Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemática

"REPRESENTACIÓN DE GRUPOS ABELIANOS FINITOS POR SUMAS DE SUBSECUENCIAS"

Autor: M.Sc. Luz Elimar Marchan Mendoza.
Tutor: Dr. Oscar Ordaz.

Tesis Doctoral
Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctor en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, 2011

Dedicatoria

$\mathcal{A}$

Dios mi Creador, Sustentador y Redentor.

La memoria de mi amado padre Eleazar Marchan.

Mi amado esposo Eduardo.

Agradecimientos

A mi amante y buen Dios, quien nos dirige y sostiene en cada instante de nuestras vidas. Gloria y Honra sean a Ti.

A mi tutor el Dr. Oscar Ordaz, por su dedicación y trabajo desinteresado. Que el Señor le bendiga y guarde además de darle salud y éxito, muchas gracias.

Al Dr. David Grynkiewicz por su invaluable ayuda e inspiración. Dios bendiga su intelecto.

A mi esposo Eduardo por motivarme a terminar este proyecto y apoyarme incondicionalmente en todo momento.

A mi madre Marbella y mis hermanos Ruth y Natanael. Por su apoyo y por ser mis compañeros en el caminar de mi vida.

A mis suegros Tulio y Hurganda, mis cuñadas Johanna y Elizabeth, y a la abuela Juana, por sus oraciones y palabras de ánimo.

A la Dra. Isabel Márquez por ser el instrumento usado por Dios en la consecución de mi tutor.

Al jurado: José Mijares, María T. Valera, Pedro Berrizbetia y Rafael Sánchez, por su dedicación y tiempo al evaluar este trabajo.

Al Dr. Domingo Quiroz y al Dr. Carlos Guía, por sus sugerencias e in-

quietudes en cada seminario que ayudaron a mejorar este trabajo.

A mis compañeros de estudio: Felicia, Irene, Leida y Maria Teresa, por sus demostraciones de afecto y apoyo en el compartir de cada seminario.

Al Departamento de Matématica del Decanato de Ciencias de la UCLA y al DFPA por su apoyo académico y financiero.

A la U.C.V., Escuela de Matemática, Escuela de Computación (Centro ISYS) por aceptarme en su alma mater.

A las secretarias de postgrado Maribel y Eddie por su espíritu de servicio y su trato siempre amable y cordial.

A mis compañeros de trabajo por sus comentarios de motivación y aliento.

Mil gracias a todos los que de una u otra manera contribuyeron a que este sueño se hiciera realidad.

Índice general

Resumen

Basados en un resultado de Gao en [7], Ordaz y Quiroz formularon la siguiente conjetura ([27])

> Sea G un grupo abeliano finito. Sea $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_{|G|}$ una secuencia de enteros primos relativos con $|G|$ tal que $\sum_{i=1}^{|G|} w_i \equiv 0 \pmod{|G|}$. Sea S una secuencia de longitud $|G| + \mathsf{D}(G) - 1$ en G. Supongamos que para todo subgrupo H de G y todo $g \in G$, la clase lateral $g + H$ contiene a lo más $|G| + \mathsf{D}(G) - \frac{|G|}{|H|}$ términos de S. Entonces todo elemento $g \in G$ se puede escribirse de la forma $g = \sum_{i=1}^{|G|} w_i s_i$ con $s_1 \cdot \ldots \cdot s_{|G|}$ una subsecuencia de S.

En este trabajo se dan dos nuevos resultados que extienden el Teorema de Partición con peso de Grynkiewicz (en [15]), tales resultados constituyen un útil aporte a la Teoría Aditiva, permitiendo establecer un caso especial de la Conjetura Ordaz-Quiroz y dar solución a una variante que mejora un teorema de Gao [7], al mostrar que la hipótesis $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$ puede ser sustituida por $|S| \geq |G| + \mathsf{d}^*(G)$, donde $\mathsf{d}^*(G) = \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$. Además, se extiende un resultado de Hamidoune en [18].

Introducción

El objeto de estudio de los problemas de suma cero son las secuencias de elementos en un grupo abeliano finito G, las cuales se escriben de la forma $S = s_1 s_2 \cdots s_n$.

Básicamente los *problemas de suma cero* consisten en encontrar condiciones suficientes sobre una secuencia para que ésta posea una subsecuencia cuya suma de sus términos sea el elemento neutro del grupo, es decir, una subsecuencia de suma cero. Algunos problemas exigen que la subsecuencia tenga una longitud preestablecida, y otros han agregado una secuencia de pesos (números enteros) de modo que la suma ponderada de la subsecuencia, afectada por los pesos, sea cero. En los últimos años dicha área se ha extendido a encontrar condiciones suficientes sobre una secuencia para que ésta posea una subsecuencia cuya suma de un determinado elemento de G, no necesariamente el cero.

El primer resultado conocido sobre problemas de suma cero, denominado por Erdős "Lema prehistórico", es el siguiente:

> En un grupo abeliano finito G, toda secuencia de longitud $|G|$, contiene una subsecuencia de suma cero.

En 1961, Erdős, Ginzburg y Ziv ([6], [26]) probaron uno de los teoremas básicos en el área de los problemas de suma cero al establecer que:

> En un grupo abeliano finito G, toda secuencia de longitud al menos $2|G|-1$, contiene una $|G|$-subsecuencia de suma cero.

Es decir, se encontraron condiciones sobre una secuencia para que ésta represente al cero. Este resultado actualmente se ha desarrollado mucho y ha constituido parte esencial en la teoría de factorización (ver [8] y [10]).

Una de las constantes más importantes y conocidas en esta área es la *Constante de Davenport* de G (1966), denotada por $\mathsf{D}(G)$, definida como el menor entero positivo tal que toda secuencia de longitud $\mathsf{D}(G)$ posee una subsecuencia de suma cero. El Lema prehistórico garantiza que $\mathsf{D}(G) \leq |G|$.

En 1995, [7], Gao prueba lo siguiente

> *Sea G un grupo abeliano finito, y sea S un secuencia en G de longitud al menos $|G|+\mathsf{D}(G)-1$. Entonces, todo elemento de G se escribe como suma de una subsecuencia de S de longitud $|G|$, o Existe un subgrupo no trivial H de G tal que todos, excepto a lo más $|G/H|-2$ términos de S, pertenecen a una clase lateral módulo H.*

Posteriormente empiezan a tratarse problemas de secuencias con peso, se consideran ahora dos secuencias, una secuencia de enteros W y una secuencia S en un grupo abeliano G, se estudian condiciones para que el cero (o cualquier otro elemento de G) se escriba como suma de términos de la forma $w_i a_i$, donde los a_i forman una subsecuencia de S y los coeficientes o pesos w_i forman una subsecuencia de W.

Las variaciones con peso de los problemas de suma cero fueron iniciadas por Caro en [3] cuando conjeturó la siguiente versión con peso del teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv:

Sea $W = w_1 \cdots w_n$ una secuencia de enteros con $\sum_{i=1}^{n} w_i \equiv 0 \pmod{\exp(G)}$ y sea S una secuencia en un grupo abeliano finito G. Si S tiene longitud al menos $|G| + n - 1$, entonces $0 = \sum_{i=1}^{n} w_i s_i$ sonde $s_1 \cdots s_n$ es una subsecuencia de S.

Esta conjetura fué probada en 2006 por Grynkiewicz ([13]), después de muchos trabajos parciales [1] [9] [18] [19], mediante el siguiente resultado, al cual llamó el Teorema EGZW (versión con peso del Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv):

Desde entonces, hubo otros resultados relacionados con representación de grupos por sumas de subsecuencias con pesos (ver [30] [31] [12] [27] por citar algunos).

Recientemente Ordaz y Quiroz, en [27], formularon la siguiente conjetura, la cual constituye una versión con pesos del Teorema de Gao.

Sea G un grupo abeliano finito, Sea $W = w_1 \cdots w_n$ una secuencia de enteros primos relativos con $|G|$, de longitud $n = |G|$, tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i \equiv 0$ $\pmod{|G|}$ y sea S un secuencia en G de longitud al menos $|G| + \mathsf{D}(G) - 1$. Entonces, todo elemento de G se escribe como $\sum_{i=1}^{n} w_i s_i$ donde $s_1 \cdots s_n$ es una subsecuencia de S, o existe un subgrupo no trivial H de G tal que todos, excepto a lo más $|G/H| - 2$ términos de S, pertenecen a una clase lateral módulo H.

Ordaz y Quiroz, mostraron que su conjetura es cierta cuando $|S| = 2|G| - 1$, y en consecuencia para grupos cíclicos.

En este trabajo se obtiene, a partir de la versión con peso del Teorema análogo de Cauchy-Davenport, una mejora del resultado de Ordaz y Quiroz y se establecen algunos casos muy especiales donde se cumple la conjetura Ordaz-Quiroz. Estos casos especiales son obtenidos a partir de la formulación de dos nuevos teoremas de partición, a saber el Teorema 4.2.1 y el Teorema 4.2.2, los cuales extienden, para el caso $n \geq \mathsf{d}^*(G)$, a los teoremas análogos de Cauchy-Davenport y a los teoremas de partición de Grynkiewicz en [14] y [15].

Como una segunda consecuencia de los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2, se extiende un resultado de Hamidoune en [18]. Finalmente, como una tercera consecuencia, se mejora el Teorema de Gao sustituyendo la hipótesis $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$ por $|S| \geq |G| + \mathsf{d}^*(G)$ (recordar que $\mathsf{D}(G) - 1 \geq \mathsf{d}^*(G)$).

En el primer Capítulo, además de los Teoremas de teoría aditiva usados como herramientas en los resultados principales de este trabajo, se presentan otros teoremas clásicos de esta teoría con el fin que el lector tenga un panorama amplio del contexto de la tesis. Específicamente se presentan el Teorema de Cauchy-Davenport, el Teorema Kneser, el Teorema de estructura de Kemperman y dos consecuencias de este teorema, los cuáles son claves para demostrar los nuevos teoremas de partición.

El segundo Capítulo contiene la notación y las definiciones básicas usadas en el contexto de los problemas de suma cero, se presentan los resultados que sirven de base fundamental para demostrar los resultados principales de esta tesis, entre ellos se presenta el Teorema EGZ, el Teorema EGZP, los Teoremas de Partición y los Teoremas análogos de Cauchy-Davenport.

En el tercer Capítulo se estudia la constante $\mathsf{d}^*(G)$, gran parte de los resultados de éste Capítulo son consecuencia de la estructura algebraica del grupo G; también se establece una relación entre la constante $\mathsf{d}^*(G)$ y los problemas de suma cero.

El cuarto y último Capítulo está dedicado a la demostración de los objetivos de este trabajo, contiene una breve descripción de la metodología empleada, dos teoremas que mejoran los Teoremas de Partición de Grynkiewicz y algunas de sus consecuencias, entre ellas, resultados especiales relacionados con la Conjetura de Ordaz y Quiroz.

Capítulo 1

Teoremas de adición

La teoría aditiva juega un papel muy importante al tratar problemas de suma cero, dado que ésta estudia la relación que existe entre la cardinalidad del conjunto que resulta al sumar conjuntos y la estructura de dichos conjuntos. El objetivo central de este capítulo es exponer dos resultados y sus implicaciones, los cuales son ampliamente usados en este trabajo, estos son, el Teorema de Kneser y el Teorema de estructura de Kemperman (KST).

Sea G un grupo abeliano y A y B subconjuntos no vacíos de G, definimos el *conjunto suma* de A y B, denotado por $A+B$ como

$$A+B=\{a+b:\ a\in A, b\in B\}$$

como G es abeliano tenemos que $A+B=B+A$. En general el conjunto suma de mas de dos subconjuntos de G, digamos $A_1,\ldots,A_n$, se define como

$$\sum_{i=1}^{n} A_i=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i:\ a_i\in A_i\right\}.$$

Cuando uno de los conjuntos es unitario, escribimos $g+A$ en lugar de $\{g\}+A$, el conjunto $g+A$ es llamado *traslación de A*.

Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$k \cdot A = \{ka : a \in A\}.$$

También definimos

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\} \text{ y } -A = \{-a : a \in A\}.$$

El cardinal del conjunto A lo denotamos por $|A|$.

1.1. Progresiones aritméticas

Sean a, $b \in \mathbb{R}$, dos números reales, denotamos por $[a, b]$ al conjunto de todos los números enteros entre a y b, es decir,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Un concepto muy importante al momento de describir la estructura de conjuntos en un grupo abeliano, con conjunto suma de cardinalidad "pequeña", es la idea de progresión aritmética. Sea G un grupo abeliano y $d \in G$ no nulo, de orden al menos $r \in \mathbb{Z}^+$. Una *progresión aritmética de longitud r, con diferencia d*, es un conjunto de la forma $A = \{a_0 + id : i \in [0, r-1]\}$, donde $a_0 \in G$. El elemento a_0 es el primer término de la progresión, y el elemento $a_0 + (r-1)d$ es el último término de la progresión, la forma en que está ordenado el conjunto A es el orden dado por d.

Observemos que la diferencia de una progresión aritmética de longitud r es única, salvo el signo, pues éste depende de la forma en que ordemos la progresión, por ejemplo, la progresión A dada anteriormente la podemos ordenar de modo que el primer término sea $a_0 + (r-1)d$, en este caso la diferencia de la progresión será $-d$.

Notemos también que si A es una progresión aritmética con diferencia d y $0 \in A$, entonces $A \subseteq \langle d \rangle$ (si $0 \in A$, $0 = a_0 + kd$ con $k \in [0, r-1]$, así $a_0 \in \langle d \rangle$ implicando que $A \subseteq \langle d \rangle$). Si d tiene orden infinito podemos considerar progresiones aritméticas de longitud infinita con diferencia común d, estas pueden ser de la forma $A = \{a_0 + id : i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$, o de la forma $A = \{a_0 + id : i \in \mathbb{Z}\}$, sin embargo, generalmente trabajamos con conjuntos finitos, de modo que las progresiones aritméticas infinitas no seran consideradas.

1.2. Conjuntos periódicos y descomposiciones quasi-periódicas

Sea G un grupo abeliano, H un subgrupo de G y A un subconjunto de G. Es claro que $A + H$ es unión de H-clases $a + H$ con $a \in A$, además A es un subconjunto de $A + H$. Cuando $A = A + H$ decimos que A es H-periódico.

Definición 1.2.1 *Sea H subgrupo de un grupo abeliano G, y A un subconjunto no vacío de G, el conjunto A se dice* H-periódico *si A es unión de clases módulo H (o H-clases), es decir, si* $A = \bigcup_{a \in A} (a + H)$.

Observemos que todo subconjunto A de G es H-periódico, con H el subgrupo trivial (ya que en este caso las H-clases son los conjuntos unitarios formados por los elementos de G), luego siempre es posible, dado un conjunto A, encontrar un subgrupo de G maximal (con respecto a la inclusión) de modo que A sea H-periódico.

Veremos que este subgrupo maximal es único, lo que permite establecer la siguiente definición.

Definición 1.2.2 *Sea A un subconjunto no vacío de un grupo abeliano G, definimos el estabilizador de A, y lo denotamos por $\mathsf{H}(A)$, como el subgrupo maximal (con respecto a la inclusión) para el cual A es H-periódico. Si $\mathsf{H}(A) = 0$ entonces decimos que A es aperiódico, en caso contrario decimos que A es periódico.*

El siguiente Lema garantiza que $\mathsf{H}(A) = \{g \in G : \ g + A = A\}$, esto muestra la unicidad antes mencionada, además, establece algunas propiedades del estabilizador de A.

Lema 1.2.1 *[15] Sea G un grupo abeliano, H un subgrupo de G y A un subconjunto no vacío de G entonces*

(i) *A es $H-$periódico si y solo si $A + H = A$, luego $A + \mathsf{H}(A) = A$.*

(ii) $\mathsf{H}(A) = \{g \in G : \ g + A = A\}$.

(iii) *Si A es $H-$periódico entonces H es un subgrupo de $\mathsf{H}(A)$.*

(iv) *Si A es $H-$periódico entonces $A+B$ es $H-$periódico, luego $\mathsf{H}(A) \subseteq \mathsf{H}(A+B)$.*

(v) *$\mathsf{H}(A) = \mathsf{H}(g + A)$ para todo $g \in G$.*

(vi) *$|\mathsf{H}(A)|$ divide a $|A|$.*

(vii) *Si $A \cap \mathsf{H}(A) \neq \emptyset$, entonces $\mathsf{H}(A) \subseteq A$.*

Ejemplo 1.2.1 *Sea A una progresión aritmética con diferencia d en un grupo abeliano G. Si $|A| = |\langle d\rangle|$ entonces $\mathsf{H}(A) = \langle d\rangle$, en caso contrario A es aperiódico. en efecto, sea $A = \{a_0+id : i \in [0, r-1]\}$, si $x \in \mathsf{H}(A)$, entonces para cada $i \in [0, r-1]$, existe $j \in [0, r-1]$, tal que $(a_0+id)+x = a_0+jd$, esto implica que $x = (j-i)d \in \langle d\rangle$, luego $\mathsf{H}(A) \subseteq \langle d\rangle$. Si $|A| = |\langle d\rangle|$ entonces $A = a_0+\langle d\rangle$, luego $A+\langle d\rangle = A$ y tenemos que $\langle d\rangle \subseteq \mathsf{H}(A)$, así $\mathsf{H}(A) = \langle d\rangle$. Si $|A| < |\langle d\rangle|$ entonces $r-1 < |\langle d\rangle|$, supongamos que $kd \in \mathsf{H}(A)$ para algún $k \in [1, |\langle d\rangle|-1]$. Es claro que $k \leq r-1$, de lo contrario, $a_0 + kd \notin A$ contradiciendo que $kd \in \mathsf{H}(A)$; de modo que $1 \leq r-k \leq r-1$, así $a_0 + (r-k)d \in A$, pero $(a_0 + (r-k)d) + kd = a_0 + rd \notin A$, contradiciendo el hecho que $kd \in \mathsf{H}(A)$, por tanto $k = 0$ y en consecuencia $\mathsf{H}(A) = 0$.*

Observemos que $\mathsf{H}(A)$, esto es, el estabilizador de A, es el subgrupo maximal con la propiedad de que $A = A + \mathsf{H}(A)$, el Lema anterior muestra que si A es H-periódico entonces H es un subconjunto de $\mathsf{H}(A)$. Puede ocurrir que dado H subgrupo de G no se tenga que $A = A + H$, esto significa que $A + H \nsubseteq A$, es decir, existe $x \in A + H$ tal que $x \notin A$, a estos elementos se les denomina *H-hoyos de* A (son los términos que hacen falta en A para que A sea $H-$periódico), notemos que A unido con sus $H-$hoyos es siempre $H-$periódico y el número de $H-$hoyos de A es $|A + H| - |A|$.

Dado un subgrupo H de un grupo abeliano G, usaremos ϕ_H para denotar el homomorfismo canónico $\phi_H : G \to G/H$. Sea $A \subseteq G$, sabemos que $A + H = \bigcup_{a\in A}(a + H)$ y $s = |\phi_H(A)|$ es el número de clases distintas módulo H tales que

$A + H = \bigcup_{i=1}^{s} (a_i + H)$, con $a_i \in A$, luego

$$|A + H| = \sum_{i=1}^{s} | a_i + H | = \sum_{i=1}^{s} | H | = s|H| = |\phi_H(A)||H|.$$

Observemos además que si $H = \mathsf{H}(A)$ entonces $\phi_{\mathsf{H}(A)}(A)$ es aperiódico, esto es, $\mathsf{H}(\phi_{\mathsf{H}(A)}(A)) = \{\phi_{\mathsf{H}(A)}(0)\}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathsf{H}(A)}(x) \in \mathsf{H}(\phi_{\mathsf{H}(A)}(A)) \quad &\Rightarrow \quad \phi_{\mathsf{H}(A)}(x) + \phi_{\mathsf{H}(A)}(A) = \phi_{\mathsf{H}(A)}(A) \\
&\Rightarrow \quad \phi_{\mathsf{H}(A)}(x + A) = \phi_{\mathsf{H}(A)}(A) \\
&\Rightarrow \quad (x + A) + \mathsf{H}(A) = A + \mathsf{H}(A) \\
&\Rightarrow \quad x + A = A \\
&\Rightarrow \quad x \in \mathsf{H}(A) \\
&\Rightarrow \quad \phi_{\mathsf{H}(A)}(x) = \phi_{\mathsf{H}(A)}(0).
\end{aligned}$$

Definición 1.2.3 *Sea G un grupo abeliano y H un subgrupo no trivial de G, una* descomposición H-quasi-periódica *de un subconjunto A de G es una partición disjunta $A = A_1 \cup A_0$ con A_1 H-periódico o vacío y A_0 un subconjunto de una H-clase. Si A tiene una descomposición H-quasi-periódica para algún $H < G$, digamos $A = A_1 \cup A_0$, con $A_1 \neq \emptyset$, decimos que A es* quasi-periódico *o* H-quasi-periódico, *si se desea especificar el subgrupo.*

Observación 1.2.1 *Sea G un grupo abeliano.*

(i) Todo subconjunto de G tiene un descomposición quasi-periódica con A_1 vacío y $H = G$.

(ii) Existe una sutil diferencia entre decir que el subconjunto A de G es H-quasi-periódico y decir que A tiene una descomposición H-quasi-periódica (en general, pedir que un conjunto sea H-quasi-periódico es más fuerte).

(iii) Todo conjunto periódico es quasi-periódico, pero el recíproco no es cierto, por ejemplo, dado $A \subseteq G$ y $H < G$, el conjunto $A + H \setminus \{g\}$ con $g \in A + H$ es quasi-periódico pero no es periódico.

1.3. El Teorema de Kneser

Sean A y B conjuntos en un grupo abeliano G, estamos interesados en encontrar una cota para $|A + B|$ en términos de $|A|$ y $|B|$. Un argumento comúnmente usado en teoría aditiva es el de traslaciones de conjuntos. Observemos que el cardinal de un conjunto es invariante bajo traslación, es decir, dado $g \in G$

$$|g + A| = |A|$$

En particular

$$|g + (A + B)| = |A + B|$$

Entonces al abordar problemas de cardinalidad, es indiferente considerar el conjunto A o el conjunto $g + A$, por lo que frecuentemente se trabaja con traslaciones de conjuntos según sea conveniente (frecuentemente es conveniente que $0 \in A$), sin que se pierda generalidad. Mann demostró, en [25], que cuando $|A|$ y $|B|$ son suficientemente "grandes", todo elemento de G puede ser representado como un elemento de $A + B$.

Teorema 1.3.1 *[Teorema de Mann][25]. Sea G un grupo abeliano finito y sean A y B subconjuntos de G tales que $|A| + |B| \geq |G| + 1$. Entonces*

$$A + B = G.$$

El primer resultado en teoría aditiva de grupos fué probado por Cauchy en 1813 [4] y nuevamente en 1935, en forma independiente, por Davenport [5]; éste da una cota inferior para $|A+B|$ cuando A y B son subconjuntos de un grupo finito de orden primo. Aunque generalmente es presentado para dos conjuntos, puede generalizarse para cualquier colección finita de subconjuntos usando inducción.

Teorema 1.3.2 *[Teorema de Cauchy-Davenport][4], [5]. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$ con p primo, entonces*

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \text{mín}\{p, \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1\}.$$

Existen muchas generalizaciones del Teorema de Cauchy-Davenport, sin embargo, la mas completa es el Teorema de Kneser, el cual da una cota inferior para $|A+B|$ relacionada con su grupo estabilizador. Este teorema es uno de los resultados fundamentales en teoría aditiva.

Teorema 1.3.3 *[Teorema de Kneser] [22] [23] [26] [32]. Sea G un grupo abeliano, y sea $A_1, A_2 \ldots, A_n$ una colección de subconjuntos finitos no vacíos de G. Si $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ entonces*

$$|\sum_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)| \geq \sum_{i=1}^{n} |\phi_H(A_i)| - n + 1.$$

Existen varias alternativas para formular el Teorema de Kneser, la siguiente proposición establece algunas de ellas.

Proposición 1.3.1 *[15] Sea G un grupo abeliano, y sea $A_1, A_2 \ldots, A_n$ una colección de subconjuntos finitos no vacíos de G. Si $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) $\mid \sum_{i=1}^{n} \phi_H(A_i) \mid \geq \sum_{i=1}^{n} |\phi_H(A_i)| - n + 1.$

(ii) $\mid \sum_{i=1}^{n} A_i \mid \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i + H| - (n-1)|H|.$

(iii) $\mid \sum_{i=1}^{n} A_i \mid \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - (n-1)|H|.$

(iv) Si $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *es aperiódico entonces* $\mid \sum_{i=1}^{n} A_i \mid \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1.$

Como podemos ver, el Teorema de Kneser da la cota de Cauchy-Davenport, en caso que el conjunto suma sea aperiódico, o reduce el problema a trabajar con el grupo G/H y los conjuntos $\phi_H(A_i)$, aquí el conjunto suma $\sum_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)$ es aperiódico y se tiene además la cota de Cauchy-Davenport. Notemos que el Teorema de Kneser implica fácilmente el Teorema de Cauchy-Davenport, pues en $\mathbb{Z}_p$ (con p primo) el subgrupo $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ es trivial o es $\mathbb{Z}_p$ (ya que cuando G tiene orden primo, G no contiene subgrupos propios no triviales). Si $H = 0$ el Teorema de Kneser implica que $\mid \sum_{i=1}^{n} A_i \mid \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1 \geq \text{mín}\{p, \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1\}$ (Proposición 1.3.1 parte *iv*). Si $H = \mathbb{Z}_p$ entonces $\mid \sum_{i=1}^{n} A_i \mid = \mid \sum_{i=1}^{n} A_i + \mathbb{Z}_p \mid = |\mathbb{Z}_p| = p \geq \text{mín}\{p, \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1\}$.

Haremos algunos comentarios importantes sobre el significado y algunas implicaciones del Teorema de Kneser.

Observación 1.3.1 *Sea $A_1, \ldots, A_n$ una colección de conjuntos finitos en un grupo abeliano G y $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$. Observemos las siguientes implicaciones del Teorema de Kneser.*

(i) *El número total de $H-$hoyos de los A_i es $\rho = \sum_{i=1}^{n}(|A_i+H|-|A_i|)$. Esto implica que $\sum_{i=1}^{n}|A_i + H| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \rho$, luego el Teorema de Kneser (ver Proposición 1.3.1 ii)) implica que*

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \sum_{i=1}^{n}|A_i| - (n-1)|H| + \rho$$

.

(ii) *Si $|\sum_{i=1}^{n} A_i| < \sum_{i=1}^{n}|A_i| - n + 1$, entonces por (i) debemos tener que $\sum_{i=1}^{n}|A_i| - (n-1)|H| + \rho < \sum_{i=1}^{n}|A_i| - n + 1$, es decir,*

$$\rho < (n-1)(|H| - 1)$$

Esto quiere decir que no puede haber muchos H-hoyos en los conjuntos A_i, o sea, los conjuntos A_i son H-periódicos o estan muy "cerca"de serlos, cada conjunto tiene un promedio ρ/n de a lo más $\frac{n-1}{n}|H|$ hoyos.

(iii) *Si $|\sum_{i=1}^{n}(A_i+H)| \geq \sum_{i=1}^{n}|A_i+H|-n+2$ entonces el Teorema de Kneser implica*

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n} A_i| = |(\sum_{i=1}^{n} A_i) + H| = |\sum_{i=1}^{n}(A_i + H)| &\geq \sum_{i=1}^{n}|A_i + H| - n + 2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \rho - n + 2 \\ &> \sum_{i=1}^{n}|A_i| - n + 1 \end{aligned}$$

(iv) *Si* $|\sum_{i=1}^{n} A_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1$, *por (iii), debemos tener* $|\sum_{i=1}^{n}(A_i + H)| < \sum_{i=1}^{n} |A_i + H| - n + 2$. *En particular, si* $n = 2$, *usando* A *y* B *en lugar de* A_1 *y* A_2, *tenemos que si* $|A + B| \leq |A| + |B| - 1$, *el Teorema de Kneser implica* $|A + B| = |A + H| + |B + H| - 1$.

La siguiente observación resume algunas consecuencias de los teoremas de adición que hemos presentado.

Observación 1.3.2 *Sean* A *y* B *subconjuntos no vacíos en un grupo abeliano* G, *a continuación algunas implicaciones de algunos resultados que hemos discutido, relacionados con la cota* $|A| + |B| - 1$.

(i) *Si* $|G| \leq |A| + |B| - 1$ *entonces todo elemento en* G *puede ser representado como un elemento de* $A + B$ *(Teorema de Mann (1.3.1)).*

(ii) *Si* $|A + B| < |A| + |B| - 1$ *entonces el Teorema de Kneser implica que* $A + B$ *es periódico*

(iii) *Si* A *o* B *contienen un único elemento de alguna* H*-clase, entonces* $\rho \geq |H| - 1$ *y de la Observación 1.3.1 parte (iv),* $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

De modo que el valor $|A| + |B| - 1$ *es una especie de "valor crítico", para el cual la estructura de* $A + B$ *es considerablemente diferente dependiendo de si* $|A + B|$ *está por encima o por debajo de* $|A| + |B| - 1$. *Recíprocamente si* A *y* B *o* $A + B$ *tienen determinada estructura, podemos acotar* $|A + B|$ *superior o inferiormente por* $|A| + |B| - 1$. *Más adelante discutiremos la estructura de aquellos conjuntos para los cuales* $|A + B| = |A| + |B| - 1$.

1.4. Estructura de lo pares críticos

En ésta sección revisaremos uno de los resultados inversos mas importantes en Teoría Aditiva, el Teorema de estructura de Kemperman (KST), éste determina la estructura de todos los subconjuntos finitos, no vacíos A y B de un grupo abeliano G, tales que $|A+B| \leq |A|+|B|-1$. En adelante, dado $A \subseteq G$, usaremos $\overline{A} := G \setminus A$ para denotar el complemento de A; notemos que

$$-\overline{A} = \overline{-A} \;\text{ y }\; \text{para todo } g \in G, \;\; g + \overline{A} = \overline{g + A}.$$

Cuando $G = \mathbb{Z}$, es conocido que $|A + B| = |A| + |B| - 1$ si, y solo si A y B están en progresión aritmética con diferencia común o $\text{mín}\{|A|, |B|\} = 1$ (ver [26]). El siguiente Teorema muestra que, con una pequeña excepción, esto también se cumple para $G = C_p$, determinando así la estructuras de los pares críticos en C_p.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Vosper) *[33] Sean A, $B \subseteq C_p$ con p primo, $|A| \geq |B| \geq 2$, y*

$$|A + B| = |A| + |B| - 1. \tag{1.1}$$

(i) Si $|A + B| \leq p - 2$, entonces A y B están en progresión aritmética con diferencia común.

(ii) Si $|A + B| = p - 1$, entonces $A = c - \overline{B}$ para algún $c \in G$.

Observemos que si $|B| = 1$, entonces siempre se cumple que $|A + B| = |A| = |A|+|B|-1$. Si A y B estan en progresión aritmética con diferencia común d, entonces el conjunto suma es también una progresión aritmética de diferencia d [15], luego $|A + B| = |A| + |B| - 1$. Finalmente si $A = c - \overline{B}$ para algún $c \in G$, por el Teorema de Cauchy-Davenport, tenemos que $|A+B| = |(c-\overline{B})+B| \geq |B|+|\overline{B}|-1 = p-1$, pero $c \notin (c-\overline{B})+B$ (en caso contrario $0 = b - b_0$ con $b \in B$ y $b_0 \notin B$, lo cual es imposible), así $|A+B| = p-1 = |A|+|B|-1$. En consecuencia, vemos que la información estructural dada por el Teorema de Vosper describe precisamente todos los conjuntos de C_p que satisfacen (1.1).

Para determinar la estructura de todos los conjuntos A y B con $|A+B| \leq |A|+|B|-1$ es suficiente considerar únicamente los casos donde $A+B$ es aperiódico y $|A+B| = |A|+|B|-1$. Pues si $|A+B| \leq |A|+|B|-1$, el Teorema de Kneser implica (ver Observación 1.3.1)

$$|\phi_H(A+B)| = |\phi_H(A)| + |\phi_H(B)| - 1,$$

donde $H = \mathsf{H}(A+B)$ y $\phi_H(A+B)$ es aperiódico, además,

$$|A+B| = |A|+|B|-|H|+\rho,$$

donde $\rho = |A+H|-|A|+|B+H|-|B|$ es el número de H-hoyos en A y B. De modo que podemos trabajar con los conjuntos $\phi_H(A)$, $\phi_H(B)$ y $\phi_H(A)+\phi_H(B)$ en lugar de trabajar con A, B y $A+B$; y conociendo la estructura de $\phi_H(A)$ y $\phi_H(B)$, A y B pueden ser obtenidos de $A+H$ y $B+H$ eliminando los $H-$hoyos de A y B. Los pares de subconjuntos con $|A+B| = |A|+|B|-1$ son conocidos como *pares críticos*.

1.4.1. Pares elementales

Sean A y B conjuntos en un grupo abeliano G. Para $g \in G$ definimos

$$r_{A,B}(g) = |\{(a,b) \in A \times B \mid a+b = g\}|,$$

como el número de representaciones de g como una suma de un elemento de A y un elemento de B. Cuando $r_{A,B}(g) = 1$, decimos que g tiene una representación única como elemento de $A+B$. Es claro que $r_{A,B}(g) \geq 1$ si y solo si $g \in A+B$.

Un par (A,B) de subconjuntos finitos, no vacíos de un grupo G es llamado un *par elemental*, si satisface al menos una de las siguientes condiciones:

(I) $\min\{|A|, |B|\} = 1$.

(II) A y B están en progresión aritmética con diferencia común d, $|A|, |B| \geq 2$ y $|A| + |B| - 1 \leq |\langle d \rangle|$.

(III) $A \subseteq a_0 + H$ y $B \subseteq b_0 + H$ (con $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $H \leq G$), $|A| + |B| = |H| + 1$ y $a_0 + b_0$ es el único elemento de expresión única en $A+B$.

(IV) A es aperiódico, $A \subseteq a_0 + H$ y $B \subseteq b_0 + H$ (con $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $H \leq G$), $A+B$ no contiene elementos de expresión única, y $B = g - (a_0 + H) \setminus A$ (para algún $g \in G$).

Observemos que los pares tipo (I), (II) y (III) son pares críticos (notar que en el caso (III), el Teorema de Mann implica que $A + B = (a_0 + b_0) + H$, luego $|A+B| = |H| = |A| + |B| - 1$).
Los pares tipo (IV) también son críticos, en efecto, no perdemos generalidad al trasladar A y B de modo que $A, B \subseteq H$ (notar que podemos considerar $g \in H$), así (IV) implica que $B = -\overline{A}$, donde $\overline{A}$ denota el complemento de A con respecto a H. Ahora

$$r_{A,B}(g) = r_{A,-\overline{A}}(g) = r_{-A,\overline{A}}(-g) = |(-g+A) \cap \overline{A}| = |(A \cup (-g+A)) \setminus A|$$

Como A es aperiódico, $|(A \cup (-g + A)) \setminus A| \geq 1$ para todo $g \in H$ no nulo (ya que $|(A \cup (-g + A)) \setminus A| = 0$ implica $A = -g + A$, contradiciendo que A es aperiódico, pues $g \neq 0$). Así $r_{A,B}(g) \geq 1$ para todo $g \in H$ no nulo y $r_{A,B}(0) = 0$, en consecuencia $|A+B| = |H|-1 = |A|+|\overline{A}|-1 = |A|+|B|-1$. Más aún, $A+B = (g+H)\setminus\{g\}$ (ya que $A+B \subseteq (g+H)\setminus\{g\}$ y $|A+B| = |A|+|B|-1 = |A|+|g-(a_0+H)\setminus A|-1 = |A| + |a_0 + H| - |A| - 1 = |H| - 1 = |(g + H) \setminus \{g\}|$)
La condición que $A + B$ no contenga elementos de expresión única que se exige en (IV) es dada para que no existan conjuntos de tipos (I) y (IV) simultánemente. Por esta misma razón se exige en (II) que $|A|$, $|B| \geq 2$, y en (III) que exista un único elemento de expresión única.

1.4.2. El Teorema de Estructura de Kemperman (KST)

A continuación enunciamos el Teorema de estructura de Kemperman.

Teorema 1.4.2 (Teorema de estructura de Kemperman (KST)) *[21] Sea G un grupo abeliano, y sean A, $B \subseteq G$ finitos no vacíos. Si $A+B$ es aperiódico o $A+B$ es periódico conteniendo un elemento de expresión única, entonces*

$$|A + B| = |A| + |B| - 1$$

si y solo si, existe $H < G$ tal que A y B tienen descomposiciones H-quasi-periódicas $A = A_1 \cup A_0$ y $B = B_1 \cup B_0$ con A_0, $B_0 \neq \emptyset$, y se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\phi_H(A_0) + \phi_H(B_0)$ *es un elemento de expresión única en* $\phi_H(A) + \phi_H(B)$.

(ii) $|\phi_H(A + B)| = |\phi_H(A)| + |\phi_H(B)| - 1$.

(iii) $|A_0 + B_0| = |A_0| + |B_0| - 1$.

(iv) (A_0, B_0) *es un par elemental de tipo (I), (II), (III) o (IV).*

El recíproco del Teorema de Kemperman también es cierto y puede deducirse fácilmente (ver [15]).

Ahora damos dos lemas, consecuencias de KST, los cuales seran muy útiles en el capítulo 4.

Lema 1.4.1 *Sea* $A_1, \ldots, A_n$ *una colección de* $n \geq 3$ *subconjuntos finitos, en un grupo abeliano* G *de orden* m*, tal que* $0 \in A_i$ *y* $|A_i| \geq 2$ *para todo* i*. Supongamos que ningún* A_i *es quasi-periódico y que* $\langle A_i \rangle = G$*. Si* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *es aperiódico y*

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1, \tag{1.2}$$

entonces los conjuntos A_i *estan en progresión aritmética con diferencia común.*

Demostración. Como $\sum_{i=1}^{n} A_i$ es aperiódico, se sigue que $A_j + A_k$ es aperiódico para cualquier $j \neq k$. Así el Teorema de Kneser implica que $|A_j + A_k| \geq |A_j| + |A_k| - 1$ (Proposición 1.3.1). Si $|A_j + A_k| > |A_j| + |A_k| - 1$, el Teorema de Kneser implica

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} |A_i| + |A_j + A_k| - (n-1) + 1 > \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 2,$$

contradiciendo (1.2), luego

$$|A_j + A_k| = |A_j| + |A_k| - 1,$$

por lo tanto todo par (A_j, A_k) con $j \neq k$ es un par crítico y podemos aplicar KST. Como A_i no es quasi-periódico, para $i = j, k$ concluimos de KST que (A_j, A_k) es un par elemental de tipo (I), (II), (III) o (IV). Pero $|A_j|$, $|A_k| \geq 2$ y $A_j + A_k$ es aperiódico, luego (A_j, A_k) no puede ser tipo (I) ni tipo (III). Como $n \geq 3$, $|A_i| \geq 2$ para todo i, y $\sum_{i=1}^{n} A_i$ es aperiódico (y en particular, $|\sum_{i=1}^{n} A_i| < |G|$), se sigue, en vista del Teorema de Kneser, que $|A_j + A_k| < |\sum_{i=1}^{n} A_i| < |G|$. Supongamos que el par (A_j, A_k) es tipo (IV), entonces $A_j + A_k = g + H \setminus \{g\}$ para algún $g \in G$; como $0 \in A_j + A_k$ entonces $g \in H$, y como $0 \in A_k$ entonces $A_j \subseteq H$, pero $\langle A_j \rangle = G$, entonces $H = G$, en consecuencia $A_j + A_k = G \setminus \{g\}$, luego para $l \neq j, k$ $|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq |A_i + A_j + A_k| \geq |A_i + A_j| + |A_k| - 1 \geq |G| - 1 + 2 - 1 = |G|$, generando una contradicción. Así (A_j, A_k) no puede ser tipo (IV), más aún, $|A_j|$, $|A_k| \leq |G| - 2$. Por tanto (A_j, A_k) es un par elemental tipo (II), es decir, A_j y A_k estan en progresión aritmética con diferencia común, digamos $d \in G$. Como $0 \in A_j$, entonces $A_j \subseteq \langle d \rangle$, así $\langle d \rangle \supseteq \langle A_j \rangle = G$, es decir, $\mathrm{ord}(d) = |G|$. Sabemos que la diferencia d de una progresión aritmética A es única, salvo el signo, cuando $2 \leq |A| \leq \mathrm{ord}(d) - 2$. Como $2 \leq |A_j|$, $|A_k| \leq |G| - 2$, y como A_j y A_k con $j \neq k$ son arbitrarios, tenemos que todos los A_i estan en progresión aritmética con diferencia común d, como queríamos probar. ■

Lema 1.4.2 *Sea G un grupo abeliano y sea A, $B \subseteq G$ finitos con $|A| \geq 2$ y $|B| = 2$. Si ni A ni B son quasi-periódicos y $|A + B| = |A| + |B| - 1$, entonces A y B estan en progresión aritmética con diferencia común.*

Demostración. Sea $B = \{b_1, b_2\}$ entonces $A + B = (A + b_1) \cup (A + b_2)$, luego $2|A| - |(A + b_1) \cap (A + b_2)| = |A + b_1| + |A + b_2| - |(A + b_1) \cap (A + b_2)| = |A + B| = |A| + |B| - 1 = |A| + 1$, es decir, $|(A + b_1) \cap (A + b_2)| = |A| - 1$ implicando que existen exactamente dos elementos en $A + B$ que tienen representación única.

Como el par (A, B) es crítico podemos aplicar KST, y tenemos que (A, B) es un par elemental de tipo (I), (II), (III) o (IV) (ya que ninguno de ellos es quasi-periódico). Pero (A, B) no puede ser tipo (I) (ya que $|A| \geq 2$) ni tipo (III) ni (IV) (ya que tiene 2 elementos de expresión única), luego debe ser tipo (II) es decir, A y B estan en progresión aritmética con diferencia común. ■

Capítulo 2

Secuencias en grupos abelianos finitos

Al estudiar los problemas de suma cero, el objeto principal de estudio son las *secuencias* finitas $S = (a_1, a_2, \ldots, a_l)$, cuyos términos estan en un grupo abeliano G (en lugar de pares de conjuntos, usados en Teoría Aditiva). No se necesita que las secuencias sean ordenadas, sólo que éstas permitan la repetición de elementos, por esta razón el término "multiconjunto" también es usado por algunos autores para referirse a las secuencias. Recientemente, dadas las aplicaciones de los problemas de suma cero en teoría de factorización, se ha tratado a las secuencias como elementos del monoide libre abeliano con base G, cuyo producto es la concatenación de elementos de G. En este capítulo revisaremos algunos resultados relacionados con los problemas de suma cero que nos servirán como herramientas para tratar los nuevos teoremas de partición (Teoremas 4.2.1 y 4.2.2).

Una *secuencia* es un elemento del monoide abeliano libre con base G, el cual denotamos por $\mathcal{F}(G)$. Si $S \in \mathcal{F}(G)$, S se escribe de la forma

$$S = \prod_{g \in G} g^{\mathsf{v}_g(S)}\,, \quad \text{con} \quad \mathsf{v}_g(S) \in \mathbb{N}_0 \quad \text{para todo} \quad g \in G\,.$$

Llamamos a $\mathsf{v}_g(S)$ la *multiplicidad* de g en S, y decimos que S *contiene* a g si $\mathsf{v}_g(S) > 0$. Si una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ es escrita de la forma $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_l$, asumiremos que $l \in \mathbb{N}_0$ y $a_1, \ldots, a_l \in G$.

Llamamos *longitud* de S al entero

$$|S| = l = \sum_{g \in G} \mathsf{v}_g(S) \in \mathbb{N}_0.$$

Una secuencia S' es llamada una *subsecuencia* de S si $S' \,|\, S$ en $\mathcal{F}(G)$ (o equivalentemente, si $\mathsf{v}_g(S') \le \mathsf{v}_g(S)$ para todo $g \in G$). Si $S' \,|\, S$ y $|S'| = k$, decimos que S' es una *k-subsecuencia* de S.

La *máxima de las multiplicidades* de S es denotada por

$$\mathsf{h}(S) = \max\{\mathsf{v}_g(S) \mid g \in G\} \in [0, |S|].$$

El *soporte* de S es el conjunto

$$\mathrm{supp}(S) = \{g \in G \mid \mathsf{v}_g(S) > 0\} \subset G.$$

La *suma* de S la definimos como

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{|S|} g_i = \sum_{g \in G} \mathsf{v}_g(S) g \in G.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, $k \le |S|$, el conjunto *suma de k-subsecuencias* de S es

$$\Sigma_k(S) = \left\{ \sum_{i \in I} g_i \;\middle|\; I \subset [1, |S|] \text{ con } |I| = k \right\}.$$

y el conjunto *suma de subsecuencias* de S es

$$\Sigma(S) = \bigcup_{j\geq 1} \Sigma_j(S).$$

$S \in \mathcal{F}(G)$ es *de suma cero* si $\sigma(S) = 0$. $S \in \mathcal{F}(G)$ es *libre de suma cero* si $0 \notin \Sigma(S)$.

Los problemas de suma cero tratan el estudio de condiciones necesarias y suficientes para que una secuencia dada contenga una subsecuencia (o una $|G|$-subsecuencia) de suma cero (o equivalentemente, para que dada $S \in \mathcal{F}(G)$ se tenga que $0 \in \Sigma(S)$ o que $0 \in \Sigma_{|G|}(S)$). Dentro de los problemas de suma cero se consideran también aquellos problemas que consisten en establecer condiciones suficientes para que una secuencia dada represente al grupo G, o a un subgrupo no trivial de G, con nuestra notación esto significa: hallar condiciones sobre $S \in \mathcal{F}(G)$ para que $\Sigma(S) = G$ o para que $\Sigma_{|G|}(S) = G$.

2.1. La constante de Davenport y la constante de Erdős-Ginzburg-Ziv

Uno de los teoremas más básicos en el área de los problemas de suma cero fué probado en 1961 por Erdős, Ginzburg y Ziv en [6], y desde entonces ha tenido muchas generalizaciones. Con nuestra notación el Teorema es el siguiente

Teorema 2.1.1 (Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv (EGZ)) *Sea G un grupo abeliano finito. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq 2|G| - 1$, entonces*

$$0 \in \Sigma_{|G|}(S).$$

Notemos que el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv da una cota sobre la longitud minimal que necesita tener una secuencia para que esta posea una subsecuencia de longitud $|G|$ que sume cero. Con el nacimiento de esta área, en el año 1961, aparece la constante de Erdős-Ginzburg-Ziv, $\mathsf{ZS}(G)$.

Definición 2.1.1 *Sea G un grupo abeliano finito. La constante de Erdős-Ginzburg-Ziv, $\mathsf{ZS}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud t contiene una subsecuencia de longitud $|G| = m$ y suma cero.*

El Teorema 2.1.1 implica que $\mathsf{ZS}(G) \leq 2|G| - 1$. Ahora, podemos preguntarnos que longitud debe tener una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ para garantizar la existencia de una subsecuencia no trivial de suma cero, sin importarnos que longitud tenga, Rogers en 1963 [28], originó una nueva constante relacionada con éste interrogante, la cual fué popularizada por Davenport en 1966, y llamada constante de Davenport, a continuación la definimos.

Definición 2.1.2 *Sea G un grupo abeliano finito. La constante de Davenport, $\mathsf{D}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud t en G contiene una subsecuencia de suma cero.*

El siguiente resultado da una cota superior para $\mathsf{D}(G)$, esencialmente muestra que toda secuencia de longitud $|G|$ posee una subsecuencia de suma cero, este resultado fué uno de los primeros resultado en el área de suma cero y fué denominado por Erdős "Lema Prehistórico".

Teorema 2.1.2 $\mathsf{D}(G) \leq |G|$ *para todo grupo abeliano finito G.*

Ejemplo 2.1.1 $\mathsf{D}(C_n) = n$, *donde* C_n *es un grupo cíclico de orden* n. *En efecto, la secuencia* $S = 1^{|G|-1}$, *donde 1 es el generador de* C_n, *no posee subsecuencias de suma cero, así* $\mathsf{D}(Cn) \geq |C_n|$. *Luego el Teorema 2.1.2 implica que* $\mathsf{D}(C_n) = |C_n| = n$.

Observación 2.1.1 *Sea* H *subgrupo de un grupo abeliano finito* G

(i) *Si* $G \neq \{0\}$, *entonces* $\mathsf{D}(G) \geq 2$.

(ii) *Por definición,* $\mathsf{D}(H) \leq \mathsf{D}(G)$ *y* $\mathsf{D}(G/H) \leq \mathsf{D}(G)$

(iii) *Observemos que debe existir una secuencia de longitud* $\mathsf{D}(G) - 1$ *en* G, *la cual es libre de suma cero, es decir,* $\mathsf{D}(G) - 1$ *es la mayor longitud que puede tener una secuencia en* G *para que sea libre de suma cero, dicha longitud es comúnmente denotada por* $\mathsf{d}(G)$, *es decir*

$$\mathsf{d}(G) = \mathsf{D}(G) - 1$$

(iv) $\mathsf{d}(H) + \mathsf{d}(G/H) \leq \mathsf{d}(G)$

Para ver esta ultima desigualdad, basta considerar $S \in \mathcal{F}(H)$ *con* $|S| = \mathsf{d}(H)$ *libre de suma cero y* $T \in \mathcal{F}(G)$ *con* $|T| = \mathsf{d}(G/H)$ *tal que* $\phi_H(T)$ *es libre de suma cero en* G/H, *entonces la secuencia* $ST \in \mathcal{F}(G)$ *con* $|ST| = \mathsf{d}(G) + \mathsf{d}(G/H)$ *es libre de suma cero, de lo contrario, existirían* $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r} | S \in \mathcal{F}(H)$ *y* $b_{j_1} \cdot \ldots \cdot b_{j_l} | T$ *tales que* $\sum_{k=1}^{r} a_{i_k} + \sum_{t=1}^{l} b_{j_t} = 0$, *implicando que* $\sum_{t=1}^{l} b_{j_t} = -\sum_{k=1}^{r} a_{i_k} \in H$, *de modo que* T *tendría una subsecuencia que suma cero módulo* H, *lo cual contradice nuestra suposición, luego* ST *es libre de cero.*

En general no es fácil determinar el valor exacto de la constante de Davenport, existen varios resultados que dan cotas inferiores y superiores para $\mathsf{D}(G)$ y estudian problemas inversos asociados a tal constante. En [7] Gao prueba que hallar $\mathsf{ZS}(G)$ es equivalente a hallar $\mathsf{D}(G)$, al mostrar que $\mathsf{ZS}(G) = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$.

Teorema 2.1.3 *[7]*$\mathsf{ZS}(G) = \mathsf{D}(G) + |G| - 1$ *para todo grupo finito abeliano* G*.*

Finalizamos esta sección mencionando otro resultado de Gao, que aparece también en [7], el cual estudia la estructura de las secuencias de longitud al menos $\mathsf{ZS}(G)$. Dicho resultado garantiza que toda secuencia en un grupo abeliano finito G con longitud mayor o igual que $\mathsf{ZS}(G)$ es tal que, o sus $|G|$-subsecuencias representan al grupo G, esto es $\Sigma_{|G|}(S) = G$, o al menos $|S| - |G/H| + 2$ términos de ella pertenecen a una clase lateral módulo H, para algún $H < G$.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Gao) *[7] Sea* G *un grupo abeliano finito, y sea* $S \in \mathcal{F}(G)$ *con* $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$*. Entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

(i) $\Sigma_{|G|}(S) = G$

(ii) Existe una clase lateral $g + H$ *tal que todos, excepto a lo más* $|G/H| - 2$ *términos de* S*, pertenecen a* $g + H$*.*

Sea G un grupo abeliano finito y $H < G$. Decimos que S representa a H, si todo elemento de H puede escribirse, o representarse, como suma de alguna subsecuencia de S (posiblemente de determinada longitud), esto es, si $H \subseteq \Sigma(S)$ (o $H \subseteq \Sigma_n(S)$, donde $n \geq 0$ es un entero, por ejemplo, $n = |G|$); es claro que si S representa a G entonces $\Sigma(S) = G$ (o $\Sigma_n(S) = G$). Notemos que en el Teorema de Gao, cuando S no tiene muchos términos provenientes de alguna clase lateral módulo H, ésta no solo representa al cero sino que representa a G. Este hecho abrió el campo de los problemas de suma cero, de modo que ahora no solo se estudian condiciones sobre una secuencia S para que represente al cero sino para que represente un determinado subgrupo de G.

2.1.1. Particiones

Para un subconjunto G_0 de un grupo abeliano, sea $\mathcal{S}(G_0) = \mathcal{F}(X)$, donde X es el conjunto de todos los subconjuntos finitos, no vacíos de G_0. Una *partición* sobre G_0 es una secuencia $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \in \mathcal{S}(G_0)$, donde $A_i \subseteq G_0$ son finitos y no vacíos. Cuando hablamos de una n-*partición*, nos referimos a una partición de longitud n. La secuencia particionada por $\mathcal{A}$ es

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) := \prod_{i=1}^{n} \prod_{g \in A_i} g \in \mathcal{F}(G_0).$$

Dada una secuencia $S \in \mathcal{F}(G_0)$ decimos que S tiene una n-partición en conjuntos, o simplemente que tiene una n-partición, si $S = \mathsf{S}(\mathcal{A})$ para algún $\mathcal{A} \in \mathcal{S}(G_0)$ con $|\mathcal{A}| = n$.

La relación entre la teoría inversa aditiva y los problemas de suma cero parte del siguiente hecho, si un elemento g pertenece al conjunto $\sigma(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_i$ de alguna n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una secuencia S, entonces una selección apropiada de los términos de cada A_i, forma una n-subsecuencia de S cuyos términos suman g, es decir

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_i \subseteq \Sigma_n(S).$$

En particular, si $|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq |G|$, entonces todo elemento, incluyendo el cero, puede ser representado como la suma de una n-subsecuencia de S. De modo que si estamos buscando una n-subsecuencia de suma cero, por reducción al absurdo, toda n-partición de S debe tener conjuntos sumas de cardinalidades pequeñas, (en particular si $|S| \geq |G| + n - 1$ por reducción al absurdo deberíamos tener $|\sum_{i=1}^{n} A_i| < \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1 = |S| - n + 1)$, así los teorema de estructura inversa, como el Teorema de Kneser, el Teorema de Cauchy-Davenport (ver Observaciones 1.3.1 y 1.3.2) o KST, pueden ser usados para obtener información estructural de los conjuntos A_i y, en consecuencia, acerca de la secuencia S particionada por los A_i. Cuando estudiamos secuencias con pesos $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, también consideramos una n-partición apropiada $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de la secuencia S con el objetivo de aplicar los teoremas de adición; sólo que en vez de aplicar tales teoremas a los conjuntos A_i los aplicamos a los conjuntos $w_i \cdot A_i$ con $w_i | W$.

Ahora podríamos preguntarnos si dada una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ siempre existe una n-partición en conjuntos de S, la siguiente proposición muestra las condiciones para que tal n-partición pueda existir, y en caso de existir, muestra que una n-partición en conjuntos puede encontrarse siempre con cardinalidades tan cercanas como sea posible.

Proposición 2.1.1 *[2] Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Una secuencia S tiene una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ sí y sólo si $|S| \geq n$ y $h(S) \leq n$. Además, si S tiene una n-partición en conjuntos, entonces S tiene una n-partición en conjuntos $\mathcal{B} = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_n$ con $||Bi| - |Bj|| \leq 1$, para todo i y todo j.*

Observemos que toda aplicación de grupos abelianos $\varphi \colon G \to H$ se extiende a un homomorfismo $\varphi \colon \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(H)$ donde $\varphi(S) = \varphi(g_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(g_l)$. De manera que si φ es un homomorfismo, entonces $\varphi(S)$ es una secuencia de suma cero si, y sólo si

$\sigma(S) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. En particular si $H < G$ y consideramos el homomorfismo canónico $\phi_H : G \to G/H$ entonces $\phi_H(S)$ es de suma cero si y sólo si $\sigma(S) \in H$. El método inductivo para mostrar que una secuencia dada $S \in \mathcal{F}(G)$ posea una n-subsecuencia de suma cero, mas o menos funciona como sigue

- Encontramos un subgrupo adecuado H de G (generalmente el mas adecuado es $H = \mathsf{H}(\Sigma_n(S)))$, y consideramos el homomorfismo canónico $\phi_H : G \to G/H$.

- Consideramos una n-partición de S (así tendremos que considerar los casos $\mathsf{h}(S) \leq n-1$ y $\mathsf{h}(S) \geq n$)

- Estudiamos la secuencia $\phi_H(S)$ a la que podemos aplicar la hipótesis inductiva, frecuentemente se puede aplicar en forma recursiva, siempre que $H \neq 0$.

- En general los casos $\mathsf{h}(S) \geq n$ y $H = 0$ salen sin mucha dificultad haciendo uso del Teorema de Cauchy-Davenport o del Teorema de Kneser.

2.2. Sumas ponderadas de secuencias

Una variante interesante en los problemas de suma cero, originada por Y. Caro, es la siguiente, se fija una secuencia de números enteros $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_n$ y una secuencia S de un grupo G con $|S| \geq n$, en vez de buscar subsecuencias $S' = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ de S cuya suma sea determinado elemento de G, se buscan subsecuencias de S cuya suma ponderada $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i$ sea determinado elemento de G. Esto le da al problema una estructura aditiva y multiplicativa. Los enteros $w_1, \ldots, w_n$ son llamados *pesos*. En este caso los problemas de suma cero (sin peso) son casos particulares. A continuación introducimos la notación para sumas ponderadas de subsecuencias.

Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\gcd(m,n)$ al máximo común divisor de m y n.

Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ con $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_r$, $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_t$, y sea $n \leq$ mín$\{|W|, |S|\}$. Definimos

$$\Sigma_n(W,S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i a_i : w_1 \cdots w_n | W \quad \text{y} \quad a_1 \cdots a_n | S \right\}$$

$$\Sigma(W,S) = \bigcup_{1 \leq k \leq |W|} \Sigma_k(W,S)$$

Con nuestra notación los problemas de suma cero con peso consisten en hallar condiciones sobre la secuencia S para que $0 \in \Sigma(W,S)$ (o $0 \in \Sigma_n(W,S)$). En este caso, que la secuencia S represente un subgrupo H de G, significa que $H \subseteq \Sigma(W,S)$(o que $H \subseteq \Sigma_n(W,S)$).

Observación 2.2.1 *Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ con $|S| \geq |W|$, $\mathsf{h}(S) \leq |W|$ y $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_n$.*

(i) $|w_i \cdot A_i| \leq |A_i|$ *para todo* $i \in [1,n]$.

(ii) *Si* $\gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ *para todo* $i \in [1,n]$, *entonces* $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$, *de modo que si conocemos alguna cota para* $|A_i|$, *por ejemplo* $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = |S|$, *esta misma nos servirá para acotar* $\sum_{i=1}^{n} |w_i \cdot A_i|$. *Esta es la razón por la cual muchos resultados tienen como hipótesis que* $\gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ *para todo* $i \in [1,n]$.

(iii) *Supongamos que* $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{n}$. *Si* $\mathsf{h}(S) \geq |n|$ *entonces* S *tiene un*

término, digamos g, que se repite al menos n veces, luego $0 = (\sum_{i=1}^{n} w_i)g = \sum_{i=1}^{n} w_i g \in \Sigma_n(W,S) \subseteq \Sigma(W,S)$.

En 1996 Caro conjeturó la siguiente versión con peso del teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv [3]:

> Sea G un grupo abeliano finito, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ con $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{\exp(G)}$. Si $|S| \geq |W| + |G| - 1$, entonces $0 \in \Sigma_{|W|}(W,S)$.

Observemos que el caso $W = 1^{|G|}$ es justamente el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv. Después de varios trabajos parciales la conjetura de Caro fué probada en 2006 ([13]), por Grynkiewicz.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv con peso (EGZP)) *Sea G un grupo abeliano finito no trivial, sea $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ con $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{\exp(G)}$, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq |G| + |W| - 1$. Entonces $0 \in \Sigma_{|W|}(W,S)$. Más aún, supongamos que S tiene una n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ tal que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$ para todo i. Entonces existe un subgrupo no trivial H de G y una n-partición $\mathcal{A}' = A'_1 \cdot \ldots \cdot A'_n$ de S con*

$$H \subseteq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A'_i \subseteq \Sigma_{|W|}(W,S)$$

y $|w_i \cdot A'_i| = |A'_i|$ para todo i.

Observemos que la condición $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{\exp(G)}$ en el Teorema EGZP es necesaria, de lo contrario, S con $\mathrm{supp}(S) = \{1\}$ puede generar un contraejemplo. Así como el Teorema EGZ fué generalizado al obtener una versión con peso, muchos otros resultados tienen versiones con peso, en [27], Ordaz y Quiroz, conjeturaron la siguiente versión con peso del Teorema de Gao (Teorema 2.1.4)

Conjetura 2.2.1 *Sea G un grupo abeliano finito, y sea W una secuencia, de longitud $|G|$, de enteros primos relativos con $|G|$, con $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{|G|}$. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$, entonces se satisface una de las siguientes condiciones*

(i) $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.

(ii) Existe $g \in G$ y $H < G$ tal que todos, excepto a lo más $|G/H| - 2$ términos de S, provienen de $g + H$.

Ordaz y Quiroz verificaron su conjetura para el caso $\mathsf{D}(G) = |G|$, al probar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 *[27] Sea G un grupo abeliano finito, y sea W una secuencia, de longitud $|G|$, de enteros primos relativos con $|G|$, con $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{|G|}$. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = 2|G| - 1$, entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.

(ii) Existe $g \in G$ y $H < G$ tal que todos, excepto a lo más $|G/H| - 2$ términos de S, provienen de $g + H$.

La conjetura Ordaz-Quiroz aún permanece abierta, en el Capítulo 4 estudiaremos un caso particular. Otro resultado conocido de representación de grupos es el siguiente.

Teorema 2.2.3 *Sea G un grupo abeliano, finito, no trivial, sea W una secuencia, de longitud $|G|$, de enteros tal que todos sus términos, excepto a lo más uno, son coprimos con $|G|$ y $\sigma(W) \equiv 0 \,(\text{mód } |G|)$; y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = 2|G| - 1$ tal que $\mathsf{h}(S) \leq |G|$, entonces existe H subgrupo no trivial de G tal que*

$$H \subseteq \Sigma_{|G|}(W, S).$$

2.3. Teoremas de Partición

A continuación presentamos dos versiones, una versión para secuencias sin peso y otra para secuencias con peso, de un resultado relacionado con el Teorema de Kneser, ambos resultados son de Grynkiewicz, dada una secuencia S en un grupo abeliano G y $S'|S$, los Teoremas de Partición garantizan la existencia de una n-partición de $S \in \mathcal{F}(G)$ cuyo conjunto suma tiene cardinalidad "grande". La ventaja de estos Teoremas, comparados con el Teorema de Kneser, se encuentra en el hecho de que los Teoremas de partición muestran que sólo necesitamos una subsecuencia de S, de longitud "pequeña", para que $\Sigma_n(S)$ tenga cardinalidad grande, dejando así a los otros términos de S libres y disponibles para cualquier otro fin. El primero es una versión fuerte, el segundo es una versión débil, válida para secuencias con peso.

Sea $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ una n-partición de una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$, y sea $N = |\bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)|$. Notemos que $\phi_H(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$, así $\bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)$ contiene todos los términos de S que pertenecen a $A_i + H$ para todo $i \in [1, n]$, más aún,

$$N = |\bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)| = \frac{1}{|H|} |\bigcap_{i=1}^{n} (A_i + H)|.$$

Con esta notación, existen N elementos en $\phi_H(A_i)$ pertenecientes a $\bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)$, y cada uno tiene multiplicidad n en $\mathsf{S}(\phi_H(\mathcal{A}))$. Esto da un total de nN términos de S, cuya clase de equivalencia módulo H, pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Sea

$$e = \sum_{j=1}^{n} (|A_j| - |A_j \cap \bigcap_{i=1}^{n} (A_i + H)|)$$

entonces e es el número de términos de S cuya clase de equivalencia módulo H, no pertenecen a $\bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i)$, es decir no todo conjunto $\phi_H(A_i)$ contiene a $\phi_H(x)$. Luego

$$(\sum_{i=1}^{n} |\phi_H(A_i)| - n + 1)|H| = ((N-1)n + e + 1)|H|$$

Del Teorema de Kneser sabemos que si una n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ no satisface la cota de Cauchy- Davenport (esto es si $|\sum_{i=1}^{n} A_i| < \min\{|G|, \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1\}$), entonces $\sum_{i=1}^{n} A_i$ debe ser periódico. Si $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$, entonces $\phi_H(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ es aperiódico. Si en algún conjunto A_i de $\mathcal{A}$ hay dos elementos de la misma H-clase, y existe algún $A_j \in \mathcal{A}$ que no contiene elementos de esta H-clase, entonces al mover uno de los dos elementos de A_i para A_j, la cota dada por el Teorema de Kneser para $\phi_H(\sum_{i=1}^{n} A_i)$ se incrementará. Es natural pensar que $|\sum_{i=1}^{n} A_i|$ también se incrementará, repitiendo este procedimiento tantas veces como se necesite deberíamos obtener una nueva partición cuyo conjunto suma satisface la cota de Cauchy-Davenport, a menos que un número pequeño de H-clases contenga casi todos los términos de S. El siguiente teorema muestra que este hecho es cierto.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Partición (versión fuerte)) *[14] Sea G un grupo abeliano, sea $S \in \mathcal{F}(G)$, sea $S' \mid S$, y sea $\mathcal{A}' = A'_1 \cdot \ldots \cdot A'_n$ una n-partición de S'. Entonces existe $H \leq G$ y una n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia S'' de S tal que $|S'| = |S''|$, $\sum_{i=1}^{n} A'_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} A_i$, $\sum_{i=1}^{n} A_i$ es H-periódico,*

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq (\sum_{i=1}^{n} |\phi_H(A_i)| - n + 1)|H| = ((N-1)n + e + 1)|H| \text{ y} \tag{2.1}$$

$$|(x + H) \cap A_i| = 1 \text{ o } \phi_H(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i), \forall x \in A_i, \forall i \in [1, n] \tag{2.2}$$

Más aún, si H es no trivial, entonces también tenemos

$$H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i) \text{ y } \operatorname{supp}(S''^{-1}S) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H). \tag{2.3}$$

$$|A_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)| \leq 1 \text{ para } i \in [1, n], \text{ y} \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Sigma_n(S) \tag{2.5}$$

Observemos que el Teorema de Kneser implica que para cualquier partición se cumple (2.1) con $H = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$, de modo que la importancia del Teorema de partición 2.3.1, esta en saber que existe una partición de una subsecuencia de S y un subgrupo H de G, satisfaciendo (2.1) y (2.2) al mismo tiempo.

Si $H = G$, entonces $|\sum_{i=1}^{n} A_i| = |G|$ (pues el conjunto suma es H-periódico), mientras que si H es trivial, entonces $nN + e = |S'|$ y (2.1) no es mas que la conocida cota de Cauchy-Davenport

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1 = |S'| - n + 1$$

Cuando H es un grupo no trivial, la única forma de que la cota (2.1) sea pequeña es que la mayoría de los términos de S esten contenidos en un número pequeño (no nulo) N de H-clases (si $N = 0$, entonces $e = |S'|$ y (2.1) se cumple).

Teorema 2.3.2 (Teorema de Partición (versión débil, con pesos)) *[15] Sea G un grupo abeliano, sea $S \in \mathcal{F}(G)$, y $S' \mid S$, sea $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ tal que $\gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ para todo $w_i \in \operatorname{supp}(W)$, y sea $\mathcal{A}' = A'_1 \cdot \ldots \cdot A'_n$ una n-partición de S'. Entonces existe $H \leq G$ y una n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia S'' de S tal que $|S'| = |S''|$, $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A'_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$, $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$ es H-periódico,*

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq (\sum_{i=1}^{n} |\phi_H(A_i)| - n + 1)|H| = ((N-1)n + e + 1)|H| \ \ y \tag{2.6}$$

$$|(x + H) \cap A_i| = 1 \ \ o \ \ \phi_H(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \phi_H(A_i), \forall x \in A_i, \forall i \in [1, n]. \tag{2.7}$$

Más aún, si H es no trivial, entonces $\operatorname{supp}(S''^{-1}S) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$.

Los Teoremas de Partición son de suma importancia en nuestro trabajo ya que implican los Teoremas análogos de Cauchy-Davenport que presentamos en la próxima sección y usaremos la versión con peso en el Capítulo 4, como base del proceso inductivo, para demostrar el Teorema 4.2.1.

2.4. Teoremas Análogos al Teorema de Cauchy-Davenport

Hemos visto en las secciones anteriores la importancia que tienen los resultados de teoría aditiva al abordar problemas de suma cero. Dado un grupo abeliano G y

$A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de G, nos interesan aquellos resultados que acotan inferiormente a $|\sum_{i=1}^{n} A_i|$ y/o describen la estructura de los conjuntos A_i . Entre los resultados que estudiamos en el Capítulo 1 tenemos el Teorema de Cauchy-Davenport, si reescribimos dicho teorema con la notación de particiones, dice lo siguiente

> La suma una n-partición de una secuencia S de elementos de $\mathbb{Z}_p$, con p primo, contiene al menos $\text{mín}\{|G|, |S| - n + 1\}$ elementos.

Sin embargo, no siempre trabajamos con un grupo de orden primo, de modo que el uso del Teorema de Cauchy-Davenport, aunque a veces es efectivo, es un poco limitado, a menos que se encuentre un argumento adecuado para obtener a través de él, el caso cuando el orden es primo y, vía inducción sobre los factores primos de $|G|$, llegar a un buen término, pero esto puede ser difícil de llevar a cabo. En algunos problemas de suma cero es suficiente obtener una n-partición que satisfaga la cota de Cauchy-Davenport, es decir, tal que $|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \text{mín}\{|G|, |S| - n + 1\}$. Los siguientes dos teoremas, Teorema 2.4.1 y Teorema 2.4.2, fueron obtenidos por Grynkiewicz como Corolarios de los Teoremas de Partición 2.3.1 y 2.3.2, respectivamente, el Teorema 2.4.1 es llamado por su autor Teorema Análogo de Cauchy-Davenport

Teorema 2.4.1 *[14]Sea G un grupo abeliano finito, n un entero positivo, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$, tal que $|S| \geq n$ y $\mathsf{h}(S) \leq n$. Si p es el menor primo divisor de $|G|$ entonces se cumple una de las siguientes alternativas*

(i) Existe un n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S tal que

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \text{mín}\{|G|, (n+1)p, |S| - n + 1\}.$$

(ii) *(a) Existe* $\alpha \in G$ *y un subgrupo propio no trivial* $H < G$*, tal que todos, excepto a lo más* $|G/H| - 2$ *términos de* S*, estan en la clase* $\alpha + H$*.*

(b) Existe una n*-partición* $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ *de una subsecuencia de* S'*, siendo* S' *la subsecuencia de* S *formada por todos lo términos de* S *que pertenecen a* $\alpha + H$*, tal que:*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = n\alpha + H.$$

Observemos que si $|S| \leq (n+1)p + n - 1$ o $n \geq \frac{|G|}{p} - 1$ entonces la desigualdad en el Teorema 2.4.1 se reduce a la cota de Cauchy-Davenport, así, bajo las hipótesis del Teorema 2.4.1, la cota de Cauchy-Davenport es válida para cualquier G, y no solamente para $\mathbb{Z}_p$, excepto cuando S es una secuencia con casi todos sus términos provenientes de alguna H-clase de G. La versión con peso del Teorema 2.4.1 es la siguiente.

Teorema 2.4.2 (Teorema análogo de Cauchy-Davenport con peso) *[15] Sea* G *un grupo abeliano finito, sea* $S \in \mathcal{F}(G)$ *con una* n*-partición* $\mathcal{A}' = A'_1 \cdot \ldots \cdot A'_n$*. Sea* $W = w_1 \cdot \ldots \cdot w_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ *con* $\gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ *para todo* $i \in [1, n]$*. Sea* p *el menor primo divisor de* $|G|$*. Entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

(i) *Existe una* n*-partición* $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ *de* S *tal que:*

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq \min\{m, (n+1)p, |S| - n + 1\};$$

más aún, si $n' \geq \frac{m}{p} - 1$ *es un entero tal que* $\mathcal{A}'$ *tiene al menos* $n - n'$ A'_i *conjuntos de cardinalidad 1 y si* $|S| \geq n + \frac{m}{p} - 3$*, entonces podemos suponer qua la* n*-partición* A *contiene tambien al menos* $n - n'$ A_i *conjuntos con cardinalidad 1* *(ii)* *(a) Existe* $\alpha \in G$ *y un subgrupo propio no trivial* $H < G$*, tal que todos, excepto a lo más* $|G/H| - 2$ *términos de* S*, estan en la clase lateral* $\alpha + H$.

(b) Existe una n*-partición* $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ *de la subsecuencia* S_a*, siendo* S_a *la subsecuencia de* S *formada por todos lo términos de* S *que pertenecen a* $\alpha + H$*, tal que:*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha + H.$$

Como una consecuencia del Teorema 2.4.2 hemos obtenido una mejora del Teorema de Ordaz-Quiroz (2.2.2), lo mostramos en el siguiente Corolario, observemos que no necesitamos la condición $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{|G|}$ exigida en el Teorema de Ordaz-Quiroz.

Corolario 2.4.1 *Sea* G *un grupo abeliano finito, y sea* W *una secuencia, de longitud* $|G|$*, de enteros primos relativos con* $|G|$*. Si* $S \in \mathcal{F}(G)$ *con* $|S| = 2|G| - 1$*, entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.

(ii) *Existe* $g \in G$ *y* $H < G$ *tal que todos, excepto a lo más* $|G/H| - 2$ *términos de* S*, provienen de* $g + H$.

Demostración. Supongamos que no se cumple (ii), es decir, supongamos que para todo subgrupo H de G y todo $g \in G$, la clase $g + H$ contiene a lo más $2|G| - \frac{|G|}{|H|}$ términos de S. En particular para $H = 0$ y $g \in G$, la clase $g + H = \{g\}$ contiene a lo más $2|G| - \frac{|G|}{|H|}$ términos de S, implicando que $\mathsf{h}(S) \leq |G|$. Como $|S| \geq |G|$ entonces S tiene una $|G|$-partición $\mathcal{A}' = A'_1 \cdot \ldots \cdot A'_{|G|}$. Ahora aplicamos el Teorema 2.4.2.

No es posible que se cumpla *(ii)* ya que, por hipótesis, la clase $\alpha + H$ contiene a lo mas $2m - |G/H|$ términos de S, luego fuera de $\alpha + H$ hay al menos $|G/H| - 1$ términos de S. Entonces debe cumplirse *(i)*, implicando la existencia de una $|G|$-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{|G|}$ de S tal que $\sum_{i=1}^{|G|} w_i \cdot A_i = G$. Por tanto $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.
$\blacksquare$

Capítulo 3

La Constante $\mathsf{d}^*(G)$

Sea G un grupo abeliano finito, el teorema fundamental para grupos finitos garantiza que

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i}$$

donde $m_1|m_2|\dots|m_r$, y C_{m_j} denota un grupo cíclico de orden $m_j \geq 2$. Definimos

$$\mathsf{d}^*(G) := \sum_{i=1}^{r}(m_i - 1).$$

En particular $\mathsf{d}^*(0) = 0$. Si G es cíclico entonces $\mathsf{d}^*(G) = |G| - 1$. Observemos también que si $G = H \oplus K$, entonces $\mathsf{d}^*(G) = \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(K)$. Más aún,

$$\mathsf{d}^*(G) + 1 \leq \mathsf{D}(G) \leq |G|$$

Para ver la primera desigualdad supongamos que $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i}$ donde $m_1|m_2|\dots|m_r$ y consideremos la secuencia $S = \prod_{i=1}^{r} e_i^{m_i-1}$ donde cada e_i genera a C_{m_i}, es claro que $|S| = \mathsf{d}^*(G)$ y como los e_i son elementos independientes, entonces S no posee subsecuencias de suma cero. En particular cuando G es cíclico $\mathsf{d}^*(G) + 1 = \mathsf{D}(G)$

(ver Ejemplo 2.1.1), inicialmente se pensó que siempre se cumplía tal igualdad, pero en general la igualdad no se cumple, por ejemplo, Geroldinger y Schneider [11] en 1992 mostraron que para todo grupo de rango mayor que 3, existen infinitos casos donde $\mathsf{D}(G) > \mathsf{d}^*(G) + 1$.

El objetivo principal en este Capítulo es demostrar que si H es subgrupo de un grupo abeliano G, entonces $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$, esta propiedad es análoga a la propiedad de $\mathsf{d}(G)$ dada en Observación 2.1.1 parte (iv), sin embargo, la demostración no sale tan facilmente como en el caso de $\mathsf{d}(G)$. A continuación presentamos algunas definiciones y resultados básicos sobre grupos abelianos que nos conducirán a a alcanzar nuestro objetivo, los detalles y las demostraciones que omitimos pueden ser encontrados en cualquier texto de álgebra abstracta, entre ellos [20], [29] y [24].

3.1. Grupos Abelianos

En adelante, como el los capítulos anteriores, G es un grupo abeliano con notación aditiva. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$n \cdot G = \{ng : \, g \in G\} \quad \text{y} \quad G[n] = \{g \in G : \, ng = 0\}.$$

Es claro que $n \cdot G$ y $G[n]$ son subgrupos de G.

Dado $g \in G$, el orden de g es definido por

$$\mathrm{ord}(G) := |\langle g \rangle| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por C_n al grupo cíclico de orden n. En particular,

$C_1 = \{0\}$. Es bien sabido que si $g \in G$ es un elemento de orden $\mathrm{ord}(g) = n \in \mathbb{N}$, entonces $\langle g \rangle \cong C_n$.

El *exponente de G* se define como

$$\exp(G) := \sup\{\mathrm{ord}(g) : \ g \in G\} \in \mathbb{N} \cup \infty$$

Se dice que G *es acotado* si $\exp(G) < \infty$. Si G es acotado entonces

$$\exp(G) := \mathrm{mín}\{n \in \mathbb{N} : n \cdot G = 0\}$$

Sea p un número primo, G es llamado un *p-grupo* si todo elemento $g \in G$ es tal que $\mathrm{ord}(g) = p^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Un elemento $g \in G$ es llamado un *elemento torsión* si $\mathrm{ord}(g) < \infty$. El subgrupo de G consistente de todos los elementos torsión de G es llamado *subgrupo torsión de G*, y G es llamado *grupo torsión* si todos los elementos de G son elementos torsión. Por ejemplo los grupos finitos y los grupos acotados son grupos torsión. Generalmente trabajamos con grupos abelianos finitos, en este caso $\exp(G) < \infty$ y G es un grupo torsión.

Definición 3.1.1 *Un subconjunto finito $G_0 = \{g_1, \ldots g_r\}$ de elementos no nulos de un grupo abeliano G es independiente, si para cualquier r-upla $(m_1 \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ se tiene*

$$\sum_{i=1}^{r} m_i g_i = 0 \Rightarrow m_i g_i = 0 \quad \forall i \in [1, r]$$

Un subconjunto infinito G_0 de un grupo abeliano infinito G es independiente, si todo subconjunto finito de G_0 es independiente.

Observación 3.1.1 *Sea G un grupo abeliano* *(i) Por definición, el conjunto $\emptyset \subseteq G$ es independiente.*

(ii) Si $G_0 \subseteq G$ es independiente y $d \in \mathbb{Z}$ es tal que $0 \notin d \cdot G_0$, entonces el conjunto $d \cdot G_0$ es un subconjunto independiente del grupo $d \cdot G$.

(iii) Sea $G_0 \subseteq G$ independiente. Si X_1 y X_2 son subconjuntos disjuntos de G_0, entonces $\langle X_1 \rangle \cap \langle X_2 \rangle = \{0\}$

Proposición 3.1.1 *([29] pág 310) Un conjunto G_0 de elementos no nulos de un grupo abeliano G es independiente si, y solo si $\langle G_0 \rangle = \bigoplus_{g \in G_0} \langle g \rangle$*

Definición 3.1.2 *Un subconjunto $G_0 \subset G$ es una* base de G *si G_0 es independiente y $G = \langle G_0 \rangle$.*

La proposición 3.1.1 implica que un grupo abeliano G contiene una base si, y solo si G es suma directa de grupos cíclicos. El siguiente teorema garantiza que todo grupo abeliano finitamente generado contiene una base.

Teorema 3.1.1 *[20] Si G es un grupo abeliano finitamente generado, entonces G es (isomorfo a) suma directa finita de grupos cíclicos, en la cual los sumandos cíclicos finitos (si hay alguno) son de órdenes $m_1, ..., m_t$ donde $m_1 > 1$ y $m_1 | m_2 | \ldots | m_r$.*

Sea $\mathfrak{G}_0$ el conjunto de todos los subconjuntos independientes de G consistente unicamente de elementos de orden infinito. Por el Lema de Zorn, todo conjunto en $\mathfrak{G}_0$ está contenido en un conjunto maximal de $\mathfrak{G}_0$, y si $G_0 \in \mathfrak{G}_0$ es maximal, entonces $|G_0| = \dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Llamamos *rango torsión libre de G* a

$$\mathsf{r}_0(G) := \dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

Evidentemente G es un grupo torsión si y solo si $\mathsf{r}_0(G) = 0$.

Para un primo p, sea $\mathfrak{G}_p$ el conjunto de todos los subconjuntos independientes de G consistente unicamente de elementos de orden una potencia de p. Por el Lema de Zorn, todo conjunto en $\mathfrak{G}_p$ está contenido en un conjunto maximal de $\mathfrak{G}_p$, y si $G_0 \in \mathfrak{G}_p$ es maximal, entonces $|G_0| = \dim_{\mathbb{F}_p}(G[p])$. Llamamos *p-rango de G* a

$$\mathsf{r}_p(G) := \dim_{\mathbb{F}_p}(G[p])$$

Definimos el *rango de G* como $\mathsf{r}(G) = \mathsf{r}_0(G) + \sup\{r_p(G) : p \text{ es primo}\}$ y el *rango total de G* como $\mathsf{r}^*(G) = \mathsf{r}_0(G) + \sum\limits_{p:\text{primo}} r_p(G)$. Si G es un $p-$grupo entonces $\mathsf{r}(G) = \mathsf{r}^*(G) = \mathsf{r}_p(G)$.

Lema 3.1.1 *([10] pág 651)* $\mathsf{r}^*(G) = \text{máx}\{|G_0| : G_0 \subseteq G \text{ es independiente}\}$

Grupos Abelianos Finitos

Para grupos cíclicos finitos tenemos el siguiente resultado (ver [20] Sección II.2)

Proposición 3.1.2 *Si m es un entero positivo y $m = \prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{n_i}$, con $p_1, ..., p_t$ primos distintos, y cada $n_i > 0$, entonces $C \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{t} \mathcal{C}_{p_i}^{n_i}$*

Generalmente trabajaremos con grupos abelianos finitos. En este caso, por el *Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitos* tenemos

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{r_i} C_{p_i^{k_{i,j}}} \right)$$

donde $l, r, r_1, \ldots r_l, n_1, ..., n_r, k_{1,1}, ..., k_{r,l} \in \mathbb{N},\ 1 < m_1 | m_2 \ldots | m_r, p_1, ..., p_l$ son primos distintos y $1 \leq k_{i,1} \leq \ldots \leq k_{i,r}$. Más aún $C_{m_j} = \bigoplus_{i=1}^{l} C_{p_j^{k_{j,i}}}$.

Por definición $\exp(G) = m_r$, $\mathsf{r}(G) = r$ y $r^*(G) = r_1 + ... + r_l$. En particular, se sigue que G tiene un base $(e_1, ..., e_r)$, donde $\mathrm{ord}(e_i) = m_i$ para todo $i \in [1, r]$, y G tiene una base consistente de $r^*(G)$ elementos de orden una potencia de un primo.

Recordemos que si $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H_i$, la función proyección $\pi_i : G \to H_i$, es un epimorfismo de grupos dado por $\pi_i(h_1, \ldots, h_{i-1}, h_i, h_{i+1}, \ldots, h_r) = h_i$. Es claro que $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \pi_i(G)$.

Los siguientes resultados son consecuencia de las propiedades de elementos independientes en un grupo G y de la definición del rango total de G, $r^*(G)$.

Proposición 3.1.3 *Sea G un grupo abeliano finito, digamos $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k_{i,j}}} \right)$, con $1 < m_1 | \ldots | m_r$, cada p_i un primo distinto, y $1 \leq k_{i,1} \leq \ldots \leq k_{i,r}$. Si $H \leq G$, entonces*

$$H \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m'_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k'_{i,j}}} \right),$$

con $1 \leq m'_1 | \ldots | m'_r$, $m'_i | m_i$, $1 \leq k'_{i,1} \leq \ldots \leq k'_{i,r}$ y $k'_{i,j} \leq k_{i,j}$, para todo i y para todo j. Más aún, si $m'_s = m_s$ para algún s, entonces $k'_{i,s} = k_{i,s}$ para todo i.

Demostración. Como $m_j = p_1^{k_{1,j}} p_2^{k_{2,j}} \cdots p_l^{k_{l,j}}$ (ver Proposición 3.1.2 y [20] section II.2), entonces $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$ donde $k_i = \sum_{j=1}^{r} k_{i,j}$. Sabemos, por el Teorema 3.1.1, que, $H \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m'_i}$ con $1 \leq m'_1 | \ldots | m'_r$, como $m'_i || G|$, entonces $m'_i = p_1^{k'_{1,i}} p_2^{k'_{2,i}} \cdots p_l^{k'_{l,i}}$

con $k'_{j,i} \leq k_i$, luego $H \cong \bigoplus_{i=1}^{l}\left(\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k'_{i,j}}}\right)$ (ver Proposición 3.1.2). Podemos suponer $1 \leq k'_{i,1} \leq \ldots \leq k'_{i,r}$ (reordenando los sumandos de H, si es necesario). Para ver que $m'_i|m_i$, es suficiente mostrar que $k'_{i,j} \leq k_{i,j}$ para todo i y para todo j. Podemos suponer que G es un p-grupo, es decir que $l = 1$, (el caso $l > 1$ se deriva facilmente aplicando el caso $l = 1$ a la proyección de G y de H sobre cada componente $\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k_{i,j}}}$ y $\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k'_{i,j}}}$ respectivamente). Supongamos que la Proposición es falsa, esto es, $k'_{1,j} > k_{1,j}$ para algún j (pues solo falta ver que $m'_i|m_i$), entonces H, y en consecuencia también G, contienen $r - j + 1$ elementos independientes de orden al menos $p_1^{k_{1,j}+1}$, digamos $e_1, \ldots, e_{r-j+1}$. Luego $p_1^{k_{1,j}} e_1, \ldots p_1^{k_{1,j}} e_{r-j+1}$ son $r - j + 1$ elementos independientes en $p_1^{k_{1,j}} \cdot G$ (ver Observación 3.1.1 *(ii)*), pero el rango total de $p_1^{k_{1,j}} \cdot G$, $\mathsf{r}^*(p_1^{k_{1,j}} \cdot G)$, es a lo más $r - j$ (ya que $k_{i,1} \leq \ldots \leq k_{i,r}$), contradiciendo el Lema 3.1.1. ■

Para probar que $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$ procederemos por inducción sobre $\mathsf{d}(G)$, el siguiente Lema nos da el mecanismo de inducción clave para tal prueba.

Lema 3.1.2 *Sea G un grupo abeliano finito, digamos $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i}$, con $1 < m_1|\ldots|m_r$, y sea $H \leq G$, digamos $H \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m'_i}$, con $1 \leq m'_1|\ldots|m'_r$. Si $m'_t = m_t$ para algún t, entonces existe un subgrupo $K \leq H$ tal que $K \cong C_{m_t}$ y K es sumando directo de H y de G.*

Demostración. Sea $G \cong \bigoplus_{i=1}^{l}\left(\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k_{i,j}}}\right)$ y $H \cong \bigoplus_{i=1}^{l}\left(\bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{k'_{i,j}}}\right)$, con cada p_i un primo distinto, $1 \leq k_{i,1} \leq \ldots \leq k_{i,r}$ y $1 \leq k'_{i,1} \leq \ldots \leq k'_{i,r}$ para todo i. En vista de la Proposición 3.1.3 y nuestra hipótesis, tenemos que $m'_i|m_i$, $k'_{i,j} \leq k_{i,j}$, para todo i y

para todo j, y $k'_{i,t} = k_{i,t}$ para todo i. Así es suficiente probar el Lema para p-grupos (si $l > 1$, como $k'_{i,t} = k_{i,t}$ para todo i, se aplica el Lema a $\pi_i(H)$ y $\pi_i(K)$ para cada $i \in [1, r]$ y se obtiene el resultado), es decir, podemos suponer $G \cong \bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{s_i}}$ con $1 \leq s_1 < \ldots < s_r$ y, $H = \bigoplus_{j=1}^{r} C_{p_i^{s'_i}}$ con $1 \leq s'_1 < \ldots < s'_r$ y $s_t = s'_t$ para algún t .
Entonces H contiene $r - t + 1$ elementos independendientes de orden al menos p^{s_t}, sin perder generalidad supongamos que tales elementos son $f_1, \ldots, f_{r-t+1}$,(haciendo una subselección apropiada de elementos de una base de H). Sea $e_1, \ldots, e_r$ una base de G con $\mathrm{ord}(e_i) = p^{s_i}$, y sea $f_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{j,i} e_i$, donde $\alpha_{j,i} \in \mathbb{Z}$.
Si

$$\mathrm{ord}(f_j) = \mathrm{ord}(\alpha_{j,i} e_i) = \mathrm{ord}(e_i) = p^{s_t}, \quad (1)$$

para algún par (i, j), entonces $e_1, \ldots, e_{i-1}, f_j, e_{i+1}, \ldots, e_r$ es también una base de G, y $K = \langle f_j \rangle$ es sumando directo de H y de G, como queríamos demostrar.
Si para todo i y para todo j no se satisface (1). Entonces para cada j tal que $\mathrm{ord}(f_j) = \mathrm{ord}(e_t) = p^{s_t}$, debemos tener $\mathrm{ord}(\alpha_{j,t} e_t) < \mathrm{ord}(e_t) = p^{s_t}$, es decir, para cada f_j con $\mathrm{ord}(f_j) = \mathrm{ord}(e_t) = p^{s_t}$, $p^{s_t - 1} \alpha_{j,t} e_t = 0$.
Ahora consideramos los elementos $f'_1 := p^{s_t-1} f_1, f'_2 := p^{s_t-1} f_2, \ldots, f'_{r-t+1} := p^{s_t-1} f_{r-t+1}$, los cuáles forman un conjunto de $r - t + 1$ elementos independientes en $p^{s_t-1} \cdot G$ (por Observación 3.1.1 *(iii)*). Observemos que cada $p^{s_t-1} f_j$ con $\mathrm{ord}(f_j) = p^{s_t}$ pertenece al subgrupo generado por $p^{s_t-1} e_{t+1}, \ldots, p^{s_t-1} e_r$ (ya que $\mathrm{ord}(e_i) \leq p^{s_t}$ for $i \leq t$ y $p^{s_t-1} \alpha_{j,t} e_t = 0$) y cada $p^{s_t-1} f_j$ con $\mathrm{ord}(f_j) > p^{s_t}$ pertenece al subgrupo generado por $p^{s_t-1} e_t, \ldots, p^{s_t-1} e_r$.
Sea $L = \langle p^{s_t-1} e_1, \ldots, p^{s_t-1} e_t \rangle$ y $\phi_L : p^{s_t-1} \cdot G \to (p^{s_t-1} \cdot G)/L$, el homomorfismo

natural. Entonces $\phi_L(f'_1), \ldots, \phi_L(f'_{r-t+1})$ son $r-t+1$ elementos independientes de $\phi_L(p^{s_t-1} \cdot G)$, en efecto, supongamos que para $\alpha'_1 \ldots \alpha_{r-t+1} \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$0 = \sum_{i=1}^{r-t+1} \alpha_i \phi_L(f'_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_L(f'_i) + \sum_{i \notin I} \alpha_i \phi_L(f'_i),$$

donde $i \in I$ son los índices tales que $\mathrm{ord}(f'_i) > p$ (y así $\mathrm{ord}(f_i) > p^{s_t}$.) Entonces

$$\sum_{i \in I} \alpha_i f'_i + \sum_{i \notin I} \alpha_i f'_i \in L = \langle p^{s_t-1} e_1, \ldots, p^{s_t-1} e_t \rangle$$

Si $p|\alpha_i$ para todo $i \in I$, entonces para todo $i \in I$, $\alpha_i f'_i \in p\langle p^{s_t-1} e_t, \ldots, p^{s_t-1} e_r \rangle \subseteq \langle p^{s_t-1} e_{t+1}, \ldots, p^{s_t-1} e_r \rangle$, luego $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i f'_i + \sum\limits_{i \notin I} \alpha_i f'_i \in L \cap \langle p^{s_t-1} e_{t+1}, \ldots, p^{s_t-1} e_r \rangle = \{0\}$ (por Observación 3.1.1 parte *(iii)*), así la independencia de los f'_i implica que $\alpha_i f'_i = 0$.

Si existe $j \in I$ tal que $p \nmid \alpha_j$ entonces $p\alpha_j f'_j \neq 0$ pero $p(\sum\limits_{i \in I} \alpha_i f'_i + \sum\limits_{i \notin I} \alpha_i f'_i) = 0$, contradiciendo que los f'_i son independientes.

Luego $\phi_L(f'_1), \ldots, \phi_L(f'_{r-t+1})$ son $r-t+1$ elementos independendientes en $\phi_L(p^{s_t-1} \cdot G)$, el cual es un grupo con rango total a lo más $r-t$, contradiciendo el Lema 3.1.1.

■

El grupo Dual

Recordemos que dados dos grupos, G y H, un homomorfismo de grupos es una función $f : G \to H$, que respeta la estructura de grupo, es decir, tal que $f(g_1+g_2) = f(g_1)+f(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$. El conjunto de homomorfismos de G en H se denota por $\mathrm{Hom}(G, H)$. Si H es un grupo abeliano entonces $\mathrm{Hom}(G, H)$ es también un grupo abeliano con la operación suma punto a punto, esto es, $f_1 + f_2 : G \to H$ dada por $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ para todo $g \in G$.

Sea G un grupo abeliano de exponente finito $m \leq 1$. Denotamos por G^* al grupo $Hom(G, \mathbb{Z}_m)$ y lo llamamos *dual de G*. Para grupos abelianos finitos se tienen los siguientes resultados con respecto al dual

Teorema 3.1.2 *Todo grupo abeliano finito es isomorfo a su propio dual.*

Sea H subgrupo de un grupo abeliano finito G y sea $H^{\perp} := \{\phi \in G^* : \phi(H) = 0\}$, es facil ver que $H^{\perp}$ es un subgrupo de G^*. La siguiente proposición establece una relación entre G^*, H^* y $H^{\perp}$

Proposición 3.1.4 *Sea G un grupo abeliano finito y H subgrupo de G. Entonces*

$$G^*/H^{\perp} \cong H^*$$

El siguiente lema muestra una propiedad muy importante sobre los subgrupos y los grupos cocientes en un grupo abeliano finito G, este muestra que si H es un subgrupo de G entonces, G tiene un subgrupo K isomorfo a G/H cuyo cociente, G/K, es isomorfo a H, de modo que, bajo isomorfismo los roles de subgrupo y grupo cociente pueden ser intercambiados.

Lema 3.1.3 *Sea G un grupo abeliano finito y $H \leq G$. Entonces existe $K \leq G$ tal que $K \cong G/H$ y $H \cong G/K$.*

Demostración. Por Teorema 3.1.2 $G^* \cong G$, como $H^{\perp}$ es subgrupo de G^*, debe existir $K < G$ tal que $K \cong H^{\perp}$, veamos que este subgrupo satisface el lema. En vista del Teorema 3.1.2 sabemos que $G/H \cong (G/H)^*$ y $H \cong H^*$, así es suficiente probar que $H^{\perp} \cong (G/H)^*$ y que $H^* \cong G^*/H^{\perp}$.

Veamos que $H^\perp \cong (G/H)^*$. Sea $\phi \in H^\perp$, entonces $\phi(H) = \{0\}$, de modo que $\phi(g + H) = \{\phi(g)\}$ para todo $g \in G$, así la función $f_\phi : G/H \to \mathbb{Z}_m$ dada por $f_\phi(g+H) = \phi(g)$ está bien definida, más aún, f_ϕ es homomorfismo de grupos, luego $f_\phi \in (G/H)^*$. Sea $f : H^\perp \to (G/H)^*$ dada por $f(\phi) = f_\phi$, f es un isomorfismo de grupos, en efecto, sean ϕ_1, $\phi_2 \in H^\perp$ y sea $g + H \in G/H$ entonces

$$\begin{aligned}
f(\phi_1 + \phi2)(g + H) &= f_{\phi_1+\phi_2}(g + H) = (\phi_1 + \phi_2)(g) \\
&= \phi_1(g) + \phi_2(g) \\
&= f_{\phi_1}(g + H) + f_{\phi_2}(g + H) \\
&= f(\phi_1)(g + H) + f(\phi_2)(g + H) \\
&= (f(\phi_1) + f(\phi_2))(g + H)
\end{aligned}$$

Luego $f(\phi_1 + \phi2) = f(\phi_1) + f(\phi_2)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\phi \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(\phi) = 0 \Leftrightarrow f_\phi = 0 \\
&\Leftrightarrow f_\phi(g + H) = 0 \ \forall g \in G \\
&\Leftrightarrow \phi(g) = 0 \ \forall g \in G \\
&\Leftrightarrow \phi = 0
\end{aligned}$$

Así f es inyectiva. Para ver la sobreyectividad de f notemos que toda función $\psi \in (G/H)^*$ puede ser extendida a un homomorfismo $\psi' : G \to \mathbb{Z}_m$ dado por $\psi'(g) = \psi(g + H)$, para cada $g \in G$. En este caso $\psi'(H) = \psi(0) = 0$, es decir, $\psi' \in H^\perp$. Además $f(\psi')(g + H) = f_{\psi'}(g + H) = \psi'(g) = \psi(g + H)$, es decir $f(\psi') = \psi$, por lo que f es isomorfismo, como queríamos demostrar.

Finalmente para ver que $H^* \cong G^*/H^\perp$, aplicamos la Proposición 3.1.4 y tenemos

$G/K \cong G^*/H^\perp \cong H^* \cong H$. ■

3.2. Sobre $\mathsf{d}^*(G)$

Ahora tenemos las herramientas necesarias para mostrar que $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$

Lema 3.2.1 *Si G es un grupo abeliano finito y $H < G$, entonces*

$$\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$$

Demostración. Si G es cíclico, entonces $\mathsf{d}^*(G) = |G| - 1$, $\mathsf{d}^*(H) = |H| - 1$ y $\mathsf{d}^*(G/H) = \frac{|G|}{|H|} - 1$. Luego $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$ se sigue de la desigualdad general $xy \geq x+y-1$ para x, $y \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Podemos suponer que $\mathsf{r}(G) \geq 2$ y procedemos por inducción sobre el rango $\mathsf{r}(G) = r$.
Sea $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i}$, $H \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i'}$ y $G/H \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{m_i''}$, con $1 < m_1 | \dots | m_r$ and $1 \leq m_1' | \dots | m_r'$ y $1 \leq m_1'' | \dots | m_r''$. Por la Proposición 3.1.3, vemos que $m_i' | m_i$ para todo i; y por Proposición 3.1.3, $G/H \cong K < G$, así $m_i'' | m_i$. Luego, si $m_i' < m_i$ y $m_i'' < m_i$ para todo i, entonces $m_i' \leq \frac{1}{2} m_i$ y $m_i'' \leq \frac{1}{2} m_i$, en consecuencia $m_i' - 1 + m_i'' - 1 < m_i - 1$; como i es arbitrario, al sumar sobre i obtenemos que $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$. Supongamos que $m_s' = m_s$ o $m_s'' = m_s$ para algún s, el Lema 3.1.3, nos permite suponer $m_s' = m_s$, sin pérdida de generalidad.
Aplicando Lema 3.1.2, concluimos que existen subgrupos K, $H_0 \leq H$ y $G_0 \leq G$ tales que $H = K \oplus H_0$ y $G = K \oplus G_0$ con $K \cong C_{m_s}$. Más aún, podemos seleccionar el sumando complementario H_0 de modo que $H_0 \leq G_0$. Notemos que $\mathsf{d}^*(H) = \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(H_0)$ y $\mathsf{d}^*(G) = \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(G_0)$, mientras que $G/H = (K \oplus G_0)/(K \oplus H_0) \cong G_0/H_0$,

así $\mathsf{d}^*(G_0/H_0) = \mathsf{d}^*(G/H)$. Aplicando hipótesis inductiva a G_0, con subgrupo H_0, tenemos que $\mathsf{d}^*(G_0) \geq \mathsf{d}^*(H_0) + \mathsf{d}^*(G_0/H_0)$. Así

$$\begin{aligned} \mathsf{d}^*(G) = \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(G_0) &\geq (\mathsf{d}^*(H) - \mathsf{d}^*(H_0)) + (\mathsf{d}^*(H_0) + \mathsf{d}^*(G_0/H_0)) \\ &= \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente Lema relaciona la constante $\mathsf{d}^*(G)$ con la Teoría aditiva, y por ende, con los problemas de suma cero. En términos de secuencias el Lema básicamente da condiciones sobre una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ para que exista $H < G$ y una $\mathsf{d}^*(H)$-partición, $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{\mathsf{d}^*(H)}$, de una subsecuencia de S tal que $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) a_0 + H$.

Lema 3.2.2 *Sea G un grupo abeliano finito, sea $A \subseteq G$ finito con $|A| \geq 2$, sea $H = \langle -a_0 + A \rangle$, donde $a_0 \in A$, y sean $w_1 \cdot \ldots \cdot w_{\mathsf{d}^*(H)} \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(w_i, \exp(H)) = 1$ para todo $i \in [1, \mathsf{d}^*(H)]$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) a_0 + H.$$

Demostración. Por traslación podemos suponer que $a_0 = 0 \in A$, como $|A| \geq 2$, $H = \langle A \rangle$ es no trivial. Sea $K < H$ el subgrupo maximal tal que existe un subconjunto $B \subseteq A$ con $0 \in B$, $K = \langle B \rangle$ y $|\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B| = |K|$ (notar que tal K puede ser $\langle 0 \rangle$). Si $K = H$ el lema está probado. Supongamos que K está propiamente contenido en H. Como $\langle B \rangle = K \subsetneq H = \langle A \rangle$, tomamos $g \in A \setminus B$ y consideramos el subgrupo $K' = \langle B \cup \{g\} \rangle$, el cual contiene propiamente a K. Sea $L = \langle g \rangle$, entonces

$$K'/K = (K + L)/K \simeq L/(K \cap L)$$

pero L es cíclico, luego $K'/K \simeq L/K \cap L$ también es cíclico, entonces $\mathsf{d}^*(K'/K) = |K'/K| - 1$ y por Lema 3.2.1

$$|K'/K| - 1 = \mathsf{d}^*(K'/K) \leq \mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K)$$

además, $w_i g \notin K$ ya que $\gcd(w_i, \exp(K)) = 1$ (pues $\gcd(w_i, exp(G)) = 1$).

Sea $H'/K = \mathsf{H}(\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i\{0,g\})$.

Si $H' = K$ entonces $\mathsf{H}(\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} w_i\{0,g\}) = \{\phi_H(0)\}$ y por Teorema de Kneser

$$|\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i\{0,g\}| \geq \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} |w_i\{0,g\}| - (\mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K)) + 1.$$

Supongamos que $H' < K$, como $\phi_K(w_i g) \neq 0$, entonces $\langle \phi_K(w_i g) \rangle = K'/K$, de modo que 0 y $\phi_K(w_i g)$ están en distintas clases módulo H'/K, asi cada conjunto $\{w_i\phi_K(0), w_i\phi_K(g)\}$ tiene al menos $2|H'/K| - 2$ hoyos, luego

$$\rho \geq 2(\mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K))(|H'/K| - 1) > (\mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K) - 1)(|H'/K| - 1),$$

entonces el Teorema de Kneser implica que

$$|\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i\{0,g\})| \geq \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} |w_i\{0,g\}| - (\mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K)) + 1.$$

En todo caso tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i(B \cup \{g\}))| &= |\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i\{0,g\}| \\
&\geq \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} |w_i\{0,g\}| - (\mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K)) + 1 \\
&= \mathsf{d}^*(K') - \mathsf{d}^*(K) + 1 \\
&\geq |K'/K|
\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} \phi_K(w_i(B \cup \{g\})) = K'/K \Rightarrow \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} (w_i(B \cup \{g\}) + K = K' + K = K'.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K')} (w_i(B \cup \{g\}) = \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} (w_i(B \cup \{g\}) + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K')} (w_i(B \cup \{g\}) = K'$$

contradiciendo la maximalidad de K. ■

Capítulo 4

Nuevos Teoremas de Partición y Representación

Como hemos dicho en el Capítulo 2, llamamos Teoremas de Partición a los teoremas que dan condiciones sobre una secuencia S para que exista una partición de S cumpliendo ciertas propiedades, por ejemplo, los Teoremas análogos de Cauchy-Davenport (Teoremas 2.4.1 y 2.4.2) y los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2. Llamamos Teoremas de Representación a los teoremas que dan condiciones sobre un secuencia S para que exista H, subgrupo de G, el cual puede ser representado por S, es decir, tal que $H \subseteq \Sigma(S)$ (o $H \subseteq \Sigma_n(S)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ dado); si adicionalmente se tiene una secuencia de enteros W, los teoremas de representación dan condiciones para que $H \subseteq \Sigma(W, S)$ (o $H \subseteq \Sigma_n(W, S)$), por ejemplo el Teorema EGZP y el Teorema 2.2.2. En este Capítulo presentamos los resultados principales de este trabajo, esto es, los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2, los cuáles son teoremas de partición, que permiten verificar parcialmente la Conjetura Ordaz-Quiroz (Conjetura 2.2.1) y generalizan algunos Teoremas de representación.

4.1. Metodología

La Metodología está basada en

1. Teoremas de Teoría Aditiva, específicamente el Teorema de Kneser y los Lemas 1.4.1 y 1.4.2 (consecuencias del Teorema KST). El Teorema de Kneser es usado para acotar inferiormente el conjunto suma de los términos de una partición de una secuencia dada, cuando la cota es suficientemente grande se puede lograr que ésta represente a un grupo (o a un subgrupo) dado, cuando la cota no satisface el la cota de Cauchy-Davenport, el Teorema de Kneser da información estructural sobre los A_i. El Teorema KST es usado cuando algún par de términos de la partición, digamos (A_i, A_j), es un par crítico, esto es, $|A_i + A_j| = |A_i| + |A_j| - 1$, específicamente tratamos el caso cuando cada término del par no es quasi periódico, este es el caso de los Lemas 1.4.1 y 1.4.2.

2. El Teorema de Partición versión débil (Teorema 2.3.2), el cual permite establecer la base del proceso inductivo usado para demostrar los nuevos Teoremas de partición 4.2.1 y 4.2.2.

3. El Lema 3.2.1 el cual compara $\mathsf{d}^*(G)$ con $\mathsf{d}^*(H)$ y $\mathsf{d}^*(G/H)$, cuando $H < G$; y el Lema 3.2.2, el cual da condiciones para la existencia de $H < G$ y de una $\mathsf{d}^*(H)$-partición de una subsecuencia $S'|S$ tal que $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A_i = H$.

A continuación hacemos un esquema de las demostraciones de los teoremas más importantes y mostramos como se usan las herramientas enumeradas anteriormente.

A tales resultados los hemos llamado Nuevos Teoremas de Partición (Teorema 4.2.1 y Teorema 4.2.2), pues han sido obtenido a partir del Teorema de Partición (versión débil). El Teorema 4.2.1 ha surgido en un intento por demostrar la Conjetura Ordaz-Quiroz (Conjetura 2.2.1). Sea $S \in \mathcal{F}(G)$, supongamos que ninguna n-partición de S satisface la cota de Cauchy-Davenport. Sea $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ la partición dada al aplicar el Teorema de Partición Débil. Por el Teorema de Kneser existen a lo mas $n-1$ conjuntos de $\mathcal{A}$ conteniendo un elemento el cual es el único representante de su H'-clase, con $H' = \mathsf{H}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$, en particular, existen a lo mas $n-1$ conjuntos de $\mathcal{A}$ conteniendo un elemento el cual es el único representante de su H-clase, con H dado por el Teorema de Partición (pues en este caso $H \subseteq H'$). Si $N = 1$, entonces todos los términos de S, excepto a lo más $n-1$, pertenecen a una H-clase, digamos $g + H$, la cual intersecta a todos los A_i, al considerar el grupo $H = \langle \bigcap_{i=1}^{n} (A_i + H) \rangle$, tendremos que todos los términos de S, excepto a lo más $n-1$ pertenecen a $g + H$. Dado que n puede ser muy grande dificilmente se puede obtener la conclusión de la Conjetura Ordaz-Quiroz, sin embargo hemos obtenido el siguiente resultado.

Sea G un grupo abeliano finito, sea $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$ una secuencia de enteros coprimos con $\exp(G)$, sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y sea $S' \mid S$. Supongamos $|W| \geq \mathsf{d}^*(G)$ y $\mathsf{h}(S') \leq |W| \leq |S'|$. Entonces existe $S'' \mid S$ con $|S''| = |S'|$ satisfaciendo una de las siguientes alternativas:

(i) Existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S'' tal que

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq \min\{m, |S'| - n + 1\}$$

(ii) Existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S'', un subgrupo propio no trivial $H \leq G$, y $g \in G$, tal que:

(a) $(g+H) \cap A_i \neq \emptyset$ para todo i, y $\mathrm{supp}(SS''^{-1}) \subseteq g+H$.

(b) $A_i \subseteq g+H$ para $i \leq \mathsf{d}^*(H)$ y $i > \mathsf{d}^*(H) + \mathsf{d}^*(G/H)$.

(c)$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq (e+1)|H|$ y todos excepto $e \leq |G/H| - 2$ términos de S pertenecen a $g+H$.

(d) $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) g + H.$

Procedemos por inducción sobre $|G|$. El Teorema de Partición (Teorema 2.3.2) implica que se cumple (i) cuando $H = 0$, esto nos permite establecer la base del proceso inductivo. Luego probamos, suponiendo que no se cumple (i), la existencia de un subgrupo K de G y una $\mathsf{d}^*(K)$-partición de una subsecuencia de $S''|S$, digamos $\mathcal{B} = B_1 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K)}$, tal que $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i\right) g + K$ con $\mathrm{supp}(S'') \subseteq g+K$ y $S''^{-1}S$ conteniendo al menos $n - \mathsf{d}^*(G) + |S| - |S''|$ términos de $g+K$, cuando K es el subgrupo maximal que satisface esta última declaración, se muestra que se cumple el resto de las proposiciones de la parte (ii).

Uso del Lema 3.2.2

Dada $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = |G| + \mathsf{d}^*(G) + x$ y $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ con $\mathsf{d}^*(G) \leq |W| \leq |S|$, buscamos condiciones sobre S para que se satisfaga la siguiente afirmación:

Afirmación 1: Existe un subgrupo no trivial K de G, $g \in G$ y una $\mathsf{d}^*(K)$ partición $B_1 \cdots B_{\mathsf{d}^*(K)}$ de una subsecuencia T de S con $T \in \mathcal{F}(g+K)$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i\right) g + K.$$

Los Lemas 3.2.2 y Lema 3.2.1 son claves cuando necesitamos que se cumpla la Afirmación 1, a continuación mostramos dos ejemplos de como se usan los Lemas para obtener la afirmación 1:

Ejemplo 4.1.1 *Si S tiene al menos dos términos diferentes con multiplicidad mayor o igual que $\mathsf{d}^*(G)$, se cumple la Afirmación 1.*
Sea $T \mid S$ la subsecuencia de S formada por todos los términos de S con multiplicidad mayor o igual que $\mathsf{d}^*(G)$, y para $i \in [1, \mathsf{d}^*(G)]$, sea $B_i = \operatorname{supp}(T)$, es claro que los B_i forman una $\mathsf{d}^*(G)$-partición en conjuntos de T, sin perder generalidad podemos suponer que $0 \in \operatorname{supp}(T)$, luego aplicando el Lema 3.2.2 con $A = \operatorname{supp}(T)$ y $H = \langle A \rangle$ (recordemos que $\mathsf{d}^*(H) \le \mathsf{d}^*(G)$), tenemos que $\sum\limits_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i = H$, además $B_i \subseteq H$ para todo i, así se satisface la Afirmación 1. De esta manera vemos que existen secuencias en G que satisfacen la Afirmación 1 con $K = H$.

Ejemplo 4.1.2 *Si se satisface la Afirmación 1 y ST^{-1} tiene al menos $\mathsf{d}^*(G/K)$ términos en K y $\mathsf{d}^*(G/K)$ términos en $g_0 + K$ para algún $g_0 \in G \setminus K$, siendo $K < G$ y $T \mid S$ dados por la afirmación. Entonces existe $L < G$ y $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)}$, partición de una subsecuencia de S, tal que $\sum\limits_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_1 \cdot A_i = L + K = L$.*
Sea $g \in G$ y $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{\mathsf{d}^*(K)}$ la $\mathsf{d}^*(K)$-partición de T dada por la afirmación, sin perder generalidad podemos suponer $g = 0$. Sea $T_0 \mid ST^{-1}$ con $|T_0| = \mathsf{d}^*(G/K)$ tal que $\phi_K(T_0) = 0^{\mathsf{d}^*(G/K)}$, y sea $R \mid ST^{-1}$ con $|R| = \mathsf{d}^*(G/K)$ tal que $\phi_K(R) = \phi_K(g_0)^{\mathsf{d}^*(G/K)}$, entonces, usando la técnica empleada en el Ejemplo 4.1.1 con la secuencia $\phi_K(RT_0)$ y el grupo G/K, siendo $L = \langle g \rangle + K \supsetneq K$ y $A_i = \{\phi_K(g_0), 0\}$ para $i \in [\mathsf{d}^*(K)+1, \mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)]$, obtenemos $\sum\limits_{\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_1 \cdot \phi_K(A_i) =$

$\phi_K(g_0) + L/K$, implicando

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_1 \cdot A_i = L + K = L.$$

Es decir, podemos extender la partición de modo que S represente un subgrupo que contiene propiamente a K. Notemos que si $S(TT_0R)^{-1}$ tiene suficientes términos en K, tal partición puede ser extendida hasta tener longitud $\mathsf{d}^*(L)$ y se cumple la Afirmación 1 con $L \supseteq K$.

Ahora presentamos un esquema de la demostración del Teorema 4.2.1.

Procedemos por inducción sobre $|G|$. Aplicamos el Teorema de Partición (2.3.2) y obtenemos una n-partición $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia $S' \mid S$ y un subgrupo H de G que satisface (2.6). Sea $x = |S| - |S'|$. Supongamos $|G|$ primo. Si $|H| = 0$ o $H = G$, la desigualdad (2.6) implica que se cumple *(i)*. De esta manera se establece la base del proceso inductivo. Supongamos en adelante que H subgrupo propio, no trivial de G; supongamos que el Teorema se cumple para todo subgrupo propio de G, y supongamos que no se cumple *(i)*, probaremos que debe cumplirse *(ii)*. Si no se cumple *(i)* entonces, de (2.6)

$$((N-1)n + e + 1)|H| \leq |S'| - n. \tag{4.1}$$

Paso 1: Probamos que si no se cumple *(i)*, entonces se cumple la Afirmación 1 y ST^{-1} (el T de la Afirmación) contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(G) + x$ términos de $g + K$ (el K de la afirmación).

1.1 Si $N \geq 2$, la desigualdad (4.1) implica que existe un par de conjuntos de la partición A_i y A_j, y una H-clase cuyo representante pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$ tal que $|A_i \cap g + H| + |A_j \cap g + H| = |H|$, sin perder generalidad podemos suponer $i = 1$, $j = 2$ y $g = 0$; luego, por el Teorema de Mann y usando que $\gcd(w_i, \exp(G) = 1$, obtenemos

$$|w_1 \cdot (A_1 + H) + w_2 \cdot (A_2 + H)| = |H|. \tag{4.2}$$

Ahora, sea $B_j = A_j \cap \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$, $K = H + \langle B_i \rangle$ y $T = \prod_{i=1}^{d^*(K)} B_i$.

Probamos que $H \subseteq \prod_{i=1}^{d^*(K)} B_i$, y usando la técnica del Ejercicio 4.1.2, probamos que $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} B_i = K$.

1.2 Si $N = 1$, se considera la secuencia T de todos los términos de S que pertenecen a $g+H$, donde $g \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i+H)$, y $T' \,|\, T$ consistente de todos los términos de T con multiplicidad al menos $\mathsf{d}^*(H)$ (pudiendo ser $T' = \emptyset$). La desigualdad (4.1) y el Teorema de Partición (2.3.2) implican que $|T| \geq n + |H| + x$.

Si existe $T_0 \,|\, T$ con $h(T_0) \leq \mathsf{d}^*(H)$ y $|T_0| = \mathsf{d}^*(H) + |H| + x$, aplicamos la hipótesis inductiva a T_0 con $G = H$ y vemos que se cumple la Afirmación 1 con $T = T_0$ y $K = H$.

En caso contrario se prueba que $|\mathrm{supp}(T')| \geq 2$ y usando la técnica del Ejemplo 4.1.1 para la secuencia $T_1 = \prod_{g \in \mathrm{supp}(T')} g^{\mathsf{d}^*(K)}$, se prueba que se cumple la Afirmación 1 con $K = \langle \mathrm{supp}(T') \rangle$ y $B_i = \mathrm{supp}(T')$.

Paso 2: Probamos que si se cumple la Afirmación 1 y ST^{-1} contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(G) + x$ términos de $g + K$, entonces se cumple *(ii)* siendo K el subgrupo maximal que satisface la Afirmación 1.

Por traslación podemos suponer $g = 0$, también podemos suponer que K es subgrupo propio de G (de lo contrario no hay nada que probar). Sea S_0 la secuencia de todos los términos g de S con $\phi_K(g) \neq 0$ y sea $S'' = TS_0R$, donde $R|S(TS_0)^{-1}$ con $|R| = |S'| - |TS_0|$ (Observar que $|ST^{-1}S_0^{-1}| \geq n - \mathsf{d}^*(K) + x$). Siendo S maximal, se prueba que $\mathsf{h}(\phi_K(S_0)) < \mathsf{d}^*(G/K)$, y se construye, usando la hipótesis inductiva sobre $\phi_K(R)$, una $\mathsf{d}^*(G/K)$-partición de S_0R para obtener una partición de S'' con las caracteristicas dadas por (ii) En el paso 2 de la demostración del Teorema 4.2.1 podemos observar que si se cumple la Afirmación 1 y ST^{-1} contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(G) + x$ términos de $g + K$, entonces se cumple *(ii)* del Teorema 4.2.1, con H el subgrupo maximal que satisface tal afirmación, este hecho lo presentamos en el Teorema 4.2.2, el cual da condiciones sobre S para forzar que se cumpla la parte *(ii)* del Teorema 4.2.1. A continuación enunciamos el Teorema 4.2.2

> Sea G un grupo abeliano finito, Sea W una secuencia de enteros coprimos con $\exp(G)$ tal que $|W| \geq \mathsf{d}^*(G)$, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $S' \mid S$ tal que $\mathsf{h}(S') \leq |W| \leq |S'|$. Supongamos que existe K, subgrupo de G, con las siguiente propiedad:
>
> Existe $g' \in G, T \in \mathcal{F}(g'+K)$ con $T|S$ y una $\mathsf{d}^*(K)$-partición $B_1, \ldots, B_{\mathsf{d}^*(K)}$ de T, tal que
> $$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \right) g' + K$$
> y $T^{-1}S$ contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(K) + |S| - |S'|$ términos de $g' + K$. Sea $K^* < G$ el subgrupo maximal que satisface la propiedad anterior.

Entonces se cumple:

(i) Si $K^* = G$, entonces existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia $S'' \mid S$ tal que $|S'| = |S''|$ y

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i = G.$$

(ii) Si $K \neq G$, entonces la conclusión del Teorema 4.2.1 (ii) se cumple con $H = K^*$.

4.2. Nuevos Teoremas de Partición

Esta sección contiene dos de los resultados más importantes de este trabajo, a saber el Teorema 4.2.1 y el Teorema 4.2.2. Como consecuencia de estos teoremas obtenemos una mejora del Teorema de Gao, un caso especial de la conjetura Ordaz-Quiroz y una variación de la Conjetura de Hamidoune.

Teorema 4.2.1 *Sea G un grupo abeliano finito, sea $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$ una secuencia de enteros coprimos con* $\exp(G)$*, sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y sea $S' \mid S$. Supongamos $|W| \geq \mathsf{d}^*(G)$ y $\mathsf{h}(S') \leq |W| \leq |S'|$. Entonces existe $S'' \mid S$ con $|S''| = |S'|$ satisfaciendo una de las siguientes alternativas:*

(i) Existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S'' tal que

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq \min\{m, |S'| - n + 1\}$$

(ii) Existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S'', un subgrupo propio no trivial $H \leq G$, y $g \in G$, tal que:

(a) $(g+H)\cap A_i \neq \emptyset$ *para todo* i, *y* $\operatorname{supp}(SS''^{-1}) \subseteq g+H$.

(b) $A_i \subseteq g+H$ *para* $i \leq \mathsf{d}^*(H)$ *y* $i > \mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(G/H)$.

(c)$|\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq (e+1)|H|$ *y todos excepto* $e \leq |G/H|-2$ *términos de* S *pertenecen a* $g+H$.

(d) $\sum\limits_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) g + H$.

Demostración. Las hipótesis implican que podemos usar el Teorema de Partición (2.3.2). Entonces existe $H \leq G$ y una n-partición $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia S'' de S tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$ es H-periódico, $|S'| = |S''|$, y

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| \geq ((N-1)n+e+1)|H|, \tag{4.3}$$

donde $N = \frac{1}{|H|}|\bigcap_{i=1}^{n}(A_i+H)|$ y $e = \sum\limits_{j=1}^{n}(|A_j| - |A_j \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n}(A_i+H)|)$.

Si $H = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| &\geq ((N-1)n+e+1)|H| \\
&= (|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| - 1)n + \sum_{j=1}^{n}(|A_j| - |A_j \cap \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)|) + 1 \\
&= |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| n - n + \sum_{j=i}^{n} |A_j| - n|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| + 1 \\
&= |S'| - n + 1 \\
&\geq \text{mín}\{m, |S'| - n + 1\}
\end{aligned}$$

de modo que se cumple (i).

Si $H = G$, entonces por ser $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$ H-periódico tenemos que

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i| = |(\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i) + H| = |(\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i) + G| = |G| = m \geq \text{mín}\{m, |S'| - n + 1\}$$

entonces se cumple (i).

Notemos que si $|G|$ es primo entonces $H = G$ y se cumple el teorema.

Procederemos por inducción sobre el número de factores primos que dividen a n, ya vimos que cuando el orden de G tiene un factor primo (es un número primo) se cumple parte (i). Supongamos que el teorema se cumple para cualquier grupo G' con $|G'|$ teniendo un número de factores primos menor que $|G|$ y supongamos que no se cumple (i), necesitamos probar que se cumple (ii). Sea $x = |S| - |S'|$.

Paso 1. Probaremos que si no se cumple (i) se cumple la siguiente Afirmación:

Afirmación: Existe un subgrupo no trivial K de G, $g' \in G$ y una $\mathsf{d}^*(K)$-partición $B_1 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K)}$ de una subsecuencia $T \mid S$ con $T \in \mathcal{F}(g' + K)$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = (\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i) g' + K$$

con ST^{-1} conteniendo al menos $n - \mathsf{d}^*(K) + x$ términos de $g' + K$.

Como (i) falla y (i) se cumple para $n = 1$, podemos suponer $n \geq 2$. Además de (4.3) se tiene

$$(N - 1)n + e + 1)|H| \leq |S'| - n \tag{4.4}$$

1.1 Supongamos $N \geq 2$

Sean $g_1, ..., g_N \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H) = \uplus_{i=1}^{N}(g_i + H)$

Si para todo $g' \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$ y para todo $j \neq k$ tenemos que

$$|A_k \cap (g' + H)| + |A_j \cap (g' + H)| \leq |H|$$

entonces:

$$\begin{aligned}
|S'| &= |S''| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |A_j \cap \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)| + \sum_{j=1}^{n}(|A_j| - |A_j \cap \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)|) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |A_j \cap (\uplus_{k=1}^{N}(g_k + H))| + e \\
&= \sum_{j=1}^{n} | \uplus_{k=1}^{N} (A_j \cap (g_k + H))| + e \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |A_j \cap (g_k + H)| + e \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{n}{2}|H| + e \\
&= \frac{1}{2}Nn|H| + e
\end{aligned}$$

luego

$$((N-1)n + e + 1)|H| \leq |S'| - n \leq \frac{1}{2}Nn|H| + e - n \Rightarrow N \leq \frac{2n(|H|-1)}{n|H|} \leq 2$$

contrario a nuestra suposición. Entonces existen $g' \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$, A_j y A_k con $j \neq k$ tales que

$$|A_k \cap (g' + H)| + |A_j \cap (g' + H)| \geq |H| + 1$$

Sin perder generalidad podemos suponer $g' = 0$, $j = 1$ y $k = 2$ (observar que si $g' = 0$ entonces $A_i \cap H \neq \emptyset$ para todo i y $H \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$), como $|w_1 \cdot (A_1 \cap H)| = |A_1 \cap H|$ y $|w_2 \cdot (A_2 \cap H)| = |A_2 \cap H|$ entonces, por Teorema de Mann tenemos que

$$w_1 \cdot (A_1 \cap H) + w_2 \cdot (A_2 \cap H) = H.$$

Sea $B_j = A_j \cap (\bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H))$ para $j \in [1, n]$. Notemos que $\phi_H(B_i) = \phi_H(B_j)$ para todo i y todo j. Sea $K = H + \langle B_i \rangle$ y sea $T = \prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} B_i \in \mathcal{F}(K)$ $(T \mid S'')$. Como $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H) \neq \emptyset$ intersecta a cada A_i y $\mathrm{supp}(S''^{-1}S) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i + H)$ entonces, $T^{-1}S$ contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(K)|S| - |S''| = n - \mathsf{d}^*(K) + x$ términos de K.

Si $\mathsf{d}^*(H) = 1$ entonces $|H| = 2$ y

$$|w_1 \cdot (A_1 \cap H)| + |w_2 \cdot (A_2 \cap H)| \geq |H| + 1 = 3$$

luego, sin perder generalidad, podemos suponer $|w_1 \cdot (A_1 \cap H)| = |H|$ así $H = w_1 \cdot (A_1 \cap H) \subseteq w_1 \cdot B_1$

Si $\mathsf{d}^*(H) = 2$ entonces $H = w_1 \cdot (A_1 \cap H) + w_2 \cdot (A_2 \cap H) \subseteq w_1 \cdot B_1 + w_2 \cdot B_2 = \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i$.

Si $\mathsf{d}^*(H) > 2$ entonces $H = H + w_3(A_3 \cap H) + ... + w_{\mathsf{d}^*(H)}(A_{\mathsf{d}^*(H)} \cap H) \subseteq \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i$.

En todo caso $H \subseteq \sum_{i=1}^{d^*(H)} w_i \cdot B_i$.

Ahora, por hipótesis, $n \geq \mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(K)$ y usando Lema 3.2.1 tenemos que $n - \mathsf{d}^*(H) \geq \mathsf{d}^*(K) - \mathsf{d}^*(H) \geq \mathsf{d}^*(K/H)$, luego aplicando Lema 3.2.2

(procediendo como en el Ejemplo 4.1.2), tomando G como K/H y A como $\phi_H(B_i)$ para $i \geq \mathsf{d}^*(H)+1$ (observar que $|A| = |\phi_H(B_j)| = \dfrac{|B_j+H|}{|H|} = \dfrac{|A_j \cap (\bigcap_{i=1}^n (A_i+H))+H|}{|H|} = \dfrac{|\bigcap_{i=1}^n (A_i+H)|}{|H|} = N \geq 2$ y $H \subseteq A$) tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{\mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(K/H)} \phi_H(w_i \cdot B_i) = \langle \phi_H(B_i) \rangle \\ \Rightarrow \quad & \phi_H(\sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{\mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(K/H)} w_i \cdot B_i) = \phi_H(K) \\ \Rightarrow \quad & (\sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{\mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(K/H)} w_i \cdot B_i) + H = K + H = K \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i &= \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i + \sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{\mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(K/H)} w_i \cdot B_i + \sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+\mathsf{d}^*(K/H)+1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i \\ &= H + K = K \end{aligned}$$

y se cumple la afirmación.

1.2 $N = 1$: $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i + H) = g + H$ para algún $g \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i + H)$

Sea T la subsecuencia de S consistente de todos los términos de S que pertenecen a $g+H$, sea $T' \mid T$ consistente de todos los términos de T con multiplicidad al menos $\mathsf{d}^*(H)$ y sea $B = \mathrm{supp}(T')$ (observar que B puede ser $\emptyset$).

Como $|S'| = |S''| = \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap (g+H)| + e$ entonces S'' contiene $|S'| - e$ términos en $g+H$ además $\operatorname{supp}(SS''^{-1}) \subseteq g+H$ luego

$$\begin{aligned} |T| &\geq |S'| - e + |S| - |S'| = x + |S'| - e \\ &\geq (e+1)|H| + n + x - e \qquad \text{por (4.4)} \\ &\geq n + |H| + x \end{aligned}$$

Por traslación supongamos que que $g + H = H$, $0 \in \operatorname{supp}(T)$, y que $0 \in \operatorname{supp}(T')$, si $\operatorname{supp}(T') \neq \emptyset$. Entonces tenemos dos subcasos.

1.2.1 Existe una subsecuencia $T_0 \,|\, T$ con $\mathsf{h}(T_0) \leq \mathsf{d}^*(H)$ y $|T_0| = \mathsf{d}^*(H) + |H| - 1$ (caso particular $\operatorname{supp}(T') = \emptyset$).

Entonces podemos aplicar la hipótesis inductiva a $T_0 \,|\, T$ tomando G como H y n como $\mathsf{d}^*(H)$, obtenemos una subsecuencia $T_0' \,|\, T_0$ con $|T_0'| = |T_0|$ y una $\mathsf{d}^*(H)$-partición de T_0', digamos, $B = B_1 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(H)}$. Observemos que $|TT_0'^{-1}| = |T| - |T_0'| = |T| - |T_0| = |T| - \mathsf{d}^*(H) - |H| + 1 \geq n + |H| + x - \mathsf{d}^*(H) - |H| + 1 \geq n + x - \mathsf{d}^*(H)$.

Si se cumple (i), entonces $|T_0| = \mathsf{d}^*(H) + |H| - 1$ implica que

$$|\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i| = |H|,$$

así

$$H = \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot B_i$$

y la afirmación se cumple (usando T_0' por T y H por K).

Supongamos que se cumple (ii) con $K \leq H$, $g' \in H$ y la $\mathsf{d}^*(H)-$partición $B_1 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(H)}$ de T_0'. Sea $T_0'' = B_1 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K)}$, entonces de $(ii)d)$

$$\sum_{d=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = (\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i)g' + K$$

Por $(ii)a)$ tenemos que $\mathrm{supp}(TT_0'^{-1}) \subseteq g' + K$ y $(g'+H)\cap B_i \neq \emptyset$ para todo i, entonces $TT_0''^{-1}$ contiene al menos

$$\begin{aligned} & \mathsf{d}^*(H) - \mathsf{d}^*(K) + |T| - |T_0| \\ = \; & \mathsf{d}^*(H) - \mathsf{d}^*(K) + |T| - \mathsf{d}^*(H) - |H| + 1 \\ = \; & |T| - \mathsf{d}^*(K) - |H| + 1 \geq n + |H| + x - \mathsf{d}^*(K) - |H| + 1 \\ \geq \; & n + x - \mathsf{d}^*(K) \end{aligned}$$

términos de $g'+H$. además por $(ii)b)$, $B_i \subseteq g' + K$ para todo $i \leq \mathsf{d}^*(K)$, así $T_0'' \in \mathcal{F}(g'+H)$ y se cumple la afirmación.

1.2.2 No existe una subsecuencia $T_0 \,|\, T$ con $\mathsf{h}(T_0) \leq \mathsf{d}^*(H)$ y $|T_0| = \mathsf{d}^*(H) + |H| - 1$, es decir, para cualquier $T_0 \,|\, T$ con $\mathsf{h}(T_0) \leq \mathsf{d}^*(H)$ se tiene $|T_0| \leq \mathsf{d}^*(H) + |H| - 2 < n + |H| + x \leq |T|$ luego $\mathrm{supp}(T') \neq \emptyset$ y consecuentemente,

$$|\mathrm{supp}(T')|\mathsf{d}^*(H) + |TT'^{-1}| \leq \mathsf{d}^*(H) + |H| - 2,$$

de allí,

$$\begin{aligned} |T'| &= |T| - |TT'^{-1}| \\ &\geq n + |H| + x + |\mathrm{supp}(T')|\mathsf{d}^*(H) - \mathsf{d}^*(H) - |H| + 2 \\ &= n + x + 2 + (|\mathrm{supp}(T')| - 1)\mathsf{d}^*(H) \end{aligned}$$

pero $v_g(T') \leq v_g(T) \leq n + x$ para todo $g \in G$ (pues $\mathsf{h}(S') \leq n$), luego $|T'| \leq (n+x)|\mathrm{supp}(T')|$. Si $|\mathrm{supp}(T')| = 1$, $n + x + 2 \leq |T'| \leq n + x$ implica que $x + 2 \leq x$, luego $|\mathrm{supp}(T')| \geq 2$.

Sea $K = \langle \mathrm{supp}(T') \rangle \leq H$ y sea $T_0 := \prod_{g \in \mathrm{supp}(T')} g^{\mathsf{d}^*(K)}$ subsecuencia de

T' (recordemos la definición de T' obtenida tomando cada término con multiplicidad exactamente $\mathsf{d}^*(K) \le \mathsf{d}^*(H)$). Observemos que,

$$\begin{aligned} |T'T_0^{-1}| &= |T'| - |T_0| = |T'| - |\mathrm{supp}(T')|\mathsf{d}^*(K) \\ &\ge n + x + (|\mathrm{supp}(T')| - 1)\mathsf{d}^*(H) + 2 - |\mathrm{supp}(T')|\mathsf{d}^*(K) \\ &\ge n + x + 2 + (|\mathrm{supp}(T')| - 1)(\mathsf{d}^*(H) - \mathsf{d}^*(K)) - \mathsf{d}^*(K) \\ &\ge n + x - \mathsf{d}^*(K). \end{aligned}$$

Aplicando Lema 3.2.2 con A como $\mathrm{supp}(T')$ (recordar $0 \in \mathrm{supp}(T')$), concluimos que

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = K,$$

donde $B_i = \mathrm{supp}(T')$ para $i \in [1, \mathsf{d}^*(K)]$. En consecuencia, tenemos la afirmación (tomando T como T_0).

Al suponer que no se cumple (i) el subgrupo de la afirmación debe ser subgrupo propio de G.

Paso 2. Sea K el subgrupo maximal que satisface la afirmación, mostraremos que tal subgrupo satisface *(ii)*

Por traslación podemos suponer que $g' = 0$ en la afirmación. Sea $S_0 \mid S$ consistente de todos los términos y con $\phi_K(y) \neq 0$ ($y \notin K$) y sea $e := |S_0|$. Sabemos que ST^{-1} contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(K) + x$ términos en K luego

$$|ST^{-1}S_0^{-1}| \ge n - \mathsf{d}^*(K) + x$$

Consideremos la secuencia $\phi_K(S_0)$ en G/K.

2.1 Supongamos $\mathsf{h}(\phi_K(S_0)) \geq \mathsf{d}^*(G/K)$.

Sea $g \in \mathrm{supp}(S_0)$ con $\mathsf{v}_{\phi_K(g)}(\phi_K(S_0)) \geq \mathsf{d}^*(G/K)$ y sea $L = K + \langle g \rangle$. Por Lema 3.2.1, tenemos $\mathsf{d}^*(L) \geq \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(L/K)$. En vista que $\mathsf{h}(\phi_K(S_0)) \geq \mathsf{d}^*(G/K) \geq \mathsf{d}^*(L/K)$ y $n \geq \mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(L)$, podemos encontrar una subsecuencia $T' \mid ST^{-1}$ tal que $\phi_K(T') = \phi_K(g)^{\mathsf{d}^*(L/K)} 0^{\mathsf{d}^*(L) - \mathsf{d}^*(K)}$, luego $S(TT')^{-1}$ contiene al menos

$$n - \mathsf{d}^*(K) + x - (\mathsf{d}^*(L) - \mathsf{d}^*(K)) = n - \mathsf{d}^*(L) + x$$

términos de L.

Sea $B_{d*(K)+1} \cdot \ldots \cdot B_{d^*(L)}$ una partición de T' tal que $|B_i| = 2$ y $\phi_K(B_i) = \{0, \phi_K(g)\}$, para $i \in [\mathsf{d}^*(K) + 1, \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(L/K)]$, y $|B_i| = 1$, $\phi_K(B_i) = \{0\}$, para $i \in [\mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(L/K) + 1, \mathsf{d}^*(L)]$. Aplicamos Lema 3.2.2 tomando G como G/K, A como $\{0, \phi_K(G)\}$, en este caso $\langle A \rangle = L/K$, y tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} w_i \cdot \{o, \phi_K(g)\} = L/K \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} w_i \cdot \phi_K(B_i) = L/K \\ \Rightarrow \quad & \Big(\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} w_i \cdot B_i \Big) + K = L + K = L \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(L)} w_i \cdot B_i &= \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} w_i \cdot B_i \\
&\quad + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)+1}^{\mathsf{d}^*(L)} w_i \cdot B_i \\
&= K + L \\
&= L
\end{aligned}$$

además $TT' \in \mathcal{F}(L)$, luego L satisface la afirmación y contiene a K, contrario a nuestra suposición.

2.2 Supongamos ahora que $\mathsf{h}(\phi_K(S_0)) \leq \mathsf{d}^*(G/K)$.

Sea R una secuencia de ST^{-1} tal que $S_0 \mid R$ y $|R| = |S_0| + \mathsf{d}^*(G/K)$ (es posible hallar tal secuencia ya que $|ST^{-1}S_0^{-1}| \geq n - \mathsf{d}^*(K) + x$, $n \geq \mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(K) + \mathsf{d}^*(G/K) \Rightarrow n - \mathsf{d}^*(K) + x \geq \mathsf{d}^*(G/K)$). Observemos que $|S(TR)^{-1}| \geq n - \mathsf{d}^*(K) + x - \mathsf{d}^*(G/K) \geq x + \mathsf{d}^*(G) - \mathsf{d}^*(K) - \mathsf{d}^*(G/K)$ y todos los términos de $S(TR)^{-1}$ pertenecen a K.

Como $\mathsf{h}(\phi_K(S_0)) < \mathsf{d}^*(G/K)$, se sigue que $\mathsf{h}(\phi_K(R)) \leq \mathsf{d}^*(G/K)$. Así podemos aplicar la hipótesis inductiva a $\phi_K(R)|\phi_K(R)0^{|G/K|-1}$ con $n = \mathsf{d}^*(G/K)$ y G tomado como G/K. Sea $\phi_K(B_{\mathsf{d}^*(K)+1}) \cdot \ldots \cdot \phi_K(B_{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)})$ la $\mathsf{d}^*(G/K)-$partición obtenida de $\phi_K(R')$ la secuencia resultante, donde $R' \mid R0^{|G/K|-1}$ y $B_{\mathsf{d}^*(K)+1} \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K)+d^*(G/K)}$ es una partición de R'. En vista que $\mathsf{v}_0(\phi_K(R)) = \mathsf{d}^*(G/K)$, tenemos que

$$\mathrm{supp}(\phi_K(R)0^{|G/K|-1}\phi_K(R')^{-1}) = \{0\}.$$

Así podemos suponer, sin perder generalidad, que $R' = R$ y que $B_{\mathsf{d}^*(K)+1} \cdot$

$\ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)}$ es una partición de R. Supongamos que se cumple (ii). Sea L/K el subgrupo correspondiente y $g+K$ el elemento dado por el teorema. Como $\mathsf{v}_0(\phi_K(R)0^{|G/K|-1}) \geq |G/K|-1$, tenemos por $(ii)a)$

$$\{0\} = \operatorname{supp}(\phi_K(R)0^{|G/K|-1}\phi_K(R')^{-1}) \subseteq \phi_K(g) + L/K \Rightarrow \phi_K(g) \in L/K,$$

por $(ii)d$

$$\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_i \cdot \phi_K(B_i) = L/K \Rightarrow (\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_i \cdot B_i) + K = L + K = L$$

en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} w_i \cdot B_i = L.$$

Por $(ii)(a)$, $L/K \cap \phi_K(B_i) \neq \emptyset$ para todo i y como $|S(TR)^{-1}| \geq x + \mathsf{d}^*(G) - \mathsf{d}^*(K) - \mathsf{d}^*(G/K)$, se sigue que hay al menos

$$n+x-\mathsf{d}^*(K)-\mathsf{d}^*(G/K)+(\mathsf{d}^*(G/K)-\mathsf{d}^*(L/K)) = n+x-\mathsf{d}^*(K)-\mathsf{d}^*(L/K)$$

términos de $S(\prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} B_i)^{-1}$ contenidos en L.

Ahora en vista de que $\mathsf{d}^*(L)-\mathsf{d}^*(L/K)-\mathsf{d}^*(K) \geq 0$ definimos B_i, para $i \in [\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)+1, \mathsf{d}^*(L)]$, conjuntos unitarios pertenecientes a L y contenidos en $S\left(\prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)} B_i\right)^{-1}$ (esto es posible porque $\operatorname{supp}(\prod_{i=\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(L/K)+1}^{\mathsf{d}^*(L)} B_i) \subseteq L$), entonces

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(L)} w_i \cdot B_i = L$$

y $(S\prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(L)} B_i)^{-1}$ contiene al menos

$$n+x-\mathsf{d}^*(K)-\mathsf{d}^*(L/K)-(\mathsf{d}^*(L)-\mathsf{d}^*(L/K)-\mathsf{d}^*(K)) = n+x-\mathsf{d}^*(L),$$

términos de L. Luego L contradice la maximalidad de K. Así podemos suponer que se cumple (i).

Como antes, sea B_i, para $i \in [\mathsf{d}^*(K)+d^*(G/K)+1, n]$ tales que $|B_i| = 1$, $B_i|S(TR)^{-1}$, $B_i \subseteq K$. (recordar que $n-\mathsf{d}^*(K)-\mathsf{d}^*(G/K)$ de los términos de $S\left(\prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} B_i\right)^{-1} = S(TR)^{-1}$ pertenece a K).

Si $\displaystyle\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_i \cdot \phi_K(B_i) = G/K$,entonces $n \geq \mathsf{d}^*(G)$ y el lema 1 implican que

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)} w_i \cdot B_i = G.$$

Además $|S(\prod_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} B_i)^{-1}| \geq n + x - \mathsf{d}^*(G)$ luego se cumple la afirmación con $K = G$, contrario a nuestra suposición.

Entonces podemos suponer que $|\displaystyle\sum_{\mathsf{d}*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} \phi_K(w_iB_i)| \geq |S_0| + 1$, es decir, $|G/K| > |S_0| + 1 \geq |S_0| + 2$, sea $e := |S_0| \leq |G/K| - 2$.

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot B_i &= \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_i \cdot B_i \\
&\quad + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)+1}^{n} w_i \cdot B_i \\
&= K + \sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} w_i \cdot B_i
\end{aligned}$$

implicando

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot B_i| = |\sum_{i=\mathsf{d}^*(K)+1}^{\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)} \phi_K(w_i \cdot B_i)||K| \geq (|S_0|+1)|K| = (e+1)|K|$$

Luego tomando $S'' = TR\prod_{i=\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)+1}^{n} B_i$ se satisface el teorema. En efecto, $B_i \subseteq K$ para $i \geq \mathsf{d}^*(K)$ y para $i > \mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)+1$. Como R tiene $\mathsf{d}^*(G/K)$ términos en K y dos de ellos no pueden estar en el mismo B_i para $i \in [\mathsf{d}^*(K)+1, \mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*(G/K)]$ (pues $\phi_K(B_i)$ no puede tener dos ceros) entonces en cada B_i existe un elemento en K así $B_i \cap K \neq \emptyset$ para todo i. Finalmente, $\mathrm{supp}(S(TR\prod_{i=\mathsf{d}^*(K)+\mathsf{d}^*G/K)+1}^{n} B_i)^{-1}) \subseteq K$, esto completa la prueba. ■

Teorema 4.2.2 *Sea G un grupo abeliano finito, Sea W una secuencia de enteros coprimos con $\exp(G)$ tal que $|W| \geq \mathsf{d}^*(G)$, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $S' \mid S$ tal que $\mathsf{h}(S') \leq |W| \leq |S'|$. Supongamos que existe K, subgrupo de G, con las siguiente propiedad: Existe $g' \in G$, $T \in \mathcal{F}(g'+K)$ con $T|S$ y una $\mathsf{d}^*(K)$-partición $B_1, \ldots, B_{\mathsf{d}^*(K)}$ de T, tal que*

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i \cdot B_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} w_i\right) g' + K$$

y $T^{-1}S$ contiene al menos $n - \mathsf{d}^*(K) + |S| - |S'|$ términos de $g'+K$. Sea $K^* < G$ el subgrupo maximal que satisface la propiedad anterior. Entonces se cumple:

(i) Si $K^* = G$, entonces existe una n-partición en conjuntos $\mathcal{A} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una subsecuencia $S'' \mid S$ tal que $|S'| = |S''|$ y

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i = G.$$

(ii) Si $K \neq G$, entonces la conclusión del Teorema 4.2.1 (ii) se cumple con $H = K^*$.

Demostración. Sea $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$. Como $h(S') \leq n$ y

$$
\begin{aligned}
|ST^{-1}| \geq n - \mathsf{d}^*(K) + |S| - |S'| \ &\Rightarrow\ |S| - |T| \geq n - \mathsf{d}^*(K^*) + |S| - |S'| \\
&\Rightarrow\ |S'| - |T| \geq n - \mathsf{d}^*(K^*)
\end{aligned}
$$

entonces la $\mathsf{d}^*(K)$-partición $B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_{\mathsf{d}^*(K^*)}$ de T puede ser extendida a una n-partición $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de una secuencia $S'' \,|\, S$ con $B_i \subseteq A_i$ para $i \leq d^*(K^*)$, $T|S''$ y $|S''| = |S'|$.

Supongamos que $K^* = G$, entonces

$$
\begin{aligned}
G &= G + \sum_{i=\mathsf{d}^*(G)+1}^{n} w_i \cdot A_i \\
&\subseteq \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)} w_i \cdot B_i + \sum_{i=\mathsf{d}^*(G)+1}^{n} w_i \cdot A_i \\
&\subseteq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i
\end{aligned}
$$

y se cumple (i).

Si K^* es subgrupo propio de G, el Paso 2 de la demostración del Teorema 4.2.1 prueba que se cumple (ii). ■

Para ver la utilidad del Teorema 4.2.2 observemos lo siguiente: Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, y sea $k \leq |W|$. Supongamos que $|S| \geq |G| + k - 1$ y supongamos que dado $H < G$, S no tiene muchos términos en ninguna clase lateral módulo H. Queremos ver que $\Sigma_k(W, S) = G$. Si $h(S) \leq k$ aplicamos el Teorema 4.2.1 con $S' = S$ y $n = k$ y se cumple lo deseado. Si $\mathsf{h}(S) > k$ podemos considerar $S' \,|\, S$ con $\mathsf{h}(S') \leq k$ y aplicar el Teorema 4.2.1, como la parte *(ii)* contradice la hipótesis, debe cumplirse la parte (i), sin embargo, la parte *(i)* del

Teorema 4.2.1 no necesariamente nos llevará a la conclusión deseada, pero la técnica del Ejemplo 4.1.1 nos permite obtener las hipótesis del Teorema 4.2.2 el cual nos lleva al resultado deseado o forza a que se cumpla la parte (ii) del Teorema 4.2.1 con $H < G$, que en caso que S no posea muchos términos de ninguna clase, nos llevará a una contradicción, obteniendo así lo que deseábamos.

4.3. Corolarios de los Nuevos Teoremas de Partición.

Una Mejora del Teorema de Gao

Como una consecuencia de los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2 tenemos la siguiente mejora del Teorema de Gao (Teorema 2.1.4), la mejora consiste en sustituir la hipótesis $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$ del Teorema de Gao, por $|S| \geq |G| + \mathsf{d}^*(G)$ (recordemos que $\mathsf{D}(G) - 1 \geq \mathsf{d}^*(G)$).

Corolario 4.3.1 *Sea G un grupo abeliano finito, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq |G| + \mathsf{d}^*(G)$. Entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

(i) $\Sigma_{|G|}(S) = G$

(ii) Existe $g \in G$ y $H < G$ tal que todos los términos de S, excepto a lo más $|G/H| - 2$, pertenecen a $g + H$.

Demostración. Sea $|S| = |G| + \mathsf{d}^*(G) + x$, donde $x \geq 0$. Supongamos que para todo $H < G$ no se cumple (ii) y veamos que se cumple (i). Observemos que como (ii) no se cumple para ningún subgrupo de G, en particular para $H = \langle 0 \rangle$, entonces $\mathsf{h}(S) \leq \mathsf{d}^*(G) + x + 1$. Tenemos los siguientes casos

1. $\mathsf{h}(S) \leq \mathsf{d}^*(G) + x$

   Aplicamos el Teorema 4.2.1 con $n = \mathsf{d}^*(G) + x$, $S' = S$ y $w_i = 1$ para todo i. Si se cumple la parte (ii) del Teorema 4.2.1, entonces $(ii)c)$ implica que se cumple la parte (ii) de este corolario, contrario a nuestra suposición. Luego se cumple (i) del Teorema 4.2.1, es decir, existe una $(\mathsf{d}^*(G) + x)$- partición de S, digamos $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{\mathsf{d}^*(G)+x}$, tal que

   $$|\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)+x} A_i| \geq \text{mín}\{|G|, |S| - n + 1\} = |G|$$

   Entonces $G = \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)+x} A_i \subseteq \Sigma_{\mathsf{d}^*(G)+x}(S)$. Luego

   $$\Sigma_{|G|}S = \sigma(S) - \Sigma_{\mathsf{d}^*(G)+x}(S) = \sigma(S) - G = G$$

2. $\mathsf{h}(S) = \mathsf{d}^*(G) + x + 1$.

   Por traslación podemos suponer que 0 es el término de S con mayor multiplicidad, esto es $\mathsf{h}(S) = \mathsf{v}_0(S)$.

   2.1 El único término de S con multiplicidad $\mathsf{h}(S)$ es 0.

   Consideramos la subsecuencia $S0^{-1}|S$, es claro que $\mathsf{h}(S0^{-1}) = \mathsf{d}^*(G) + x$, y por el Caso 1 (tomando S como $S0^{-1}$ en el Caso 1) tenemos que

   $$G = \Sigma_{|G|}S0^{-1} \subseteq \Sigma_{|G|}S.$$

   2.2 Existe $0 \neq g \in G$ tal que $\mathsf{v}_g(S) = \mathsf{v}_0(S) = \mathsf{h}(S)$. Sea $S'|S$ la subsecuencia de S con mayor longitud tal que $\mathsf{h}(S') = \mathsf{d}^*(G) + x$. Sea $A = \text{supp}(SS'^{-1})$

(notar que $\{0, g\} \subseteq A$), aplicando el Lema 3.2.2 a A obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} A = K$$

donde $K = \langle A \rangle$. Sea $n = \mathsf{d}^*(G) + x$, para cada $i \in [1, \mathsf{d}^*(K)]$ sea $B_i = A$ y $w_i = 1$; y sea $T = A^{\mathsf{d}^*(K)}$, entonces W, T y n satisfacen las hipótesis del Teorema 4.2.2 el cual garantiza lo siguiente:

Si $K = G$, existe una n-partición en conjuntos de S tal que $\sum\limits_{i=1}^{\mathsf{d}^*(K)} A = G$ implicando que $G = \sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)+x} A \subseteq \Sigma_{\mathsf{d}^*(G)+x} S$ luego

$$\Sigma_{|G|} S = \sigma(S) - \Sigma_{\mathsf{d}^*(G)+x} S = G.$$

Si K es subgrupo propio de G entonces se cumple la parte $(ii)c)$ del Teorema 4.2.1 que nos lleva a una contradicción. ■

Una mejora del Teorema 2.2.3

Ahora mostramos una segunda consecuencia de los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2, la cual extiende el Teorema 2.2.3, mostrando que es suficiente que al menos $\mathsf{d}^*(G)$ de los pesos sean primos relativos con $\exp(G)$, para que $\Sigma_{|W|}(W, S)$ contenga un subgrupo no trivial.

Corolario 4.3.2 *Sea G un grupo abeliano finito, no trivial, sea W una secuencia de enteros, de longitud $n \geq \mathsf{d}^*(G) + t$, tal que todos sus términos, excepto a lo más t, son coprimos con $\exp(G)$, y tal que $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{\exp)(G}$, y sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq |G| + |W| - 1$ y $\mathsf{h}(S) \leq |W|$, entonces existe H, subgrupo no trivial de G, tal que*

$$H \subseteq \Sigma_n(W, S).$$

Demostración. Sea $m = \exp(G)$. Consideremos G como un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-módulo, podemos considerar, sin perder generalidad, W como una secuencia de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, supongamos $W = w_1 \cdots w_n$, donde $\mathrm{ord}(w_i) = m$ para $i \leq n-t$ (ya que por hipótesis $\gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ para $w_i | W'^{-1}W$, donde $|W'| = t$). Observemos que podemos suponer $|S| = |W| + |G| - 1 = n + |G| - 1$.

1. Supongamos $\mathsf{h}(S) \leq n - t$.

   Tomamos $S'|S$ con $|S'| = t$ y consideramos la secuencia SS'^{-1}, como $|SS'^{-1}| = n - t - 1 + |G| \geq n - t$ y $\mathsf{h}(SS'^{-1}) \leq \mathsf{h}(S) \leq n - t$, entonces T tiene una $(n-t)$-partición, digamos $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-t}$, tal que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$ para todo $i \in [1, n-t]$ (ya que $gcd(w_i, \exp(G)) = 1$ para $i \leq n - t$); por otro lado, S' tiene un t-partición en conjuntos unitarios, digamos $A_{n-t+1} \cdot \ldots \cdot A_n$, así $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ es una n-partición de S tal que $|w.A_i| = |A_i|$ para todo $i \in [1, n]$, luego aplicando el Teorema EGZP (2.2.1) obtenemos lo deseado.

2. $n - t + 1 \leq \mathsf{h}(S) \leq n$.

   2.1 S posee a lo sumo t términos de multiplicidad $n - t + 1$.

   Consideramos $S'|S$ con $|S'| = t$ tal que S' posea todos los términos distintos de S de multiplicidad $n-t+1$, así $\mathsf{h}(SS'^{-1}) \leq n-t$ y $|SS'^{-1}| \geq n-t$, de modo que $SS'^{(-1)}$ tiene una $(n-t)$-partición, digamos $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-t}$, tal que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$ para todo $i \in [1, n-t]$; por otro lado, S' tiene un t-partición en conjuntos unitarios, digamos $A_{n-t+1} \cdot \ldots \cdot A_n$, así $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ es una n-partición de S tal que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$ para todo $i \in [1, n]$, luego aplicando el Teorema EGZP (2.2.1) obtenemos lo deseado.

2.2 S posee al menos $t+1$ términos distintos de multiplicidad $n-t+1$.

Por traslación podemos suponer, sin perder generalidad, que $0^{n-t+1}|S$. Sea $A \subseteq \mathrm{supp}(S)$ el conjunto de todos los términos distintos de S de multiplicidad al menos $n-t$, sea $K = \langle A \rangle$, sea $R := \prod_{g \in A} g^{\mathsf{v}_g(S)}$, notemos que $|R| \geq |A|(n-t)+t$, de lo contrario, S tendría a lo más t términos de multiplicidad $n-t+1$, lo que contradice nuestra suposición. Sea $T := \prod_{g \in A} g^{\mathsf{d}^*(K)}$, y sea $T_0 = \prod_{g \in A} g^{n-t}$. Notemos que $0 \in A$. Como $\mathsf{h}(S) \leq n$ y $|W| - t = n - t \geq \mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(K)$ por hipótesis, se sigue del Lema 3.2.2 aplicado a A, que las hipótesis del Teorema 4.2.2 se cumplen con n tomado como $n-t$, $B_i = A$ para $i \in [1, \mathsf{d}^*(K)]$, y $S' = T_0(SR^{-1})|S$. Observemos que $h(S') \leq n-t \leq |S'|$ y que ST^{-1} contiene al menos $n - t - d^*(K) + |S| - |S'|$ términos pertenecientes K. Si se cumple el Teorema 4.2.2 (i), es decir, existe una $(n-t)$-partición $A = A_1, \ldots, A_{n-t}$ de una subsecuencia $S''|S$ con $|S'| = |S''|$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n-t} w_i \cdot A_i = G.$$

Como $|S| - |S''| = |S| - |S'| = |R| - |T_0| \geq t+1$ podemos seleccionar t términos de SS''^{-1}, digamos, $x_1, ..., x_t$ y tenemos

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{n-t} w_i \cdot A_i = \sum_{i=1}^{n-t} w_i \cdot A_i + \sum_{i=n-t+1}^{n} w_i \cdot x_i \\ &\subseteq \Sigma_n(W, S) \\ &= \Sigma_{|W|}(W, S) \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

Si se cumple el Teorema 4.2.2 (ii), se cumple el teorema 4.2.1 (ii), según parte (d), existe una $(n-t)$-partición $A = A_1, \ldots, A_{n-t}$ de S'' y $g \in G$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{d^*(H)} w_i \cdot A_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \right) g + H.$$

Por parte (a), $A_i \cap g + H \neq \emptyset$ para todo i implica que existe $h \in H$ tal que $(\sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{n-t} w_i)g + h \in \sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{n-t} w_i A_i$, luego:

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{n-t} w_i)g + H &= (\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i)g + H + (\sum_{i=\mathsf{d}^*(H)+1}^{n-t} w_i)g + h \\ &\subseteq \sum_{i=1}^{n-t} w_i \cdot A_i \end{aligned}$$

Como $supp(SS''^{-1}) \subseteq g + H$ y $\sigma(W) = 0$ entonces

$$H = (\sum_{i=1}^{n} w_i)g + H \subseteq \sum_{n}(W, S) = \sum_{|W|}(W, S)$$

como queríamos demostrar. ■

4.4. Sobre la Conjetura Ordaz-Quiroz

Recordemos la Conjetura Ordaz-Quiroz

Conjetura 2.2.1 (Conjetura Ordaz-Quiroz): *Sea G un grupo abeliano finito, y sea W una secuencia de enteros primos relativos con $|G|$ con , $|W| = |G|$, y $\sigma(W) \equiv 0 \pmod{|G|}$. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$, entonces se satisface una de las siguientes condiciones*

(i) $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.

(ii) Existe $g \in G$ y $H > G$ tal que todos, excepto a lo más $|G/H| - 2$ términos de S, provienen de $g + H$.

Si G es cíclico, entonces $\mathsf{D}(G) = |G|$, luego el Teorema 2.2.2 muestra la validez de la Conjetura 2.2.1 en este caso. Otros ejemplos donde se cumple la conjetura son los siguientes

Ejemplo 4.4.1 *$G = \mathbb{Z}_2^s$, $s \geq 1$.*
Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$, y sea $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_{|G|} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, satisfaciendo las hipótesis de la Conjetura Ordaz-Quiroz.
Como los elementos en $\mathbb{Z}_2^s$ tienen orden 2, podemos suponer $w_i = 1$ para todo $i \in [1, |G|]$. Luego por el Teorema de Gao se tiene lo deseado.

Ejemplo 4.4.2 *$G = Z_3^s$,$s \geq 1$, $|G| = 3^s$.*
Sean, $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$, y $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_{|G|} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, satisfaciendo las hipótesis de la Conjetura 2 y supongamos que no se cumple (ii).
Como los elementos en $\mathbb{Z}_3^s$ tienen orden 3, entonces podemos suponer $w_i \in \{1, 2\}$ para todo $i \in [1, |G|]$.
Si $w_i = 1$ para todo $i \in [1, |G|]$, por el Teorema de Gao tenemos el resultado.
Sea $k = \#\{i \in [1, |G|] : w_i = 2\}$. Tenemos que $\sigma(W) = 2k + (3^s - k) \equiv 0 \pmod{3^s}$, es decir, $k \equiv 0 \pmod{3^s}$. En consecuencia $w_i = 2$ para $1 \leq i \leq |G|$.
Entonces dado $g \in \mathbb{Z}_3^s$, por el Teorema de Gao, tenemos que $2g = a_1 + a_2 + ... + a_{|G|}$, donde $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{|G|} | S$, luego $g = 2(2g) = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_{|G|} \in \Sigma_{|W|}(W, S)$.

El siguiente resultado es una consecuencia de Teorema 4.2.1, el cual esta relacionado con la Conjetura Ordaz-Quiroz. Observemos que el caso $h = |G|$ y

$|S| = 2|G| - 1$ en el Corolario 4.4.1 es el Teorema 2.2.2

Corolario 4.4.1 *Sea G un grupo abeliano finito, sea $S \in \mathcal{F}(G)$ y $h \in \mathbb{Z}$ tales que* $\max\{\mathsf{h}(S), \mathsf{d}^*(G)\} \leq h \leq |S| - |G| + 1$, *y sea W una secuencia de enteros primos relativos con* $\exp(G)$ *tal que $|W| \geq h$. Entonces se cumple una de las siguientes alternativas*

(i) $\Sigma_h(W, S) = G$. *En particular,* $\Sigma(W, S) = G$.

(ii) *Existe $g \in G$ y HG tal que todos, excepto a lo más $|G/H| - 2$ términos de S, provienen de $g + H$.*

Demostración. Supongamos que no se cumple (ii). Aplicamos el Teorema 4.2.1 con $n = h$, $S' = S$. Si se cumple la parte (ii) del Teorema 4.2.1, entonces $(ii)c)$ contradice nuestra suposición. Luego debe cumplirse (i) del Teorema 4.2.1, es decir, existe una h- partición de S, digamos $A_1 \cdot \ldots \cdot A_h$, tal que

$$|\sum_{i=1}^{h} A_i| \geq \min\{|G|, |S| - n + 1\} = |G|$$

Entonces $G = \sum_{i=1}^{h} A_i \subseteq \Sigma_h(S)$. ■

Observemos que la prueba del Corolario 4.4.1 es identica al caso $\mathsf{h}(S) \leq \mathsf{d}^*(G) + x$ en Corolario 4.3.1 usando $n = h$, si embargo la identidad $\Sigma_n(W, S) = \Sigma_{|S|-n}(W, S)$ no es necesariamente válida para W, S y n arbitrarios, este hecho impide que podamos probar la Conjetura 2 en forma análoga al Corolario 4.4.1.

Mostraremos que la Conjetura 2 se cumple en el caso especial $\mathsf{h}(S) \geq \mathsf{D}(G) - 1$. Para esto necesitamos la siguiente modificación de un resultado de [7].

Lema 4.4.1 *Sea R un anillo de orden m, sea G el grupo aditivo de R, y sea W, $S \in \mathcal{F}(R)$ secuencias no triviales con $|S| \geq |W| + \mathsf{D}(G) - 1$. Si $\mathsf{v}_0(S) = \mathsf{h}(S) \geq \mathsf{D}(G) - 1$, entonces*

$$\Sigma(W, S) = \Sigma_{|W|}(W, S).$$

Demostración. Sea $S'|S$ la secuencia consistente de todos los términos no nulos. Sea $g \in \Sigma(W, S)$. Como $\Sigma_{|W|}(W, S) \subseteq \Sigma(W, S)$, necesitamos mostrar que $g \in \Sigma_{|W|}(W, S)$.

Si $g = 0$ y $\mathsf{h}(S) \geq |W|$, entonces $0 \in \Sigma_{|W|}(W, 0^{\mathsf{h}(S)}) \subseteq \Sigma_{|W|}(W, S)$ (en vista de $\mathsf{v}_0(S) = \mathsf{h}(S)$), como deseamos. Si $g = 0$ y $\mathsf{h}(S) \leq |W| - 1$, entonces $\mathsf{h}(S) \geq \mathsf{D}(G) - 1$ implica $|W| \geq \mathsf{D}(G)$, además $|S'| \geq |W| + \mathsf{D}(G) - 1 - \mathsf{h}(S) \geq \mathsf{D}(G)$. Así

$$g \in \Sigma(W, S') \tag{4.5}$$

se sigue de la definición de $\mathsf{D}(G)$ aplicada a la secuencia $(w_1 s_1)(w_2 s_2) \cdots (w_{\mathsf{D}(G)} s_{\mathsf{D}(G)})$, donde $w_1 \cdots w_{\mathsf{D}(G)}|W$ y $s_1 \cdots s_{\mathsf{D}(G)}|S'$. Completando con ceros la subsecuencia de S' que define a $g \in \Sigma(W, S')$ y repitiendo el proceso anterior en forma recursiva, si es necesario, tenemos que $g \in \Sigma_{|W|}(W, S)$

Si $g \neq 0$, entonces (4.5) se cumple trivialmente. Así podemos suponer (4.5) reordenando, y seleccionamos $W_1|W$ y $S_1|S'$ tales que $W_1 = w_1 \cdots w_t$, $S_1 = s_1 \cdots s_t$ y $g = \sum_{i=1}^{t} w_i s_i$, con t maximal.

Notemos que $t \leq |W|$. Si $t \geq |W| - \mathsf{h}(S)$, entonces $g \in \Sigma_{|W|}(W, S_1 0^{\mathsf{h}(S)}) \subseteq \Sigma_{|W|}(W, S)$, como deseamos. Supongamos que

$$t \leq |W| - \mathsf{h}(S) - 1. \tag{4.6}$$

En consecuencia

$$|S_1^{-1}S'| \geq |W| + \mathsf{D}(G) - 1 - \mathsf{h}(S) - t \geq \mathsf{D}(G). \tag{4.7}$$

Observemos, en vista de (4.6) y las hipótesis, que

$$|W_1^{-1}W| = |W| - t \geq \mathsf{h}(S) + 1 \geq \mathsf{D}(G). \tag{4.8}$$

Sea $S' = s_1 \cdots s_t s_{t+1} \cdots s_{|S|-\mathsf{h}(S)}$ y $W = w_1 \cdots w_t w_{t+1} \cdots w_n$. En vista de (4.7) y (4.8), sea

$$T := (w_{t+1}s_{t+1})(w_{t+2}s_{t+2}) \cdots (w_{t+\mathsf{D}(G)}s_{t+\mathsf{D}(G)}) \in \mathcal{F}(R).$$

Observemos que $|T| = \mathsf{D}(G)$, luego la definición de $\mathsf{D}(G)$ implica que T tiene una subsecuencia no nula de suma cero, digamos (re-indizando si es necesario) $(w_{t+1}s_{t+1})(w_{t+2}s_{t+2}) \cdots (w_{t+r}s_{t+r})$, donde $r \geq 1$. Pero las secuencias $w_1 \cdots w_{t+r}$ y $s_1 \cdots s_{t+r}$ contradicen la maximalidad de t, completando la prueba. ■

Notemos que el Lema 4.4.1 es aplicable para $W \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, considerando la secuencia $(w_1 \cdot 1)(w_2 \cdot 1) \cdots (w_n \cdot 1) \in \mathcal{F}(R)$, donde $w_1 \cdots w_n = W$ y 1 es el elemento identidad multiplicativo de R. Notemos también que si no se cumple *(ii)* en el Corolario 4.4.2, el caso H trivial implica $\mathsf{h}(S) \leq |G|$ para $|S| \leq 2|G| - 1$, y que $2|G| - 1 \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$, en vista de la cota trivial $\mathsf{D}(G) \leq |G|$. Así la restricción $\mathsf{h}(S) \leq |G|$ en el Corolario 4.4.2 se puede quitar cuando $|S| \leq 2|G| - 1$, en particular, cuando $|S| = |G| + \mathsf{D}(G) - 1$.

Corolario 4.4.2 *Sea G un grupo abeliano finito, y sea W un secuencia, de longitud $|G|$, de enteros primos relativos pcon $|G|$. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$ y $|G| \geq \mathsf{h}(S) \geq \mathsf{D}(G) - 1$, entonces se cumple una de las siguientes alternativas* *(i)* $\Sigma_{|G|}(W, S) = G$.

(ii) Existe $g \in G$ *y* $H < G$ *tal que todos, excepto a lo más* $|G/H| - 2$ *términos de* S*, pertenecen a* $g + H$*.*

Demostración. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\mathsf{v}_0(S) = \mathsf{h}(S)$. Así nuestra hipótesis implica que podemos aplicar el Lema 4.4.1, en consecuencia

$$\Sigma(W, S) = \Sigma_{|G|}(W, S). \tag{4.9}$$

Como podemos suponer que (ii) no se cumple con H trivial, se sigue que $\mathsf{h}(S) \leq |S| - |G| + 1$. Consecuentemente, como $|W| = |G| \geq \mathsf{h}(S)$, entonces el resultado se sigue de (4.9) y del Corolario 4.4.1 aplicado con $h = \mathsf{h}(S)$ (en vista de $\mathsf{D}(G) \geq \mathsf{d}^*(G) + 1$). ■

Conclusiones

Sea S una secuencia en un grupo abeliano G y $W = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$ una secuencia en $\mathbb{Z}$, con $\sigma(W) = 0 \pmod{\exp(G)}$ y $|S| \geq |G| + |W| - 1$.

El Teorema de EGZP (2.2.1) dice que si S y W son secuencias como las descritas anteriormente, y además la secuencia S tiene una n-partición $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ tal que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$ contiene un subgrupo no trivial.

Observemos que si todos los términos de W son coprimos con $\exp(G)$ entonces, para cualquier n-partición $A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S, se tiene que $|w_i \cdot A_i| = |A_i|$, luego el Teorema EGZP implica que $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot A_i$ contiene un subgrupo no trivial.

Algunos resultados algebraicos permitieron obtener propiedades de la constante $\mathsf{d}^*(G)$, análogas a las propiedades de la constante de Davenport $\mathsf{D}(G)$, siendo G un grupo abeliano finito, entre las propiedades que se obtuvieron tenemos $\mathsf{ZS}(G) > |G| + \mathsf{d}^*(G) - 1$ y $\mathsf{d}^*(G) \geq \mathsf{d}^*(G/H) + \mathsf{d}^*(H)$.

Se mostró que si $w_i \cdot \ldots \cdot w_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, y $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq n \geq \mathsf{d}^*(G)$, y S tiene al menos dos términos de multiplicidad $\mathsf{d}^*(G)$, entonces existe $H < G$ y una n-partición de de $S'|S$ tal que $\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i \cdot A_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) g + H$.

Se dieron dos nuevos Teoremas de Partición, los cuales describen la estructura de una secuencia S tal que, toda n-partición $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ de S, satisface que $|\sum_{i=1}^{n} w_i A_i| < \text{mín}\{|G|, |S| - n + 1\}$, donde $w_1 \cdot \ldots \cdot w_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ y $n \geq \mathsf{d}^*(G)$, particularmente se mostró que debe existir una $n-$partición de $S'|SS$ y $H < G$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(G)} A_i = \left(\sum_{i=1}^{\mathsf{d}^*(H)} w_i\right) g + H$. para algún $g \in G$. Estos resultados se han obtenido por medio de un proceso inductivo, sobre $|G|$, cuya base fué establecida por el Teorema 2.3.2 y cuyo paso inductivo pudo lograrse usando el Teorema de Mann, las propiedades de $\mathsf{d}^*(G)$ y el resultado descrito en el párrafo anterior. Los nuevos Teoremas de Partición generalizan, cuando $|W| \geq \mathsf{d}^*(G)$, el ya conocido Teorema de Partición de Grynkiewicz en ([14]).

En general, los problemas de representación de grupos requieren que las secuencias en G tengan longitud al menos $\mathsf{ZS}(G)$, los nuevos teoremas de partición, permitieron mejorar resultados sobre secuencias de suma cero, mostrando que es suficiente que la longitud de la secuencia sea al menos $|G| + \mathsf{d}^*(G) - 1$.

Este trabajo de investigación constituye un buen aporte para el estudio de los problemas de suma cero y representación de grupos por sumas de subsecuencias, de hecho, se demostró la potencialidad de los nuevos Teoremas de Partición al verificar, como consecuencia de ellos, una mejora de un teorema de Gao, (colocando en la hipótesis $|S| \geq |G| + \mathsf{d}^*(G)$ en lugar de $|S| \geq |G| + \mathsf{D}(G) - 1$), un caso especial de la Conjetura Ordaz-Quiroz y una variante de la Conjetura de Hamidoune, la cual es válida cuando al menos $\mathsf{d}^*(G)$ de los w_i son primos relativos con $|G|$. La Conjetura Ordaz-Quiroz aún permanece abierta, sólo se logró establecerla para un caso especial y se mostraron algunos ejemplos donde se cumple.

Es posible que los métodos usados para estas tres aplicaciones puedan ser empleados para resolver o extender otros problemas de suma cero, de hecho, recientemente, en [17], hemos usado los nuevos Teoremas de Partición de este trabajo como herramienta para demostrar una conjetura de Thangadurai que aparece en [17].

Bibliografía

[1] N. Alon, A. Bialostocki and Y. Caro, The extremal cases in the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem, unpublished.

[2] A. Bialostocki, P. Dierker, D. J. Grynkiewicz, and M. Lotspeich, On Some Developments of the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem II, *Acta Arith.*, 110 (2003), no. 2, 173–184.

[3] Y. Caro, Zero-sum problems—a survey, *Discrete Math.*, 152 (1996), no. 1–3, 93–113.

[4] A. L. Cauchy, Recherches sur les nombres, *J. École polytech.*, 9 (1813), 99–116.

[5] H. Davenport, On the addition of residue classes, *J. London Math. Society*, 10 (1935), 30–32.

[6] P. Erdős, A. Ginzburg and A. Ziv, Theorem in Additive Number Theory, *Bull. Res. Council Israel*, 10F (1961), 41–43.

[7] W. Gao, Addition theorems for finite abelian groups, *J. Number Theory*, 53 (1995), 241–246.

[8] W. Gao and A. Geroldinger, Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey, *Expositiones Mathematicae*, 24 (2006), no. 4, 337–369.

[9] W. Gao, and W. Jin, Weighted sums in finite cyclic groups, *Discrete Math.*, 283 (2004), no. 1-3, 243–247.

[10] A. Geroldinger and F. Halter-Koch, *Non-unique factorizations: Algebraic, combinatorial and analytic theory.* Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 278. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[11] A. Geroldinger and R. Schneider, On Davenport's Constant, *J. Combin. Theory, Ser. A*, 61 (1992), no. 1, 147–152.

[12] S. Griffiths, The Erdős-Ginzberg-Ziv theorem with units, to appear in *Discrete math.*

[13] D. J. Grynkiewicz, A Weighted Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem, *Combinatorica*, 26 (2006), no. 4, 445–453.

[14] D. J. Grynkiewicz, On a Partition Analog of the Cauchy-Davenport Theorem, *Acta Math. Hungar.*, 107 (2005), no. 1–2, 161–174.

[15] D. J. Grynkiewicz, *Sumsets, Zero-sums and Extremal Combinatorics*, Ph.D. Dissertation, Caltech (2005).

[16] D. J. Grynkiewicz, L. E. Marchan and O. Ordaz, Representation of finite abelian group elements by subsequences sums, *Journal de Téorie des Nombres de Bordeaux*, 21 (2009), no. 3, 559–587.

[17] D. J. Grynkiewicz, L. E. Marchan and O. Ordaz, A Weighted Generalization of Two Theorems of Gao, preprint.

[18] Y. O. Hamidoune, On weighted sequence sums, *Comb. Prob. Comput.*, 4 (1995), 363–367.

[19] Y. O. Hamidoune, On weighted sums in abelian groups, *Discrete Math.*, 162 (1996), 127–132.

[20] T. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[21] J. H. B. Kemperman, On Small Sumsets in an Abelian Group, *Acta Math.*, 103 (1960), 63–88.

[22] M. Kneser, Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen, *Math. Z.*, 58 (1953), 459–484.

[23] M. Kneser, Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen, *Math. Z.*, 64 (1955), 429–434.

[24] S. Lang, *Algebra*, third edition, Yale University, New Haven, CT, 1993.

[25] H. B. Mann. Addition theorem: The addition theorems of group theory and number theory., *Interscience publisher*, (1965).

[26] M. Nathanson, *Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Graduate Texts in Mathematics 165, Springer-Verlag, New York, 1996.

[27] O. Ordaz and D. Quiroz, Representation of group elements as subsequences sums, *Discrete Mathematics*, 308 (2008), no. 15, 3315–3321.

[28] K. Rogers. A combinatorial problems in abelians groups. *Proc. Cam. Phil. Soc* 59 (1963)559–562.

[29] J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 4^{th} ed. 1999.

[30] Sukumar das Adhikari and Purusottam Rath, Davenport constant with weights and some related questions, *Integers*, 6 (2006), A30, 6 pp (electronic).

[31] Sukumar das Adhikari and Yong-Gao Chen, Davenport constant with weights and some related questions II, *J. Combin. Theory Ser. A*, 115 (2008), no. 1, 178–184.

[32] T. Tao and V. Vu, Additive Combinatorics, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 105, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[33] A.G. Vosper, The critical pairs of subsets of a group of prime order, *J. London Math. Soc*, 31 (1956) 200-205