

Usando (B.12) se tiene

$$[K_{\alpha\beta}] = -k^2 [(\tau_{\alpha\beta} - \lambda h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (\tau - \lambda)] \quad (\text{C.13})$$

Apelando a la simetría Z_2 se tiene que $K_{\alpha\beta}^+ = K_{\alpha\beta}^-$ se encuentra finalmente que

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} k^2 \left(-\frac{2}{3} h_{\alpha\beta} \lambda + \tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \tau \right) \quad (\text{C.14})$$

y

$$K = -\frac{1}{3} k^2 (\tau - \lambda) \quad (\text{C.15})$$

REFERENCIAS

- [1] L. Randall and R. Sundrum “A large mass hierarchy from a small extra dimension”, *Phys. Rev. Lett.* **83**:3370 (1999)[hep-ph/9905221]
- [2] L. Randall and R. Sundrum, “An alternative to compactification” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064].
- [3] J. Garriga and M. Sasaki “ Brane-world creation and black holes” *Phys. Rev. D* **62**:043523
- [4] J.D Lykken and L. Randall “ The shape of gravity” *JHEP*, 06:014, 2000.
- [5] K. Ghoroku, A. Nakamura and M. Yahiro “Newton’s law in the sitter brane” *Phys. Lett B* **571**:223-228, 2003
- [6] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez “Localizing gravity on exotic thick 3-branes” *Phys. Rev. D* **70**, 104029 (2004)
- [7] P. Callin “Corrections to the Newtonian potential in the two-brane Randall-Sundrum model” [arXiv:hep-th/0407054]
- [8] P. Callin and F. Ravndal “Higher order corrections to the Newtonian potential in the Randall-Sundrum model” *Phys. Rev D* **70**, 104009 (2004) [arXiv: hep-ph/0403302]
- [9] A. Melfo, N. Pantoja, and F. Ramirez “Breaking the Z_2 simetry of the scenario Randall-Sundrum and the of the masive modes”
- [10] T. Shiromizu, K. Maeda and M. Sasaki “The Einstein Equations on the 3-Brane World” *Phys. Rev D* **62**, 024012 (2000)
- [11] N.Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos y V. Rezanian “Black holes on the brane” *Phys. Lett B* **487**, 1 (2000)
- [12] C. Germani and R. Maartens, *Phys. Rev. D* **64**, 124010 (2001).
- [13] K. Schwarzschild “ On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory ” *Berliner Sitzungsbesiche (Phys. Math. Klasse)* 189-96 (1916)

- [14] R.M. Wald General Relativity
- [15] W.Israel,Nuovo Cim. **44B** , 1 (1966)
- [16] R. Mansouri, M. Korrani “The equivalence of Darmois-Israel and distributional method for thin shells in general relativity” *J. Math.Phys***37** 1996
- [17] M. Sasaki, *Phys. Rev.D***62**,024008 (2000)
- [18] R. Marteens, K. Koyama “Brane World Gravity”Living Reviews in Relativity 13:5 2010.
- [19] R.Maartens “Cosmological dinamical on the brane”, *Phys. Rev. D***62**, 0840203 (2000)
- [20] J.B. Marion y S.T. Thornton “Classical Dynamics” 3^a ed.
- [21] C. Bohmer, T. Harko and F.S.N Lobo, *Solar system test of brane world models*, *Astropart. Phys.* **29**, 386 (2008).
- [22] C.G Bohemer, G. De Risi, T. Harko and F.S.N. Lobo “Classical test of general relativity in brane world models” *Class. Quant. Grav* **27**, 185013 (2010)