Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Postgrado en Matemática

FUNCIONES DE SEGUNDA VARIACIÓN ACOTADA EN EL PLANO.

Autora: M.Sc. Jurancy Josefina Ereú.

Tutores: Dr. José Giménez.

Dr. Nelson Merentes.

Tesis Doctoral

Presentada ante la ilustre

Universidad Central de Venezuela

Para optar al título de

Doctor en Ciencias

Mención Matemática

Caracas, Octubre 2012

A Dios, por haberle placido
en su gracia brindarme la
bendición de culminar esta
etapa para su gloria y honra,
y a mi familia.

Agradecimiento

Primeramente agradezco a Dios mi Padre Celestial dador de la vida, de él mana toda bendición y misericordia, por haberme dado la gracia, las fuerzas y su luz para culminnar en su voluntad esta etapa académica y por poner en mi camino personas que han sido soporte y compañía durante todo el período de esta investigación.

A mi madre, ser especial que Dios me ha dado, la cual ha estado siempre conmigo dándome su amor, consejo y apoyo incondicional. Dios te bendiga mamá.
A mi familia por su cariño, apoyo y comprensión.
A mis amigos Liliana, Lucy, Miguel, Lorena y Mireya, que son parte de mi familia, de quienes siempre he recibido palabras de aliento y han estado a mi lado en todo momento, ayudándome y brindándome su incondicional amistad, sé que están en mi vida con un propósito, son de gran bendición para mi. Gracias amigos, el Señor Jesucristo les bendiga.

Expreso mis más sincero agradecimiento y con especial cariño a mi tutor de tesis, Dr. José P. Giménez, principalmente por creer en mí, aceptándome bajo su dirección, lo que me ha traido un sinnúmero de enseñanzas, tanto personales como académicas. Agradezco profundamente su guía, comprensión, "paciencia", sus valiosos consejos y por compartir conmigo generosamente sus conocimientos y cada idea que pudiera hacer *de mi tesis un mejor trabajo, lo que es un aporte invaluable al desarrollo de la misma. Que el Señor le recompense grandemente con ricas bendiciones, junto a su familia.*

También doy mi agradecimiento al Dr. Nelson Merentes por sus fundamentales e importantes aportes y su participación activa en el desarrollo de este trabajo, agradezco su amabilidad y su apoyo durante mis estancias en su grupo de investigación, durante la cual tuve todo el soporte profesional y logístico para alcanzar los objetivos planteados. Quiero extender mi agradecimiento al Dr. José Luis Sánchez, por su atenta y efectiva colaboración en el desarrollo de este trabajo, al igual que a las Licenciadas Odalis Mejía y Zorely Jesús por su amistad brindada y su presta colaboración, sobre todo en hacerme llegar una gran parte de las fuentes consultadas para la elaboración de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros y amigos que forman el Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología (UCLA) por su ayuda en muchas ocasiones y por sus continuas palabras de aliento, en especial a los Profesores: Malon Mendoza, Javier Hernández y Maribel Perdomo por su comprensión, apoyo y buena disposición como Jefes del Departamento, en particular en la designación de mi carga académica y horarios durante el período de esta investigación.

Agradezco a todos mis hermanos en Cristo por sus oraciones para que el Señor me diera la victoria. Dios les bendiga.

Agradezco a la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado por haber financiado una parte de mis estudios doctorales otorgándome una beca de tres años. Al Banco Central de Venezuela por el apoyo brindado en diversas actividades durante el trayecto de este trabajo, a la ilustre Universidad Central de Venezuela por abrirme sus puertas y brindarme esta valiosa oportunidad de alcanzar este logro y en especial a las secretarias del Postgrado en Matematicas de la UCV, Maribel y Eddy, quienes me brindaron su ayuda oportuna durante el transcurso de mis estudios doctorales.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que Dios puso en mi camino y de una *u otra manera contribuyeron en la realización de este trabajo.*

A todos muchas gracias, que Dios les bendiga.

"La bendición de Jehová es la que ennriquece, Y no añade tristeza con ella"

Proverbios 10:22.

Resumen

En el año de 1881, el gran matemático francés Camile Jordan introduce la noción de función de variación acotada en un intervalo, ([14]), esta noción ha sido generalizada en varias direcciones, destacándose particularmente unas que podriamos enmarcar en un ámbito estrictamente espacial y aquellas afines a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En ambos casos estas generalizaciones han mostrado su eficacia y utilidad en la resolución de diversos problemas no lineales, especialmente problemas de ecuaciones integrales. Entre estas generalizaciones encontramos la dada por Charles-Jean Levieux, Baron de La Vallée Poussin, ([7]), en el año 1908, quien introduce el concepto de *segunda variación acotada*, así como, la noción de función de *m-segunda variación* acotada dada por M. Russel en 1970, ([21]), y estudiada con más detalle por Frank Huggins en 1977, ([13]), quien llama a los elementos de esta clase funciones de *pendiente-variación* acotada.

Con el objetivo de introducir generalizaciones de tipo espacial, en nuestro trabajo se exhibe una extension al plano de la noción de función de variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin en [7], así como, de la noción de función de *pendiente-variación* acotada dada por Huggins en [13], introducimos los espacio de funciones de *segunda variación bi-dimensional* y de funciones de *segunda μ-variación bi-dimensional*, y probamos, entre otros resultados, la existencia de un polinomio de grado cuatro mayorante de las funciones de segunda variación que estan en la bola unitaria. Mostramos también que las funciones de segunda μ-variación bi-dimensional en la bola unitaria están (uniformemente) mayoradas por una función de *aspecto polinómica.* A pesar de que estos son resultados de tipo auxiliar que nos permiten mostrar que los espacios de funciones de *segunda variación bi-dimensional* y de segunda μ-variación bi-dimensional, respectivamente, son espacios de Banach, los mismos podrían ser de algún interés en sí mismos.

Asimismo, damos un teorema de descomposición en términos de funciones factorizables y presentamos resultados análogos a los obtenidos por F. Riesz en [20] y similares a la generalización del Lema de Riesz dado por N. Merentes en [16].

Parte de los resultados de esta tesis son extraidos de los artículos: [9], aceptado para publicación, y de [10], el cual está en proceso de arbitraje.

Palabras Claves: Funciones de Segunda Variación Acotada, Funciones de Variación Acotada.

Functions of Bounded Second Variation in the Plane.

Abstract

In 1891, the great french mathematician Camile Jordan introduced the notion of function of bounded variation on a real interval (([14]), this notion has been generalized in several directions, with a particular emphasis on those that we can called strictly spatials and those related to the theory of partial differential equations. In both cases, these generalizations have shown its efficacy and usefulness in solving a variety of non linear problems, specially problems of integral equations. Among the mentioned generalizations we have the one given by Charles-Jean Levieux, Baron de La Vallée Poussin, ([7]), in 1908, who introduced the concept of bounded second variation, and also, the notion of m-bounded variation given by M. Russel in 1970, ([21]), that was further studied in detail by Frank Huggins in 1977, ([13]), who called the functions in this class functions of bounded slope-variation.

In order to introduce generalizations of spatial type, in this work we give an extension to the plane of the notion of second bounded variation in the sense of De la Vallée Poussin ([7]), and also, of the Huggin´s notion of function of bounded slope-variation. To that end, we introduce the normed spaces $BV^2(I_a^b)$ of functions of bi-dimensional bounded second variation and $BV^{\mu,2}(I_a^b)$ of functions of bi-dimensional bounded second μ-variation. Among other things we prove that there is a fourth degree majorant polynomial $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that $|u(x, y)| \le p(x, y)\|u\|$ for all $u \in BV^2(I_a^b)$ and all $(x, y) \in I_a^b$. We also show that the functions in the unit ball of $BV^{\mu,2}(I_a^b)$ are (uniformly) majorized by a polynomial-like function. Despite the fact that this result allows us to show that $BV^{\mu,2}(I_a^b)$ is a Banach space, the result seem to be of some independent interest in itself.

On the other hand, we prove a decomposition theorem for factorable functions and

present analogous results to those given by F. Riesz in [20] and by N. Merentes in [16]. Part of the results in this thesis are contained in the articles [9], accepted for publication, and in [10], which is under revision.

Keywords and phrases: Functions of Bounded Second Variation, Functions of Bounded Variation.

Introducción

Jean-Baptiste-Joseph Fourier

Jean-Baptiste-Joseph Fourier estudiando el problema de la transmisión del calor, presentó el trabajo: "*Mémoire sur la propagation de la chaleur*" al Instituto de París en 1807. Los jueces, recomendaron a Fourier que puliera su trabajo y lo presentara para el gran premio de 1812. Este trabajo presentado por Fourier fue un paso revolucionario en la evolución del concepto de función, pues el *sorprendente* resultado principal propuesto por Fourier fue el siguiente:

Teorema 0.1. *Cualquier función $f(x)$ definida en un intervalo $(-\ell, \ell)$ puede ser representada, en este intervalo, mediante una serie de senos y cosenos,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos(\frac{n\pi x}{\ell}) + b_n sen(\frac{n\pi x}{\ell})\right),$$

donde los coeficientes a_n y b_n estan dados por

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) f(t)dt \; y \;\; b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} sen\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) f(t)dt$$

El panel de jueces de la Academia para este concurso incluía a Lagrange, Laplace, y Legendre, quienes le otorgaron a Fourier el gran premio; sin embargo, el panel emitió el siguiente comentario:

"La forma en la que el autor arriba a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y su análisis deja algo que desear, sea en generalidad o aún en rigurosidad."

El problema residía en que Fourier manejaba las series infinitas sin establecer previamente su convergencia; es decir, no había un fundamento teórico consistente a pesar de que su teoría daba respuestas en la práctica a problemas de ese tiempo tales como el de la *cuerda vibrante* y la transmisión del calor, entre otros. Fourier, sin embargo, acumuló suficientes evidencias empíricas a favor de su afirmación y es por ello que su trabajo de la conducción del calor y la teoría de las series trigonométricas que lo soportaba, recién vió la luz con la publicación de la clásica obra *Thorie Analtytique de la Chaleur* (1822). Este trabajo produjo un gran impacto en su época y muchos matemáticos se dedicaron más a intentar demostrar las afirmaciones que aparecían en esa publicación, en vez de contradecirlas.

Entre los matemáticos que analizaron el trabajo de Fourier está el matemático alemán *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, quién en el año 1825 (ver [8]) tomó el trabajo de Fourier y lo fundamentó de manera rigurosa realizando la primera demostración formal de la afirmación de *Fourier* para funciones monótonas por partes, conocido como el criterio de *Dirichlet*, sentando bases firmes para el análisis moderno.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Motivados por los resultados presentado por *Dirichlet*, a muchos matemáticos de inmediato les atrajo el siguiente problema:

(P1) ¿Cuál es el menor espacio vectorial que contiene a las funciones monótonas?

Pues de existir este, se tendría una clase más amplia de funciones las cuales satisfacen el criterio de *Dirichlet*. Du Bois-Reymond, al tratar de resolver el problema (P1), notó que para una función f que es la integral de su derivada, se puede escribir:

$$f(x) \quad = \quad f(a) + \int_a^x [f'(t)]^+ dt - \int_a^x [f'(t)]^- dt \tag{1}$$

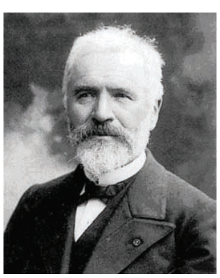
donde

$$[a]^+ = \max\{0, a\} \quad [a]^- = \max\{0, -a\}$$

Es claro que (1) expresa a f como diferencia de dos funciones monótonas, pero esto lo llevó a un problema más difícil, ¿Qué funciones son la integral indefinida de su derivada?. Desafortunadamente, este nuevo problema no resolverá el problema original. De hecho es así, pues es bien conocido que la clase de funciones que son la integral indefinida de su derivada, llamada funciones absolutamente continuas, no es la clase de funciones más pequeña que contiene a las funciones monótonas.

La teoría de integración está íntimamente ligada con la noción de medida de longitud, por ende otro problema que estuvo en boga para esa época fue:

(P2) ¿ Cúales funciones, definidas en un intervalo cerrado, satisfacen la propiedad de que su gráfico tiene longitud finita?.



C. Jordan

En el año de 1881, C. Jordan ([14]) realiza un estudio crítico del Trabajo de *Dirichlet* y descubre inmersa en dicho trabajo la noción de función de variación acotada y demuestra que, para esta clase de funciones, es válida la conjetura de Fourier.

Jordan además establece una relación entre ésta y la clase de todas las funciones monótonas como sigue: ***La función*** $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ***tiene variación acotada en*** $[a, b]$ ***si, y solamente si, f es diferencia de funciones monótonas*** (actualmente este hecho es conocido como el Teorema de Representación de Jordan), además prueba que: Una función f es de variación acotada , si y solo si, f tiene longitud de arco finita, es por ello que esta clase de funciones resuelve simultáneamente los problemas (P1) y (P2).
El interés generado por esta noción ha conducido a algunas generalizaciones del concepto, principalmente dirigidas a la búsqueda de una clase más amplia de funciones cuyos elementos tengan series de Fourier puntualmente convergente. Como en el caso clásico, estas generalizaciones han encontrado muchas aplicaciones en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales e integrales (véase, e.g., [3]).

Durante los años (1905-1906), desde el punto de vista *espacial*, E G. Vitali ([28]) y G. H. Hardy ([11]), extienden la noción de variación acotada a funciones definidas sobre el plano. En el año 1908, De La Vallée Poussin [7], introduce el concepto de segunda variación acotada sobre un intervalo y en esta dirección tenemos uno de los resultados mas conocido: si una función f es de segunda variación acotada sobre $[a, b]$, entonces f es absolutamente continua sobre $[a, b]$ y puede expresarse como la diferencia de dos funciones convexas (ver [[21], Theorem 1.1]). La denominación posterior de estas clase de funciones como funciones de convexidad acotada, aparentemente, es debido a A. W. Roberts y D. E. Varberg ([22] y [23]). Unos años más tarde en 1911, F. Riesz ([20]) prueba que una función F es de segunda variación acotada sobre un intervalo, si y sólo si, es la integral de Lebesgue indefinida de una función f de variación acotada. A principios de la década del 90, del siglo pasado, N. Merentes presenta en [16], una nueva generalización haciendo una combinación de los conceptos de variación presentados por

F. Riesz y De la Vallée Poussin, esta es la noción de funciones de $(p, 2)$-variación, a este espacio de funciones lo denota por $V_p^2(u; [a, b])$ y establece que funciones de $(p, 2)$-variación acotada son también funciones de segunda variación acotada y generaliza el Lema de Riesz como sigue:

$$V_p^2(u; [a, b]) < \infty, \textit{ si y solo si, } u' \in AC[a, b]^1 \textit{ y } u'' \in L_p[a, b]^2.$$

Además,

$$V_p^2(u; [a, b]) = \int_a^b |u''(t)|^p dt.$$

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales parciales la primera generalización del concepto de Jordan a varias variables fue en 1926, por L. Tonelli ([26]), el cual introdujo la clase de funciones continuas de variación acotada para funciones de varias variables. Más tarde L. Cesari ([5]), modifica el requisito de continuidad en la definición de Tonelli por un requisito menos restrictivo de integrabilidad, obteniéndo la clase de funciones de variación acotada de varias variables en su exitosa generalización; él aplicó el concepto para resolver un problema relativo a la convergencia de series de Fourier, pero para las funciones de dos variables. Después de eso, muchos autores, han considerado varias generalizaciones del concepto de función de variación acotada para estudiar series de Fourier en varias variables. Como en el caso clásico, estas generalizaciones han encontrado muchas aplicaciones en el estudio de ciertas ecuaciones integrales y diferenciales (véase por ejemplo, [3]), en la teoría de la medida geométrica, cálculo de variaciones y física matemática.

Desde el punto de vista espacial, nuestro trabajo presenta una extension al plano tanto de la noción de función de variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin

[1] $AC[a, b]$ es el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$

[2] $L_p[a, b]$ es el espacio de funciones p-Lebesgue-Integrable

en [7], como de la noción de función de variación acotada dada por Huggins en [13]. La presentación del mismo, la estructuramos en tres capítulos.

En el primer capítulo presentamos todo lo referente a la teoría de funciones de variación acotada y de segunda variación sobre un intervalo $[a, b]$, así como, algunas generalizaciones y resultados importantes en esta teoría. En el segundo capítulo se introducen las nociones de funciones de *segunda variación bi-dimensionl* y de *segunda μ-variación bi-dimensional*. Mostramos versiones análogas para el caso bi-dimensional de algunas propiedades de las funciones afín, y del hecho que: una función con segunda variación (unidimensional) nula es una función afín, permitiendo esto definir normas en cada una de estas nuevas clases de funciones y por ende darle estructura de espacios normados. También demostramos que las funciones en la bola unitaria de estos espacios normados están (uniformemente) mayoradas por una función de *aspecto polinómio* h, resultado crucial para la demostración que estos espacios son espacios de Banach. Finalmente, en el tercer capítulo, estudiamos una distinguida subfamilia de estos espacios; a saber, la de las funciones factorizables y se exhiben los resultados análogos obtenidos por F. Riesz en [20] y similares a la generalización del Lema de Riesz dada por N. Merentes en [16].

Índice general

1. Funciones de variación acotada **2**

1.1. Funciones Absolutamente Continuas 5

1.2. Segunda Variación Acotada 8

1.3. μ- Segunda Variación acotada sobre $[a, b]$ 11

2. Funciones de Segunda Variación Acotada Bi-dimensional **14**

2.1. Variación Bi-dimensional 15

2.2. Segunda Variación Bi-dimensional 17

2.3. μ-Segunda Variación Bi-dimensional 31

3. Funciones factorizables y Algunos Teoremas de Representación **42**

3.1. Funciones factorizables en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ 43

3.2. Funciones factorizables en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ 45

3.3. Teoremas de Representación 48

Capítulo 1

Funciones de variación acotada

Con el objetivo de hacer nuestra presentación adecuadamente autocontenida, en este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados asociados con la noción de función de variación acotada dada por Camile Jordan ([14]), así como algunas generalizaciones de este concepto, como lo son la noción de segunda variación acotada introducida por *De La Vallée Poussin* en [7] y la noción de *pendiente* variación (o variación con peso) dada por Huggins en [13]. Así mismo presentamos otros resultados que serán necesarias para el ulterior desarrollo de esta tesis.

Definición 1.1 (C. Jordan [14]). *Una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ si,* **la variación de** *u,*

$$V(u) = V(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \tag{1.1}$$

es finita, donde el supremo que aparece en (1.1) es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo [a,b].

Esta clase de funciones se denota por $BV[a, b]$ y la misma posee una estructura de álgebra y de espacio de Banach con la norma

$$||u||_{BV[a,b]} = ||u||_{BV} := |u(a)| + V(u), \quad u \in BV[a,b].$$

Ejemplo 1.0.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b) con $\sup\limits_{a<x<b} |f(x)| \leq M$, entonces, para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$, tenemos por el teorema del valor medio,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |f'(t_i)||x_i - x_{i-1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M|x_i - x_{i-1}| \leq M(b-a). \end{aligned}$$

Así, f es de variación acotada y $V(f;[a,b]) \leq M(b-a)$.

Ejemplo 1.0.2. *Dada una función $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona, entonces:*

$$V(u;[a,b]) = |u(b) - u(a)| < +\infty$$

En efecto, si la función es monótona creciente, entonces:

$$\begin{aligned} V(u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} (u(t_j) - u(t_{j-1})) \\ &= u(b) - u(a). \end{aligned}$$

Así,

$$V(u) = u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)| < +\infty.$$

Ahora, si la función $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona decreciente, usando el mismo argumento anterior obtenemos que la variación es:

$$V(u) = u(a) - u(b) = |u(a) - u(b)| = |u(b) - u(a)| < +\infty.$$

Lo cual concluye la demostración.

Ejemplo 1.0.3. *Dados números reales positivos a y b, definimos*

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x^b}, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Supongamos que $a = b + 1$. Entonces, $f_{a,b}$ es de variación acotada. En efecto, en este caso se tiene

$$f'_{a,b}(x) = \begin{cases} a\, x^{a-1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^b} - b\, x^{a-b-1} \cos \frac{1}{x^b}, & \text{si } x \neq 0; \\ \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x^b}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{a-1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^b} = 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Luego $|f'_{a,b}(x)| \leq a + b$ y por lo tanto $f_{a,b} \in BV[0,1]$.

Ejemplo 1.0.4. *La función $f(0) := 0$ y $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, no es de variación acotada en $[0,1]$. En efecto, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la partición*

$$P_n := \left\{0,\, 1,\, \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}_{k=0}^{n} = \left\{0,\, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi},\, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi},\, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-2)\pi}, \ldots,\, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi},\, \frac{1}{\frac{\pi}{2}},\, 1\right\}.$$

Notamos que

$$f\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1, & \text{si } k \text{ es par;} \\ -1, & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, la variación de f correspondiente a una partición P_n, con n par, será:

$$\begin{aligned} V(f; P_n) &= \left| f\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right) - f(0) \right| + \left| f\left(\frac{2}{(2(n-1)+1)\pi}\right) - f\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right) \right| + \ldots \\ &+ \left| f\left(\frac{2}{\pi}\right) - f\left(\frac{2}{3\pi}\right) \right| + \left| f(1) - f\left(\frac{2}{\pi}\right) \right| \\ &> 2n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \notin BV[0,1]$.

Teorema 1.1. *El espacio* $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ *es un espacio de Banach.*

Un resultado importante dado por Jordan cuando introduce el concepto de variación acotada es el siguiente:

Teorema 1.2 (ver [4],[14]). $u \in BV[a,b]$ *si y sólo si existen funciones* u_1, u_2 *monótonas en* $[a,b]$ *tales que* $u = u_1 - u_2$.

En la prueba dada por Jordan [14] las funciones monótonas que se exhiben son

$$u_1(\cdot) := V(u, [a, \cdot]), \quad u_2 := u_1 - u.$$

La relevancia de este resultado estriba en que un gran número de propiedades de las funciones monótonas se pueden transferir a las funciones que tienen variación acotada: existencia de límites laterales, convergencia de su serie de Fourier, discontinuidades de salto, luego de cardinalidad numerable, Riemann-integrabilidad y existencia de derivada c.s. en $[a,b]$.

1.1. Funciones Absolutamente Continuas

Una clase de funciones relacionadas con las funciones de variación acotada es la de las funciones absolutamente continuas, concepto introducido por Vitali en 1905.

Definición 1.2. *Una función* $u: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ *se dice absolutamete continua si dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que para cualquier colección finita de intervalos disjuntos dos a dos* $(a_k, b_k), k = 1, ..., n$ *contenidos en* $[a,b]$, *que verifique la condición* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, *se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon.$$

El espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$ se denota por $AC[a, b]$. Este espacio es un espacio de Banach con la norma $||\cdot||_{BV}$ y más aún es un álgebra de Banach con una norma equivalente a esta. Entre las propiedades de las funciones absolutamente continuas podemos mencionar las siguientes:

- Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es uniformemente continua y por tanto continua en $[a, b]$
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces u es de variación acotada sobre $[a, b]$
- Toda función Lipschitz es absolutamente continua.
- Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces la función F definida por

  $$F(x) : \ = \int_a^x f(t)dt; \quad a \leq x \leq b,$$

  es absolutamente continua sobre $[a, b]$.

Proposición 1.1.1. *Las siguientes afirmaciones sobre una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

1. *f es absolutamente continua,*
2. [1] *$f \in BV[a, b] \cap C[a, b]$ y satisface la propiedad N,*

[1] $1 \Leftrightarrow 2$: Teorema de Banach-Zareckii. Una función cumple la propiedad N si envía conjuntos de medida de Lebesgue cero en conjuntos cde medida de Lebesgue cero

3. f es diferenciable c.s. en $[a,b]$, $f' \in L_1[a,b]$ y

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Como toda función $u \in Lip[a,b]$ (espacio de las funciones Lipschitzianas) pertenece a $AC[a,b]$, obtenemos las siguientes inclusiones

$$Lip[a,b] \subset AC[a,b] \subset BV[a,b].$$

Otro resultado interesante (ver por ejemplo [27]) relaciona los espacios $AC[a,b]$ y $BV[a,b]$ y nos garantiza que si $u \in BV[a,b]$, entonces

$$V(u;[a,b]) \geq \int_a^b |u'(t)|\, dt \tag{1.2}$$

y la igualdad es cierta sólo cuando $u \in AC[a,b]$.

Obsérvese que la relación (1.2) nos garantiza que si $u \in BV[a,b]$ entonces la longitud de arco de u es finita.

En el año 1908, F. Riesz en [19] introduce la noción de p-variación acotada, de la manera siguiente:

Definición 1.3. *sean $1 \leq p < \infty$ y $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que u tiene p-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ si el número*

$$V_p(u) = V_p(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{|u(t_j) - u(t_{j-1})|^p}{|t_j - t_{j-1}|^{p-1}}$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$.

El número $V_p(u;[a,b])$ se denomina p-variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a,b]$. Esta clase de funciones es un espacio vectorial y se denota por

$BV_p[a,b]$. Dotado con la siguiente norma resulta ser un espacio de Banach

$$\|u\|^p := |u(a)| + (V_p(u;[a,b]))^{1/p}.$$

1.2. Segunda Variación Acotada

En el año 1908 De la Vallée Poussin generalizó en [7] la noción de variación dada por Jordan, introduciendo la noción de *segunda variación acotada* en un intervalo $[a,b]$.

Definición 1.4. *Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice de segunda variación acotada si la expresión*

$$V^2(u) = V^2(u;[a,b]) := \sup_{\xi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \tag{1.3}$$

es finita, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones ξ del intervalo $[a,b]$ que poseen al menos tres puntos (este conjunto lo denotaremos por $\Pi_3([a,b])$) y

$$u[t_{j+1}, t_{j+2}] := \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}}, \quad j = 0, ..., n-2.$$

El espacio vectorial de tales funciones es denotado por $BV^2[a,b]$.

Las siguientes son propiedades de las funciones en $BV^2([a,b])$. (ver [17], [22] y [24]).

Proposición 1.2.1. *Sea $u \in BV^2([a,b])$.*

1. *Si $v \in BV^2([a,b])$ y λ es cualquier constante, entonces*

$$V^2(\lambda u;[a,b]) \;=\; |\lambda| V^2(u;[a,b]) \text{ y } V^2(u+v;[a,b]) \le V^2(u;[a,b]) + V^2(v;[a,b]).$$

2. (Monotonicidad) *Si* $a < c < d < b$, *entonces* $V^2(u;[c,d]) \leq V^2(u;[a,b])$.

3. (Semi-aditividad) *Si* $a < c < b$, *entonces* $u \in BV^2([a,c])$, $u \in BV^2([c,b])$ *y* $V^2(u;[a,b]) \geq V^2(u;[a,c]) + V^2(u;[c,b])$.

4. $u[y_0, y_1]$ *es acotada para todo* $y_0, y_1 \in [a,b]$.

5. u *es Lipschitz y por tanto absolutamente continua sobre* $[a,b]$.

6. $u \in BV^2([a,b])$ *si y sólo si* $u = u_1 - u_2$, *donde* u_1, u_2 *son funciones convexas.*

7. *Una condición necesaria y suficiente para que una función* F *sea la integral de una función* $f \in BV([a,b])$ *es que* $F \in BV^2([a,b])$.

8. *Si* u *es dos veces diferenciable con* u'' *integrable sobre* $[a,b]$ *entonces* $u \in BV^2([a,b])$ *y* $V^2(u;[a,b]) = \int_a^b |u''(t)|dt$.

Teorema 1.3 (Russell [21])**.** $u \in BV^2[a,b]$ *si y sólo si* $u = u_1 - u_2$, *donde* u_1, u_2 *son funciones convexas.*

Demostración:

Presentaremos un resumen de la demostración expuesta por A. M. Russell en [21].

En primer lugar se demuestra que $BV^2[a,b] \subset Lip[a,b]$. Luego toda función $u \in BV^2[a,b]$ es absolutamente continua y por tanto su derivada u' existe en un conjunto $E \subset [a,b]$ tal que $[a,b] - E$ tiene medida de Lebesgue cero ([15]).

Para cada $t \in E$, definimos

$$p(t) = \frac{1}{2}[V^2(u;[a,t]) + u'(t)] \text{ y } q(t) = \frac{1}{2}[V^2(u;[a,t]) - u'(t)]$$

entonces $u'(t) = p(t) - q(t),\ t \in E$.

Ahora se prueba que p y q son funciones crecientes no negativas utilizando que

$$V^2(u;[x,y]) \leq V^2(u;[a,y]) + V^2(u;[a,x]), \quad x < y.$$

Como p y q son crecientes en E, estas pueden extenderse al intervalo $[a,b]$ de tal manera que su extensiones, que seguiremos denominando p y q, sean crecientes y acotadas. Como $u \in AC[a,b]$, resulta (por Proposición 1.1.1)

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_a^t u'(t)dt + u(a) \\ &= \int_a^t p(t)dt - \int_a^t q(t)dt \end{aligned} \tag{1.4}$$

y es fácil ver que cada una de las integrales dadas en (1.4) son funciones convexas.

Supongamos ahora que $u = u_1 - u_2$, siendo u_1, u_2 funciones convexas y demostremos que $u \in BV^2[a,b]$, para lo cual es suficiente verificar que toda función convexa tiene segunda variación acotada.

En efecto, sea $v: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa y $a \leq x < y \leq b$, entonces $v[x,y]$ es creciente en la primera variable. Además las derivadas laterales de v existen en $[a,b]$ y

$$v'_+(x) \leq v[x,y] \leq v'_-(b).$$

Sea $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-2} |v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}]| &= \sum_{j=1}^{n-2} v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}] \\ &= v[b, t_{n-1}] - v[a, t_2] \\ &\leq v'_-(b) - v'_+(a). \end{aligned}$$

De donde resulta que $v \in BV^2[a,b]$. ■

1.3. μ- Segunda Variación acotada sobre $[a, b]$

En 1970, A. M. Russell en ([21]) fue el primero que presentó una generalización del concepto de segunda variación dado por De la Vallée Poussin, llamada m-segunda variación sobre el intervalo $[a, b]$ y para el año 1977, Huggins en [13] introduce este mismo concepto con el nombre de *pendiente-variación* acotada y da un resultado análogo al dado por F. Riesz en [20].

Definición 1.5. *Si u y μ están definidas en $[a, b]$ y μ es una función estrictamente creciente, se define la segunda μ-variación de u sobre $[a, b]$ como:*

$$V^{\mu,2}(u; [a, b]) := \sup_{\pi \in \Pi_3([a,b])} \sum_{i=0}^{r-2} |u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}] - u_\mu[t_i, t_{i+1}]|$$

donde

$$u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}] := \frac{u(t_{i+2}) - u(t_{i+1})}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})}, \quad i = 0, ..., r - 2. \tag{1.5}$$

Si $V^{\mu,2}(u; [a, b]) < \infty$, diremos que u es de segunda μ-variación acotada.

La clase de todas la funciones de segunda μ-variación acotada (sobre $[a, b]$), es denotada por $BV^{\mu,2}([a, b])$.

Las siguientes son propiedades de las funciones en $BV^{\mu,2}([a, b])$, (ver [21]).

Proposición 1.3.1.

- *Si $a < c < b$, entonces $V^{\mu,2}(u; [a, b]) \geq V^{\mu,2}(u; [a, c]) + V^{\mu,2}(u; [c, b])$.*
- *Si $u \in BV^{\mu,2}([a, b])$, entonces u_μ es acotado sobre $[a, b]$*

Una interesante relación entre segunda μ-variación acotada y la integral indefinida de Riemann-Stieltjes de funciones de variación acotada (en el sentido ordinario de Jordan) está dada por la siguiente proposición.

Teorema 1.4 ([13],Theorem 1)**.** *Una función F definida sobre un intervalo $[a,b]$ es la integral Lebesgue- Stieltjes de una función f de variación acotada sobre $[a,b]$, con respecto a una función creciente m sobre $[a,b]$, es necesario y suficiente que F tenga pendiente-variación acotada con respecto a m sobre $[a,b]$.*

En 1992, N. Merentes en ([16]) introduce el concepto de (p,2)-variación, haciendo una combinación de los conceptos de variación presentados por F. Riesz y De la Vallée Poussin en la siguiente forma:

Definición 1.6. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces la $(p,2)$- variación de u sobre el intervalo $[a,b]$ es definida por*

$$V_p^2(u;[a,b]) : \;=\; \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{n-2} \left| \frac{u[t_{i+1},t_{i+2}] - u[t_i,t_{i+1}]}{t_{i+2}-t_i} \right|^p |t_{i+2}-t_i|$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones ξ del intervalo $[a,b]$ de al menos tres puntos.

Cuando $V_p^2(u) < \infty$ diremos que u tiene $(p,2)$- variación acotada sobre $[a,b]$ y escribiremos $u \in BV_p^2([a,b])$.

A continuación presentamos algunas propiedades fundamentales de la $(p,2)$- variación, ver [16].

Lema 1.3.2 ([16])**.** *Sea $1 < p < \infty$. Si $V_p^2(u;[a,b])$, entonces u tiene segunda variación acotada y*

$$V_p^2(u;[a,b]) \leq \left(V_p^2(u;[a,b])\right)^{1/p} |b-a|^{1-1/p}.$$

Lema 1.3.3 ([16])**.** *Sea $1 < p < \infty$. Si $V_p^2(u;[a,b]) < \infty$, entonces u es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y u puede ser expresada como una diferencia de dos funciones convexas.*

Lema 1.3.4 (Generalización del Lema de Riesz,[16]).

$$V_p^2(u;[a,b]) < \infty, \text{ si y solo si, } u' \in AC[a,b] \text{ y } u'' \in L_p[a,b].$$

Además,

$$V_p^2(u;[a,b]) = \int_a^b |u''(t)|^p dt.$$

Capítulo 2

Funciones de Segunda Variación Acotada Bi-dimensional

En este capítulo comenzamos recordando la definición dada por G. Vitali y G. Hardy de función de variación acotada en el plano y desde un punto de vista espacial introduciremos generalizaciones de las nociones de segunda variación en el sentido de De La Vallée Poussin y posteriormente la de pendiente variación dada por Huggins para el plano.

De La Vallée Poussin

Entre los aportes de esta investigación mostraremos que estas dos nuevas clases de funciones tienen estructura de espacios vectoriales y las dotaremos de normas, respectivamente, respecto a las cuales resultan ser espacios de Banach, estos resultados son considerados de los artículos [9], aceptado para publicación en la revista *Commentationes Mathematicae*, y de [10], el cual está en proceso de arbitraje.

2.1. Variación Bi-dimensional

En 1905-06 G. *Vitali* y G. *Hardy* (ver [11, 28]) extienden el concepto de función de variación acotada introducido por *C. Jordan* a funciones definidas en un rectángulo $I_b^a = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Usaremos las siguientes notaciones clásicas (ver [1, 2, 11, 28]).

Sea $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, tal que $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$. En lo que sigue, usaremos el símbolo $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ para denotar el rectángulo básico $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Para $\xi := \{t_i\}_{i=0}^n \in \Pi([a_1, b_1])$ (conjunto de particiones de $[a_1, b_1]$) y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^m \in \Pi([a_2, b_2])$ (conjunto de particiones de $[a_2, b_2]$) utilizaremos la siguiente notación:

(i) $\Delta_{10}u(t_i, s) := u(t_i, s) - u(t_{i-1}, s)$ para $s \in [a_2, b_2]$ fijo.

(ii) $\Delta_{01}u(t, s_j) := u(t, s_j) - u(t, s_{j-1})$ para $t \in [a_1, b_1]$ fijo.

(iii) $\Delta_{11}u(t_i, s_j) := u(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i\, s_j) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1})$.

Definición 2.1.1. Sea $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$.

(A) Si $s \in [a_2, b_2]$ fijo, definimos *la variación en el sentido de Jordan* de u en $[a_1, b_1] \times \{s\}$ por

$$V_{[a_1,b_1]}\,(u(\cdot, s)) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta_{10}u(t_i, s)\right|,$$

donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\xi \in \Pi([a_1, b_1])$.

(B) De manera similar para $t \in [a_1, b_1]$, definimos *la variación en el sentido de Jordan* de u en $\{t\} \times [a_2, b_2]$ por

$$V_{[a_2,b_2]}\left(u(t,\cdot)\right) := \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{01} u(t, s_j)\right|,$$

donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\eta \in \Pi([a_2, b_2])$.

(C) Definimos *la variación de u, en el sentido de Hardy-Vitali* como

$$V(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) := \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{11} u(t_i\, s_j)\right|$$

donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones (ξ, η) de $\Pi([a_1, b_1]) \times \Pi([a_2, b_2])$.

(D) *La total variación de u sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$* es definida como

$$TV(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) := V_{[a_1,b_1]}\left(u(\cdot, s_0)\right) \; + \; V_{[a_2,b_2]}\left(u(t_0, \cdot)\right) \; + \; V(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

donde (t_0, s_0) es cualquier punto en $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$.

(E) u es de total variación acotada si $TV(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < \infty$. La clase de todas las funciones $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ de total variación acotada es denotado como $BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Para la definición de la variación total de u in (D) es irrelevante la escogencia del punto $(t_0, s_0) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$. Este hecho es una de las consecuencias de la próxima proposición, la prueba se sigue de una manera directa de las definiciones y se omitirá.

Proposición 2.1.2. *Supongamos $V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < \infty$. Entonces*

$$\left|V_{[a_2,b_2]}\left(u(t_2,\cdot)\right) - V_{[a_2,b_2]}\left(u(t_1,\cdot)\right)\right| \leq V(f; [t_1, t_2] \times [a_2, b_2]) \leq V(f; I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$$

para todo $a_1 \leq t_1 < t_2 \leq b_1$.

Un estimado similar se sigue para $V_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, s))$.

Teorema 2.1.3 ([6]). *El espacio* $BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ *es un Álgebra de Banach con respecto a la norma*

$$\|u\| := |u(a)| + TV(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

Para más información acerca de las propiedades de funciones en $BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ el lector puede revisar [12] (c.f. también [6]).

Usando técnicas dadas anteriormente, para definir la variación bi-dimensional, que llamaremos de tipo Hardy-Vitali, se introduce en la siguiente sección la extension al plano de la noción de función de variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin en [7], así como, la noción de función de *pendiente-variación* acotada dada por Huggins en [13], tema central de este trabajo.

2.2. Segunda Variación Bi-dimensional

A partir de (1.3) introducimos la noción de segunda variación acotada de funciones definidas en un rectángulo $I_b^a = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Sea $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$, $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$. Usaremos las siguientes notaciones:

(i) Para cada $s \in [a_2, b_2]$ fijo, diremos que

$$\begin{aligned} u[t_{i+1}, t_{i+2}; s] \;&:=\; \frac{u(t_{i+2}, s) - u(t_{i+1}, s)}{t_{i+2} - t_{i+1}} \\ \Delta_{10} u[t_{i+1}, t_{i+2}; s] : \;&=\; u[t_{i+1}, t_{i+2}; s] - u[t_i, t_{i+1}; s] \quad \text{y} \\ V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, s)) : \;&=\; \sup_{\xi \in \Pi_3([a_2,b_2])} \sum_{i=0}^{n-2} \left|\Delta_{10} u[t_{i+1}, t_{i+2}; s]\right| . \end{aligned}$$

(ii) De manera similar, para cada $t \in [a_1, b_1]$ fijo,

$$u[t; s_{j+1}, s_{j+2}] : \;=\; \frac{u(t, s_{j+2}) - u(t, s_{j+1})}{s_{j+2} - s_{j+1}}$$

$$\Delta_{01} u[t; s_{j+1}, s_{j+2}] \;:=\; u[t; s_{j+1}, s_{j+2}] - u[t; s_j, s_{j+1}] \tag{2.1}$$

$$V^2_{[a_2,b_2]}(u(t, \cdot)) \;:=\; \sup_{\eta \in \Pi_3([a_2,b_2])} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \Delta_{01} u[t; s_{j+1}, s_{j+2}] \right| .$$

Definición 2.2.1. Sea $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$.

La Segunda Variación de u sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ en el sentido de De La Vallée Poussin, es definida como

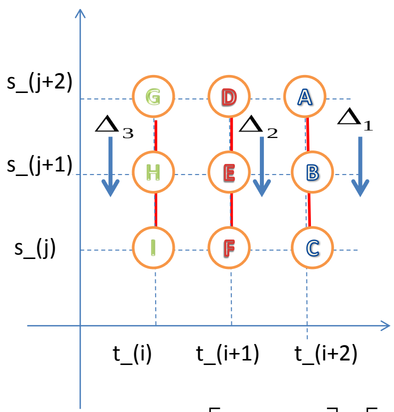
$$V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) := \sup_{(\xi,\eta)} V^2_{I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}(u, \xi \times \eta)$$

donde $V^2_{I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}(u, \xi \times \eta) := \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} |\Delta^2_{11} u(t_i, s_j)|$ con

$$\begin{aligned} \Delta^2_{11} u(t_i, s_j) : \;&=\; \frac{\Delta_{01} u[t_{i+2}; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u[t_{i+1}; s_{j+1}, s_{j+2}]}{t_{i+2} - t_{i+1}} \\ &-\; \left[\frac{\Delta_{01} u[t_{i+1}; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u[t_i; s_{j+1}, s_{j+2}]}{t_{i+1} - t_i} \right], \end{aligned}$$

y el supremo es considerao sobre el conjunto de todas las particiones (ξ, η) de $\Pi_3([a_1, b_1]) \times \Pi_3([a_2, b_2])$.

Gráficamente $\Delta^2_{11} u(t_i, s_j)$ se obtiene como sigue:



segunda variación vertical fijando t_{i+2}

$$\Delta_1 = \frac{u(A)-u(B)}{s_{j+2}-s_{j+1}} - \frac{u(B)-u(C)}{s_{j+1}-s_j}$$

segunda variación vertical fijando t_{i+1}

$$\Delta_2 = \frac{u(D)-u(E)}{s_{j+2}-s_{j+1}} - \frac{u(E)-u(F)}{s_{j+1}-s_j}$$

segunda variación vertical fijando t_i

$$\Delta_3 = \frac{u(G)-u(H)}{s_{j+2}-s_{j+1}} - \frac{u(H)-u(I)}{s_{j+1}-s_j}$$

$$\Delta^2{}_{11}u(t_i,s_j) := \left[\frac{\Delta_1-\Delta_2}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right] - \left[\frac{\Delta_2-\Delta_3}{t_{i+1}-t_i}\right]$$

La segunda variación bi-dimensional de u en el sentido de De La Vallée Poussin, es definida por

$$\begin{aligned} TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) :=\ & V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \\ &+ V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,a_2)) + V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,b_2)) \\ &+ V^2_{[a_2,b_2]}(u(a_1,\cdot)) + V^2_{[a_2,b_2]}(u(b_1,\cdot)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

y una función $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$, es de segunda variación bi-dimensional acotada si

$$TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < \infty.$$

La clase de todas las funciones $u \in \mathbb{R}^{I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}$ de segunda variación acotada es definida por $V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$; esto es,

$$V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) := \left\{u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R} /\ TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < \infty\right\}.$$

Observación 2.2.2. *Para definir* Δ_{11}^2 *solamente consideramos combinaciones de expresiones de tipo* Δ_{01} *(ver (2.1)). De hecho,* Δ_{11}^2 *puede ser definida también de la manera siguiente:*

Para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m-2\}$ *fijo, definimos la función* $\Delta_{01}^2[u]_j : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *como la (segundo orden) variación cociente de diferencias*

$$\Delta_{01}^2[u]_j(t) := \Delta_{01}u[t; s_j, s_{j+1}].$$

Entonces, es fácil ver que

$$\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j) = \Delta_{01}^2[u]_{j+1}[t_{i+1}, t_{i+2}] - \Delta_{01}^2[u]_{j+1}[t_i, t_{i+1}]$$

(Recalquemos la notación estandar $f[a, b]$ *para el cociente de diferencias* $f[a, b] := (f(b) - f(a))/(b - a)$ *(ver (1.5))).*

Si en lugar de proceder como se indico anteriormente, consideremos las siguientes variaciones cocientes de diferencias de expresiones de tipo Δ_{10}*, entonces, un razonamiento análogo nos llevaría a diferencias de tipo*

$$\Delta_{10}^2[u]_{i+1}[s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{10}^2[u]_{i+1}[s_j, s_{j+1}] \tag{2.3}$$

pero es fácil de verificar, despues de expandir y reorganizar, que la diferencia (2.3) es precisamente $\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j)$*. Así nuestra definición de* $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ *es independiente de la escogencia de* Δ_{01} *o* Δ_{10}*, para realizar las variaciones de cocientes de diferencias.*

Ejemplo 2.2.3. *Sea* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ *tal que* $u(x, y) = (x + y)^2$*. Entonces* $u \in V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*.*

Sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^n \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^m \in \Pi_3([a_2, b_2])$.

1. Para estimar $V_{[a_2,b_2]}^2(u)$ notemos que para todo $t \in [a_1, b_1]$

$$\sup_{\xi} \sum_{j=0}^{m-2} |\Delta_{01}[t, s_{j+1}, s_{j+2}]| = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, s) \right| ds = 2(b_2 - a_2).$$

2. De manera similar, para $s \in [a_2, b_2]$

$$\sup_{\xi} \sum_{i=0}^{n-2} |\Delta_{10} u[t_{i+1}, t_{i+2}; s]| = 2(b_1 - a_1).$$

3. Finalmente, por un cálculo directo

$$\Delta_{01} u[t; s_{j+1}, s_{j+2}] = s_{j+2} - s_j \quad \text{para todo} \quad t \in [a_1, b_1].$$

Se sigue que $\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j) = 0$ y $TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 4(b_1 - a_1 + b_2 - a_2)$.

La prueba del siguiente lema sigue de una forma directa de la definición.

Lema 2.2.4. *Si u y v pertenecen a $V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, y λ es cualquier constante real,entonces*

$$TV^2(\lambda u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \;\; = \;\; |\lambda| TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$$

y

$$TV^2(u + v, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \;\; \leq \;\; TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) + TV^2(v, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

Lema 2.2.5. *Sea $u \in V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*

(a) (Monotonicidad) *Si $c = (c_1, c_2)$ y $d = (d_1, d_2)$ con $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$ y $a_2 < c_2 < d_2 < b_2$. Entonces*

$$TV^2(u, I_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}) \leq TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

(b) (Semi-aditividad) *Si $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < y < b_2$. Entonces*

- $V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{x},\mathbf{b_2})}\right) + V^2\left(u, I_{(\mathbf{x},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.
- $V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{y})}\right) + V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{y})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Demostración. Para verificar (**a**), sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([c_1, d_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([c_2, d_2])$. Consideremos ahora, particiones $\widetilde{\xi} := \{a_1\} \bigcup \{t_i\}_{i=0}^{n} \bigcup \{b_1\} \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\widetilde{\eta} := \{a_2\} \bigcup \{s_j\}_{j=0}^{m} \bigcup \{b_2\} \in \Pi_3([a_2, b_2])$ de acá,

1. $V^2_{[c_1,d_1]}(u) \leq V^2_{[a_1,b_1]}(u)$, se sigue por la parte (2) de la Proposición 1.2.1.

2. $V^2_{[c_2,d_2]}(u) \leq V^2_{[a_2,b_2]}(u)$, se sigue por la parte (2) de la Proposición 1.2.1.

3. $V^2(u, I_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}) \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

De lo cual se concluye

$$TV(u, I_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}) \leq TV(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$$

Para verificar (**b**), sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, x])$, $\widetilde{\xi} := \{\widetilde{t}_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([x, b_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$. Entonces

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j)\right| + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta_{11}^2 u(\widetilde{t}_i, s_j)\right| \\
\leq \; & \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j)\right| + \sum_{j=0}^{m-2} \left| \frac{\Delta_{01} u[\widetilde{t}_1; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u[\widetilde{t}_0; s_{j+1}, s_{j+2}]}{\widetilde{t}_1 - \widetilde{t}_0} \right. \\
- \; & \left. \left[\frac{\Delta_{01} u[t_n; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u[t_{n-1}; s_{j+1}, s_{j+2}]}{t_n - t_{n-1}} \right] \right| \\
+ \; & \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta_{11}^2 u(\widetilde{t}_i, s_j)\right| \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).
\end{aligned}$$

Por tanto

$V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{x},\mathbf{b_2})}\right) + V^2\left(u, I_{(\mathbf{x},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. La prueba de que $V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{y})}\right) + V^2\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{y})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es análoga a la anterior. □

Definición 2.2.6. Por Lema 2.2.4, $V^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio vectorial y en lo que sigue será denotado como $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Observación 2.2.7. *En el caso unidimensional la noción de segunda variación juega un rol similar al desempeñado por las segundas derivadas en varios sentidos; por ejemplo, si* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *satisface* $V^2(f, [a, b]) = 0$, *entonces* f *debe ser una función afin (lineal+ constante). Es fácil ver que cualquier función afín* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *cuando es restringida a* $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ *satisface*

$$\Delta_{11} u[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := u(b_1, b_2) - u(a_1, b_2) - u(b_1, a_2) + u(a_1, a_2) = 0,$$

y sus coeficientes dependen linealmente de los valores de u *sobre los vértices de* $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$. *La siguiente proposición generaliza este hecho para funciones de segunda variación bi-dimensional acotada sobre un rectángulo* $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$.

Teorema 2.2.8. *Una función* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$, *satisface las condiciones* $\Delta_{11} u[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = 0$ *y* $TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ *si y sólo si existen constantes* A, B, C *tales que* $u(x, y) = Ax + By + C$.

Demostración. Si $V^2(u, [a, b]) = 0$ entonces, para todo $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, se cumplen las siguientes implicaciones:

$$V^2_{[a_2,b_2]}(u(a_1, \cdot)) = 0 \implies \frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{b_2 - y} = \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{y - a_2}; \tag{2.4}$$

$$V^2_{[a_2,b_2]}(u(b_1 \cdot)) = 0 \implies \frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{b_2 - y} = \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{y - a_2}; \tag{2.5}$$

$$V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, a_2)) = 0 \implies \frac{u(b_1, a_2) - u(x, a_2)}{b_1 - x} = \frac{u(x, a_2) - u(a_1, a_2)}{x - a_1}; \tag{2.6}$$

$$V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot, b_2)) = 0 \implies \frac{u(b_1, b_2) - u(x, b_2)}{b_1 - x} = \frac{u(x, b_2) - u(a_1, b_2)}{x - a_1}, \tag{2.7}$$

mientras que $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ implica

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_1 - x}\left[\frac{u(b_1,b_2) - u(b_1,y)}{b_2 - y} - \frac{u(b_1,y) - u(b_1,a_2)}{y - a_2}\right.\\
&\left. - \left(\frac{u(x,b_2) - u(x,y)}{b_2 - y} - \frac{u(x,y) - u(x,a_2)}{y - a_2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{x - a_1}\left[\frac{u(x,b_2) - u(x,y)}{b_2 - y} - \frac{u(x,y) - u(x,a_2)}{y - a_2}\right.\\
&\left. - \left(\frac{u(a_1,b_2) - u(a_1,y)}{b_2 - y} - \frac{u(a_1,y) - u(a_1,a_2)}{y - a_2}\right)\right].
\end{aligned}$$

El primer y cuarto sumando de las anterior igualdad son nulos en virtud de (2.4) y (2.5). Así,tenemos

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{b_1 - x}\left[\frac{u(x,b_2) - u(x,y)}{b_2 - y} - \frac{u(x,y) - u(x,a_2)}{y - a_2}\right] = \\
&\frac{1}{x - a_1}\left[\frac{u(x,b_2) - u(x,y)}{b_2 - y} - \frac{u(x,y) - u(x,a_2)}{y - a_2}\right]
\end{aligned}$$

y resolviendo esta ecuación para $u(x, y)$ obtenemos

$$u(x,y) = \left(\frac{y - a_2}{b_2 - a_2}\right) u(x,b_2) + \left(\frac{b_2 - y}{b_2 - a_2}\right) u(x,a_2). \tag{2.8}$$

Por otro lado, haciendo uso de (2.6) and (2.7) obtenemos las relaciones

$$u(x,a_2) = \left(\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}\right) u(b_1,a_2) + \left(\frac{b_1 - x}{b_1 - a_1}\right) u(a_1,a_2) \tag{2.9}$$

y

$$u(x,b_2) = \left(\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}\right) u(b_1,b_2) + \left(\frac{b_1 - x}{b_1 - a_1}\right) u(a_1,b_2), \tag{2.10}$$

la cual, combinada con (2.8) se tiene

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \left(\frac{y - a_2}{b_2 - a_2}\right)\left(\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}\right) u(b_1,b_2) + \left(\frac{y - a_2}{b_2 - a_2}\right)\left(\frac{b_1 - x}{b_1 - a_1}\right) u(a_1,b_2) \\
&+ \left(\frac{b_2 - y}{b_2 - a_2}\right)\left(\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}\right) u(b_1,a_2) + \left(\frac{b_2 - y}{b_2 - a_2}\right)\left(\frac{b_1 - x}{b_1 - a_1}\right) u(a_1,a_2).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora, aunque (2.11) fue establecido suponiendo que $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, un cálculo directo muestra que si reemplazamos en (2.11), (x, y) por cualquier punto en la frontera de $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, se obtiene una identidad. Así (2.11) en realidad vale para todo $(x, y) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$.

Finalmente, notemos que, después de separar los términos de esta última expresión para $u(x, y)$, el coeficiente del producto xy es

$$\frac{\Delta_{11} u[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}$$

el cual es cero, por hipótesis. Así u debe ser una función afín.

Recíprocamente si $u = Ax + By + C$ entonces $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ y

por Proposición 1.2.1

$$V^2(u(., a_2)[a_1, b_1]) = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ax + Ba_2 + C) \right| dx = 0$$

y

$$V^2(u(., b_2)[a_1, b_1]) = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ax + Bb_2 + C) \right| dx = 0,$$

análogamente

$$V^2(u(a_1, .)[a_2, b_2]) = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Aa_1 + By + C) \right| dy = 0$$

y

$$V^2(u(b_1, .)[a_2, b_2]) = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ab_1 + By + C) \right| dy = 0.$$

Por tanto, por (2.2)

$$TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0.$$

□

Basado en el Teorema 2.2.8, y en la discusión previa a esto, la siguiente definición es ahora natural.

Definición 2.2.9. Para cualquier $u \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ definimos

$$\|u\| \;:=\; \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] + TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}),$$

donde $\Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] := |u(a_1,a_2)| + |u(b_1,b_2)| + |u(a_1,b_2)| + |u(b_1,a_2)|$.

Corolario 2.2.10. *$\|\cdot\|$ es una norma en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.*

Demostración. sea $u \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Por definición $\|u\| \geq 0$ y claramente $u = 0$ implica $\|u\| = 0$. Por otro lado, si $\|u\| = 0$, entonces $TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ y $|\Delta_{11} u[\mathbf{a},\mathbf{b}]| \leq \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] = 0$. Se sigue por (2.11) que $u \equiv 0$.

Las propiedades:

(P_2) $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ y

(P_3) $\quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad (u, v \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}))$

se siguen fácilmente por la definición y propiedades de los funcionales módulo (| |) y supremo (sup). □

En la siguiente proposición presentamos un polinomio mayorante para las funciones en la bola unitaria de $(BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}), \|\cdot\|)$. Esta propiedad será fundamental para demostrar que $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.2.11. *Existe un polinomio de grado cuatro $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para todo $u \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*

$$|u(x,y)| \leq p(x,y)\,\|u\| \quad \textit{para todo } (x,y) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}.$$

En particular, $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es una subvariedad lineal de $\mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ el espacio de las funciones acotadas sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ con la norma del supremo.

Demostración. Sea u en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Digamos $\delta_1 := b_1 - a_1$ y $\delta_2 := a_2 - b_2$. Entonces, por (2.2) y la Definición 2.27, para todo $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\left| \frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{b_2 - y} - \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{(y - a_2)} \right| \leq \|u\|; \tag{2.12}$$

$$\left| \frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{b_2 - y} - \frac{u(b_1, y) + u(b_1, a_2)}{y - a_2} \right| \leq \|u\|; \tag{2.13}$$

$$\left| \frac{u(b_1, a_2) - u(x, a_2)}{b_1 - x} - \frac{u(x, a_2) + u(a_1, a_2)}{x - a_1} \right| \leq \|u\|; \tag{2.14}$$

$$\left| \frac{u(b_1, b_2) - u(x, b_2)}{b_1 - x} - \frac{u(x, b_2) + u(a_1, b_2)}{x - a_1} \right| \leq \|u\| \tag{2.15}$$

mientras que $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq \|u\|$ implica

$$\begin{aligned} &\Bigg| \frac{1}{b_1 - x} \left[\frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{b_2 - y} - \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{y - a_2} \right. \\ &\left. - \left(\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{b_2 - y} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{y - a_2} \right) \right] \\ &- \frac{1}{x - a_1} \left[\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{b_2 - y} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{y - a_2} \right. \\ &\left. - \left(\frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{b_2 - y} - \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{y - a_2} \right) \right] \Bigg| \leq \|u\|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora, (2.14),a su vez, implica

$$\left|\frac{\delta_1}{(b_1-x)(x-a_1)}u(x,a_2)\right| \leq \|u\| + \left|\frac{u(b_1,a_2)}{(b_1-x)}\right| + \left|\frac{u(a_1,a_2)}{x-a_1}\right|$$

o

$$|u(x,a_2)| \leq \frac{(b_1-x)(x-a_1)\|u\|}{\delta_1} + \left|\frac{(x-a_1)u(b_1,a_2)}{\delta_1}\right| + \left|\frac{(b_1-x)u(a_1,a_2)}{\delta_1}\right|.$$

De manera similar, (2.15) implica

$$|u(x,b_2)| \leq \frac{(b_1-x)(x-a_1)\|u\|}{\delta_1} + \left|\frac{(x-a_1)u(b_1,b_2)}{\delta_1}\right| + \left|\frac{(b_1-x)u(a_1,b_2)}{\delta_1}\right|.$$

Por otro lado, de la desigualdad (2.16)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\delta_1\delta_2 u(x,y)}{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}\right| \leq \|u\| + \\ &\left|\frac{u(a_1,b_2)-u(a_1,y)}{(x-a_1)(b_2-y)} - \frac{u(a_1,y)-u(a_1,a_2)}{(x-a_1)(y-a_2)}\right| + \\ &\left|\frac{u(b_1,b_2)-u(b_1,y)}{(b_1-x)(b_2-y)} - \frac{u(b_1,y)+u(b_1,a_2)}{(b_1-x)(y-a_2)}\right| + \\ &\left|\frac{\delta_1 u(x,b_2)}{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)}\right| + \left|\frac{\delta_1 u(x,a_2)}{(b_1-x)(x-a_1)(y-a_2)}\right|,\end{aligned}$$

y de esto, por (2.12) y (2.13), obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\delta_1\delta_2 u(x,y)}{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}\right| \quad &\leq \quad \|u\| + \frac{\|u\|}{(x-a_1)} + \frac{\|u\|}{(b_1-x))} + \\ &\left|\frac{\delta_1 u(x,b_2)}{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)}\right| + \\ &\left|\frac{\delta_1 u(x,a_2)}{(b_1-x)(x-a_1)(y-a_2)}\right|\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}|u(x,y)| \quad \leq \quad & \frac{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2}\|u\| + \frac{(b_1-x)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2}\|u\| \\ &+ \frac{(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2}\|u\| + \left|\frac{(y-a_2)u(x,b_2)}{\delta_2}\right| \\ &+ \left|\frac{(b_2-y)u(x,a_2)}{\delta_2}\right|.\end{aligned}$$

tomando en cuenta (2.14), (2.15) y el hecho que $\Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] \leq \|u\|$, se obtiene

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| \quad \leq \quad & \Bigg[\frac{(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2} + \frac{(b_1-x)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2} \\
& + \frac{(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2)}{\delta_1\delta_2} + \frac{(y-a_2)(b_1-x)(x-a_1)}{\delta_2\delta_1} \\
& + \frac{(y-a_2)(x-a_1)}{\delta_2\delta_1} + \frac{(y-a_2)(b_1-x)}{\delta_1\delta_2} + \frac{(b_2-y)(x-a_1)}{\delta_2\delta_1} \\
& + \frac{(b_2-y)(b_1-x)(x-a_1)}{\delta_2\delta_1} + \frac{(b_2-y)(b_1-x)}{\delta_2\delta_1}\Bigg] \|u\|.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Finalmente, reagrupando el lado derecho de esta desigualdad, podemos definir

$$\begin{aligned}
p(x,y) \quad := \quad & 1 + \delta_1^{-1}\delta_2^{-1}(b_1-x)(x-a_1)(b_2-y)(y-a_2) \\
& + \delta_1^{-1}(b_1-x)(x-a_1) + \delta_2^{-1}(b_2-y)(y-a_2).
\end{aligned}$$

Ahora, cualquier punto en la frontera de $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ la cual no es un vértice satisface una de las desigualdades (2.12), (2.13), (2.14) o (2.15), y así (2.17) se cumple para esos puntos. Por otro lado, si (x_0, y_0) es un vértice entonces $p(x_0, y_0) = 1$ y ya que $|u(x_0, y_0)| \leq \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] \leq \|u\|$, (2.17) se cumple para todo $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Corolario 2.2.12. *$BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y sea p el polinomio dado por la Proposición 2.2.11. Entonces, para todo $(x, y) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ y todo $r, s \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|(u_r - u_s)(x,y)| \leq \sup_{(x,y)\in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}} p(x,y)\,\|u_r - u_m\|.$$

Así, $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y por tanto existe $u \in \mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ tal que $\|u_r - u\|_\infty \to 0$. Fijemos $\epsilon > 0$. Ya que $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, existe $\rho \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r, s > \rho$ y todo $\xi_0 = \{t_i^0\}_1^{n_0} \in \Pi_3[a_1, b_1]$, $\eta_0 = \{s_j^0\}_1^{m_0} \in \Pi_3[a_2, b_2]$:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &> TV^2(u_r - u_s, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \geq V^2(u_r - u_s, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \\
&\geq \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u_s)(t_i, s_j) \right| : \xi = \{t_i\}_1^n \in \Pi_3[a_1, b_1], \eta = \{s_j\}_1^m \in \Pi_3[a_2, b_2] \right\} \\
&\geq \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u_s)(t_i^0, s_j^0) \right|
\end{aligned}
$$

Se sigue para todo $r > \rho$ y todo $\xi_0 = \{t_i^0\}_1^{n_0} \in \Pi_3[a_1, b_1]$, $\eta_0 = \{s_j^0\}_1^{m_0} \in \Pi_3[a_2, b_2]$:

$$
\epsilon \geq \lim_{s\to\infty} \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u_s)(t_i^0, s_j^0) \right| = \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u)(t_i^0, s_j^0) \right| \tag{2.18}
$$

En consecuencia, para todo $r > \rho$

$$
V^2\left(u_r - u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right) = \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u)(t_i, s_j) \right| \leq \epsilon.
$$

Aplicando un procedimiento similar a los sumandos restantes de $TV^2(u_r - u_s)$, implica que para todo $r > \rho$

$$
TV^2(u_r - u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq 5\epsilon,
$$

la cual, a su vez, implica $u \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y (ya que $u_r \to u$ puntualmente en $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$)

$$
\lim_{r\to\infty} \|u_r - u\| = 0.
$$

Por tanto, $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.

$\square$

2.3. μ-Segunda Variación Bi-dimensional

Sean $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$, $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$, $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{r} \in \Pi_3([a_2, b_2])$ y μ una función estrictamente creciente a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$. Usaremos las siguientes notaciones:

(i) Para cada $s \in [a_2, b_2]$ fijo, diremos

$$u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}; s] \quad := \quad \frac{u(t_{i+2}, s) - u(t_{i+1}, s)}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})},$$

$$\Delta_{10} u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}; s] \quad := \quad u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}; s] - u_\mu[t_i, t_{i+1}; s] \quad \text{y}$$

$$V_{[a_1,b_1]}^{\mu,2}(u(\cdot, s)) \quad := \quad \sup_{\xi} \sum_{i=0}^{n-2} |\Delta_{10} u_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}; s]| .$$

(ii) De manera similar, para cada $t \in [a_1, b_1]$ fijo,

$$u_\mu[t; s_{j+1}, s_{j+2}] \quad := \quad \frac{u(t, s_{j+2}) - u(t, s_{j+1})}{\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})},$$

$$\Delta_{01} u_\mu[t; s_{j+1}, s_{j+2}] \quad := \quad u_\mu[t; s_{j+1}, s_{j+2}] - u_\mu[t; s_j, s_{j+1}] \quad \text{y}$$

$$V_{[a_2,b_2]}^{\mu,2}(u(t, \cdot)) \quad := \quad \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{r-2} |\Delta_{01} u_\mu[t; s_{j+1}, s_{j+2}]| .$$

Definición 2.3.1. Sea $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ y μ una función estrictamente creciente a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$.

La segunda μ-variación de u sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ es definida como

$$V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) := \sup_{(\xi,\eta)} V_{I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}^{\mu,2}(u, \xi \times \eta),$$

donde $V^{\mu,2}_{I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}}(u,\xi\times\eta) := \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{r-2} |\Delta^2_{11}u_\mu(t_i,s_j)|$ con

$$\begin{aligned}\Delta^2_{11}u_\mu(t_i,s_j) : &= \frac{\Delta_{01}u_\mu[t_{i+2};s_{j+1},s_{j+2}] - \Delta_{01}u_\mu[t_{i+1};s_{j+1},s_{j+2}]}{\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1})}\\ &- \left[\frac{\Delta_{01}u_\mu[t_{i+1};s_{j+1},s_{j+2}] - \Delta_{01}u_\mu[t_i;s_{j+1},s_{j+2}]}{\mu(t_{i+1})-\mu(t_i)}\right],\end{aligned}$$

el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $(\xi,\eta)\in\Pi_3([a_1,b_1])\times\Pi_3([a_2,b_2])$.

La segunda μ-variación bi-dimensional de u se define como

$$\begin{aligned}TV^{\mu,2}(u,I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) := \; & V^{\mu,2}(u,I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) \\ &+ V^{\mu,2}_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,a_2)) + V^{m,2}_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,b_2)) \\ &+ V^{\mu,2}_{[a_2,b_2]}(u(a_1,\cdot)) + V^{\mu,2}_{[a_2,b_2]}(u(b_1,\cdot))\end{aligned} \tag{2.19}$$

y una función $u : I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}\to\mathbb{R}$, se dice de segunda μ-variación bi-dimensional acotada si

$$TV^{\mu,2}(u,I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) < \infty.$$

La clase de todas las funciones $u\in\mathbb{R}^{I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}}$ de segunda μ-variación bi-dimensional acotada es denotado por $V^{\mu,2}(I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}})$; esto es,

$$V^{\mu,2}(I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) := \left\{u : I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}\to\mathbb{R}/\; TV^{\mu,2}(u,I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) < \infty\right\}.$$

Observación 2.3.2. *Al igual que en 2.2.2, Δ^2_{11} puede ser definida de la siguiente forma:*

Para cada $j\in\{0,2,\dots,r-2\}$ fijo, definimos la función $\Delta^2_{01}[u]^\mu_j : [a_1,b_1]\to\mathbb{R}$ como la variación cociente de diferencias

$$\Delta^2_{01}[u]^\mu_j(t) := \Delta_{01}u_\mu[t;s_j,s_{j+1}].$$

Entonces, es fácil ver que

$$\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i, s_j) = \Delta_{01}^2[u]_{j+1}^\mu[t_{i+1}, t_{i+2}] - \Delta_{01}^2[u]_{j+1}^\mu[t_i, t_{i+1}] \tag{2.20}$$

Despues de expandir y reorganizar la diferencia (2.20) es precisamente $\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i, s_j)$*. Así nuestra definición de* $V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ *es independiente de la escogencia de* Δ_{01} *o* Δ_{10}*, para realizar las variaciones de cocientes de diferencia.*

La prueba del siguiente lema es directa de la definición.

Lema 2.3.3. *Si* u *y* v *pertenecen a* $V^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*, y* λ *es una constante real, entonces*

$$TV^{\mu,2}(\lambda u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \;\; = \;\; |\lambda| TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$$

y

$$TV^{\mu,2}(u+v, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \;\; \leq \;\; TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) + TV^{\mu,2}(v, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

Lema 2.3.4. *Sea* $u \in V^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

(Monotonicidad) *Si* $c = (c_1, c_2)$ *and* $d = (d_1, d_2)$ *con* $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$ *y* $a_2 < c_2 < d_2 < b_2$ *entonces*

$$TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}) \leq TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

(Semi-aditividad) *Si* $a_1 < x < b_1$ *y* $a_2 < y < b_2$ *entonces*

$$V^{\mu,2}\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{x},\mathbf{b_2})}\right) + V^{\mu,2}\left(u, I_{(\mathbf{x},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).$$

Demostración. Omitimos la prueba de (a) la cual es de manera similar a la correspondiente parte (a) del Lema 2.2.5.

Para probar (b), sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^n \in \Pi_3([a_1, x])$, $\widetilde{\xi} := \{\widetilde{t}_i\}_{i=0}^n \in \Pi_3([x, b_1])$ and $\eta := \{s_j\}_{j=0}^r \in \Pi_3([a_2, b_2])$. Entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{r-2} \left|\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i, s_j)\right| + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{r-2} \left|\Delta_{11}^2 u_\mu(\widetilde{t}_i, s_j)\right| \\
\leq \;& \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{r-2} \left|\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i, s_j)\right| + \sum_{j=0}^{r-2} \left| \frac{\Delta_{01} u_\mu[\widetilde{t}_1; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u_\mu[\widetilde{t}_0; s_{j+1}, s_{j+2}]}{\mu(\widetilde{t}_1) - \mu(\widetilde{t}_0)} \right. \\
- \;& \left. \left[\frac{\Delta_{01} u_\mu[t_n; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01} u_\mu[t_{n-1}; s_{j+1}, s_{j+2}]}{\mu(t_n) - \mu(t_{n-1})} \right] \right| \\
+ \;& \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta_{11}^2 u_\mu(\widetilde{t}_i, s_j)\right| \leq V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
V^{\mu,2}\left(u, I_{(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{x},\mathbf{b_2})}\right) + V^{\mu,2}\left(u, I_{(\mathbf{x},\mathbf{a_2})}^{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_2})}\right) \leq V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}). \qquad \square
$$

Definición 2.3.5. Por Lema 2.3.3, $V^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio lineal. En lo que sigue será denotado como $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Definición 2.3.6. Seaa $\mu : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que unaa función $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ es una μ-afín función si existen constantes reales A, B and C tales que

$$
u(x, y) = A\mu(x) + B\mu(y) + C.
$$

Observación 2.3.7. *Sea μ una función estrictamente creciente a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$. Es fácil ver que si $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo, y $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es cualquier μ-afín función entonces los coeficientes de u dependen linealmente de los valores de u sobre los vértices de $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ (con coeficientes dependiendo de $(\mu(b_i) - \mu(a_i))^{-1}; i = 1, 2$)) y*

$$
\Delta_{11} u[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := u(b_1, b_2) - u(a_1, b_2) - u(b_1, a_2) + u(a_1, a_2) = 0.
$$

Teorema 2.3.8. *Sea μ una función estrictamente creciente a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$. Una función $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones $\Delta_{11} u[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = 0$ y $TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ entonces existen constantes A, B, C tales que $u(x, y) = A\mu(x) + B\mu(y) + C$.*

Demostración. Si $TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ entonces, para todo $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ se cumplen las siguientes implicaciones:

$$V_{[a_2,b_2]}^{\mu,2}(u(a_1, \cdot)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} = \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)}; \tag{2.21}$$

$$V_{[a_2,b_2]}^{\mu,2}(u(b_1 \cdot)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} = \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)}; \tag{2.22}$$

$$V_{[a_1,b_1]}^{\mu,2}(u(\cdot, a_2)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{u(b_1, a_2) - u(x, a_2)}{\mu(b_1) - \mu(x)} = \frac{u(x, a_2) - u(a_1, a_2)}{\mu(x) - \mu(a_1)}; \tag{2.23}$$

$$V_{[a_1,b_1]}^{\mu,2}(u(\cdot, b_2)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{u(b_1, b_2) - u(x, b_2)}{\mu(b_1) - \mu(x)} = \frac{u(x, b_2) - u(a_1, b_2)}{\mu(x) - \mu(a_1)}; \tag{2.24}$$

mientras que, $V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ implica

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(b_1) - \mu(x)} \left[\frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right. \\
&\left. - \left(\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\mu(x) - \mu(a_1)} \left[\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right. \\
&\left. - \left(\frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Los primeros y cuartos sumandos de la desigualdad anterior son ceros, en virtud de (2.21) and (2.22). Así tenemos,

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mu(b_1) - \mu(x)} \left[\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right] = \\
&\frac{1}{\mu(x) - \mu(a_1)} \left[\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right]
\end{aligned}$$

y resolviendo esta ecuación paara $u(x,y)$ obtenemos

$$u(x,y) = \left(\frac{\mu(y)-\mu(a_2)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right) u(x,b_2) + \left(\frac{\mu(b_2)-\mu(y)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right) u(x,a_2). \qquad (2.25)$$

Por otro lado, haciendo uso de (2.23) y (2.24) obtenemos las relaciones

$$u(x,a_2) = \left(\frac{\mu(x)-\mu(a_1)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(b_1,a_2) + \left(\frac{\mu(b_1)-\mu(x)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(a_1,a_2)$$

y

$$u(x,b_2) = \left(\frac{\mu(x)-\mu(a_1)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(b_1,b_2) + \left(\frac{\mu(b_1)-\mu(x)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(a_1,b_2),$$

la cual, combinada con (2.25) tenemos

$$\begin{aligned} u(x,y) = & \left(\frac{\mu(y)-\mu(a_2)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right)\left(\frac{\mu(x)-\mu(a_1)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(b_1,b_2) + \left(\frac{\mu(y)-\mu(a_2)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right)\left(\frac{\mu(b_1)-\mu(x)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(a_1,b_2) \qquad (2.26) \\ & + \left(\frac{\mu(b_2)-\mu(y)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right)\left(\frac{\mu(x)-\mu(a_1)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(b_1,a_2) + \left(\frac{\mu(b_2)-\mu(y)}{\mu(b_2)-\mu(a_2)}\right)\left(\frac{\mu(b_1)-\mu(x)}{\mu(b_1)-\mu(a_1)}\right) u(a_1,a_2). \end{aligned}$$

Ahora, aunque (2.26) fue establecida suponiendo que $(x,y) \in (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$, un cálculo directo muestra que si reemplazamos en (2.26), (x,y) por cualquier punto en la frontera de $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, entonces se obtiene la identidad. Así (2.26) se cumple para todo $(x,y) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$. Finalmente, notemos que despues de expandir y separar los términos en el lado derecho de (2.26), el coeficiente del producto xy es

$$\frac{\Delta_{11}u[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mu(b_2)-\mu(a_2))(\mu(b_1)-\mu(a_1))}$$

la cual es cero, por hipótesis. Así u debe ser una función afín.

$\square$

Basado en el Teorema 2.3.8, y en la discusión previa a este, la definición siguiente es natural.

Definición 2.3.9. Para cualquier $u \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ definimos

$$\|u\| \ := \ \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] + TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}), \tag{2.27}$$

donde $\Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] := |u(a_1,a_2)| + |u(b_1,b_2)| + |u(a_1,b_2)| + |u(b_1,a_2)|$.

Corolario 2.3.10. $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Demostración. Sea $u \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.Por definición $\|u\| \geq 0$ y claramente $u = 0$ implica que $\|u\| = 0$. Por otro lado, si $\|u\| = 0$, entonces $TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = 0$ y $|\Delta_{11}u[\mathbf{a},\mathbf{b}]| \leq \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] = 0$. Se sigue por (2.26), que $u \equiv 0$.

Por otra parte, las propiedades:

(P_2) $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \ \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ y

(P_3) $\quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad (u, v \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}))$

se siguen fácilmente de la definición y propiedades de los funcionales módulo ($|\ |$) y supremo (sup). ☐

En la siguiente proposición presentamos una función fundamental que usaremos en la prueba de que $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.3.11. *Sea μ una función estrictamente creciente y continua a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$. Existe una funcón continua $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para todo $u \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*

$$|u(x,y)| \leq h(x,y)\,\|u\| \quad \textit{para todo } (x,y) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}.$$

En particular, $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es una subvariedad linael de $\mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, el espacio de Banach de todas las funciones acotadas sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ con la norma del supremo.

Demostración. Sea u en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Coloquemos $\delta_1 := \mu(b_1) - \mu(a_1)$ y $\delta_2 := \mu(b_2) - \mu(a_2)$. Entonces, por (2.19) y definición (2.27) para todo $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\left| \frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right| \leq \|u\|; \tag{2.28}$$

$$\left| \frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right| \leq \|u\|; \tag{2.29}$$

$$\left| \frac{u(b_1, a_2) - u(x, a_2)}{\mu(b_1) - \mu(x)} - \frac{u(x, a_2) - u(a_1, a_2)}{\mu(x) - \mu(a_1)} \right| \leq \|u\|; \tag{2.30}$$

$$\left| \frac{u(b_1, b_2) - u(x, b_2)}{\mu(b_1) - \mu(x)} - \frac{u(x, b_2) - u(a_1, b_2)}{\mu(x) - \mu(a_1)} \right| \leq \|u\|; \tag{2.31}$$

mientras que $\quad V^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq \|u\| \quad$ implica

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\mu(b_1) - \mu(x)} \left[\frac{u(b_1, b_2) - u(b_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(b_1, y) - u(b_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right.\right. \\
&- \left.\left(\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right) \right] \\
&- \frac{1}{\mu(x) - \mu(a_1)} \left[\frac{u(x, b_2) - u(x, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(x, y) - u(x, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right. \\
&- \left.\left.\left(\frac{u(a_1, b_2) - u(a_1, y)}{\mu(b_2) - \mu(y)} - \frac{u(a_1, y) - u(a_1, a_2)}{\mu(y) - \mu(a_2)} \right) \right] \right| \leq \|u\|.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ahora, (2.30), implica

$$\left| \frac{\delta_1}{(\mu(b_1) - \mu(x))(\mu(x) - \mu(a_1))} u(x, a_2) \right| \leq \|u\| + \left| \frac{u(b_1, a_2)}{\mu(b_1) - \mu(x)} \right| + \left| \frac{u(a_1, a_2)}{\mu(x) - \mu(a_1)} \right|$$

o

$$|u(x,a_2)| \leq \frac{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1)\|u\|}{\delta_1} + \left|\frac{(\mu(x)-\mu(a_1))u(b_1,a_2)}{\delta_1}\right| + \left|\frac{(\mu(b_1)-\mu(x))u(a_1,a_2)}{\delta_1}\right|.$$

De manera similarr, (2.31) implica que

$$|u(x,b_2)| \leq \frac{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))\|u\|}{\delta_1} + \left|\frac{(\mu(x)-\mu(a_1))u(b_1,b_2)}{\delta_1}\right| + \left|\frac{(\mu(b_1)-\mu(x))u(a_1,b_2)}{\delta_1}\right|. \tag{2.33}$$

Por otro lado, de la desigualdad (2.32),

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\delta_1\delta_2 u(x,y)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right| \leq \|u\| + \\
&\left|\frac{u(a_1,b_2)-u(a_1,y)}{(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))} - \frac{u(a_1,y)-u(a_1,a_2)}{(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right| + \\
&\left|\frac{u(b_1,b_2)-u(b_1,y)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(b_2)-\mu(y))} - \frac{u(b_1,y)-u(b_1,a_2)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right| + \\
&\left|\frac{\delta_1 u(x,b_2)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))}\right| + \left|\frac{\delta_1 u(x,a_2)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right|,
\end{aligned}$$

y de esta, por (2.28) y (2.29), se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\delta_1\delta_2 u(x,y)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right| \quad \leq \quad & \|u\| + \frac{\|u\|}{\mu(x)-\mu(a_1)} + \frac{\|u\|}{\mu(b_1)-\mu(x)} + \\
& \left|\frac{\delta_1 u(x,b_2)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))}\right| + \\
& \left|\frac{\delta_1 u(x,a_2)}{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(y)-\mu(a_2))}\right|
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| \quad \leq \quad & \frac{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2}\|u\| \\
& + \frac{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2}\|u\| \\
& + \frac{(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2}\|u\| + \left|\frac{(\mu(y)-\mu(a_2))u(x,b_2)}{\delta_2}\right| \\
& + \left|\frac{(\mu(b_2)-\mu(y))u(x,a_2)}{\delta_2}\right|.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta (2.30), (2.31) y el hecho que $\Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] \leq \|u\|$, obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x,y)| \quad \leq \quad & \Big[\frac{(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2} \\ & + \frac{(\mu(b_1)-\mu(x))((b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2} \\ & + \frac{(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2))}{\delta_1\delta_2} \\ & + \frac{(\mu(y)-\mu(a_2))(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))}{\delta_2\delta_1} + \frac{(\mu(y)-\mu(a_2))(\mu(x)-\mu(a_1))}{\delta_2\delta_1} \\ & + \frac{(\mu(y)-\mu(a_2))(\mu(b_1)-\mu(x))}{\delta_1\delta_2} + \frac{(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(x)-\mu(a_1))}{\delta_2\delta_1} \\ & + \frac{(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))}{\delta_2\delta_1} + \frac{(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(b_1)-\mu(x))}{\delta_2\delta_1}\Big]\,\|u\|. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Finalmente, reagrupando el lado derecho de esta desigualdad podemos definir

$$\begin{aligned} h(x,y) \quad := \quad & 1+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2)) \\ & +\delta_1^{-1}(\mu(b_1)-\mu(x))(\mu(x)-\mu(a_1))+\delta_2^{-1}(\mu(b_2)-\mu(y))(\mu(y)-\mu(a_2)). \end{aligned}$$

Ahora,cualquier punto en la frontera de $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ la cual no es un vértice debe satisfacer, respectivamente, una de las desigualdades (2.28), (2.29), (2.30) or (2.31), y así (2.34) se cumple también para estos puntos. Por otro lado, si (x_0,y_0) es un vértice entonces $h(x_0,y_0)=1$ y ya que $|u(x_0,y_0)| \leq \Sigma\,|u|[\mathbf{a},\mathbf{b}] \leq \|u\|$, (2.34) se cumple para cualquier $(x,y)\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Corolario 2.3.12. *Si μ es una función estrictamente creciente a valores reales cuyo dominio incluye $[a_1,b_1]$ and $[a_2,b_2]$ entonces $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y sea h la función dada por Proposición 2.3.11. Entonces, para todo $(x,y)\in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ y todo $r,s\in\mathbb{N}$ tenemos

$$|(u_r-u_s)(x,y)| \leq \sup_{(x,y)\in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}} h(x,y)\,\|u_r-u_s\|.$$

Así, $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y por tanto existe $u\in\mathcal{B}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ tal que $\|u_r-u\|_\infty\to 0$. Fijemos $\epsilon>0$. Ya que $\{u_r\}_{r\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, existe $\rho \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r, s > \rho$ y todo $\xi_0 = \{t_i^0\}_1^{n_0} \in \Pi_3[a_1, b_1]$, $\eta_0 = \{s_j^0\}_1^{m_0} \in \Pi_3[a_2, b_2]$:

$$\begin{aligned}
\epsilon &> TV^{\mu,2}(u_r - u_s, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \geq V^{\mu,2}(u_r - u_s, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \\
&\geq \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k-2} \left| \Delta_{11}^2 \left(u_r - u_s\right)_\mu (t_i, s_j) \right| : \xi = \{t_i\}_1^n \in \Pi_3[a_1, b_1],\, \eta = \{s_j\}_1^k \in \Pi_3[a_2, b_2] \right\} \\
&\geq \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 \left(u_r - u_s\right)_\mu (t_i^0, s_j^0) \right| .
\end{aligned}$$

Se sigue que, para todo $r > \rho$ y todo $\xi_0 = \{t_i^0\}_1^{n_0} \in \Pi_3[a_1, b_1]$, $\eta_0 = \{s_j^0\}_1^{m_0} \in \Pi_3[a_2, b_2]$:

$$\epsilon \geq \lim_{s \to \infty} \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 \left(u_r - u_s\right)_\mu (t_i^0, s_j^0) \right| = \sum_{i=0}^{n_0-2} \sum_{j=0}^{m_0-2} \left| \Delta_{11}^2 \left(u_r - u\right)_\mu (t_i^0, s_j^0) \right| . \quad (2.35)$$

En consecuencia, para todo $r > \rho$

$$V^{\mu,2}\left(u_r - u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right) = \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k-2} \left| \Delta_{11}^2 (u_r - u)_\mu (t_i, s_j) \right| \leq \epsilon.$$

Un procedimiento análogo aplicado al resto de los sumandos de $TV^{\mu,2}(u_r - u_s)$, implica que para todo $r > \rho$

$$TV^{\mu,2}(u_r - u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq 5\epsilon,$$

se tiene que $u \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ and (ya que $u_r \to u$ puntualmente in $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$)

$$\lim_{r \to \infty} \|u_r - u\| = 0.$$

Concluyendo que $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es un espacio de Banach.

$\square$

Capítulo 3

Funciones factorizables y Algunos Teoremas de Representación

En 1911, F. Riesz ([20]) prueba que una función F es de segunda variación acotada sobre un intervalo $[a,b]$, si y sólo si, esta es la integral definida de Lebesgue de una función f de variación acotada. Este clásico resultado es ahora conocido como el Lema de Riesz.

En [25], F.A. Talalyan da unas versiones generalizadas del resultado de Riesz usando la noción de variación esencial de Vitali. Según ha señalado, en el caso unidimensional su resultado implica el lema de Riesz, ya que cualquier función que tiene una variación esencial finita es casi igual en todas partes a una función de variación acotada, hecho que no es cierto en el caso multidimensional.

En este capítulo damos un teorema de descomposición en términos de funciones factorizables y presentamos resultados análogos a los obtenidos por F. Riesz en [20] y similares a la generalización del Lema de Riesz dado por N. Merentes en [16] los cuales son contribuciones de esta investigación.

3.1. Funciones factorizables en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

En esta sección estudiaremos una distinguida subfamilia de $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Definición 3.1.1. Una función $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ se dice factorizable si esta puede ser expresada como el producto de dos funciones no nulas $g : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ y $h : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$; i.e.,

$$u(t, s) = g(t)h(s); \quad g \neq 0 \;\text{ y }\; h \neq 0.$$

Observación 3.1.2. *Basado en la definición es fácil ver que una función factorizable $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólo si cada factor es de (*uni-dimensional*) variación acotada.*

Lema 3.1.3. *Si $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ con $u(t, s) = g(t)h(s)$, entonces para cualquier partición $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$ tenemos*

$$\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j) \;=\; \left(g[t_{i+1}, t_{i+2}] - g[t_i, t_{i+1}]\right)\left(h[s_{j+1}, s_{j+2}] - h[s_j, s_{j+1}]\right).$$

Demostración. Sean las particiones $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$.

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^2 u(t_i, s_j) &= \Delta_{11}(gh)(t_i, s_j)\\
&= \frac{\Delta_{01}(gh)[t_{i+2}; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01}(gh)[t_{i+1}; s_{j+1}, s_{j+2}]}{t_{i+2} - t_{i+1}}\\
&- \left[\frac{\Delta_{01}(gh)[t_{i+1}; s_{j+1}, s_{j+2}] - \Delta_{01}(gh)[t_i; s_{j+1}, s_{j+2}]}{t_{i+1} - t_i}\right]
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{g(t_{i+2})h(s_{j+2}) - g(t_{i+2})h(s_{j+1})}{(t_{i+2} - t_{i+1})(s_{j+2} - s_{j+1})} - \frac{g(t_{i+2})h(s_{j+1}) - g(t_{i+2})h(s_j)}{(t_{i+2} - t_{i+1})(s_{j+1} - s_j)}\right]$$

$$- \left[\frac{g(t_{i+1})h(s_{j+2}) - g(t_{i+1})h(s_{j+1})}{(t_{i+2} - t_{i+1})(s_{j+2} - s_{j+1})} - \frac{g(t_{i+1})h(s_{j+1}) - g(t_{i+1})h(s_j)}{(t_{i+2} - t_{i+1})(s_{j+1} - s_j)}\right]$$

$$- \left[\frac{g(t_{i+1})h(s_{j+2}) - g(t_{i+1})h(s_{j+1})}{(t_{i+1}-t_i)(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{g(t_{i+1})h(s_{j+1}) - g(t_{i+1})h(s_j)}{(t_{i+1}-t_i)(s_{j+1}-s_j)}\right]$$

$$+ \left[\frac{g(t_i)h(s_{j+2}) - g(t_i)h(s_{j+1})}{(t_{i+1}-t_i)(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{g(t_i)h(s_{j+1}) - g(t_i)h(s_j)}{(t_{i+1}-t_i)(s_{j+1}-s_j)}\right]$$

$$= \left(g[t_{i+1}, t_{i+2}] - g[t_i, t_{i+1}]\right)\left(h[s_{j+1}, s_{j+2}] - h[s_j, s_{j+1}]\right)$$

obteniéndose lo deseado. □

Presentamos ahora el principal teorema de esta sección.

Teorema 3.1.4. *Una función factorizable* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ *es de segunda variación acotada si y sólo si cada factor es de* (uni- dimensional) *segunda variación acotada.*

Demostración. Sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$. Entonces si $u = g \cdot h$ tenemos para $s \in [a_2, b_2]$

$$\begin{aligned}
|\Delta_{10}u[t_{i+1}, t_{i+2}; s]| &= \left|\left[\frac{g(t_{i+2})h(s) - g(t_{i+2})h(s)}{(t_{i+2}-t_{i+1})} - \frac{g(t_{i+2})h(s) - g(t_{i+2})h(s)}{(t_{i+2}-t_{i+1})}\right]\right| \\
&= |h(s)| \left|\left[\frac{g(t_{i+2}) - g(t_{i+1})}{(t_{i+2}-t_{i+1})} - \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{(t_{i+1}-t_i)}\right]\right| \\
&= |h(s)| \left|(g[t_{i+1}, t_{i+2}] - g[t_i, t_{i+1}])\right|
\end{aligned}$$

y para $t \in [a_1, b_1]$

$$\begin{aligned}
|\Delta_{01}u[t; s_{j+1}, s_{j+2}]| &= \left|\left[\frac{g(t)h(s_{j+2}) - g(t)h(s_{j+1})}{(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{g(t)h(s_{j+1}) - g(t)h(s_j)}{(s_{j+1}-s_j)}\right]\right| \\
&= |g(t)| \left|\left[\frac{h(s_{j+2}) - h(s_{j+1})}{(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{h(s_{j+1}) - h(s_j)}{(s_{j+2}-s_{j+1})}\right]\right| \\
&= |g(t)| \left|(h[s_{j+1}, s_{j+2}] - h[s_j, s_{j+1}])\right|.
\end{aligned}$$

Si $u = g \cdot h \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, entonces por definición de $TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

$$\sup_{\xi} \sum_{i=0}^{n-2} |\Delta_{10}u[t_{i+1}, t_{i+2}; s]| = \sup_{\xi} \sum_{i=0}^{n-2} |h(s)| \left|(g[t_{i+1}, t_{i+2}] - g[t_i, t_{i+1}])\right| \leq TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < \infty$$

$$\sup_{\eta}\sum_{j=0}^{m-2}|\Delta_{01}u[t;s_{j+1},s_{j+2}]| = \sup_{\eta}\sum_{j=0}^{m-2}|g(t)|\,|(h[s_{j+1},s_{j+2}]-h[s_j,s_{j+1}])| \quad\leq\quad TV^2(u,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})<\infty$$

Por tanto $g\in BV^2([a_1,b_1])$ y $h\in BV^2([a_2,b_2])$

Recípromente, si $u=g\cdot h$ con $g\in BV^2([a_1,b_1])$ y $h\in BV^2([a_2,b_2])$, entonces

$$\begin{aligned}
TV^2(u,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) &= \sup_{(\xi,\eta)}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m-2}|g[t_{i+1,i+2}]-g[t_i,t_{i+1}]|\,|h[s_{j+1},s_{j+2}]-h[s_j,s_{j+1}]| \\
&+ \sup_{\xi\in\Pi_3([a_1,b_1])}\sum_{i=0}^{n-2}|h(a_2)|\,|g[t_{i+1},t_{i+2}]-g[t_i,t_{i+1}]| \\
&+ \sup_{\xi\in\Pi_3([a_1,b_1])}\sum_{i=0}^{n-2}|h(b_2)|\,|g[t_{i+1},t_{i+2}]-g[t_i,t_{i+1}]| \\
&+ \sup_{\eta\in\Pi_3([a_2,b_2])}\sum_{j=0}^{m-2}|g(a_1)|\,|h[s_{j+1},s_{j+2}]-h[s_j,s_{j+1}]| \\
&+ \sup_{\eta\in\Pi_3([a_2,b_2])}\sum_{j=0}^{m-2}|g(b_1)|\,|h[s_{j+1},s_{j+2}]-h[s_j,s_{j+1}]| \\
&= V^2(g;[a_1,b_1])V^2(h;[a_2,b_2])+2\,\text{máx}\{|h(a_2)|\,,|h(b_2)|\}V^2(g;[a_1,b_1]) \\
&+ 2\,\text{máx}\{|g(a_1)|\,,|g(b_1)|\}V^2(h;[a_2,b_2])<\infty.
\end{aligned}$$

□

3.2. Funciones factorizables en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

De igual manera que en la sección anterior para $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ se tiene también la siguiente subfamilia.

Lema 3.2.1. *Si* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ *with* $u(t,s) = g(t)h(s)$ *y* μ *una función estrictamente creciente entonces para cualquier partición* $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1,b_1])$ *y* $\{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2,b_2])$ *se tiene*

$$\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i,s_j) \quad = \quad (g_\mu[t_{i+1},t_{i+2}] - g_\mu[t_i,t_{i+1}])\,(h_\mu[s_{j+1},s_{j+2}] - h_\mu[s_j,s_{j+1}])\,.$$

Demostración. Sean las particiones $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1,b_1])$ y $\{s_j\}_{j=0}^{r} \in \Pi_3([a_2,b_2])$.

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^2 u_\mu(t_i,s_j) &= \Delta_{11}(gh)_\mu(t_i,s_j)\\
&= \frac{\Delta_{01}(gh)_\mu[t_{i+2};s_{j+1},s_{j+2}] - \Delta_{01}(gh)_\mu[t_{i+1};s_{j+1},s_{j+2}]}{\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1})}\\
&- \left[\frac{\Delta_{01}(gh)_\mu[t_{i+1};s_{j+1},s_{j+2}] - \Delta_{01}(gh)_\mu[t_i;s_{j+1},s_{j+2}]}{\mu(t_{i+1})-\mu(t_i)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{g(t_{i+2})h(s_{j+2}) - g(t_{i+2})h(s_{j+1})}{(\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1}))(\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1}))} - \frac{g(t_{i+2})h(s_{j+1}) - g(t_{i+2})h(s_j)}{(\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1}))(\mu(s_{j+1})-\mu(s_j))}\right]\\
&- \left[\frac{g(t_{i+1})h(s_{j+2}) - g(t_{i+1})h(s_{j+1})}{(\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1}))(\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1}))} - \frac{g(t_{i+1})h(s_{j+1}) - g(t_{i+1})h(s_j)}{(\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1}))(\mu(s_{j+1})-\mu(s_j))}\right]\\
&- \left[\frac{g(t_{i+1})h(s_{j+2}) - g(t_{i+1})h(s_{j+1})}{(\mu(t_{i+1})-\mu(t_i))(\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1}))} - \frac{g(t_{i+1})h(s_{j+1}) - g(t_{i+1})h(s_j)}{(\mu(t_{i+1})-\mu(t_i))(\mu(s_{j+1})-\mu(s_j))}\right]\\
&+ \left[\frac{g(t_i)h(s_{j+2}) - g(t_i)h(s_{j+1})}{(\mu(t_{i+1})-\mu(t_i))(\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1}))} - \frac{g(t_i)h(s_{j+1}) - g(t_i)h(s_j)}{(\mu(t_{i+1})-\mu(t_i))(\mu(s_{j+1})-\mu(s_j))}\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad (g_\mu[t_{i+1},t_{i+2}] - g_\mu[t_i,t_{i+1}])\,(h_\mu[s_{j+1},s_{j+2}] - h_\mu[s_j,s_{j+1}])$$

y el resultado se sigue. □

Teorema 3.2.2. *Una función factorizable* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ *es de segunda* μ*-variación acotada si y solo si, cada factor es de* (uni-dimensional) *segunda* μ*-variación acotada variación.*

Demostración. Sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^n \in \Pi_3([a_1,b_1])$ y $\eta := \{s_j\}_{j=0}^m \in \Pi_3([a_2,b_2])$ y μ una función real estrictamente creciente cuyo dominio incluyen $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$. Entonces si $u = g\cdot h$ tenemos por $s\in[a_2,b_2]$

$$\begin{aligned}|\Delta_{10}u_\mu[t_{i+1},t_{i+2};s]| &= \left|\frac{g(t_{i+2})h(s)-g(t_{i+1})h(s)}{\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1})} - \frac{g(t_{i+1})h(s)-g(t_i)h(s)}{\mu(t_{i+1})-\mu(t_i)}\right| \\ &= |h(s)|\left|\frac{g(t_{i+2})-g(t_{i+1})}{\mu(t_{i+2})-\mu(t_{i+1})} - \frac{g(t_{i+1})-g(t_i)}{\mu(t_{i+1})-\mu(t_i)}\right|,\end{aligned}$$

y para $t\in[a_1,b_1]$

$$\begin{aligned}|\Delta_{01}u_\mu[t;s_{j+1},s_{j+2}]| &= \left|\frac{g(t)h(s_{j+2})-g(t)h(s_{j+1})}{\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1})} - \frac{g(t)h(s_{j+1})-g(t)h(s_j)}{\mu(s_{j+1})-\mu(s_j)}\right| \\ &= |g(t)|\left|\frac{h(s_{j+2})-h(s_{j+1})}{\mu(s_{j+2})-\mu(s_{j+1})} - \frac{h(s_{j+1})-h(s_j)}{\mu(s_{j+1})-\mu(s_j)}\right|.\end{aligned}$$

Si $u = g\cdot h\in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, entonces por definición de $TV^{\mu,2}(u,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$

$$\sup_\xi \sum_{i=0}^{n-2} |\Delta_{10}u_\mu[t_{i+1},t_{i+2};a_2]| = \sup_\xi \sum_{i=0}^{n-2} |h(a_2)|\,|g_\mu[t_{i+1},t_{i+2}]-g_\mu[t_i,t_{i+1}]| \quad\le\quad TV^{\mu,2}(u,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})<\infty$$

$$\sup_\eta \sum_{j=0}^{m-2} |\Delta_{01}u_\mu[a_1;s_{j+1},s_{j+2}]| = \sup_\eta \sum_{j=0}^{m-2} |g(a_1)|\,|h_\mu[s_{j+1},s_{j+2}]-h_\mu[s_j,s_{j+1}]| \quad\le\quad TV^{\mu,2}(u,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})<\infty$$

Por tanto $g\in BV^{\mu,2}([a_1,b_1])$ y $h\in BV^{\mu,2}([a_2,b_2])$.

Recíprocamente, si $u = g \cdot h$ con $g \in BV^{\mu,2}([a_1, b_1])$ y $h \in BV^{\mu,2}([a_2, b_2])$, entonces

$$\begin{aligned}
TV^{\mu,2}(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) &= \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} |g_\mu[t_{i+1,i+2}] - g_\mu[t_i, t_{i+1}]| \, |h_\mu[s_{j+1}, s_{j+2}] - h_\mu[s_j, s_{j+1}]| \\
&+ \sup_{\xi \in \Pi_3([a_1,b_1])} \sum_{i=0}^{n-2} |h(a_2)| \, |g_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}] - g_\mu[t_i, t_{i+1}]| \\
&+ \sup_{\xi \in \Pi_3([a_1,b_1])} \sum_{i=0}^{n-2} |h(b_2)| \, |g_\mu[t_{i+1}, t_{i+2}] - g_\mu[t_i, t_{i+1}]| \\
&+ \sup_{\eta \in \Pi_3([a_2,b_2])} \sum_{j=0}^{m-2} |g(a_1)| \, |h_\mu[s_{j+1}, s_{j+2}] - h_\mu[s_j, s_{j+1}]| \\
&+ \sup_{\eta \in \Pi_3([a_2,b_2])} \sum_{j=0}^{m-2} |g(b_1)| \, |h_\mu[s_{j+1}, s_{j+2}] - h_\mu[s_j, s_{j+1}]| \\
&= V^{\mu,2}(g; [a_1, b_1]) V^{\mu,2}(h; [a_2, b_2]) + 2 \max\{|h(a_2)|, |h(b_2)|\} V^{\mu,2}(g; [a_1, b_1]) \\
&+ 2 \max\{|g(a_1)|, |g(b_1)|\} V^{\mu,2}(h; [a_2, b_2]) < \infty.
\end{aligned}$$

□

3.3. Teoremas de Representación

En esta sección presentamos algunos resultados acerca de integrales de funciones en $BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y una versión del lema de Riesz para funciones factorizables en $BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Además mostramos una relación entre las funciones de segunda μ-variación bi-dimensional acotada y la integral doble indefinida de Riemann-Stieltjes de funciones de variación acotada bi-dimensional.

Observación 3.3.1. *Si $f \in BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ entonces para todo $(\tau, \sigma) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, la integral iterada $\int_{a_1}^{\tau} \int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\, ds\, dt$ existe y es igual a $\int_{a_2}^{\sigma} \int_{a_1}^{\tau} f(t,s)\, dt\, ds$ ([12, Theorem III 7.14]). En este* *caso, si decimos que*

$$F(\tau,\sigma) := \int_{a_1}^{\tau}\int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\,ds\,dt$$

entonces, para todo $a_1 \le \tau \le b_1$ *y* $a_2 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le b_2$

$$\frac{F(\tau,\sigma_2)-F(\tau,\sigma_1)}{\Delta\sigma} = \int_{a_1}^{\tau}\int_0^1 f(t,\sigma_1+n\Delta\sigma)\,dn\,dt \tag{3.1}$$

donde $\Delta\sigma := \sigma_2-\sigma_1$.

usaremos reiteradamente la identidad (3.1) en la prueba de la próxima proposición.

Teorema 3.3.2. *Si* $f \in BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ *y* $F(\tau,\sigma) := \int_{a_1}^{\tau}\int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\,ds\,dt$ *then* $V^2(F,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \le V(f,I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ *and* $F \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Demostración. Sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1,b_1])$, $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2,b_2])$. Por (3.1)

$$\left[\frac{F(t_{i+2},s_{j+2})-F(t_{i+2},s_{j+1})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{F(t_{i+2},s_{j+1})-F(t_{i+2},s_{j})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+1}-s_{j})}\right] =$$

$$= \frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{a_1}^{t_{i+2}}\int_0^1 f(t,s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))\,dn\,dt \qquad (I_1)$$

$$-\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{a_1}^{t_{i+2}}\int_0^1 f(t,s_{j}+n(s_{j+1}-s_{j}))\,dn\,dt. \qquad (I_2)$$

De manera similar

$$-\left[\frac{F(t_{i+1},s_{j+2})-F(t_{i+1},s_{j+1})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{F(t_{i+1},s_{j+1})-F(t_{i+1},s_{j})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+1}-s_{j})}\right]$$

$$= -\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{a_1}^{t_{i+1}}\int_0^1 f(t,s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))\,dn\,dt \qquad (I_3)$$

$$+\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{a_1}^{t_{i+1}}\int_0^1 f(t,s_{j}+n(s_{j+1}-s_{j}))\,dn\,dt. \qquad (I_4)$$

Por tanto, con la notación indicada en la observación 2.2.2, y la realización de las sumas $I_1 + I_3$ y $I_2 + I_4$, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \Delta^2_{01}[F]_{j+1}[t_{i+1}, t_{i+2}] \\
= & \int_0^1 \int_0^1 f(t_{i+1} + v(t_{i+2} - t_{i+1}), s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}))\, dn\, dv \\
- & \int_0^1 \int_0^1 f(t_{i+1} + v(t_{i+2} - t_{i+1}), s_j + n(s_{j+1} - s_j))\, dn\, dv.
\end{aligned}$$

Análogamnente

$$\begin{aligned}
& \Delta^2_{01}[F]_{j+1}[t_i, t_{i+1}] \\
= & \int_0^1 \int_0^1 f(t_i + v(t_{i+1} - t_i), s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}))\, dn\, dv \\
- & \int_0^1 \int_0^1 f(t_i + v(t_{i+1} - t_i), s_j + n(s_{j+1} - s_j))\, dn\, dv.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$V^2(F, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta^2_{11} F(t_i, s_j)\right|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left|\Delta^2_{01}[F]_{j+1}[t_{i+1}, t_{i+2}] - \Delta^2_{01}[F]_{j+1}[t_i, t_{i+1}]\right|$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} |f(t_{i+1} + v(t_{i+2} - t_{i+1}), s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}))$$

$$-f(t_{i+1} + v(t_{i+2} - t_{i+1}), s_j + n(s_{j+1} - s_j))$$

$$-f(t_i + v(t_{i+1} - t_i), s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}))$$

$$+f(t_i + v(t_{i+1} - t_i), s_j + n(s_{j+1} - s_j))|\, dn\, dv \leq \int_0^1 \int_0^1 V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})\, dn\, dv.$$

Concluimos que $V^2(F, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Ahora, por definición $F(a_1, s) = F(t, a_2) = 0$ para todo $(t, s) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, se debe tener que $V_{[a_2,b_2]}(F(a_1, \cdot)) = V_{[a_1,b_1]}(F(\cdot, a_2)) = 0$. Por otro lado

$$
\begin{aligned}
V^2_{[a_2,b_2]}(F(b_1,\cdot)) &= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} |\Delta_{01} F[b_1; s_{j+1}, s_{j+2}]| \\
&= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \frac{F(b_1, s_{j+2}) - F(b_1, s_{j+1})}{s_{j+2} - s_{j+1}} - \frac{F(b_1, s_{j+1}) - F(b_1, s_j)}{s_{j+1} - s_j} \right| \\
&= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \int_{a_1}^{b_1} \int_0^1 \{ f(t, s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}) - f(t, s_j + n(s_{j+1} - s_j) \} dndt \right| \\
&\leq \int_{a_1}^{b_1} \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} \int_0^1 |f(t, s_{j+1} + n(s_{j+2} - s_{j+1}) - f(t, s_j + n(s_{j+1} - s_j)| \, dndt \\
&\leq (b_1 - a_1) \int_0^1 V_{[a_2,b_2]}(f(t,\cdot)) dt \leq (b_1 - a_1) \left(V_{[a_2,b_2]}(f(b_1,\cdot)) + V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \right),
\end{aligned}
$$

por Proposición 2.1.2. Un estimado similar se sigue para $V^2_{[a_1,b_1]}(F(\cdot, b_2))$. se concluye que $F \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. $\square$

Teorema 3.3.3. *Sea $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ con $u(t, s) = g(t)h(s) \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Entonces*

1. *g' es casi siempre igual a una función en $BV([a_1, b_1])$;*

2. *h' es casi siempre igual a una función en $BV([a_2, b_2])$;*

3. *$\frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s}$ es casi siempre igual a una función en $BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$;*

4. $u(x,y) = \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s}\, dsdt;$

5. $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \le V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right).$

Demostración. Supongamos que $u \in BV^2(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$. Entonces, por Teorema 3.1.4, $g \in BV^2([a_1,b_1])$, $h \in BV^2([a_2,b_2])$, y por lema 5 en [24], h, g son absolutamente continuas. Por tanto, las derivadas parciales $g^{'}$ y $h^{'}$ existen casi siempre. Por Teorema 4 en [24] $g^{'}$ es casi siempre igual a una función en $BV([a_1,b_1])$ y $h^{'}$ es casi siempre igual a una función en $BV([a_2,b_2])$, así $\frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s} = g^{'}(t)h^{'}(s)$ existe casi siempre y por observación 3.1.2 $\frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s}$ es de variación acotada sobre $I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$.

ahora, $g(x) = \int_{a_1}^{x} g^{'}(t)\, dt$ y $h(y) = \int_{a_2}^{y} h^{'}(s)\, ds$, por tanto

$$u(x,y) = g(x)h(y) = \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t \partial s}\, dsdt$$

Finalmente, por Teorema 3.3.6 $V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \le V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right)$.

□

Teorema 3.3.4. *Supongamos que* $u : I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \to \mathbb{R}$ *está en* $C^4(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$, $\frac{\partial u}{\partial s} \in BV([a_2,b_2])$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in BV([a_1,b_1])$ *y que* $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \in BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$*. Entonces*

$$\begin{aligned} TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \;\; \le \;\; & \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,a_2) \right| dt + \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(a_1,s) \right| ds \\ & + \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,b_2) \right| dt + \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(b_1,s) \right| ds \\ & + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial^4 u(t,s)}{(\partial t \partial s)^2} \right| dsdt. \end{aligned}$$

Demostración. Por Teorema 3 en [24]

$$\begin{cases} V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,a_2)) = V(\frac{\partial u}{\partial t};[a_1,b_1]), \\ \\ V^2_{[a_1,b_1]}(u(\cdot,b_2)) = V(\frac{\partial u}{\partial t};[a_1,b_1]), \\ \\ V^2_{[a_2,b_2]}(u(a_1,\cdot)) = V(\frac{\partial u}{\partial s};[a_2,b_2]), \\ \\ V^2_{[a_2,b_2]}(u(b_1,\cdot)) = V(\frac{\partial u}{\partial s};[a_2,b_2]). \end{cases} \tag{3.2}$$

Por otro lado,

$$\left[\frac{u(t_{i+2},s_{j+2})-u(t_{i+2},s_{j+1})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{u(t_{i+2},s_{j+1})-u(t_{i+2},s_j)}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+1}-s_j)}\right] =$$

$$\frac{1}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+2}-s_{j+1})}\int_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+2},r)dr$$

$$-\frac{1}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+1}-s_j)}\int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+2},r)dr =$$

$$\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+2},s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))dn$$

$$-\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+2},s_j+n(s_{j+1}-s_j))dn$$

y

$$-\left[\frac{u(t_{i+1},s_{j+2})-u(t_{i+1},s_{j+1})}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+2}-s_{j+1})} - \frac{u(t_{i+1},s_{j+1})-u(t_{i+1},s_j)}{(t_{i+2}-t_{i+1})(s_{j+1}-s_j)}\right] =$$

$$-\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+1}, s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))dn$$

$$+\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t_{i+1}, s_j+n(s_{j+1}-s_j))dn.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \Delta^2_{01}[u]_{j+1}[t_{i+1}, t_{i+2}] \\ = & \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_{i+1}+v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))dndv \\ - & \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_{i+1}+v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_j+n(s_{j+1}-s_j))dndv; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \Delta^2_{01}[u]_{j+1}[t_i, t_{i+1}] \\ = & -\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_i+v(t_{i+1}-t_i), s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))dndv \\ + & \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_i+v(t_{i+1}-t_i), s_j+n(s_{j+1}-s_j))dndv. \end{aligned}$$

Así

$$\sum_{1=1}^{m-2}\sum_{j=1}^{n-2}\left|\Delta^2_{11}u(t_i,s_j)\right| = \sum_{1=1}^{m-2}\sum_{j=1}^{n-2}\left|\Delta^2_{01}[u]_{j+1}[t_{i+1},t_{i+2}] - \Delta^2_{01}[u]_{j+1}[t_i,t_{i+1}]\right|$$

$$\leq \sum_{1=1}^{m-2}\sum_{j=1}^{n-2}\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_{i+1}+v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))\right.$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_{i+1}+v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_j+n(s_{j+1}-s_j))$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_i+v(t_{i+1}-t_i), s_{j+1}+n(s_{j+2}-s_{j+1}))$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t_i + v(t_{i+1}-t_i), s_j + n(s_{j+1}-s_j))\Bigg| dndv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{1=1}^{m-2} \sum_{j=1}^{n-2} \Bigg| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t_{i+1} + v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_{j+1} + n(s_{j+2}-s_{j+1}))$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t_{i+1} + v(t_{i+2}-t_{i+1}), s_j + n(s_{j+1}-s_j))$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t_i + v(t_{i+1}-t_i), s_{j+1} + n(s_{j+2}-s_{j+1}))$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t_i + v(t_{i+1}-t_i), s_j + n(s_{j+1}-s_j))\Bigg| dndv,$$

lo cual implica

$$V^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right). \tag{3.3}$$

Se sigue de (3.2), (3.3), (1.2.1) y por la Proposición 13 en [18] que

$$\begin{aligned} TV^2(u, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) &\leq V\left(\frac{\partial u}{\partial s}; [a_1, b_1]\right) + V\left(\frac{\partial u}{\partial t}; [a_1, b_1]\right) \\ &+ V\left(\frac{\partial u}{\partial t}; [a_2, b_2]\right) + V\left(\frac{\partial u}{\partial t}; [a_2, b_2]\right) + V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}; I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\right) \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, a_2)\right| dt + \int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(a_1, s)\right| ds \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, b_2)\right| dt + \int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(b_1, s)\right| ds \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{\partial^4 u(t,s)}{(\partial t \partial s)^2}\right| dsdt. \end{aligned}$$

$\square$

Presentamos ahora resultados sobre integración para funciones en $BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.

Observación 3.3.5. *Si $f \in BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es una función continua y μ una función reaal estrictamente creciente cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ entonces para todo $(\tau, \sigma) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, la integral iterada $\int_{a_1}^{\tau}\int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\, d\mu(s)\, d\mu(t)$ esxiste y es igual a $\int_{a_2}^{\sigma}\int_{a_1}^{\tau} f(t,s)\, d\mu(s)\, d\mu(t)$ ([12, Chapter III]). En este caso, si decimos*

$$F(\tau, \sigma) := \int_{a_1}^{\tau}\int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\, d\mu(s)\, d\mu(t)$$

entonces, para todo $a_1 \le \tau \le b_1$ y $a_2 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le b_2$

$$F(\tau, \sigma_2) - F(\tau, \sigma_1) = \int_{a_1}^{\tau}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(t,s)\, d\mu(s)\, d\mu(t) = \int_{a_1}^{\tau} f(t, c^*)(\mu(\sigma_2) - \mu(\sigma_1)) \tag{3.4}$$

con $c^* \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Usaremos la identidad (3.4) reiteradas veces en la prueba de la próxima proposición.

Teorema 3.3.6. *Si $f \in BV(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ es una función continua, μ una función real estrictamente creciente cuyo dominio incluye $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ y $F(\tau, \sigma) := \int_{a_1}^{\tau}\int_{a_2}^{\sigma} f(t,s)\, d\mu(s)\, d\mu(t)$ entonces $V^{\mu,2}(F, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \le V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ y $F \in BV^{\mu,2}(I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$.*

Demostración. Sea $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi_3([a_1, b_1])$, $\eta := \{s_j\}_{j=0}^{m} \in \Pi_3([a_2, b_2])$. Por (3.4)

$$\Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_{i+1}, t_{i+2}] = \left[\frac{F(t_{i+2}, s_{j+2}) - F(t_{i+2}, s_{j+1})}{[\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})][\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})]} - \frac{F(t_{i+2}, s_{j+1}) - F(t_{i+2}, s_j)}{[\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})][\mu(s_{j+1}) - \mu(s_j)]}\right] =$$

$$\frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})}\int_{a_1}^{t_{i+2}} \frac{\int_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} f(t,s)\, d\mu(s)}{\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})} d\mu(t)$$

$$- \frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})}\int_{a_1}^{t_{i+2}} \frac{\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t,s)\, d\mu(s)}{\mu(s_{j+1}) - \mu(s_j)} d\mu(t).$$

De manera similar,

$$\Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_i, t_{i+1}] = \left[\frac{F(t_{i+1}, s_{j+2}) - F(t_{i+1}, s_{j+1})}{[\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)][\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})]} - \frac{F(t_{i+1}, s_{j+1}) - F(t_{i+1}, s_j)}{[\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)][\mu(s_{j+1}) - \mu(s_j)]}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)} \int_{a_1}^{t_{i+1}} \frac{\int_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} f(t,s)\, d\mu(s)}{\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})} d\mu(t)$$

$$- \frac{1}{\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)} \int_{a_1}^{t_{i+1}} \frac{\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t,s)\, d\mu(s)}{\mu(s_{j+1}) - \mu(s_j)} d\mu(t).$$

Así, usando la notación dada en la Observación 3.3.5, se tiene

$$\Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_{i+1}, t_{i+2}] = \frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})} \int_{a_1}^{t_{i+2}} f(t, s_{j+2}^*) d\mu(t) - \frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})} \int_{a_1}^{t_{i+2}} f(t, s_{j+1}^*) d\mu(t).$$

Análogamente,

$$\Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_i, t_{i+1}] = \frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})} \int_{a_1}^{t_{i+1}} f(t, s_{j+2}^*) d\mu(t) - \frac{1}{\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)} \int_{a_1}^{t_{i+1}} f(t, s_{j+1}^*) d\mu(t).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
V^2(F, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) &= \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \Delta_{11}^2 F_\mu(t_i, s_j) \right| = \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_{i+1}, t_{i+2}] - \Delta_{01}^2[F]_{j+1}^{\mu}[t_i, t_{i+1}] \right| \\
&= \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \frac{1}{\mu(t_{i+2}) - \mu(t_{i+1})} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} f(t, s_{j+2}^*) - f(t, s_{j+1}^*) d\mu(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu(t_{i+1}) - \mu(t_i)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, s_{j+2}^*) - f(t, s_{j+1}^*) d\mu(t) \right| \\
&= \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} \left| f(t_{i+2}^*, s_{j+2}^*) - f(t_{i+2}^*, s_{j+1}^*) - f(t_{i+1}^*, s_{j+2}^*) + f(t_{i+1}^*, s_{j+1}^*) \right| \leq V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}).
\end{aligned}$$

se concluye que $V^{\mu,2}(F, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) \leq V(f, I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}) < +\infty$.

Ahora, por definición $F(a_1, s) = F(t, a_2) = 0$ para todo $(t,s) \in I_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, teniéndose que

$V^{\mu,2}_{[a_2,b_2]}(F(a_1,\cdot)) = V^{\mu,2}_{[a_1,b_1]}(F(\cdot,a_2)) = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
V^{\mu,2}_{[a_2,b_2]}(F(b_1,\cdot)) &= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} |\Delta_{01}F_{\mu}[b_1; s_{j+1}, s_{j+2}]| \\
&= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} \left| \frac{F(b_1,s_{j+2}) - F(b_1,s_{j+1})}{\mu(s_{j+2}) - \mu(s_{j+1})} - \frac{F(b_1,s_{j+1}) - F(b_1,s_j)}{\mu(s_{j+1}) - \mu(s_j)} \right| \\
&= \sup_{\eta} \sum_{j=0}^{m-2} \left| f(t,s^*_{j+2}) - f(t,s^*_{j+1}) \right| \\
&\leq V_{[a_2,b_2]}(f(t,\cdot))dt \leq V_{[a_2,b_2]}(f(b_1,\cdot)) + V(f, I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}) < +\infty
\end{aligned}$$

por la Proposición 2.1.2. Una estimación similar se sigue para $V^{\mu,2}_{[a_1,b_1]}(F(\cdot,b_2))$. concluiyéndose que $F \in BV^{\mu,2}(I^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}})$. $\square$

Bibliografía

[1] R. Adams and J. A. Clarkson, *On Definitions of Bounded Variation for Functions of two Variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 824–854.

[2] R. Adams and J. A. Clarkson, *Properties of Functions $f(x, y)$ of Bounded Variation*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 711–730.

[3] D. Bugajewska, *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation*, revisted. Mathematical and Computer Modelling 52(5-6) (2010), 791-796.

[4] P. S. Bullen, An inequality for variations , Amer. Math. Monthly, 90 (1983), 561.

[5] , L. Cesari, Lamberto, *Sulle funzioni a variazione limitata*, Annali della Scuola Normale Superiore, II 5 (3-4) (1936), 299-313.

[6] V. V. Chistyakov, *Superposition Operators in the Algebra of Functions of two Variables with Finite Total Variation*, Monatshefte für Mathematik 137 (2002), 99-114.

[7] De la Vallée Poussin, *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordennées equidistantes*, Bull. Accad. Sct. Belg; (1908), 314-410.

[8] P. L. Dirichelt.,Sur la convergence des séries trigonemétriques que servent á représenter une function arbitraire entre des limites donnés, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1826), 157-159.

[9] J. Ereu,J. Gimenez and N. Merentes, *On Bidimensional Second Variation*, Commentationes Mathematicae, por publicar. 2011.

[10] J. Ereu,J. Gimenez and N. Merentes, *On Bidimensional μ-Second Variation*, sometido a arbitraje. 2012.

[11] G. H. Hardy, *On double fourier series, and especially those which represent the double zeta–function width real and inconmesurable parameters*, Quart. J. Math. Oxford. **37** (1905/06), 53–79.

[12] T. H. Hildebrandt, *introduction to the theory of integration*, Academic Press , New York, 1963.

[13] F. N. Huggins, *Bounded Slope Variation and Generalized Convexity*, Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), 65-69.

[14] C. Jordan, *Sur la Série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 2 (1881), 228-230.

[15] E. L. Lima, Curso de análise (V.1), Instituto de Análisis pura e aplicada. CNPq(Proyecto Euclides), Brasil, 1976.

[16] N. Merentes, *On functions of bounded (p,2)-variation*, Collect. Math. 43, 2 (1992), 117-123.

[17] N. Merentes, S. Rivas, *El Operador de Composición en Espacios de Funciones con algún tipo de Variación Acotada*, IX Escuela Venezolana de Matemáticas, Facultad de Ciencias-ULA, Mérida- Venezuela, 1996.

[18] A. B. Owen *Multidimensional variation for quasi-Monte Carlo*, Stanford University, 2004.

[19] F. Riesz, Untersuchgen über systeme integrierbarer funktionen, Math. Annalen, 69 (1910), 449-497.

[20] F. Riesz: *Sur certains systems singuliers d'equations integrates*, Annales de L'Ecole Norm. Sup., Paris, **3** 28 (1911), 33–68.

[21] A. M. Russell, Functions of bounded second vatiation and Stieltjes-type integrals, J. London Math. Soc. 2 (1970), N°. 2, 193-208.

[22] A. W. Roberts and D. E. Varberg: *Functions of bounded convexity*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 75, Number 3 (1969), 568-572.

[23] A. W. Roberts and D. E. Varberg: *Convex Functions*, Academic Press, New York–London, 1973.

[24] A. M. Russell and C. J. F. Upton, *A generalization of a theorem by F. Riesz*, Analysis Mathematica, 9 (1983), 69-77.

[25] F. A. Talalyan, *A multidimensional analogue of a theorem of F. Riesz*, Sb. Math. Volume 186, Number 9 (1995), 1363-1374.

[26] Tonelli, *Sulla cuadratura délie superficie*, Accademia dei Lincei, Rendiconti, (6), vol. 3 (1926), 357-362.

[27] D. E. Varberg, On absolutely continuous functions, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), N°.6-10, 831-841.

[28] G. Vitali, *Sulle funzioni integrali*, Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Fis. Mat. Natur. **40** (1904/05), 1021–1034.