UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Ergodicidad de Atractores Parcialmente Hiperbólicos

Autor: Lcdo. Alexander Mendoza
Tutor: Dr. Wilmer Colmenárez Rodríguez (UCLA)

TRABAJO DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
como requisito final para optar al grado de
Magister Scientiarum en Ciencias, Mención Matemática

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Junio, 2012

CONTENIDO

Capítulo 1

Introducción

Los flujos y transformaciones que surgen de las ecuaciones del movimiento en mecánica clásica preservan el volumen del espacio de fases, razón por la cual son llamados conservativos, y el estudio de esta propiedad motivó el desarrollo de ideas que originó la Teoría Ergódica de sistemas determinísticos. En los inicios de la Física Estadística, en la segunda mitad del siglo XIX, Ludwig Boltzmann introdujo el término *ergódico* en el contexto del estudio de gases como sistemas de partículas, y desde entonces, aún cuando en su formulación original la Hipótesis Ergódica fue extremamente inverosímil, la Teoría Ergódica creció hasta convertirse en una útil herramienta en muchas ramas de la Física. Con la natural evolución de las ideas y las reformulaciones subsequentes de los conceptos, la idea original de la hipótesis ergódica vino a traducirse en el enunciado siguiente: *"los promedios temporales de trayectorias típicas coinciden con los promedios espaciales"*, esto es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) = \int_M \phi d\mu \qquad \mu - \text{ctp } x \in M.$$

Un sistema, representado aquí por la transformación f, es μ-*ergódico* si satisface la condición anterior para todo observable continuo ϕ o, equivalentemente, si y sólo los conjuntos con μ-medida nula o máxima (siendo μ una medida de probabilidad) son invariantes por la acción de la dinámica. Alrededor de 1931, después de la aparición de los primeros teoremas ergódicos, demostrados por J. von Newmann y G. Birkhoff, se conjeturó que la mayoría de los sistemas conservativos eran ergódicos. Particularmente Birkhoff conjeturó que los homeomorfismos que preservan volumen de variedades compactas son ergódicos genéricamente.

No obstante, con el descubrimiento del hoy conocido fenómeno de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) en 1954, se estableció la existencia de conjuntos abiertos formados por sistemas conservativos no ergódicos. En términos algo más claros, la teoría KAM presenta sistemas completamente integrables con una dinámica que podríamos describir en una palabra como "*elíptica*", para los cuales una gran cantidad (volumen positivo) de toros invariantes sobreviven a perturbaciones, y este hecho es contrario a la ergodicidad. En la terminología moderna, estos sistemas elípticos son ejemplos de sistemas *no estables ergódicamente*.

En franco contraste con el comportamiento elíptico, la ergodicidad prevalece en el otro extremo del espectro, es decir, entre los sistemas "fuertemente hiperbólicos". Específicamente, después de resultados parciales obtenidos por Hopf y Hedlund, Anosov (en [A]) demostró que el flujo geodésico de variedades compactas con curvatura negativa es ergódico. De hecho, la propiedad es compartida por cualquier sistema conservativo con suficientes propiedades de regularidad y de hiperbolicidad uniforme y completa, trátese de flujos o de difeomorfismos.

A finales de la década de los sesenta del siglo XX ocurrió una confluencia de la investigación de propiedades ergódicas con el programa de Smale [Sm2] para el estudio de la estabilidad estructural, o más ampliamente, la comprensión de la estructura de órbitas de difeomorfismos genéricos. El propósito de clasificar, genéricamente tal vez, los sistemas dinámicos no había sido realizado, la (omega) estabilidad estructural no es densa [Sm1], ni genérica [AS]. Más tarde Jacob Palis intenta replantear el programa de Smale en términos de dinámica medible y perturbaciones aleatorias, en su conjetura de 2000 [Pa1] y [Pa2], que se constituye en una de las diversas direcciones importantes de desarrollo de los sistemas dinámicos en la actualidad. Mientras que la hiperbolicidad clásica apareció en la década de los 60 en los trabajos de Anosov y Smale [A] [Sm2], la hiperbolicidad parcial fue introducida a comienzos de los 70 por Brin y Pesin [BrPe] motivada por el estudio de cierta clase de flujos denominados "frame flows", y también surgió naturalmente del trabajo de Hirsch, Pugh y Shub [HPS] sobre hiperbolicidad normal.

La estabilidad estructural implica que todas las propiedades topológicas asociadas a la estructura de órbitas son robustas. Una en particular, la transitividad topológica, tiene una versión análoga en el contexto medible, que es la ergodicidad. Por un lado, la transitivitad topológica robusta de sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos motivó la investigación y búsqueda de clases más amplias de sistemas dinámicos que fuesen robustamente transitivos (vea por ejemplo [BDV] y las referencias allí contenidas). Por otro lado, este interés por la transitividad robusta, aunado al hecho que los sistemas dinámicos hiperbólicos que preservan volumen son ergódicos (con respecto al volumen), pudieron haber llevado a Hirsch, Pugh y Shub a proponer la cuestión, al final de [HPS] acerca de si las perturbaciones C^1 de automorfismos torales ergódicos son también ergódicas. Desde 1933, los difeomorfismos de Anosov eran los únicos ejemplos conocidos de difeomorfismos establemente ergódicos, hasta que Grayson, Pugh y Shub [GPS] demostraron que la transformación tiempo uno de flujos geodésicos sobre superficies de curvatura negativa es establemente ergódico. Este ejemplo es un caso particular de difeomorfismo parcialmente hiperbólico y motivó la formulación de la siguiente conjetura ([PuSh2], [PuSh3]): la *ergodicidad estable* es abierta y densa entre los difeomorfismos C^2 parcialmente hiperbólicos que preservan volumen de variedades compactas. Más o menos al mismo tiempo surgió un renovado interés por las propiedades geométricas y ergódicas de los sitemas parcialmente hiperbólicos, en el más amplio contexto de sistemas dinámicos no conservativos. Uno de los objetivos principales es establecer la existencia y finitud de medidas SRB (Sinai, Ruelle, Bowen) y caracterizar sus cuenca de atracción. Así, el tema general de la dinámica parcialmente hiperbólica ha llegado a ser, en las últimas dos décadas, un campo de investigación muy activo que ocupa el interés de un importante número de matemáticos. Vea la referencia [BDV] para una detallada descripción de los muchos progresos alcanzados en los últimos años.

La hiperbolicidad parcial es apenas una de las posibles extensiones de la noción de hiperbolicidad clásica (hoy identificada como *uniforme y completa*). La hiperbolicidad clásica puede describirse como la propiedad en la que el espectro de Mather del sistema se descompone en dos partes, una en el interior y otra en el exterior del círculo unitario del plano complejo. La hiperbolicidad parcial por su parte, en su versión restringida, requiere que el espectro de Mather esté repartido en tres partes anulares en el plano, de las cuales la más interna se encuentra en el interior del círculo unitario, mientras que las más exterior es externa al círculo. Las ideas y métodos en el estudio de sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos extienden los correspondientes a la teoría de sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos, la cual es presentada en diversas obras tales como [HP], [B], [Sh], [HPS], [KH], entre otras. El estudio de la hiperbolicidad parcial se ha venido desarrollando con dos objetos en mente: la ergodicidad estable y la transitividad robusta. En el presente trabajo estamos interesados mayormente en la ergodicidad estable. El libro [BDV] de C. Bonatti, L. Diaz y M. Viana contiene una descripción del estado del arte en materia de transitividad robusta. Parte de las investigaciones más recientes en materia de ergodicidad estable y atractores parcialmente hiperbólicos giran en torno a un programa propuesto por Pugh y Shub que parte de una idea expresada por ellos en términos simples: un poco de hiperbolicidad puede bastar para asegurar ergodicidad. En términos mas rigurosos, Pugh y Shub plantean conjeturas acerca de propiedades geométricas como *accesisibilidad* y *ramificaciones centrales* que fundamentan las conjeturas acerca de la abundancia de la ergodicidad estable, como fue enunciada arriba, para sistemas conservativos globalmente parcialmente hiperbólicos. El artículo [W2] contiene una descripción del programa de Pugh y Shub y una relación de los avances respectivos más importantes relacionados con sistemas conservativos parcialmente hiperbólicos.

Parte de los métodos han sido extendidos y conbinados con otras ideas novedosas de reciente aparición para el tratamiento de sistemas disipativos parcialmente hiperbólicos, tal como lo evidencian diversos estudios que abordan la ergodicidad estable para atractores parcialmente hiperbólicos. En todos los casos, es de fundamental importancia controlar la naturaleza de los exponentes de Lyapunov en el subfibrado central, como lo demuestran los trabajos de Bonatti y Viana [BV] y de D. Dolgopyat [D0], que constituyen la base de las ideas iniciales para el tatamiento de la ergodicidad estable de atractores parcialmente hiperbólicos. Entre otros diversos resultados notables, Burns, Dolgopyat, Pesin y Pollicott en [BDPP] han establecido condiciones para la ergodicidad estable de ciertos atractores parcialmente hiperbólicos que preservan una forma generalizada de medida de Gibbs, llamadas *u-medidas*. El presente trabajo recoje y describe detalladamente los aspectos más importantes de ese trabajo y de otros relacionados directamente en torno a la ergodicidad estable. Otros notables resultados sobre ergodicidad y estabilidad han sido obtenidos recientemente por Federico y Jana Rodriguez-Hertz junto con Raúl Ures en [RRU1] y [RRU2] por un lado y por Keith Burns y Amie Wilkinson en [BW].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se establecen de manera precisa algunas definiciones acerca de hiperbolicidad parcial, hiperblicidad no uniforme, exponentes de Lyapunov, variedades invariantes, u-medidas y ergodicidad estable. El Capítulso 3 aborda un conjunto de resultados preliminares, incluyendo algunos de caracter general relacionados con el problema principal de la ergodicidad estable para atractores parcialmente hiperbólicos. Finalmente, en el Capítulo 4 se demuestra el resultado principal del artículo [BDPP].

Capítulo 2

Definiciones y resultados preliminares

Consideremos una variedad diferenciable M, Riemanniana, compacta y sin borde. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y denotemos *dist* a la distancia en M inducida por la métrica Riemanniana. Un subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ es llamado un *atractor* para f si existe un entorno abierto U de Λ tal que $\overline{f(U)} \subset U$ y

$$\Lambda = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(U).$$

Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ invariante por f es llamado *parcialmente hiperbólico* si $f|_\Lambda$ posee la siguiente propiedad: el fibrado tangente $T\Lambda$ sobre Λ admite una descomposición

$$T\Lambda = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

en subfibrados E^s, E^c y E^u invariantes por Df denominados respectivamente *fuertemente estable*, *central* y *fuertemente inestable*, para los cuales existen constantes $0 < \lambda_s < \lambda_c' \leqslant 1 \leqslant \lambda_c'' < \lambda_u$ satisfaciendo las siguientes condiciones, para $x \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}
&\|Df_x(v)\| \leqslant \lambda_s \|v\| && \text{para } v \in E^s(x),\\
&\lambda_c' \|v\| \leqslant \|Df_x(v)\| \leqslant \lambda_c'' \|v\| && \text{para } v \in E^c(x),\\
&\lambda_u \|v\| \leqslant \|Df_x(v)\| && \text{para } v \in E^u(x).
\end{aligned}$$

Si $M = \Lambda$ entonces se dice que f es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, y si Λ es un conjunto parcialmente hiperbólico y atractor para f, entonces diremos que Λ es un *atractor parcialmente hiperbólico*. Los subfibrados E^s y E^u son integrables, esto es, en cada punto $x \in \Lambda$ existen variedades $V^s(x)$ y $V^u(x)$ denominadas *variedades locales fuertemente estables e inestables* respectivamente tales que $T_xV^s(x) = E^s_x$ y $T_xV^u(x) = E^u_x$. Estas variedades están caracterizadas de la siguiente manera: existen una vecindad $U(x)$ del punto x y una constante $C > 0$ tal que:

$$V^u(x) = \{y \in U(x) : dist(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant C\lambda_u^{-n} dist(x, y), \forall n \geqslant 0\},$$

$$V^s(x) = \{y \in U(x) : dist(f^{n}(x), f^{n}(y)) \leqslant C\lambda_s^{n} dist(x, y), \forall n \geqslant 0\}.$$

Se definen para $x \in \Lambda$ la *variedad fuertemente inestable global* y la *variedad fuertemente estable global* respectivamente por:

$$W^u(x) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^n(V^u(f^{-n}(x))),$$

$$W^s(x) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(V^s(f^{n}(x))).$$

Ver [HP] y [HPS].

Una partición $\mathcal{F}$ de Λ es una *foliación* si existen $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y un entero $k > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ se verifica lo siguiente:

(1) Hay una variedad diferenciable $W(x)$ inmersa en M de dimensión k conteniendo a x de manera que $\mathcal{F}(x) = W(x) \cap \Lambda$, donde $\mathcal{F}(x)$ es el elemento de la partición $\mathcal{F}$ que contiene a x. La variedad $W(x)$ se denomina *hoja global* de la foliación en x y a la componente conexa de $W(x) \cap B(x, \delta)$ que contiene a x se le llama *hoja local* de la foliación en x y se denota por $V(x)$. El numero δ es denominado *el tamaño* de $V(x)$.

(2) Existe una aplicación continua $\phi_x : \Lambda \cap B(x, \varepsilon) \to C^1(D, M)$, donde D es la bola unitaria en $\mathbb{R}^k$, tal que para cada $y \in \Lambda \cap B(x, \varepsilon)$ se tiene que $V(y) = \phi_x(y)(D)$.

Ahora revisemos algunas nociones básicas de la teoría de hiperbolicidad no uniforme siguiendo [BaPe], [KH], [Pe]. Denotemos

$$\chi(x,v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(v)\|,$$

el *exponente de Lyapunov* de un vector no nulo $v \in T_xM$ con $x \in \Lambda$, y por $\chi_f^i(x)$ los valores de los exponentes de Lyapunov en x, de los cuales hay solo una cantidad finita. Note que las funciones $\chi_f^i(x)$ son invariantes. De acuerdo con [BaPe] existe un subconjunto $\widehat{\Lambda} \subset \Lambda$ de medida máxima el cual consiste de puntos regulares de Lyapunov (*L-regulares*), lo cual significa, entre otras cosas que

$$\chi(x,v) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(v)\|,$$

para todo vector $v \in T_xM$ no nulo. Una medida invariante μ con soporte contenido en Λ es llamada *hiperbólica* si la propiedad $\chi(x,v) \neq 0$ para $v \in T_xM$ no nulo es cierta para μ-ctp $x \in \Lambda$. Se verifica en tal caso que para $x \in \widehat{\Lambda}$ con exponentes no nulos, el espacio tangente en x admite una descomposición invariante

$$T_xM = E_f^-(x) \oplus E_f^+(x)$$

en subespacios $E_f^-(x)$ y $E_f^+(x)$ estable e inestable respectivamente. Denotemos $\lambda_-(x) = e^{\chi_-(x)}$ y $\lambda_+(x) = e^{\chi_+(x)}$, donde $\chi_-(x)$ y $\chi_+(x)$ son el mayor exponente de Lyapunov negativo y el menor exponente de Lyapunov positivo en x respectivamente. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones medibles de Borel $C(x) > 0$ y $K(x) > 0$ tales que

$$\|Df^n(v)\| \leqslant C(x)\lambda_-(x)^n e^{\varepsilon n}\|v\| \text{ para } v \in E^-(x) \text{ y } n > 0, \tag{2.1}$$

$$\|Df^{-n}(v)\| \leqslant C(x)\lambda_+(x)^n e^{\varepsilon n}\|v\| \text{ para } v \in E^+(x) \text{ y } n > 0, \tag{2.2}$$

$$\angle(E^-(x), E^+(x)) \geqslant K(x), \tag{2.3}$$

$$C(f^m(x)) \leqslant C(x)e^{\varepsilon|m|}, \;\; K(f^m(x)) \geqslant K(x)e^{-\varepsilon|m|} \;\text{ para todo } m \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Para cada $x \in \widehat{\Lambda}$ es posible construir *variedades estables* e *inestables locales* $V^-(x)$ y $V^+(x)$, las cuales están caracterizadas como sigue: existe $\delta(x) > 0$ tal que:

$$V^+(x) = \{y \in B(x,\delta(x)) : dist(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant C(x)\lambda_+(x)^{-n} e^{\varepsilon n} dist(x,y), \forall n > 0\},$$

mientras que,

$$V^-(x) = \{y \in B(x, \delta(x)) : dist(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C(x)\lambda_-(x)^n e^{\varepsilon n} dist(x, y), \forall n > 0\}.$$

Ver Teorema de Pesin en [KH].

El número $\delta(x)$ se denomina *el tamaño* de las variedades $V^{\pm}(x)$. Los tamaños de las variedades locales estables e inestables varían de forma medible con x, esto es, la aplicación $x \longmapsto \delta(x)$ es medible. Cabe destacar que la función δ satisface la siguiente propiedad: $\delta(f^m(x)) \geqslant \delta(x)e^{-\varepsilon|m|}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

De acuerdo con la referencia [BDPP], se tratará el caso en que $\chi^i_f(x, E^c(x)) < 0$ para algún $x \in \Lambda$ (usualmente para casi todo x con respecto a una medida de probabilidad f-invariante sobre Λ). Para tal x se tiene $E^-(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$. En particular, $V^+(x) = V^u(x)$. Observe que $V^+(x) \supset V^u(x)$ y $V^-(x) \supset V^s(x)$.

Ahora veremos una propiedad importante que tiene la foliación de variedades estables V^- y la foliación de variedades fuertemente inestables llamada *continuidad absoluta.*

En general, sea $\mathcal{F}$ una k-foliación en una variedad diferenciable M, Riemanniana y compacta de dimensión n. Consideremos x, y en $\mathcal{F}(x)$ y Σ_1, Σ_2 dos subvariedades $n-k$-dimensionales conteniendo a x y y respectivamente y transversas a $\mathcal{F}(x)$. Si escogemos un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $dist(x, y) < \varepsilon$, entonces existen subvariedades $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma_1$ y $\tilde{\Sigma}_2 \subset \Sigma_2$ que contienen a x y y respectivamente y existe una función biyectiva y continua $\pi : \tilde{\Sigma}_1 \to \tilde{\Sigma}_2$ definida por $\pi(z) = \mathcal{F}(z) \cap \tilde{\Sigma}_2$ que verifica $dist_{\mathcal{F}(z)}(z, \pi(z)) < 2\varepsilon$, para todo $z \in \tilde{\Sigma}_1$ ($dist_{\mathcal{F}(z)}$ es la distancia inducida por $dist$ en $\mathcal{F}(z)$). La función π es llamada la *función de holonomía* (asociada a x, y y a la foliación $\mathcal{F}$). Para más detalles ver [BrPe].

Sea ν una medida definida en la σ-álgebra de Borel de subconjuntos de M. Denotemos por ν_{Σ_1} y ν_{Σ_2} las medidas condicionales inducidas por ν en Σ_1 y Σ_2 respectivamente. Diremos que la foliación $\mathcal{F}$ es *absolutamente continua* respecto a ν si la medida $\pi_*\nu_{\Sigma_1}$ es absolutamente continua respecto a ν_{Σ_2} para todas las funciones de holonomía.

Teorema 2.1 *Sea f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ que posee un atractor parcialmente hiperbólico Λ. Sea μ una medida de probabilidad invariante por f e hiperbólica.*

Entonces la foliación estable V^- es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en M.

Para una demostración de este resultado vea [BaPe].

Un resultado importante en la teoría ergódica diferenciable es el siguiente, el cual establece la descomposición de una medida en una cantidad numerable de componentes ergódicas.

Teorema 2.2 *Sea f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de una variedad diferenciable M Riemanniana y compacta. Sea μ una medida de probabilidad de Borel f-invariante y tal que los exponentes de Lyapunov son no nulos en un conjunto medible $\widehat{\Lambda}$ de μ-medida positiva. Entonces existen conjuntos invariantes Λ_i con $i \geqslant 0$ tales que:*

1. $\bigcup\limits_{i \geqslant 0} \Lambda_i = \widehat{\Lambda}$, *y* $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing$, *si* $i \neq j$.
2. $\mu(\Lambda_0) = 0$, *y* $\mu(\Lambda_i) > 0$ *para cada* $i \geqslant 1$.
3. $f|\Lambda_i$ *es ergódica con respecto a la medida* μ *restricta a* Λ_i *para cada* $i \geqslant 1$.

Los pares $(f|\Lambda_i, \mu_i)$ con $i \geqslant 1$ y donde μ_i es la restricción de la medida μ a Λ_i se denominan componentes ergódicas del sistema $(f|\Lambda, \mu)$. Algunas veces llamaremos componentes ergódicas solo a los conjuntos Λ_i.

Ahora vamos a introducir el concepto de u-medida. De la manera usual, denotemos por $m^u(x)$ el volumen Riemanniano sobre $V^u(x)$ inducido por la métrica Riemanniana sobre $V^u(x)$ como subvariedad diferenciable de M. Dados $x \in \Lambda$ y $r > 0$, denotamos por $B(x, r)$ la bola en M con radio r y centro x, y consideremos la partición ξ^u de $B(x, r) \cap \Lambda$ por variedades fuertemente inestables $V^u(y)$ variando y en $B(x, r) \cap \Lambda$.

Definición 2.1 En el contexto previamente establecido, una medida f-invariante μ con soporte en Λ es una *u-medida* si las medidas condicionales $\mu^u(y)$ inducidas por μ sobre los elementos $\xi^u(y)$ de la partición ξ^u conteniendo a y, son equivalentes a $m^u(y)$ para μ-ctp $y \in B(x, r) \cap \Lambda$.

El problema general de la ergodicidad estable para sistemas disipativos consiste en determinar si la continuación analítica (vea [Sh]) de un atractor parcialmente hiperbólico y ergódico respecto de una medida natural (u-medida, física, SRB, etc.) es también ergódico. Una respuesta parcial a este problema ha sido dada por K. Burns, D. Dolgopyat, Ya. Pesin y M. Pollicott en [BDPP], cuyo torema principal es el siguiente, y cuyo desarrollo y análisis minucioso es el objetivo central de este trabajo.

Teorema 2.3 *Sea f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ exhibiendo un atractor parcialmente hiperbólico Λ_f. Suponga que existe una única u-medida μ para f con respecto a la cual f tiene exponentes centrales negativos en μ casi todas partes. Entonces cualquier difeomorfismo g de clase $C^{1+\alpha}$ suficientemente próximo de f en la topología $C^{1+\alpha}$ de tal forma que g tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_g, también posee exponentes centrales negativos sobre un conjunto que tiene medida positiva con respecto a una u-medida μ_g asociada a g. Esta medida es la única u-medida de g, la restricción de g a Λ_g es ergódica con respecto a μ_g y la cuenca $B(\mu_g)$ de μ_g tiene volumen total en la cuenca de atracción de Λ_g.*

Capítulo 3

Algunos resultados sobre u-medidas y ergodicidad en atractores parcialmente hiperbólicos

Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo, Λ un atractor parcialmente hiperbólico teniendo a U como cuenca topológica de atracción y κ una medida en una vecindad U de Λ de manera que κ es absolutamente continua con respecto al volumen Riemanniano m. Consideremos la sucesión (μ_n) dada por:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_*^k \kappa, \tag{3.1}$$

donde $f_*^k\kappa(B) = \kappa(f^{-k}(B))$ para todo conjunto de Borel B. En [PeSi] se demuestra que cualquier punto límite μ de la sucesión anterior (en la topología débil*) es una medida concentrada en Λ y tiene la siguiente propiedad:

Proposición 3.1 *Para μ-casi todo punto $x \in \Lambda$ la medida condicional $\mu^u(x)$ generada por μ en la variedad (global) fuertemente inestable $W^u(x)$ es equivalente al volumen Riemanniano $m^u(x)$ en $W^u(x)$.*

Esto es, para atractores parcialmente hiperbólicos existen las u-medidas. Otra forma de construir u-medidas es la siguiente: Fijemos un punto $x \in \Lambda$ y consideremos la variedad fuertemente inestable local $V^u(x)$, esto es la componente conexa que contiene a x de la intersección de $W^u(x)$ con una bola centrada en x y de radio suficientemente pequeño. Consideremos la sucesión de medidas $(\nu_n)_{n\geqslant 0}$ definida por:

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_*^k m^u(x). \tag{3.2}$$

En [BDV] se demuestra que la clase de todas las u-medidas es la clase de todos los puntos límites de sucesiones de medidas dada por (3.2).

Proposición 3.2 *Si μ es una medida invariante para f y la cuenca ergódica de μ tiene volumen positivo, entonces μ es una u-medida.*

La demostración de esta proposición se encuentra en [BDV]. La siguiente proposición es un recíproco parcial de la proposición anterior.

Proposición 3.3 *Si existe una única u-medida para f en Λ, entonces su cuenca ergódica tiene volumen total en la cuenca topológica de atracción de Λ.*

Este resultado fue probado en [Do] cuando $\Lambda = M$.

Proposición 3.4 *Las componentes ergódicas de una u-medida son u-medidas.*

Para una demostración ver [BDV].

Sea $r > 0$, denotemos por $\mathbb{L}(f, r)$ el conjunto de puntos $x \in \Lambda$ para los cuales el tamaño de la variedad estable local $V^-(x, f)$ está acotada inferiormente por r.

Proposición 3.5 *Sea f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ que tiene un atractor parcialmente hiperbólico. Entonces, para cada $a > 0$ existen números $r = r(a, f) > 0$ y $p = p(a, f) > 0$ los cuales dependen continuamente de f en la topología $C^{1+\alpha}$, tales que las siguientes propiedades se verifican:*

(1) Sea μ una u-medida para f con respecto a la cual f tiene exponentes centrales negativos en un subconjunto invariante A con medida positiva. Si

$$|\chi(x, v)| \geqslant a \tag{3.3}$$

para μ-casi todo punto $x \in A$ y todo $v \in T_xM$ no nulo, entonces para μ-casi todo $x \in A$ existe $n \geqslant 0$ tal que $f^{-n}(x) \in \mathbb{L}(f, r)$.

(2) *Sea μ una medida ergódica tal que (3.3) se cumple para μ-casi todo $x \in A$ y todo $v \in T_xM$ no nulo. Entonces $\mu(\mathbb{L}(f, r)) \geqslant p$.*

Para una demostración ver [BDP].

Proposición 3.6 *El soporte de cualquier u-medida para f en Λ está saturado por variedades fuertemente inestables, es decir, es unión de variedades fuertemente inestables.*

La demostración de este resultado se encuentra en [BV].

Ahora se presentaran algunos resultados con demostraciones, que se usarán para la prueba del Teorema principal (Teorema 2.3).

Teorema 3.1 *Sea (f_n) una sucesión de difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$ en M que converge a un difeomorfismo f en la topología $C^{1+\alpha}$.*

(1) *Si f tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ, entonces para n suficientemente grande f_n también tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_n.*

(2) *Si μ_n es una u-medida para f_n y la sucesión (μ_n) converge en la topología débil * a una medida μ, entonces μ es una u-medida para f.*

Demostración. La prueba de la primera parte se encuentra en [HPS], aquí se presentará la prueba de la segunda parte. Por la primera parte, f_n tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_n para n suficientemente grande, de modo que podemos considerar, para tales n, la distribución inestable E_n^u asociada a f_n. Sean $x \in \Lambda$ y $r > 0$ suficientemente pequeño de manera que $\mu(\partial B(x, r)) = 0$. Veamos que $\mu|B(x, r)$ genera medidas condicionales en las hojas inestables $V^u(y, f)$ con $y \in B(x, r) \cap \Lambda$ que son absolutamente continuas respecto al volumen en $V^u(y, f)$.

Consideremos una subvariedad T tal que $T \subset B(x, r)$ y T es transversa a $V^u(x, f)$ en x y a $V^u(y, f)$ para $y \in B(x, r) \cap \Lambda$. Por continuidad de las variedades fuertemente inestables con respecto al difeomorfismo tenemos para n suficientemente grande que T es transversa a las hojas $V^u(x, f_n)$. De acuerdo con el Teorema 3 en [PeSi] para cada n la u-medida μ_n cumple con:

$$d\mu_n(y)|B(x,r) = \frac{1}{c_n(y)} d\mu_n^u(y) d\lambda_n(y), \quad y \in T.$$

Donde λ_n es la medida de Borel en T inducida por el volumen Riemanniano m, $\mu_n^u(y)$ es la medida μ_n condicionada a $V^u(y, f_n)$ y con densidad ρ_n dada por

$$\rho_n(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E_n^u)(f_n^{-i}(y))}{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E_n^u)(f_n^{-i}(z))}, \quad z \in V^u(y, f_n), \tag{3.4}$$

y $c_n(y) = \int_{V^u(y,f_n)} \rho_n(z) dm_n^u(z)$.

Afirmamos que $\rho_n \to \rho$ uniformemente, donde ρ viene dado por:

$$\rho(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E^u)(f^{-i}(y))}{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E^u)(f^{-i}(z))}. \tag{3.5}$$

En efecto, sean n suficientemente grande de tal forma que cada f_n tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_n y $k \geqslant 1$. Denotemos por $\rho_{n,k}$ y ρ_k las funciones dadas por las siguientes expresiones:

$$\rho_{n,k}(z) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E_n^u)(f_n^{-i}(y))}{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E_n^u)(f_n^{-i}(z))}$$

$$\rho_k(z) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E^u)(f^{-i}(y))}{\operatorname{Jac}(Df^{-1}|E^u)(f^{-i}(z))}.$$

Como $\operatorname{Jac}(Df_n^{-1}|E_n^u)$ es α-Hölder continuo para cada n, entonces por la Proposición 2 en [PeSi] se tiene que la sucesión $(\rho_{n,k})$ converge uniformemente en k a ρ_n para cada n. Mediante el mismo argumento tenemos que $\rho_k \to \rho$ uniformemente.

Por otro lado, dado que (f_n) converge a f en la topología $C^{1+\alpha}$ y la distancia entre los puntos $f_n^{-i}(y)$ y $f_n^{-i}(z)$ se contrae exponencialmente debido a que $z \in V^u(y, f_n)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que si $n \geqslant N$, se verifica $|\rho_{n,k}(z) -$

$\rho_k(z)| < \varepsilon$, para todo $k \geqslant 1$ y todo $z \in V^u(y, f_n)$. Al tomar límite cuando $k \to \infty$ obtenemos que $\rho_n(z) \to \rho(z)$ cuando $n \to \infty$ y la convergencia es uniforme en z.

Retomando de nuevo la demostración de la parte 2 del Teorema, consideramos si es necesario una subsucesión de (λ_n) la cual seguiremos denotando por (λ_n) tal que $\lambda_n \to \lambda$ para alguna medida λ en T.

Como $\mu(\partial B(x, r)) = 0$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ de manera que $\mu_n(\partial_\delta B(x, r)) < \varepsilon$ para todo n, donde $\partial_\delta B(x, r)$ denota la δ-vecindad en M de $\partial B(x, r)$. Como consecuencia tenemos que la sucesión $\displaystyle\frac{1}{c_n(y)} \int_{V^u(y,f_n)} \varphi(z)\rho_n(z) dm_n^u(z)$ es uniformemente integrable, y dado que

$$\frac{1}{c_n(y)} \int_{V^u(y,f_n)} \varphi(z)\rho_n(z) dm_n^u(z) \to \frac{1}{c(y)} \int_{V^u(y,f)} \varphi(z)\rho(z) dm^u(z), \quad n \to \infty,$$

donde $c(y) = \displaystyle\int_{V^u(y,f)} \rho(z) dm^u(z)$, entonces

$$\int_{B(x,r)} \frac{1}{c_n} \varphi\rho_n dm_n^u d\lambda_n \to \int_{B(x,r)} \frac{1}{c} \varphi\rho dm^u d\lambda$$

para cada función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Ahora, como $\mu_n \to \mu$ en la topología débil*, se concluye que

$$d\mu|B(x, r) = \frac{1}{c} \rho dm^u d\lambda,$$

y por lo tanto μ es una u-medida. ■

Para una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$, φ^+ y φ^- denotan los promedios de Birkhoff

$$\varphi^-(z) = \lim_{n \to -\infty} \frac{-1}{n} \sum_{k=n+1}^{0} \phi(f^k(z)) \quad \text{y} \quad \varphi^+(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z)).$$

Un punto z es *regular de Birkhoff* si $\varphi^-(z) = \varphi^+(z)$. Consideremos el conjunto $\mathcal{B}$ de puntos regulares de Birkhoff en Λ. Usando el hecho que el espacio de funciones continuas de M en $\mathbb{R}$ es separable y el Teorema ergódico de Birkhoff, se verifica que $\mathcal{B}$ tiene μ-medida total en Λ. Ver [M].

Teorema 3.2 *Si f tiene exponentes centrales negativos en un conjunto invariante A de medida positiva con respecto a una u-medida μ para f, entonces:*

(1) Cada componente ergódica de $f|A$ con μ-medida positiva es es un conjunto abierto (mod 0); en particular A es abierto (mod 0).

(2) Si para μ-casi todo x la trayectoria $\{f^n(x)\}$ es densa en $\mathrm{sop}(\mu)$, entonces f es ergódica con respecto a μ.

Demostración. Sea $\widehat{\Lambda}$ el conjunto de puntos L-regulares en Λ, el cual tiene μ-medida total en Λ. Denotemos por $\widehat{\mathcal{B}}$ a la intersección $\mathcal{B} \cap \widehat{\Lambda}$. Así $\widehat{\mathcal{B}}$ tiene μ-medida total en Λ.

Del hecho que μ es una u-medida y por la continuidad absoluta de la foliación inestable fuerte tenemos que en μ-casi todo $x \in \widehat{\mathcal{B}}$ se cumple que $m^u(x)$-casi todo punto de $V^u(x)$ está en $\widehat{\mathcal{B}}$.

Por otro lado, si z_1 y z_2 son puntos L-regulares que están en $V^u(x)$ para algún $x \in \Lambda$, entonces $\chi_f(z_1) = \chi_f(z_2)$. Esto se verifica debido a que si z_1 y z_2 estan en $V^u(x)$ entonces las órbitas hacia el pasado de z_1 y z_2 tienen el mismo comportamiento asintótico y por la L-regularidad de los puntos se obtiene la igualdad de los exponentes de Lyapunov. Luego, si $x \in A \cap \widehat{\mathcal{B}}$ se tiene que $V^u(x) \cap \widehat{\mathcal{B}} \subset A$.

Ahora consideremos $x \in A \cap \widehat{\mathcal{B}}$ tal que $\mu^u(x)$ y $m^u(x)$ son equivalentes y $m^u(x)$-casi todo punto de $V^u(x)$ está en $\widehat{\mathcal{B}}$. Sean C y K las funciones asociadas a la hiperbolicidad parcial de $\widehat{\Lambda}$ como en (2.3) y (2.4) del capítulo anterior. Para cada $m \geqslant 1$ se define $\widehat{\Lambda}_m$ por

$$\widehat{\Lambda}_m = \Big\{ y \in \widehat{\Lambda} : C(y) \leqslant m, K(y) \geqslant \frac{1}{m} \Big\}.$$

Cada $\widehat{\Lambda}_m$ es medible, $\widehat{\Lambda}_m \subset \widehat{\Lambda}_{m+1}$ para todo $m \geqslant 1$ y $\widehat{\Lambda} = \bigcup_{m \geqslant 1} \widehat{\Lambda}_m$. Para cada $\widehat{\Lambda}_m$ existe $\delta_m > 0$ tal que $\delta(y) \geqslant \delta_m$ para cada $y \in \widehat{\Lambda}_m$ (Vea [BaPe]).

Por otro lado, como $m^u(x)(V^u(x) \cap \widehat{\mathcal{B}}) = m^u(x)(V^u(x) \cap \mathcal{B} \cap (\cup_{m \geqslant 1} \widehat{\Lambda}_m)) = 1$ y la sucesión de conjuntos $\{\widehat{\Lambda}_m\}$ es creciente, entonces existe um $m \geqslant 1$ suficientemente grande de tal forma que el conjunto $V^u(x) \cap \mathcal{B} \cap \widehat{\Lambda}_m$ contiene a x y tiene m^u-medida positiva.

Se define $Y = Y(x)$ por $Y(x) = V^u(x) \cap \mathcal{B} \cap \widehat{\Lambda}_m$. Luego, Y es medible, está contenido en $V^u(x) \cap \widehat{\mathcal{B}}$ y por ende en A, $m^u(x)(Y) > 0$ y existe un $\delta > 0$ tal que para cada $y \in Y$ el tamaño de la variedad $V^-(y)$ está acotado inferiormente por δ.

Como $Y \subset A$, esto es, cada punto en Y tiene exponentes centrales negativos, entonces para todo $y \in Y$ se cumple que $V^-(y) \cap V^u(x)$ es una intersección no vacía y transversa. Luego por la continuidad de la foliación fuertemente inestable y el hecho de que los tamaños de las variedades $V^-(y)$ son mayores o iguales a $\delta > 0$ para cada $y \in Y$, podemos considerar $r > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que si $x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda$, entonces $V^-(y) \cap V^u(x')$ es una intersección transversa y no vacía para cada $y \in Y$, donde $B^-(x,r)$ es la bola de centro x y radio r en $V^-(x)$.
Se definen los conjuntos B y C por:

$$B = \bigcup_{y \in Y} V^-(y) \tag{3.6}$$

$$C = C_x = \bigcup_{x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda} V^u(x'). \tag{3.7}$$

Ahora consideremos $\tilde{C} = \bigcup_{x' \in \Delta} V^u(x')$, donde Δ es el conjunto de puntos $x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda$ tales que $m^u(x')$-casi todo punto de $V^u(x')$ pertenece a $\widehat{\mathcal{B}}$. Es claro que $\tilde{C} \subset C$, y por ser μ una u-medida y de la continuidad absoluta de la foliación inestable fuerte se concluye que $\mu(C \setminus \tilde{C}) = 0$.

Por la continuidad de la foliación fuertemente inestable y la transversalidad de $V^u(x')$ y $V^-(x)$ para cada $x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda$, se puede verificar que el conjunto C es abierto. Por otro lado, como $m^u(Y) > 0$, entonces por continuidad absoluta de las variedades estables locales tenemos que $m^u(B \cap V^u(x')) > 0$ para todo $x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda$. Sea $w \in \tilde{C}$. Así existe $x' \in \Delta$ tal que $w \in V^u(x')$. Luego, $m^u(x')$-casi todo punto de $V^u(x')$ está en $\widehat{\mathcal{B}}$ y como $m^u(B \cap V^u(x')) > 0$ entonces $B \cap V^u(x') \cap \widehat{\mathcal{B}} \neq \varnothing$. Consideremos $z \in B \cap V^u(x') \cap \widehat{\mathcal{B}}$. Por estar z en B existe $y \in Y$ de manera que $z \in V^-(y)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi^-(w) &= \varphi^-(z) \quad (z, w \in V^u(x')) \\
&= \varphi^+(z) \quad (z \in \mathcal{B}) \\
&= \varphi^+(y) \quad (z \in V^-(y)) \\
&= \varphi^-(y) \quad (y \in Y \subset \mathcal{B}) \\
&= \varphi^-(x) \quad (y \in Y \subset V^u(x)).
\end{aligned}$$

Es decir, φ^- es constante en μ-casi todo $w \in C$ y en consecuencia C está contenido (mod 0) en una componente ergódica de f en A que contiene a x. Sea D una componente ergódica de f en A de μ-medida positiva y consideremos $x \in D \cap \widehat{\mathcal{B}}$. De lo anterior se construye C_x como C, el cual es abierto, contiene a x y $C_x \subset D$. De aquí, $\bigcup\limits_{x \in D \cap \widehat{\mathcal{B}}} C_x \subset D$ y $\mu(D \setminus \bigcup\limits_{x \in D \cap \widehat{\mathcal{B}}} C_x) = 0$. Luego, D es abierto (mod 0) porque $\bigcup\limits_{x \in D \cap \widehat{\mathcal{B}}} C_x$ es un conjunto abierto en Λ.

Ahora se demostrará la segunda parte del Teorema 3.2. Veamos primero que $(f|A, \mu)$ es ergódico. Por ser A invariante y de medida positiva, entonces $f|A$ es topologicamente transitivo. Supongamos por el absurdo que existen dos componentes ergódicas A_1 y A_2 de $f|A$ distintas y ambas de medida positiva. Por la primera parte del Teorema hay dos conjuntos abiertos U_1 y U_2 de manera que $U_1 \subset A_1$, $U_2 \subset A_2$, $A_1 = U_1$ (mod 0) y $A_2 = U_2$ (mod 0). Así los conjuntos U_1 y U_2 son abiertos no vacíos en A y por tanto deben contener elementos de una órbita densa en A, pero esto contradice la invarianza de A_1 y A_2. Por otro lado $\Lambda = A$ (mod 0), de lo contrario, si $\mu(\Lambda \setminus A) > 0$, entonces podemos tomar $z \in \Lambda \setminus A$ tal que su órbita es densa en $\operatorname{sop}(\mu)$, y dado que A tiene μ-medida positiva y es abierto módulo cero, se obtiene que la órbita de z visita a A y esto contradice el hecho que A es invariante. Luego, como $(f|A, \mu)$ es ergódico y $\Lambda = A$ (mod 0), entonces f es ergódica respecto a μ. Con esto queda demostrado el Teorema 3.2. ∎

Teorema 3.3 *Sea f un difeomorfismo de clase C^1 de una variedad diferenciable, Riemanniana y compacta M que posee un atractor parcialmente hiperbólico Λ. Entonces las siguientes afirmaciones se verifican:*

(1) Sea $U \subset \Lambda$ un conjunto abierto. Si para cada $x \in \Lambda$ existe $n = n(x, U)$ tal que $f^n(W^u(x)) \cap U \neq \varnothing$, entonces para cualquier u-medida μ en Λ y μ-casi todo $x \in \Lambda$ existe $m = m(x)$ tal que $f^m(x) \in U$.

(2) Si para cada $x \in \Lambda$ la órbita de la variedad global fuertemente inestable $W^u(x)$ es densa en Λ, entonces $\operatorname{sop}(\mu) = \Lambda$ para cada u-medida μ.

Demostración. (1) Sea U como en el enunciado de la primera parte. Supongamos por el absurdo que existe una u-medida ν tal que el conjunto Y de los puntos cuya semiórbita positiva nunca visitan U tiene ν-medida positiva. Nótese que por la continuidad de f el complemento de Y es abierto y en consecuencia Y es compacto.

Afirmación. Existe $\eta > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$ y $\delta > 0$ se verifica

$$\frac{m^u(B^u(x,\delta) \setminus Y)}{m^u(B^u(x,\delta))} > \eta.$$

Donde $B^u(x,\delta)$ es la bola en la variedad $V^u(x)$ centrada en x con radio δ, y m^u es el volumen en $V^u(x)$.

En efecto, sean $x \in \Lambda$ y $\delta > 0$. Denotemos por $A_{x,\delta}$ el conjunto $B^u(x,\delta) \setminus Y$. Como $\lim\limits_{\gamma \to 0^+} m^u(B^u(x,\delta(1+\gamma))) = m^u(B^u(x,\delta))$, entonces podemos considerar $\gamma > 0$ suficientemente pequeño de manera que

$$\frac{m^u(B^u(x,\delta))}{m^u(B^u(x,\delta(1+\gamma)))} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Sea $\Delta > 0$. Dado que f expande distancias uniformemente a lo largo de cada variedad inestable, entonces para todo $y \in \Lambda$ existe $m \geqslant 1$ tal que

$$B^u(f^m(y),\Delta) \subset f^m\Big(B^u\Big(y, \frac{\delta\gamma}{2}\Big)\Big). \tag{3.9}$$

Como $f^m(B^u(x,\delta))$ es un espacio de Lindelöff, podemos extraer del cubrimiento de todas la bolas de radio Δ en $f^m(B^u(x,\delta))$ un subcubrimiento numerable $\{B^u(f^m(x_i),\Delta)\}_{i\geqslant 1}$ con cada x_i en $B^u(x,\delta)$. Es decir,

$$f^m(B^u(x,\delta)) \subset \bigcup_{i\geqslant 1} B^u(f^m(x_i),\Delta). \tag{3.10}$$

De (3.9) tenemos que para cada $i \geqslant 1$ se cumple lo siguiente,

$$B^u(f^m(x_i),\Delta) \subset f^m\Big(B^u\Big(x_i, \frac{\delta\gamma}{2}\Big)\Big). \tag{3.11}$$

Consideremos x_i fijo y sea $z \in B^u(x_i, \delta\gamma/2)$. Entonces, por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} dist^u(z,x) &\leqslant dist^u(z,x_i) + dist^u(x_i,x) \\ &< \frac{\delta\gamma}{2} + \delta \\ &< \delta(1+\gamma). \end{aligned}$$

Esto es, $B^u(x_i, \delta\gamma/2) \subset B^u(x, \delta(1+\gamma))$ para todo $i \geqslant 1$. Combinando esta inclusión con (3.11) se obtiene para todo $i \geqslant 1$,

$$B^u(f^m(x_i), \Delta) \subset f^m(B^u(x, \delta(1+\gamma))). \tag{3.12}$$

Por (3.12),

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\geqslant 1} f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta}) &\subset f^{-m}(f^m(A_{x,\delta(1+\gamma)})) \\ &= A_{x,\delta(1+\gamma)}.\end{aligned}$$

Combinando esta última inclusión con (3.10) obtenemos,

$$\frac{m^u(A_{x,\delta(1+\gamma)})}{m^u(B^u(x,\delta))} \geqslant \frac{m^u\big(\bigcup_{i\geqslant 1} f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta})\big)}{m^u\big(\bigcup_{i\geqslant 1} f^{-m}(B^u(f^m(x_i),\Delta))\big)}. \tag{3.13}$$

Usando el Lema del Cubrimiento de Besicovitch (ver [KP]), consideramos un entero positivo K de manera que

$$m^u\left(\bigcup_{i\geqslant 1} f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta})\right) \geqslant \frac{1}{K}\sum_{i\geqslant 1} m^u(f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta})).$$

Luego, de aquí y (3.13) tenemos,

$$\frac{m^u(A_{x,\delta(1+\gamma)})}{m^u(B^u(x,\delta))} \geqslant \frac{1}{K}\frac{\sum_{i\geqslant 1} m^u(f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta}))}{\sum_{i\geqslant 1} m^u(f^{-m}(B^u(f^m(x_i),\Delta)))}. \tag{3.14}$$

Por otro lado, para $i \geqslant 1$ fijo se verifica,

$$\frac{m^u(f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta}))}{m^u(f^{-m}(B^u(f^m(x_i),\Delta)))} = \frac{\int_{A_{f^m(x_i),\Delta}} \mathrm{Jac}(Df^{-m})dm^u}{\int_{B^u(f^m(x_i),\Delta)} \mathrm{Jac}(Df^{-m})dm^u}.$$

Usando distorsión acotada tenemos que,

$$\frac{m^u(f^{-m}(A_{f^m(x_i),\Delta}))}{m^u(f^{-m}(B^u(f^m(x_i),\Delta)))} = \frac{\int_{A_{f^m(x_i),\Delta}} \mathrm{Jac}(Df^{-m})dm^u}{\int_{B^u(f^m(x_i),\Delta)} \mathrm{Jac}(Df^{-m})dm^u} \geqslant c\frac{m^u(A_{x_i,\Delta})}{m^u(B^u(x_i,\Delta))}. \tag{3.15}$$

Donde c viene dado por (vea [V]):

$$c = \inf_{m \geqslant 0} \inf_{y_1, y_2 \in B^u(f^m(x_i), \Delta)} \frac{\mathrm{Jac}(D_{y_1} f^{-m})}{\mathrm{Jac}(D_{y_2} f^{-m})}.$$

Usando el hecho que Y es un conjunto compacto podemos seleccionar a $\Delta > 0$ tal que $m^u(A_{y,\Delta}) > 0$ para cada $y \in \Lambda$, y como los volúmenes $m^u(y)$ varían continuamente con $y \in \Lambda$ y Λ es compacto, hacemos

$$\rho = \min \left\{ \frac{m^u(A_{y,\Delta})}{m^u(B^u(y, \Delta))} \right\} > 0.$$

Luego, combinando (3.8), (3.14) y (3.15) obtenemos

$$\frac{m^u(A_{x,\delta(1+\gamma)})}{m^u(B^u(x, \delta(1+\gamma)))} \geqslant \frac{c\rho}{2K}.$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario, haciendo $\eta = c\rho/2K$ se tiene la veracidad de la afirmación. Retomando de nuevo la prueba de la primera parte del Teorema 3.3, tenemos que por ser ν una u-medida existe un punto $x \in \Lambda$ tal que $m^u(V^u(x) \cap Y) > 0$, luego del Teorema de densidad de Lebesgue tenemos que m^u-c.t.p. $z \in V^u(x) \cap Y$ es un punto de densidad del conjunto $V^u(x) \cap Y$ y esto contradice la afirmación.

2) Supongamos por el absurdo que existe una u-medida μ para la cual $\Lambda \setminus \mathrm{sop}(\mu) \neq \varnothing$. Como $\Lambda \setminus \mathrm{sop}(\mu)$ es abierto, entonces por hipótesis, para cada $x \in \mathrm{sop}(\mu)$, existe n entero tal que $f^n(W^u(x)) \cap (\Lambda \setminus \mathrm{sop}(\mu)) \neq \varnothing$, y por la Proposición 3.6 $W^u(x) \subset \mathrm{sop}(\mu)$ y así $f^n(W^u(x)) \subset \mathrm{sop}(\mu)$ lo cual es contradictorio. Por tanto $\mathrm{sop}(\mu) = \Lambda$ para toda u-medida μ. ■

Como un Corolario del Teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Supongamos que para cada $x \in \Lambda$ la órbita de la variedad global fuertemente inestable $W^u(x)$ es densa en Λ. Entonces para cualquier u-medida μ en Λ y μ-casi todo $x \in \Lambda$ la trayectoria $\{f^n(x)\}$ es densa en Λ.*

Demostración. Sean $\{U_n\}_{n \geqslant 0}$ una base numerable en Λ y μ una u-medida para f. Por la parte 1 del Teorema 3.3, para cada $n \geqslant 0$ existe un conjunto A_n medible de Borel en Λ con μ-medida total, tal que para cada $x \in A_n$ la órbita de x visita U_n.

Sea $A = \bigcap_{n \geqslant 0} A_n$. El conjunto A es medible de Borel con μ-medida total, y para cada $x \in A$ la órbita de x es densa en Λ porque esta visita cada uno de los conjuntos U_n de la base. ■

Teorema 3.5 *Sea f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de una variedad diferenciable, Riemanniana y compacta M con un atractor parcialmente hiperbólico Λ. Supongamos que:*

(1) Existe una u-medida μ para f con respecto a la cual f tiene exponentes centrales negativos en un subconjunto invariante A de Λ con μ-medida positiva.

(2) Para cada $x \in \Lambda$ la órbita de la variedad global fuertemente inestable $W^u(x)$ es densa en Λ.

Entonces μ es la única u-medida para f y f tiene exponentes centrales negativos en μ-casi todo $x \in \Lambda$. En particular, (f, μ) es ergódico, $\mathrm{sop}(\mu) = \Lambda$ y la cuenca $B(\mu)$ tiene volumen total en la cuenca topológica de atracción de Λ.

Demostración. Consideremos μ una u-medida como en el enunciado. Por el Teorema 3.4 la órbita $\{f^n(x)\}$ es densa en Λ para μ-casi todo $x \in \Lambda$, y por la parte (2) del Teorema 3.2 obtenemos que el sistema (f, μ) es ergódico. Nótese que en este caso $\mathrm{sop}(\mu) = \Lambda$ por la parte (2) del Teorema 3.3.

Dado que $\mu(A) > 0$, A es f-invariante y f es ergódico con respecto a μ, entonces f tiene exponentes centrales negativos en μ-casi todo $x \in \Lambda$.

Veamos que μ es la única u-medida asociada a f. Sea ν una u-medida para f y sean Y, B y C los conjuntos construidos en la demostración del Teorema 3.2 para un $x \in \Lambda$ como en esa demostración. Por la densidad de las órbitas de las variedades fuertemente inestables y por la parte (2) del Teorema 3.3 tenemos que $\mathrm{sop}(\nu) = \Lambda$, y como C es abierto en Λ, se tiene $\nu(C) > 0$ y en consecuencia $\nu(C \cap \widehat{\Lambda}) > 0$. Por ser ν una u-medida y la continuidad absoluta de la foliación de variedades fuertemente inestables, existe un conjunto N con $N \subset C \cap \widehat{\Lambda}$ y $\nu(C \setminus N) = 0$ tal que para cada punto $z \in N$ se tiene que m^u-casi todo punto en $W^u(z)$ está en $\widehat{\Lambda}$. Veamos que cada punto en N tiene exponentes centrales negativos. En efecto, sea $z \in N$. Recordemos que el conjunto C está asociado a un punto x que tiene exponentes centrales negativos y m^u-casi todo punto en $V^u(x)$ está en $\widehat{\Lambda}$.

Como $z \in N$ y por la continuidad absoluta de la foliación de variedades estables no uniformes tenemos que $m^u(W^u(z) \cap B \cap \widehat{\Lambda}) > 0$, así usando de nuevo la continuidad absoluta podemos selecionar un punto $y \in Y$ tal que $y \in \widehat{\Lambda}$ y y' dado por $V^-(y) \cap W^u(z) = \{y'\}$ también está en $\widehat{\Lambda}$. Luego,

$$\begin{aligned} \chi(z, E_z^c) &= \chi(y', E_{y'}^c) \\ &= \chi(y, E_y^c) \\ &= \chi(x, E_x^c) < 0. \end{aligned}$$

Así N es un conjunto con ν-medida positiva donde f tiene exponentes centrales negativos.

Sea A_ν el mayor conjunto invariante de ν-medida positiva tal que f tiene exponentes centrales negativos en A_ν. Aplicando de nuevo los Teoremas 3.4 y 3.2 obtenemos que ν es ergódica y f tiene exponentes centrales negativos en ν-casi todo punto de Λ.

Es claro que $\frac{1}{2}(\mu + \nu)$ es una u-medida para f y que f tiene exponentes centrales negativos en un conjunto de $\frac{1}{2}(\mu + \nu)$-medida positiva. Luego, aplicando el mismo argumento anterior obtenemos que f es ergódica con respecto a $\frac{1}{2}(\mu + \nu)$ y en consecuencia $\mu = \nu$. Así tenemos la unicidad de la u-medida para f.

Por la Proposición 3.3 se obtiene que la cuenca de μ tiene volumen total en la cuenca topológica de atracción de Λ, y por la parte 2 del Teorema 3.3 como ya se había hecho notar se concluye que $\operatorname{sop}(\mu) = \Lambda$. ■

Capítulo 4

Ergodicidad estable de atractores parcialmente hiperbólicos con exponentes centrales negativos

En este capítulo se presenta la demostración del resultado principal de [BDPP] (Teorema 2.3), el cual es un resultado de ergodicidad estable para el caso en que el difeomorfismo posee un atractor parcialmente hiperbólico, una única u-medida μ asociada y exhibe exponentes centrales negativos en un conjunto de μ-medida positiva. Antes de presentar la demostración de este resultado vamos a mostrar los siguientes Lemas auxiliares.

Lema 4.1 *Sean f un difeomorfismo como en el Teorema 2.3 y g otro difeomorfismo cerca de f en la topología $C^{1+\alpha}$ de tal forma que g tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_g. Si g está suficientemente cerca de f en la topología $C^{1+\alpha}$, entonces existen una u-medida ν y un subconjunto $A_\nu \subset \Lambda_g$ de ν-medida positiva en el cual g tiene exponentes centrales negativos.*

Demostración. Sea μ la única u-medida de f. Por la Proposición 3.4 f es ergódica respecto a μ. Como f posee exponentes centrales negativos en un conjunto de ν-medida positiva, entonces por ergodicidad f tiene exponentes centrales negativos en un conjunto de μ-medida total en Λ. Consideremos $\alpha < 0$ el mayor exponente central negativo de f. Usando el hecho que los puntos L-regulares forman un conjunto de μ-medida total en Λ obtenemos para μ-casi todo $x \in \Lambda$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| < \alpha, \quad \text{para todo } v \in E^c_f(x).$$

Si x es como en la ecuación anterior, entonces consideramos $n_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{n_0} \log \|Df^n(x)v\| < \alpha \quad \text{para } v \in E^c_f(x).$$

Sea $v \in E^c_f(x)$ con $\|v\| = 1$. Es claro que $\|Df^{n_0}(x)v\| \leqslant e^{n_0\alpha}$, así para μ-casi todo $x \in \Lambda$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{n_0} \log \|Df^{n_0}(x)|E^c_f(x)\| \leqslant \alpha.$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{n_0} \int_{\Lambda_f} \log \|Df^{n_0}(x)|E^c_f(x)\| d\mu(x) \leqslant \alpha \int_{\Lambda_f} d\mu(x) = \alpha. \tag{4.1}$$

Sea g un difeomorfismo en M cercano a f en la topología $C^{1+\alpha}$ tal que g posee un atractor parcialmente hiperbólico Λ_g (Teorema 3.1) y sea ν una u-medida para el sistema (g, Λ_g).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n_0} \int_{\Lambda_g} \log \left\| Dg^{n_0}(x)\Big|_{E^c_g(x)} \right\| d\nu(x) = \\
&\qquad \frac{1}{n_0} \Bigg[\Bigg(\int_{\Lambda_g} \log \|Dg^{n_0}(x)|E^c_g(x)\| d\nu(x) - \int_{\Lambda_g} \log \|Dg^{n_0}(x)|E^c_g(x)\| d\mu(x) \Bigg) + \\
&\qquad \Bigg(\int_{\Lambda_g} \log \|Dg^{n_0}(x)|E^c_g(x)\| d\mu(x) - \int_{\Lambda_f} \log \|Df^{n_0}(x)|E^c_f(x)\| d\mu(x) \Bigg) + \\
&\qquad \int_{\Lambda_f} \log \|Df^{n_0}(x)|E^c_f(x)\| d\mu(x) \Bigg].
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + \alpha < 0$. Por el Teorema 3.1 existe un entorno $\mathscr{U}$ de f en la topología $C^{1+\alpha}$ tal que si $g \in \mathscr{U}$, entonces ν está lo suficientemente cerca de μ en la topología débil* de tal forma que la suma de los términos en paréntesis multiplicado por $1/n_0$ en la igualdad anterior es menor que ε. Con esto y por (4.1) se tiene para todo $g \in \mathscr{U}$:

$$\frac{1}{n_0}\int_{\Lambda_g} \log \|Dg^{n_0}(x)|E^c_g(x)\| d\nu(x) < \varepsilon + \alpha. \tag{4.2}$$

Dada $g \in \mathscr{U}$ se define $\varphi : \Lambda_g \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \frac{1}{n_0} \log \|Dg^{n_0}(x)|E^c_g(x)\| \quad \text{para cada } x \in \Lambda_g.$$

Es claro que φ es una función continua. Por el Teorema Ergódico de Birkhoff y por (4.2) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_0}\int_{\Lambda_g} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \log \|Dg^{n_0}(g^j(x))\Big|_{E^c_g(g^j(x))} \| d\nu(x) &= \\ &= \frac{1}{n_0}\int_{\Lambda_g} \log \|Dg^{n_0}(x)\Big|_{E^c_g(x)} \| d\nu(x) < \varepsilon + \alpha.\end{aligned}$$

De esta desigualdad, existe un conjunto medible A_g con $\nu(A_g) > 0$ tal que

$$\frac{1}{n_0} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \log \|Dg^{n_0}(g^j(x))|E^c_g(g^j(x))\| < \varepsilon + \alpha, \tag{4.3}$$

para todo $x \in A_g$. Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}\log \|Dg^{n_0 k}(x)|E^c_g(x)\| &= \log \|D(g^{n_0})^k(x)|E^c_g(x)\| \\ &= \log \left\| \prod_{j=0}^{k-1} Dg^{n_0}(g^j(x))|E^c_g(x) \right\| \\ &\leqslant \log \left(\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{n_0}(g^j(x))|E^c_g(x)\| \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \log \|Dg^{n_0}(g^j(x))|E^c_g(x)\|\end{aligned}$$

Luego, por (4.3) resulta

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_0k}\log\|Dg^{n_0k}(x)|E^c_g(x)\| \leqslant \frac{1}{n_0}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\log\|Dg^{n_0}(g^j(x))|E^c_g(x)\| < \varepsilon+\alpha$$

para todo $x\in A_g$. Con esto queda probado el lema. ∎

Lema 4.2 *Sea f un difeomorfismo de clase C^1 que posee un atractor parcialmente hiperbólico Λ y una cantidad finita de u-medidas $\mu_1,\dots,\mu_N$ ergódicas. Entonces para cada $x\in\Lambda$ la semiórbita positiva de $W^u(x)$ es densa en $\operatorname{sop}(\mu_j)$ para algún $j\in\{1,\dots,N\}$.*

Demostración. Para cada $x\in\Lambda$ se define el conjunto L_x por:

$$L_x=\bigcap_{N\geqslant 0}\overline{\bigcup_{n\geqslant N} f^n(W^u(x))}.$$

Claramente este conjunto es no vacío porque es una intersección encajada de conjuntos compactos, y también es invariante por f. Por la ergodicidad de cada μ_j tenemos que $\mu_j(L_x)=0$ o $\mu_j(L_x)=1$ para todo j. Así existe un $j\in\{1,\dots,N\}$ tal que $\mu_j(L_x)=1$, de lo contrario, si $\mu_j(L_x)=0$ para todo j, entonces $\mu(L_x)=0$ para toda u-medida porque $\mu_1,\dots,\mu_N$ son las únicas u-medidas ergódicas. Por otro lado la sucesión $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^k_*m^u(x)$ tiene un punto límite ν que es una u-medida concentrada en L_x y por tanto $\nu(L_x)>0$, lo que es una contradicción.

Ahora por ser μ_j ergódica tenemos que $\mu_j(B(\mu_j))=1$ y cada punto en $B(\mu_j)$ tiene órbita densa en $\operatorname{sop}(\mu_j)$. Consideremos $z\in L_x\cap B(\mu_j)$. Sea U un conjunto abierto y no vacío en $\operatorname{sop}(\mu_j)$. Por la densidad de la órbita de z en $\operatorname{sop}(\mu_j)$ existe $m\in\mathbb{Z}$ de manera que $f^m(z)\in U$. Ahora como L_x es un conjunto invariante se tiene que $f^m(z)\in L_x\cap U$, y por la definición del conjunto L_x existe un $n\geqslant 0$ tal que $f^n(W^u(x))\cap U\neq\varnothing$. Dado que U es un abierto arbitrario en $\operatorname{sop}(\mu_j)$ obtenemos el resultado deseado. ∎

Demostración del Teorema 2.3.

De la Proposición 3.5 existen números positivos r_f y p_f que dependen continuamente de f de manera que $\mu(\mathbb{L}(f,r_f))\geqslant p_f$.

Sea $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < r_f$. Consideremos g suficientemente cerca de f en la topología $C^{1+\alpha}$ de manera que g tiene un atractor parcialmente hiperbólico Λ_g, una u-medida ν que podemos considerar ergódica por la Proposición 3.4, existe el conjunto A_g como en el Lema 4.1, $r_g > \varepsilon$, $p_g \geqslant p_f/2$ y $1 - \nu(B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu)) < p_f/2$, donde $B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu)$ es la ε-vecindad del $\operatorname{sop}(\mu)$.

Puesto que $\nu(\mathbb{L}(g, r_g)) \geqslant p_f/2$, ocurre que $\mathbb{L}(g, r_g)) \cap B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu) \neq \varnothing$, más aún, $\nu(\mathbb{L}(g, r_g)) \cap B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu)) > 0$.

Dado que $\nu(B(\nu)) = 1$, ν es una u-medida y la foliación de variedades fuertemente inestables es absolutamente continua, podemos seleccionar $x \in \mathbb{L}(g, r_g)) \cap B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu)$ tal que sea Birkhoff genérico para la medida ν y m^u-casi todo punto en $W^u(x)$ es Birkhoff genérico para ν. Consideramos para este x y el difeomorfismo g los conjuntos Y, B y C como en la demostración del Teorema 3.2. Debido a que $Y \subset V_g^u(x)$ y $m^u(Y) > 0$ tenemos que m^u-casi todo punto en Y es Birkhoff genérico para ν.

Recordemos que

$$C = \bigcup_{x' \in B^-(x,r) \cap \Lambda_g} V_g^u(x'),$$

donde r es un número real positivo como en la demostración del Teorema 3.2. El número r es considerado aquí de tal forma que $B(x, \varepsilon) \subset C$. Ahora veamos que la medida ν es la única u-medida para g.

Sea $\tilde{\nu}$ otra u-medida ergódica para g. Por el Lema 4.2 la órbita de cada variedad fuertemente inestable asociada a f es densa en $\operatorname{sop}(\mu)$, luego, como $x \in B_\varepsilon \operatorname{sop}(\mu)$ tenemos que $B(x, \varepsilon) \cap \operatorname{sop}(\mu) \neq \varnothing$. Entonces, si g está lo suficientemente cerca de f en la topología $C^{1+\alpha}$ (en realidad basta la cercanía en la topología C^1), la órbita de cada variedad fuertemente inestable asociada a g intersecta a $B(x, \varepsilon)$.

Dado que C es abierto, por la parte (1) del Teorema 3.3, se tiene que $\tilde{\nu}$-casi toda g-órbita visita a C. Esto es, el conjunto $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 0} g^{-n}(C)$ tiene $\tilde{\nu}$-medida total.

Luego, existe $n \geqslant 0$ de manera que $\tilde{\nu}(g^{-n}(C)) > 0$ y debido a que $\tilde{\nu}$ es una medida invariante por g obtenemos que $\tilde{\nu}(C) > 0$.

Ahora consideremos $\tilde{C}$ el subconjunto de C como en la demostración del Teorema 3.2. Por la continuidad absoluta de la foliación de variedades fuertemente inestables y por ser $\tilde{\nu}$ una u-medida, este conjunto tiene $\tilde{\nu}$-medida total en C y en consecuencia $\tilde{\nu}(\tilde{C}) > 0$.

Sea $z \in \tilde{C} \cap B(\tilde{\nu}) \cap \mathcal{B}$. Entonces existe $x' \in B^{-}(x, r)$ tal que $z \in V^{u}(x')$ y m^{u}-casi todo punto en $V^{u}(x')$ es Birkhoff regular. Por la continuidad absoluta de la foliación estable V^{-} tenemos que $m^{u}(V^{u}(x') \cap B) > 0$ y existen $y' \in V^{u}(x') \cap B \cap \mathcal{B}$ y $y \in Y \cap B(\nu)$ tal que $y' \in V^{-}(y)$. De aquí para cada función φ en $C^{0}(M)$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varphi^{+}(z) &= \varphi^{-}(z) \quad (z \in \mathcal{B}) \\
&= \varphi^{-}(y') \quad (z \in V^{u}(x'),\ y' \in V^{u}(x')) \\
&= \varphi^{+}(y') \quad (y' \in \mathcal{B}) \\
&= \varphi^{+}(y) \quad (y' \in V^{-}(y)) \\
&= \int \varphi d\nu \quad (y \in B(\nu))
\end{aligned}$$

Dado que esto es válido para cualquier φ en $C^{0}(M)$, entonces z es Birkhoff genérico para ν y $\tilde{\nu}$, y como consecuencia tenemos que $\nu = \tilde{\nu}$.

Se ha demostrado que ν es la única u-medida ergódica para g, y por la Proposición 3.4 es la única u-medida para g, la cual denotamos por μ_{g}, y de la Proposición 3.3, $B(\mu_{g})$ tiene volumen total en la cuenca topológica de atracción de Λ_{g}. $\blacksquare$

Bibliografía

[A] D. ANOSOV. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature.*

[AS] R. ABRAHAM, S. SMALE. *Non-genericity of Axiom A and Ω-stability.* Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley (1970), pp. 133–163.

[BaPe] L. BARREIRA & YA. PESIN *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory.* Univ. Lect. Series, Amer. Math. Soc. 23, 2001.

[BDV] C. BONATTI, L. DIAZ AND M. VIANA. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics III. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[BMVW] C. BONATTI, C. MATHEUS, M. VIANA & A. WILKINSON. *Abundance of stable ergodicity.* Comment. Math. Helv., 79 (2004), 753–757.

[BV] C. BONATTI & M. VIANA. *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting.* Israel J. Math., 115 (2000) 157–193.

[Bi] P. BILLINGSLEY. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley and Sons. Inc. USA. 1968.

[B] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Lecture Notes in Mathematics 470, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[BrPe] M. Brin, Y. Pesin. *Partially hyperbolic dynamical systems.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974), 170–212.

[BDP] K. Burns, D. Dolgopyat & Ya. Pesin. *Partially hyperbolic diffeomorphisms with non-zero exponents* J. Statist. Phys. 108 (2002), 927–942.

[BDPP] K. Burns, D. Dolgopyat, Ya. Pesin, M. Pollicott. *Stable ergodicity for partially hyperbolic attractors with negative central exponents.* Journal of Modern Dynamics. vol. 2, No. 1, 2008, 63–81.

[BW] K. Burns & A. Wilkinson. *On the ergodicity of partially hyperbolic systems.* Annals of Math., 171:451–489, 2010.

[D0] D. Dolgopyat *On dynamics of mostly contracting diffeomorphisms.* Comm. in Math. Phys., 213 (2000), 181–201.

[Do] D. Dolgopyat *Limit theorems for partially hyperbolic systems.*Transactions of the AMS, 356 (2004),1637-1689.

[GPS] M. Grayson, C. Pugh, & M. Shub. *Stably ergodic diffeomorphisms.* Annals of Math., 140:295–329, 1994.

[HP] M. Hirsch, C. Pugh. *Stable manifolds and hyperbolic sets.* Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968, pp. 133–163, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub *Invariant manifolds.* Springer Lecture Notes on Mathematics, 583, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press. New York, 54, 1997.

[KP] S. G. Krantz, H. R. Parks. *Geometric Integration Theory.* Birkhäuser. Boston. 2008.

[M] R. Mañé. *Introdução à teoria ergódica* Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro. (1983).

[Pa1] J. Palis. *A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors.* Astérisque 261 (2000) 335–47.

[Pa2] J. Palis. *Open questions leading to a global perspective in dynamics.* Invited paper, Nonlinearity 21 (2008) T37-T43.

[Pe] Ya. Pesin. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society Publishing House, Switzerland, 2004.

[PeSi] Ya. Pesin & Ya. Sinai *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors* Ergod. Theory and Dyn. Syst., 2 (1982), 417–438.

[PuSh1] C. Pugh, M. Shub. *Ergodicity of Anosov actions.* Invent.Math., 15 (1972), 11123.

[PuSh2] C. Pugh, M. Shub. *Stable ergodicity and partial hyperbolicity.* Ledrappier, F. (ed.) et al., 1st International Conference on Dynamical Systems, Montevideo, Uruguay, 1995 a tribute to Ricardo Mañé. Proceedings. Harlow: Longman. Pitman Res. Notes Math. Ser. 362, (1996) 182–187.

[PuSh3] C. Pugh, M. Shub. *Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity.* J.

[PuSh4] C. Pugh, M. Shub. *Stable ergodicity.* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 41, Number 1, 2003.

[RRU1] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, R. Ures. Partial hyperbolicity and ergodicity in dimension three. Journal of Modern Dynamics. Volume 2, No. 2, 2008, 187–208.

[RRU2] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, R. Ures. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1d-center bundle, Inv. Math. 172, 2 (2008), 353–381.

[Sh] M. Shub (&A. Fathi, R. Langevin). *Global stability of dynamical systems.* Springer, Berlin (1986).

[Sm1] S. Smale. *Structurally stable systems are not dense.* Amer. J. of Math. 88 (1966) 491–496.

[Sm2] S. Smale. *Differentiable dynamical systems;* Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747– 817.

[V] M. Viana. *Lecture notes on attractors and physical measures.* IMPA, Rio de Janeiro.

[W] A. Wilkinson. *Smooth ergodic theory.* Lecture Notes (umpublished). Northwestern University, Illinois, 2008.

[W2] A. Wilkinson. *Conservative partially hyperbolic dynamics.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 2010.