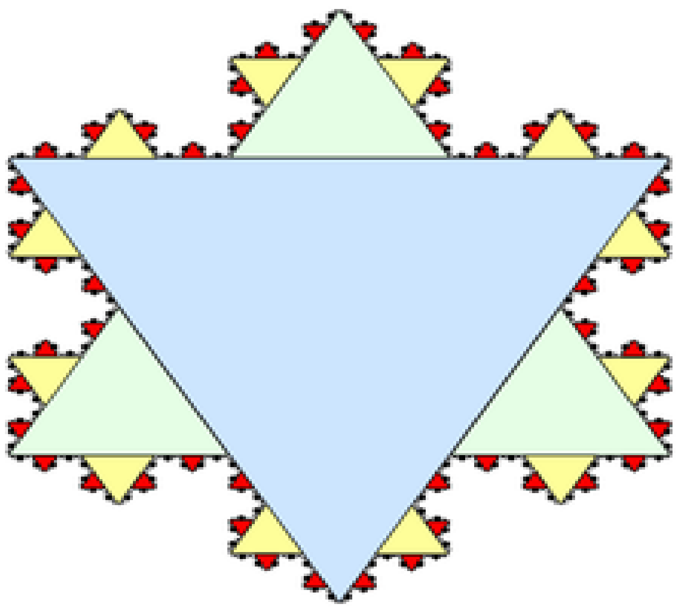
UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO
SISTEMA DE EDUCACION A DISTANCIA
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

# GUÍA DIDÁCTICA



## MATEMÁTICA III

**Lcda. Gladys Torrealba**

**Barquisimeto, Abril 2015**

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARAD
SISTEMA DE EDUCACION A DISTANCIA
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

# GUÍA DIDÁCTICA

# MATEMÁTICA III



| | |
|---|---|
| Elaborado por: Lcda. Gladys Torrealba<br>Correo-e: gtorrealba@ucla.edu.ve<br>Fecha Elaboración: 09/04/2015 | Revisado por: Gladys Torrealba<br>Fecha Ultima Revisión: 09/04/2015 |

# Tabla de Contenidos

Página

## Introducción

La Ingeniería en Informática se inscribe dentro de las Ingenierías de Diseño, en la cual las áreas: Programación, Sistemas y Organización constituyen la columna vertebral, con especial énfasis en ésta última, siendo la Matemática un elemento fundamental para cada una de ellas.

El carácter netamente formativo de la matemática como disciplina provee al estudiante de herramientas básicas para el análisis y resolución de problemas de índole diversa, tanto en el área de Programación, como de Sistemas e incluso en el área organizacional o gerencial. En particular esta asignatura constituye una plataforma básica para el desarrollo de cursos posteriores como Matemática IV, Investigación de Operaciones, Estadística, entre otros.

Por otro lado, la UCLA adopta la modalidad de Educación a Distancia (EaD) para ampliar sus oportunidades de estudio, diversificar su modelo educativo y aumentar su matrícula, entre otras cosas.

En el marco de lo expuesto anteriormente, se concibe el presente curso de Matemática III del Programa Ingeniería en Informática, en modalidad semipresencial, con la finalidad de proporcionar los conocimientos requeridos para la formación del perfil profesional del egresado, mediante el aprendizaje autónomo, autorregulado y colaborativo de los estudiantes y al mismo tiempo satisfacer la necesidad de ampliar la oferta de cursos en línea en el área de la Matemática.

## Descripción General del Curso

| | |
|---|---|
| Código: | **3354** |
| Número de Créditos | **4** |
| Semestre | **III** |
| Programa | **Ingeniería en Informática** |
| Departamento | **Matemática** |
| Pre-requisitos | **Matemática II** |
| Prelaciones | **Ninguna** |

| | |
|---|---|
| Profesor de la Asignatura | **Profa. Gladys Torrealba**<br>0251-2591657<br>gtorrealba@ucla.edu.ve |
| Coordinador de la Asignatura | **Profa. Dilcia Pérez** |

| **Autor de la Guía Didáctica** | | |
|---|---|---|
| **Nombre y Apellido** | **Teléfonos** | **Correo Electrónico** |
| Profa. Gladys Torrealba | 0251-2591657 | gtorrealba@ucla.edu.ve |

## Contenido Programático del Curso

**Tema 1: Formas Indeterminadas e Integrales Impropias**

- Formas Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$.
- Regla de L'Hôpital.
- Integrales Impropias.
- Criterios de convergencia: Criterio de Comparación Directa, Criterio de Comparación por paso al Límite.
- Convergencia Absoluta y Condicional.
- Aplicaciones de las integrales impropias: área, volumen, función de densidad de probabilidad.
- La función Gamma.
- Propiedades de la función Gamma.

**Tema 2: Aproximación de Funciones por Polinomios. Polinomios de Taylor**

- Polinomio de Taylor.
- Operador de Taylor. Propiedades.
- Fórmula de Taylor con resto (Forma de Lagrange ).
- Aplicaciones del Operador de Taylor a Integrales definidas y a resolución de ecuaciones.

**Tema 3: Sucesiones y Series**

- Sucesiones.
- Límite de una sucesión.
- Sucesiones monótonas.
- Sucesiones acotadas.
- Teorema de Bolzano.
- Series. Definición.
- Serie Geométrica y Telescópica.
- Criterios para determinar convergencia o divergencia: Criterio del n-ésimo término, Criterio de la integral, Criterios de Comparación Directa y por paso al Límite, Criterio de Leibnitz, Criterios del Cociente, de la Raíz n-ésima y de Raabe.
- Convergencia absoluta y condicional.

**Tema 4: Coordenadas Polares**

- El Sistema de Coordenadas Polares.
- Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares.
- Distintas formas de una ecuación en coordenadas polares.
- Intersección de gráficas en coordenadas polares.
- Rectas tangentes a curvas en coordenadas polares.
- Medida del área de una región en coordenadas polares.

**Tema 5: Números Complejos**

- Números complejos. Definición, propiedades y operaciones.
- Exponenciales Complejas.

**Tema 6: Ecuaciones Diferenciales**

- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Ejemplos de problemas económicos que conducen a ecuaciones lineales de
- primer orden.
- Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.

- Ejemplos de problemas económicos que conducen a ecuaciones lineales de segundo orden.

## Orientaciones para los Usuarios

La presente guía, tiene como propósito acompañar el recorrido a través del curso:

- Brindando orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que contiene.
- Proponiendo actividades para motivar y comprobar el avance en el logro del aprendizaje.

La misma ha sido elaborada con la finalidad de servir como recurso orientador y mediador en el proceso de aprendizaje para los estudiantes de Matemática III (3354) pertenecientes al programa Ingeniería en Informática del Decanato de Ciencias y Tecnología de la UCLA, razón por la cual, se encuentra adaptada a los objetivos del contenido programático de dicha asignatura. Esta guía didáctica es un recurso complementario al texto Base.

El texto base seleccionado para el desarrollo de la asignatura es **Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática** escrito por los profesores García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia (adscritos al Departamento de Matemáticas del DCyT). El mismo tiene las siguientes ventajas:

1. Está adaptado al contenido programático de la asignatura.
2. Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera.
3. Puede adquirirse por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

**PARA EL ESTUDIANTE**

Con el fin de que obtengas el mayor provecho en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Para favorecer la comprensión y el desenvolvimiento exitoso durante el desarrollo del curso, es fundamental que domines los siguientes contenidos:

1. Operaciones básicas con números reales:

1.1. Adición.

1.2. Sustracción.

1.3. Multiplicación.

1.4. División.

2. Valor absoluto de un número real y sus propiedades.
3. Polinomios y factorización de polinomios.
4. Potenciación y radicación.
5. Ecuaciones en R.
6. Sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas.
7. Nociones elementales de la teoría de conjuntos (definición, unión e intersección de conjuntos) e Inducción Matemática.
8. Propiedades de las desigualdades.
9. Valor absoluto y sus propiedades.
10. El sistema de coordenadas rectangulares.
11. Ecuaciones de rectas, circunferencias y cónicas en coordenadas rectangulares.
12. Funciones trascendentes
13. Trigonometría
14. Leyes de los límites
15. Límites infinitos y al infinito
16. Derivación
17. Integración

Para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el bloque inicial del aula virtual del curso. Una vez que estés al tanto de tus fallas, es conveniente que procedas a revisar la bibliografía que se indica a continuación o cualquier otro texto o web que maneje los contenidos referidos.

Para consultas de los contenidos 1 al 6, recomendamos la lectura del libro "Matemáticas Pre-Universitarias" cuyos autores son: Mireya Bracamonte, Jurancy Ereú y Miguel Vivas. En relación al contenido 7, sugerimos revisar el libro “Fundamentos de las Matemáticas” cuyos autores son: Jorge Sáenz, Fanny Gil, Belkis López, Neptalí Romero y José Bethelmy.

Los contenidos del 8 al 16 podrás repasarlos en el texto **Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería** cuyo autor es el Dr. Jorge Sáenz . Por último, lo referente a integración lo encontrarás en el libro **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería** escrito también por el Dr. Jorge Sáenz.

Todos los textos mencionados están disponibles en la Bilioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT.

Finalmente, hacemos hincapié en que no es recomendable abordar los ejercicios sin antes tener un buen dominio y comprensión de la teoría, ya que la resolución mecánica y memorística de los problemas propuestos no garantiza la adquisición del conocimiento.

**PARA EL DOCENTE**

Estimado docente: para la administración del curso Matemática III perteneciente al programa de Ingeniería en Informática, usted dispone del Aula Virtual del curso, diseñada en la Plataforma Moodle, con distintos recursos de aprendizaje.

El Aula incluye un bloque por cada tema del programa, en cada uno de los cuales encontrará recursos didácticos, actividades y evaluaciones. Cada tema cuenta con una Guía Didáctica Específica desarrollada para acompañar el proceso de aprendizaje a través del texto base y que puede utilizar como herramienta de apoyo en su labor docente.

Es de hacer notar que tanto el texto base, como las guías didácticas y las actividades de autoevaluación propuestas en el aula virtual, le proporcionan una gama de opciones a considerar para el diseño de la evaluación que aplicará en el curso.

## Objetivos Generales del Curso

- Aplicar y relacionar entre sí, los conocimientos obtenidos sobre cálculos de límites especiales, coordenadas polares, aproximación de funciones mediante polinomios, números complejos, sucesiones, series, integrales impropias y resolución de ciertas ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden.
- Reafirmar los conceptos previamente adquiridos, su utilización en el desarrollo del actual programa y su proyección hacia la resolución de problemas específicos en las diferentes áreas de la carrera.
- Reconocer el carácter instrumental, formativo y lógico de la Matemática.

## Referencias Bibliográficas y Electrónicas

**BÁSICA**

- García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia. Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.

**COMPLEMENTARIA**

- Arias, Nicolás. Tópicos para un tercer curso de Matemática. Asociencias.
- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill.
- Sáenz, Jorge. Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2005
- Sáenz, Jorge. Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009
- Stewart James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

## Evaluación de los Aprendizajes

La evaluación del curso incluye: evaluación diagnóstica, evaluación formativa y evaluación sumativa.

**EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA**

Al inicio del curso y de cada tema, se encuentra un examen de conocimientos previos cuyo objetivo es identificar las fortalezas y debilidades con respecto a los conocimientos de matemática que debe manejar el estudiante para abordar con éxito el presente curso.

**EVALUACIÓN FORMATIVA**
Está constituida por actividades tales como: foros, tareas, chats, autoevaluaciones, entre otras, propuestas en el bloque correspondiente a cada tema. Éstas, aunque no proporcionarán nota acumulativa, permitirán al estudiante reconocer sus avances y dificultades en el proceso de lograr el aprendizaje.

**EVALUACIÖN SUMATIVA**
Está integrada por las evaluaciones presenciales cuyo contenido y ponderación se indican en el plan de evaluación. La fecha, hora y lugar de aplicación de las mismas se anunciará oportunamente a través del Foro de Novedades y Noticias del curso en línea.

| Parcial | Semana | Tema | Estrategias Evaluación | | Tipo de Evaluación | Ponderación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Técnicas | Actividades | | |
| I | 6 | 1 | Prueba Presencial | Aplicación de la Prueba | Sumativa | 30 % |
| II | 11 | 3 | Prueba Presencial | Aplicación de la Prueba | Sumativa | 25 % |
| | 13 | 5 | Prueba Presencial | Aplicación de la Prueba | Sumativa | 10 % |
| III | 17 | 2 ,4 y 6 | Prueba Presencial | Aplicación de la Prueba | Sumativa | 35 % |

# TEMA 1 ( PARTE 1)

# FORMAS INDETERMINADAS

## Introducción

Apreciados estudiantes, damos inicio al estudio de la asignatura Matemática III con este tema, por cuanto permite establecer una conexión inmediata entre los conocimientos adquiridos en Matemáticas I y II y aquéllos que obtendrás a partir de ahora.
El objetivo es calcular límites que presentan formas indeterminadas, para lo cual, además de los procedimientos que ya estudiaste en Matemática I, usarás una nueva herramienta conocida como la Regla de L´Hopital.

Este contenido, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultará de utilidad en temas posteriores de Matemática III y en asignaturas como Matemática IV, entre otras.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL

Calcular límites que presentan formas indeterminadas, aplicando la Regla de L'Hopital.


### OBJETIVO ESPECÍFICO

**Calcular** límites correspondientes a formas indeterminadas.

## Contenidos

- Formas Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$.
- Regla de L'Hôpital.

## Fuentes de Información

**TEXTO GUÍA**

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.


Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

**OTROS TEXTOS**

Sáenz, Jorge. **Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería**. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2005

La sección 5.4 contiene teoría, ejemplos y ejercicios (resueltos y propuestos) para ahondar en Formas Indeterminadas y Regla de L'hopital. En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto.

**SITIOS WEB RELACIONADOS**

http://www.emis.de/journals/DM/v1/art7.pdf

Aquí obtendrás material relacionado con la controversia L'HOPITAL-BERNOULLI.

www.itescam.edu.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r42748.PDF

Contiene teoría y comentarios de interés.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Ejercicios en línea.
- Foros de aprendizaje .
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica

**Sumativa.**

Este contenido tendrá una valoración de 10 puntos y se evaluará conjuntamente con el contenido de integrales impropias en un examen presencial. La fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Además es indispensable que domines los contenidos que se indican en la sección Conocimientos Previos.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener

un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Leyes de los límites
- Límites infinitos y al infinito
- Funciones trascendentes
- Derivación e integración

A objeto de que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en la interfaz del curso.

### FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HOPITAL

Lee comprensivamente el contenido de la página 1 de la sección FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HOPITAL de la unidad didáctica usada como texto guía y procede a realizar las actividades que se indican a continuación:

- Escribe la Definición 1.1 para los casos $x \to a^+$ y $x \to +\infty$.
- Escribe la Definición 1.2 para los casos $x \to a^-$ y $x \to -\infty$.

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

Ahora intentemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{senx}$$

Nos damos cuenta que presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ debido a que

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(1-x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} senx = 0$ (Definición 1.1). Sin embargo, no es sencillo resolverlo con los procedimientos aprendidos en cursos anteriores.

No todas las indeterminaciones pueden resolverse mediante manipulaciones algebraicas. Especialmente cuando aparecen combinaciones de funciones trascendentes como ocurre en este caso.

Afortunadamente disponemos de un procedimiento conocido como **la Regla De L'Hopital** el cual permite resolver una extensa variedad de tales límites.

Para lograr el aprendizaje independiente de este contenido procede de la siguiente manera:

- Lee con detenimiento los teoremas 1.1 (Regla De L'Hopital) y 1.2 (Variante de la Regla De L'Hopital) del texto guía y responde **¿En qué difieren ambos enunciados?**
- Toma en cuenta las observaciones 1.2 y 1.3
- Estudia los 5 ejercicios resueltos en el ejemplo 1.3 y justifica cada paso de la resolución.

**IMPORTANTE**

1. Para señalar que un límite dado presenta alguna de las formas indeterminadas, no escribiremos que el mismo es igual a la expresión de dicha forma. Veamos el ejemplo 1.3 b) del texto. En este caso encontramos que el límite presenta forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y al resolverlo obtenemos $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} = -\frac{1}{\pi^2}$. Por lo tanto no escribiremos $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos(\pi x)} = \frac{0}{0}$.

2. En algunas ocasiones es necesario aplicar la Regla De L'Hopital más de una vez para superar la indeterminación (como en los ejemplos 1.3 b) y 1.3 d) ). Sin embargo, debemos verificar que aún persiste la indeterminación antes de aplicarla nuevamente. De no ser así, el resultado es erróneo ( Ver Observación 1.2 d) ).

3. Al resolver límites que contienen funciones trigonométricas, puede ser conveniente usar identidades para facilitar el procedimiento, como se observa en el ejemplo 1.3 parte d).

**Antes de continuar, recuerda que puedes comunicar las dudas que tengas a través del foro para canalizarlas donde te responderemos a la brevedad posible.**

**Ejemplo 1**

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{senx}$$

**Solución**

Como lo vimos anteriormente, $\lim_{x\to 0}\ln(1-x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} senx = 0$. Por lo tanto

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{senx}$ Presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{D_x(\ln(1-x))}{D_x(senx)}$ Por la Regla de L´Hopital

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\cos x} = -1$$

**Ejemplo 2** (Ejercicio propuesto # 22 del Texto Guía)

Hallar el valor del siguiente límite

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}$ con $a$ , $b > 0$

**Solución**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(a+be^x\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{a+bx^2} = +\infty$ por lo tanto tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(a+be^x\right)}{\sqrt{a+bx^2}} \qquad \text{Presenta la forma indeterminada } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{D_x\left(\ln\left(a+be^x\right)\right)}{D_x\left(\sqrt{a+bx^2}\right)} \qquad \text{Por Regla de L´Hopital}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{b\,e^x}{a+b\,e^x}}{\dfrac{2b\,x}{2\sqrt{a+b\,x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2b\,e^x\sqrt{a+b\,x^2}}{2b\,x\left(a+be^x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\sqrt{a+b\,x^2}}{x\left(a+be^x\right)} \quad (\ast) \quad \text{Persiste la forma indeterminada } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{a+be^x}\;\frac{\sqrt{a+b\,x^2}}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{a+be^x}\;\frac{\sqrt{a+b\,x^2}}{\sqrt{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\dfrac{e^x}{e^x}}{\dfrac{a}{e^x}+\dfrac{be^x}{e^x}}\;\sqrt{\frac{a}{x^2}+\frac{b\,x^2}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\dfrac{a}{e^x}+b}\;\sqrt{\frac{a}{x^2}+b}\right] = \frac{1}{b}\cdot\sqrt{b} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

**Observación:** Como puedes ver en el ejemplo previo, a la altura del paso marcado con ($\ast$) aún se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ . Sin embargo, en lugar de insistir con la Regla de L'Hopital, se optó por un procedimiento algebraico.

**Te invito a continuar el ejercicio a partir de ($\ast$) con una nueva aplicación de la Regla de L'Hopital y a comparar los procedimientos. ¿Qué concluyes?**

### Ejercicios

Resuelve los ejercicios impares del 1 al 23 propuestos en el texto guía y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

Además de $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, al calcular límites podemos encontrar **otras formas indeterminadas**: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ , a las cuales no podemos aplicarles la Regla de L'Hopital directamente. **¿Por qué?** Para abarcar este contenido, lee las páginas 6 a 10 del texto guía y procede a realizar las actividades indicadas:

- Elabora un cuadro para resumir las formas indeterminadas, en qué condiciones se obtienen y sus transformaciones para poder usar la Regla de L'Hopital .

- Estudia los ejemplos resueltos, justificando el procedimiento y agregando los pasos omitidos, si es el caso.

**Ejemplo 3**

Verificar que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = 1$

**Solución**

Puesto que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ $y$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$ , entonces por la definición 1.5 ii) y la observación 1.4, la función $(\tan x)^{\cos x}$ tiene la forma indeterminada $\infty^0$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}^-$ .

Apliquemos el procedimiento descrito en la página 8 del texto guía.

Sea y = $(\tan x)^{\cos x}$ entonces ln y = cos x ln (tan x). Luego

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x)$$ Presenta forma indeterminada 0.∞

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{(\sec x)^2}{\tan x}}{\sec x \tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{2 \tan x \sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2 \sec x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{2} = 0.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} (\tan x)^{\cos x} = e^0 = 1$ .

**Ejercicios**

1. Justifica el procedimiento y agrega los pasos omitidos en el ejemplo 3.

2. Resuelve los ejercicios del 28 al 65 propuestos en el texto guía y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

## Resumen de la Unidad

Al tratar de resolver un límite podemos obtener una expresión que se conoce como forma indeterminada, cuyo resultado no es evidente por inspección. Éstas son:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$$

La Regla de L'Hopital es una herramienta que se aplica a las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver las formas indeterminadas restantes, si se requiere el uso de esta regla, debemos realizar un procedimiento previo para obtener la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

**SELECCIÓN SIMPLE** ( Sólo una de las opciones es correcta )

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ entonces

   a) $f(x) - g(x)$ tiene forma indeterminada $\infty - \infty$ cuando $x \to a$ .

   b) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - g(x)\right) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - g(x)\right) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$.

2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ entonces

   a) $f(x) \cdot g(x)$ tiene forma indeterminada $0. \infty$ cuando $x \to a$ .

   b) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0$ c) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \infty$ d) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f'(x) \cdot g'(x)$

## VERDADERO O FALSO

Escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{1}=1$ ( )

2. Si $\lim\limits_{x\to a}\ln y=2$ entonces $\lim\limits_{x\to a} y=e^2$ ( )

## DESARROLLO

1. Calcule $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\tan x}{\ln(\cos x)}$ Rpta. -∞

2. Verifique que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{s}{x}\right)^x=e^S$ con s ϵ **R**

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

**SELECCIÓN SIMPLE**

1. c 2. a

**VERDADERO O FALSO**

1. F 2. V

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si tus respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

**¡ ¡ ¡ ÁNIMO ! ! !**

## Referencias


- Arias, Nicolás. Tópicos para un tercer curso de Matemática. Asociencias.

- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia. Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 1 (PARTE 2)

# INTEGRALES IMPROPIAS

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos la convergencia o divergencia de integrales impropias (de primera, segunda y tercera especie),y abordaremos algunas aplicaciones de estas integrales.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en el estudio de las series y en asignaturas como Estadística Matemática, entre otras.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL


Analizar la convergencia o divergencia de una integral impropia dada.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Determinar**, por definición, si una integral impropia converge o diverge y calcular la integral en caso de que converja.
- **Determinar** la convergencia o divergencia de integrales impropias, utilizando los criterios de convergencia.
- **Aplicar** las integrales impropias a problemas de probabilidad.
- **Definir** la función Gamma.
- **Reconocer** algunas propiedades de la función Gamma.
- **Usar** las propiedades de la función Gamma para evaluar algunas integrales impropias.

## Contenidos

- Integrales Impropias.
- Criterios de convergencia: Criterio de Comparación Directa, Criterio de Comparación por paso al Límite.
- Convergencia Absoluta y Condicional.
- Aplicaciones de las integrales impropias: área, volumen, función de densidad de probabilidad.
- La función Gamma.
- Propiedades de la función Gamma.

## Fuentes de Información

### TEXTO GUÍA

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.


Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

### OTROS TEXTOS

- Sáenz, Jorge. **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería**. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009

El contenido del capítulo 5 te servirá para complementar el estudio de las integrales impropias. En especial, te recomiendo la sección 5.5 correspondiente a la Función Gamma ya que este tópico no está desarrollado en el texto guía.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto.

### SITIOS WEB RELACIONADOS

http://usuarios.multimania.es/calculoint21/index.htm

Aquí obtendrás material adicional para el estudio de la función Gamma.

www.itescam.edu.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r42748.PDF

Contiene ejemplos y ejercicios de integrales impropias.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios en línea.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.

**Sumativa.**

Este contenido se evaluará conjuntamente con el contenido de formas indeterminadas y Regla de L'Hopital, mediante una prueba presencial. La fecha de aplicación de la misma se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual y realiza las actividades propuestas.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades del valor absoluto
- Formas indeterminadas
- Leyes de los límites
- Límites infinitos y al infinito
- Funciones trascendentes
- Derivación e integración

Y para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

## INTEGRALES IMPROPIAS

Lee comprensivamente el contenido de la página 16 del material didáctico usado como texto guía y procede a desarrollar las actividades propuestas a continuación.

### ACTIVIDAD

a) Responde:

- ¿Bajo qué condiciones una integral es impropia?
- ¿Cómo se clasifican las integrales impropias?

b) Proporciona un ejemplo correspondiente a cada tipo de integral impropia.

c) ¿ Por qué la integral del ejemplo 1.e) es propia? Muestra otro ejemplo semejante al 1.e).

***OBSERVACIONES***

1. Si calculamos una integral usando el segundo teorema fundamental del cálculo sin percatarnos de que la misma es impropia, obtendremos un resultado incorrecto. Esto se aprecia en el ejemplo 2.2 de la página 17 del material guía.
2. La aplicación natural de las integrales impropias, es la medida del área de una región no acotada en el plano xy .Esta información la encuentras en las páginas 17 y 18 del material base.

***Integrales Impropias con Límites de Integración Infinitos o de Primera Especie***

Ahora procede a leer con detenimiento la definición 1 y los ejemplos 1 a 3 del texto guía. En esta definición se establece que para evaluar una integral impropia se usa un límite y se presentan los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia de primera especie.

### Ejercicio

Resuelve los ejercicios 5, 6, 7, 31 y 32 de las páginas 41 y 42 del texto guía y compara los resultados con las respuestas proporcionadas en el mismo.

**IMPORTANTE**

En el ejemplo 4 del texto guía se establece la convergencia y divergencia de un tipo especial de integrales de primera especie llamadas **p-integrales o integrales p**. Éstas presentan la forma $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ con a > 0 (¿Por qué?) y p ϵ R. Las integrales p tendrán un papel relevante en el estudio de la convergencia o divergencia de otras integrales impropias más complejas.

**Ejemplo**

Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes **p-integrales** de primera especie:

**a)** $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx$ **b)** $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ **c)** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ d) $\int_1^{+\infty} x\, dx$

**Solución**

a) Esta integral converge ya que p=4 > 1.
b) En este caso p= 1/2 < 1, por lo cual la integral diverge.
c) ¿Cuál es el valor de p? p=1, entonces la integral diverge.
d) Para que ésta se vea como una p-integral debemos reescribirla

   en la forma $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-1}}\, dx$ . Así p= -1 < 1 y en consecuencia la integral

   diverge.

### *Integrales Impropias con Discontinuidades Infinitas en el Intervalo [a,b] o de Segunda Especie.*

Lee la definición 2 de la guía donde se establece cómo evaluar una integral impropia de segunda especie, así como también su convergencia y divergencia. A continuación estudia los ejemplos del 7 al 11 en los cuales se determina la convergencia o divergencia de las integrales de segunda especie planteadas, mediante la aplicación de los incisos a), b) o c) (según lo requiera el caso) de la definición 2.

**NOTA: La referencia a las p-integrales o integrales p de segunda especie se encuentra en la observación de la página 26 del material guía.**

**ACTIVIDAD**

- Compara las definiciones 1 y 2 en cuanto a diferencias y semejanzas y escribe tus conclusiones.

- Resuelve los ejercicios 12, 17,18 y 22 de la pág. 41 del texto guía y compara los resultados con las respuestas del texto.

### *Integrales Impropias Mixtas*

En este caso se expresa la integral como suma de una o más integrales impropias de primera especie y una o más integrales impropias de segunda especie (*). Si estas integrales convergen, la **integral mixta** será **convergente**. En caso contrario, será **divergente**.

**Ejemplo**

Determinar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

**Solución**

Ésta es una integral impropia mixta o de tercera especie ya que la función

f(x) = $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ presenta una discontinuidad infinita en x = 1. Es decir

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x(\ln x)^2} = +\infty$ (La recta x = 1 es asíntota horizontal al gráfico de f ).

Y el intervalo de integración es no acotado puesto que el límite superior de integración es $+\infty$. Entonces, por (*) expresamos la integral impropia mixta de la siguiente manera:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \overbrace{\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(\ln x)^2}}^{(\mathrm{I})} + \overbrace{\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}}^{(\mathrm{II})}$$

donde en (I) tenemos una integral impropia de segunda especie y en (II) una integral impropia de primera especie (**). Estudiemos cada una por separado.

Para estudiar (I) usamos el inciso b) de la definición 2.2 puesto que la discontinuidad ocurre en el límite inferior de integración.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t \to 1^+} \int_{t}^{e} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t \to 1^+} \int_{\ln t}^{1} \frac{du}{u^2} = \lim_{t \to 1^+} \left[ -\frac{1}{u} \right]_{\ln t}^{1}$$

$$= \lim_{t\to 1^+}\left[-\frac{1}{1}+\frac{1}{\ln t}\right] = +\infty$$

El límite no es un número, por lo tanto concluimos que la integral de segunda especie diverge y en consecuencia tenemos que la integral mixta también diverge, sin necesidad de estudiar la integral de primera especie en (II).

La integral en (II) es convergente (verifícalo). ¿Si hubiésemos estudiado esta integral antes que (I), cuál habría sido la conclusión?

(**) En este caso se trabajó con los intervalos de integración (1,e] y [e,+∞), sin embargo es posible usar cualquier otro número perteneciente al intervalo (1,+∞) en lugar de e.

**NOTA: Te invitamos a leer el ejemplo 9 de la página 334 del texto del Dr. Sáenz, en el cual se calcula una integral impropia mixta convergente.**

**Ejercicio**

Resuelve los ejercicios 20, 26 y 27 de las páginas 41 y 42 del texto guía y compara los resultados con las respuestas proporcionadas en el material.

*Algunas propiedades de las Integrales impropias*

En este momento estamos en condiciones de establecer , por ejemplo, que $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$ converge mientras que $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ y $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ambas divergen. Ahora nos preguntamos si con esta información es posible concluir de antemano la convergencia o divergencia de integrales impropias como las siguientes $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\left[\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x}\right]dx$ , $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx$ y $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\frac{2}{x^4}\,dx$ entre otras. Para adquirir esta capacidad, procede a leer comprensivamente los teoremas, observaciones y ejemplos de las páginas 27 y 28 del material didáctico base y el ejemplo 5 (página 306) del texto del Dr. Jorge Sáenz. Luego usa este conocimiento para determinar la convergencia o divergencia de las tres integrales previas.

**Antes de continuar, recuerda que puedes comunicar las dudas que tengas a través del foro para canalizarlas donde te responderemos a la brevedad posible.**

### *Criterios de Convergencia para Integrales Impropias*

A veces, es imposible hallar el valor exacto de una integral y, sin embargo, es importante saber si la misma converge o diverge. En tales casos se aplican los teoremas llamados ***Criterios de Convergencia*** para integrales impropias .

Para alcanzar el aprendizaje de este contenido, procede como sigue:

1. Lee comprensivamente la teoría y ejemplos del material base desde la página 29 hasta la página 37 (ambas inclusive).
2. Toma en consideración los comentarios y observaciones que aparecen a continuación.
3. Consulta las dudas con el profesor y tus compañeros mediante el foro previsto para tal fin.
4. Gana pericia, realizando los ejercicios propuestos para el tema.

### *IMPORTANTE*

- Los teoremas 3 y 5 son válidos para integrales cuyo intervalo de integración es $(-\infty, b]$, manteniendo las mismas condiciones para las funciones. Además, en el caso análogo al teorema 5, tomaremos los límites cuando $x \to -\infty$.
- El teorema 4 vale para intervalos de la forma $[a,b)$.
- El teorema 6 también se aplica a intervalos de la forma $(a,b]$. En este caso, se toma el límite cuando $x \to a^{+}$.

### *OBSERVACIONES*

- Para determinar la convergencia o divergencia de una integral impropia podemos usar las definiciones o los criterios de convergencia, según convenga.
- Para aplicar los criterios de comparación, debemos verificar que se cumplan todas las condiciones establecidas en las hipótesis.
- Cualquier resultado que no esté incluido entre las opciones de los criterios no aporta información. Es decir, no permite concluir convergencia o divergencia.
- Al aplicar los criterios de convergencia, se requiere comparar la integral impropia objeto de estudio, con una segunda integral impropia (de la misma especie que la estudiada) cuya convergencia o divergencia sea más

fácil de determinar. Generalmente se opta por una p-integral (de primera o segunda especie, según sea el caso).

- Al seleccionar una p-integral de segunda especie para efectuar la comparación, se debe cumplir lo siguiente: el intervalo de integración y el número donde se presenta la discontinuidad infinita deben ser los mismos en ambas integrales (ver ejemplo 23), se recomienda (aunque no es indispensable) que el valor de p coincida con el máximo exponente del integrando en la integral estudiada (ver ejemplo 24).
- En los criterios de comparación directa, se debe probar que se cumple la desigualdad, mediante su construcción, como puede verse en el ejemplo 17. Observa también en este ejemplo, que las integrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{x}\, dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{e}{x}\, dx$ son ambas divergentes (¿por qué?). Sin embargo, la escogencia de la segunda integral no permite obtener ninguna conclusión ¿Por qué? .
- En el ejemplo 25 se estudia una integral impropia mixta. Nótese que para ello, en primer lugar se separa como suma de una integral de primera especie más otra de segunda especie. Se estudia la integral de segunda especie mediante comparación por paso al límite y se obtiene que diverge. Como puede verse no se requiere estudiar la integral de primera especie.
- Al estudiar la integral en el ejemplo 20, se toma $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ .

  ¿Cómo llegar a esa conclusión? Cuando el integrando de una integral impropia de primera especie es una función algebraica, como en este caso, se recomienda tomar g(x) igual al cociente de la mayor potencia de la variable en el numerador y la mayor potencia de la variable en el denominador. Sin embargo, no es la única opción. Para verificarlo, note que aplicando esta recomendación, en el ejemplo 22 obtendríamos $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ ; no obstante, en este ejemplo se usa con éxito $g(x) = \frac{1}{x}$ .
- El procedimiento descrito antes no funciona en general para integrales de segunda especie. Como muestra, si lo aplicamos en el ejemplo 24, obtendríamos $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , cuyo uso sería erróneo ya que la integral $\int_1^{2} \frac{1}{x^2}\, dx$ es propia. ¡ Para determinar la convergencia o divergencia de una integral impropia a través de los criterios, sólo podemos comparar con integrales impropias!

**Ejercicios**

La habilidad para aplicar apropiadamente los criterios de convergencia para integrales impropias se adquiere con la práctica, por lo cual debes realizar el ***ejercicio 51*** del material didáctico base y comparar tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

***¿DUDAS? En ese caso, manifiéstalas a través del foro para canalizarlas, donde te responderemos a la brevedad posible.***

***Algunas Aplicaciones de las Integrales Impropias***

A objeto de alcanzar el aprendizaje independiente de este material, revisa con detenimiento el contenido de las páginas 37 a la 40, aclarando las dudas que puedas tener y luego resuelve los ejercicios indicados a continuación.

**Ejercicios**

Resuelve los ejercicios 37 al 39, 43 al 48 y el número 50 de la guía base, comparando tus resultados con las respuestas incluidas en la misma.

***La Función Gamma***

Ésta es una de las llamadas funciones especiales y fue introducida por Leonard Euler en 1729 con el propósito de generalizar la función factorial (n!).

Para alcanzar el aprendizaje de este contenido, procede como sigue:

- Lee comprensivamente la teoría y ejemplos del texto del Dr. Sáenz desde la página 367 hasta el ejemplo 5 de la página 370.
- Consulta las dudas con el profesor y tus compañeros mediante el foro previsto para tal fin.
- Gana pericia, realizando los ejercicios propuestos para el tema.

**Ejercicios**

Realiza los problemas propuestos 5.5 del 1 al 8 en el texto Cálculo Integral del Dr. Jorge Sáenz y verifica tus resultados con las respuestas que contiene el texto.

## Resumen de la Unidad

Se dice que una integral es impropia cuando el intervalo de integración es no acotado, cuando el integrando presenta una discontinuidad infinita en uno o más números del intervalo de integración o cuando ocurren ambas cosas a la vez.

El cálculo de una integral impropia se realiza a través de un límite. Si este límite existe la integral impropia converge si no, la integral diverge. Aún cuando no sea posible calcular una integral impropia, podemos determinar su convergencia o divergencia mediante el uso de los Criterios de Convergencia para integrales impropias.

Algunas aplicaciones de las integrales impropias surgen en probabilidad y en el cálculo de área y volumen que involucran una región no acotada.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

### VERDADERO O FALSO

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. $\int_0^1 \frac{senx}{x^2}\,dx$ es propia ( )

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ es impropia mixta ( )

3. $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$ ( )

4. Es posible asignar un número a la medida del área de la región bajo la gráfica de y=$\frac{1}{(x-1)^{1/3}}$ , sobre el eje **X** y entre x=1 y x=2. ( )

5. $\int_2^{+\infty}\left[\frac{1}{x^3}+\frac{\ln x}{x}\right]dx$ converge ( )

6. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge absolutamente ( )

7. Por propiedad de truncamiento se tiene

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2} = \int_1^{e}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2} + \int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$$ ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

1. F 2. F 3.V 4.V 5. F 6. V 7. F

# TEMA 2
# APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS DE TAYLOR

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos los polinomios de Taylor, cómo obtenerlos y cómo usarlos para aproximar valores de una función. Es evidente que al obtener valores aproximados, por medio de estos polinomios, se genera un error. Para estimarlo, usaremos la forma de Lagrange para el Error. Otro de los objetivos es deducir nuevos polinomios a partir de polinomios ya conocidos, a través de las propiedades del Operador de Taylor.
Por último, emplearemos los polinomios de Taylor para aproximar integrales definidas y obtener soluciones aproximadas de ecuaciones.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en asignaturas como Programación Numérica, entre otras.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL

Aplicar los polinomios de Taylor a la resolución de problemas dados y estimar el error de aproximación.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Obtener** el polinomio de Taylor de una función dada en *x*=*a*.
- **Deducir** el polinomio de Taylor de una función dada a través de las propiedades del operador de Taylor.
- **Estimar** el error en la aproximación de una función mediante la Forma de Lagrange.
- **Hallar** el valor aproximado de integrales definidas usando el polinomio de Taylor.

- **Hallar** soluciones aproximadas de ecuaciones a través de Polinomios de Taylor.

## Contenidos

- Polinomio de Taylor.
- Operador de Taylor. Propiedades.
- Fórmula de Taylor con resto (Forma de Lagrange ).
- Aplicaciones del Operador de Taylor a Integrales definidas y a resolución de ecuaciones.

## Fuentes de Información

**TEXTO GUÍA**


**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática**. García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.

Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

Las actividades indicadas en la presente guía están diseñadas en base al contenido de este texto, a menos que se indique explícitamente otra cosa.

**OTROS TEXTOS**

- Sáenz, Jorge. **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería**. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009

El contenido de la sección 10.7 de este libro te servirá de apoyo para el estudio del presente tópico.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto del Dr. Jorge Sáenz.

**SITIOS WEB RELACIONADOS**

http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/soltaylor/soltaylorHTML/taylor.htm

Aquí encontrarás teoría, ejemplos, gráficas animadas y ejercicios propuestos complementarios para el estudio de los Polinomios de Taylor.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Ejercicios en línea
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.

**Sumativa.**

Prueba presencial, según el plan de evaluación, cuya fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Valor absoluto y sus propiedades
- Propiedades de las desigualdades
- Funciones trascendentes
- Derivación e integración

Y para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria en línea que encontrarás en el aula virtual del curso.

## POLINOMIOS DE TAYLOR

Para iniciar el tratamiento del tema y ponernos al tanto de los aspectos básicos del mismo, lee comprensivamente el texto guía de la página 42 a la página 52, así como los ejemplos desarrollados en las páginas 53,54 y 55.

**IMPORTANTE**

1. Los ejemplos 1 y 2 nos muestran que para calcular el valor aproximado de una función en un número, usando polinomios de Taylor, una vez obtenido el polinomio de aproximación, basta sustituir la variable del polinomio por el número en cuestión.
2. Los polinomios de Maclaurin obtenidos en los ejemplos 5 y 6 serán de utilidad para hallar otros polinomios, a través de las propiedades del Operador de Taylor. Los mismos son considerados polinomios notables.
3. Debido a que los polinomios notables son de orden general, para obtener un polinomio de orden específico, basta usar la fórmula sustituyendo n por un valor particular apropiado.
4. Los polinomios de Maclaurin de la función coseno tienen grado par mientras los correspondientes a la función seno serán de grado impar.

Para comprobar tu avance en la adquisición del aprendizaje, te invito a desarrollar las actividades indicadas.

### Actividades

- Escribe la expresión que caracteriza al coeficiente del término de grado k en un polinomio de Taylor.
- En el mismo sistema de coordenadas, traza las gráficas de f, $P_1$ y $P_2$ (de los ejemplos 1 y 2 respectivamente) y úsalas para interpretar gráficamente el contenido de las observaciones a) y b) de la página 50 del texto guía.
- Usa los polinomios notables respectivos para obtener $T_7\left[e^x\right]$ y $T_6\left[\cos x\right]$.
- Halla $T_4\left[sen\, x\right]$. ¿Cuál es el orden del polinomio? ¿Cuál es su grado? Explica la diferencia.
- Encuentra $T_3\left[\sqrt{x}\,;1\right]$ y úsalo para hallar un valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Ahora que estamos en condiciones de obtener y aplicar los polinomios de Taylor para aproximar funciones, necesitamos conocer la exactitud de estas aproximaciones. El contenido necesario para lograr este conocimiento se desarrolla desde la página 61 a la página 65 del material guía.

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

## Actividades

- Escribe la Fórmula de Taylor con resto y la Forma de Lagrange para el error.
- Enumere los pasos a seguir para resolver los ejemplos 16 y 17.

En este punto sólo nos resta aplicar la Fórmula de Taylor en la solución de ecuaciones y en el cálculo de integrales definidas que no pueden obtenerse de manera exacta. Para conocer el procedimiento, lee comprensivamente y justificando cada paso los ejemplos 18 (página 66) y 19 (página 67). Toma nota de las dudas y exponlas a través del foro para canalizarlas.

**IMPORTANTE**

Al resolver una ecuación usando un polinomio de aproximación (como en el ejemplo 18, página 66 de la guía), resulta conveniente graficar ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas rectangulares. De esta forma visualizamos el número de soluciones (lo indica el número de veces que se intersecten las gráficas) y los intervalos donde se encuentran. Esto nos ayuda a escoger el polinomio más apropiado y a elegir los resultados correctos.

## Actividades

- Grafica en el mismo sistema de coordenadas las funciones y=senx y y= $x^2$ a fin de que releas el ejemplo 18 tomando en consideración la información proporcionada por la gráfica.
- Describe el procedimiento aplicado en los ejemplos 18 y 19 respectivamente.

**Ejercicios**

Resuelve los ejercicios propuestos en el texto guía y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

# Resumen de la Unidad

El polinomio de Taylor de orden n generado por la función f alrededor de x=a viene dado por $T_n\left[f(x);a\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ . Si a=0, se escribe

$T_n\left[f(x)\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ y se denomina Polinomio de Maclaurin.

Los polinomios de Taylor pueden ser utilizados para aproximar funciones que no son tan fáciles de evaluar, así como también para resolver ecuaciones y calcular integrales definidas que no pueden abordarse a través de métodos exactos.

Un importante resultado estudiado en este tema es el Teorema de Taylor, el cual nos da una forma para estimar el error asociado a una aproximación por polinomios de Taylor, conocida como la Forma de Lagrange para el Error.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

### VERDADERO O FALSO

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. El polinomio de Taylor de orden n de una función es un polinomio de grado n. ( )
2. $T_5[senx] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ ( )
3. $T_1[\tan^{-1} x] = T_2[\tan^{-1} x]$ ( )
4. Según la forma de Lagrange para el error se tiene que $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$ ( )
5. Si en el ejemplo 16 (página 64) usamos $T_5[\ln x; 1]$ se obtiene una aproximación con la precisión solicitada. ( )
6. Usando $T_3[e^x]$ se obtiene $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx \approx 1.30555555$ ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

1. F 2. V 3. F 4. F 5. V 6. V

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si algunas respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

**¡ ¡ ¡ ÁNIMO ! ! !**

## Referencias


- Arias, Nicolás. Tópicos para un tercer curso de Matemática. Asociencias.
- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 3 (PARTE 1)

# SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos la convergencia o divergencia de una sucesión de números reales tanto de manera directa como en forma indirecta.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en el estudio de las series de números reales y en asignaturas como Matemática IV y Estadística Matemática, entre otras.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL

Determinar la convergencia o divergencia de una sucesión de números reales.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Explicar** el concepto de sucesión como función.
- **Definir** sucesiones de distintas formas: numérica, implícitamente mediante una ecuación, analíticamente, descriptiva (lenguaje natural) y gráficamente.
- **Identificar** sucesiones convergentes, monótonas o acotadas de forma intuitiva, gráfica y mediante la definición.
- **Determinar** si una sucesión converge o diverge y hallar su límite en caso de que converja.

## Contenidos

- Sucesiones.
- Límite de una sucesión.
- Sucesiones monótonas.
- Sucesiones acotadas.
- Teorema de Bolzano.

## Fuentes de Información

**TEXTO GUÍA**


**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática**. García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.

Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

Las actividades indicadas en la presente guía están diseñadas en base al contenido de este texto, a menos que se indique explícitamente.

**OTROS TEXTOS**

- Sáenz, Jorge. **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería**. Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009

El contenido del **capítulo 8** te servirá para complementar el estudio de las sucesiones de números reales.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto del Dr. Jorge Sáenz.

**SITIOS WEB RELACIONADOS**

http://portal.perueduca.edu.pe/modulos/m_sucesiones/contenidos_teoricos3ejemplos.htm

Aquí encontrarás algunos ejemplos del uso de las sucesiones en la criptografía.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.
- Ejercicios en línea.

**Sumativa.**

Este contenido tendrá una valoración de 10 puntos y se evaluará conjuntamente con el contenido de series de números reales en un examen presencial. La fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Además es indispensable que domines los contenidos que se indican en la sección de Conocimientos Previos.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener

un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Inducción Matemática
- Valor absoluto y sus propiedades

- Propiedades de las desigualdades
- Leyes de los límites
- Límites infinitos y al infinito
- Funciones trascendentes
- Derivación

Y a objeto de que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

## SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Inicialmente estamos interesados en explicar el concepto de sucesión y definirla de distintas formas. Para lograr estos objetivos te invitamos a leer el material recomendado como texto guía desde la página 1 a la página 4. Luego realiza la siguiente actividad.

### ACTIVIDAD

Dadas las sucesiones: a) $\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

en cada caso:

- Halla los 5 primeros términos de la sucesión.
- Grafica en el plano los términos hallados.

***OBSERVACIÓN:*** Nota que la gráfica de una sucesión está formada por puntos discretos ya que su dominio es el conjunto de los enteros positivos.

**Convergencia de una Sucesión**

Lee con detenimiento y comprensivamente las páginas desde la 4 hasta la 9 de nuestro material. Allí encontrarás la definición, teoremas, ejemplos y otros contenidos indispensables y de gran utilidad para determinar la convergencia o divergencia de una sucesión.

Si deseas expresar alguna duda o comentario sobre lo abordado hasta ahora, acude al foro habilitado para tal fin. Recuerda que no estás solo(a).

**Ejercicios**

Determina la convergencia o divergencia de las sucesiones propuestas en la guía base desde la 1 a la 17. Contrasta tus resultados con las respuestas incluidas en la guía.

## Sucesiones Monótonas y Acotadas

Además de la convergencia, se requiere determinar la monotonía y acotación de una sucesión así como también la relación que guardan los tres conceptos. Este contenido se encuentra en las páginas de la 9 a la 14 del material base. Asegúrate de leerlo comprensivamente y aclarar las dudas que puedan surgir antes de comenzar a resolver los ejercicios.

***OBSERVACIONES***

1. Toda sucesión creciente es ***acotada inferiormente***. En efecto, si $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es creciente, se cumple que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots$ . Así $a_1 \leq a_n, \forall n \in Z^+$.

2. Toda sucesión decreciente es ***acotada superiormente***. En efecto, si $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es decreciente, se cumple que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ . Así $a_1 \geq a_n, \forall n \in Z^+$.

3. No siempre es posible obtener el límite de una sucesión convergente en forma directa. A veces se requiere usar un método indirecto como en el ejemplo 4.11 donde se aplica el teorema del emparedado o en los ejemplos 4.15 y 4.16 en los cuales se usa el teorema 4.8, luego de probar que la sucesión es monótona y acotada.

4. Podemos usar la gráfica o el rango (conjunto formado por los términos) de una sucesión para determinar de manera intuitiva si la misma es o no monótona, acotada o convergente. Esto debe ser posteriormente comprobado en forma analítica, mediante un procedimiento específico o a través de un teorema.

### Actividades

- Lee detenidamente el ejemplo 13(página 557) y los problemas resueltos 3 y 4(página 558) del texto Cálculo Integral del Dr. Jorge Sáenz. Los mismos ilustran el procedimiento para probar la convergencia de una sucesión definida por recurrencia y la forma de obtener el límite, una vez probada su convergencia.

- Haz un resumen de los procedimientos para estudiar la monotonía de las sucesiones, indicando en cada caso las condiciones bajo las cuales se recomienda su aplicación.

- Haz un resumen de los procedimientos para estudiar la acotación de una sucesión.

**Ejercicios**

Resuelve los ejercicios 18 al 25 y los correspondientes a sucesiones definidas por recurrencia, que se encuentran en el material base y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

**Antes de continuar, recuerda que puedes comunicar las dudas que tengas a través del foro para canalizarlas donde te responderemos a la brevedad posible.**

## Resumen de la Unidad

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Podemos definirla a través de: un conjunto (el rango de la sucesión), mediante una fórmula que proporciona su término general e incluso a través de su representación gráfica. Esta representación se caracteriza por estar constituida por puntos separados, ya que el dominio es un conjunto discreto.

La monotonía y acotación pueden estudiarse o determinarse analíticamente a través de procedimientos y teoremas. En cuanto a la convergencia, la misma puede determinarse directamente a través del cálculo del límite del término general o, de manera indirecta, a través de la aplicación de algún teorema como por ejemplo el teorema del emparedado o el teorema 4.8 del material guía.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

### VERDADERO O FALSO

En cada item, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. La sucesión $\left\{\sqrt{\dfrac{sen(n!)+2}{n^3}}\right\}$ diverge. ( )
2. La sucesión $\left\{(-1)^n \tan^{-1} n\right\}$ converge. ( )
3. Si una sucesión $\{a_n\}$ diverge entonces $\{a_n\}$ no es acotada. ( )
4. La sucesión $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}$ es monótona creciente. ( )
5. La sucesión dada por $a_1=\sqrt{3}\ \ y\ a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}\ ,\ para\, n\geq 2$ diverge. ( )

6. La sucesión $\left\{ \cos(n\pi) \right\}$ es acotada. ( )

7. La sucesión $\left\{ \dfrac{1+(-1)^n n}{3^n} \right\}$ diverge ( )

8. Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada entonces $\{a_n\}$ converge. ( )

9. La sucesión $\left\{ \ln\left( \dfrac{n}{n+1} \right) \right\}$ es monótona decreciente. ( )

10. La sucesión $\left\{ (-1)^n \dfrac{\tan^{-1} n}{n} \right\}$ es convergente. ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

1. F 2.F 3.F 4. V 5. F 6. V 7. F 8.F 9.V 10.V

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si tus respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

**¡ ¡ ¡ ÁNIMO ! ! !**

## Referencias


- Arias, Nicolás. Tópicos para un tercer curso de Matemática. Asociencias.
- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart,James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 3 (PARTE 2)
# SERIES DE NÚMEROS REALES

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos la convergencia o divergencia de una serie dada mediante diferentes criterios.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en asignaturas como Estadística Matemática, entre otras.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que el mismo te proporciona.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje


### OBJETIVO TERMINAL

Analizar la convergencia o divergencia de una serie dada.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Calcular** la suma de algunas series.
- **Determinar** la convergencia o divergencia de una serie dada, utilizando los distintos criterios.

## Contenidos

- Series. Definición.
- Serie Geométrica y Telescópica.
- Criterios para determinar convergencia o divergencia: Criterio del n-ésimo término, Criterio de la integral, Criterios de Comparación Directa y por paso al Límite, Criterio de Leibnitz, Criterios del Cociente, de la Raíz n-ésima y de Raabe.
- Convergencia absoluta y condicional.

## Fuentes de Información

**TEXTO GUÍA**

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.


Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

**OTROS TEXTOS**

- Sáenz, Jorge. **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería.** Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009

El contenido del capítulo 9 te servirá de apoyo para el estudio de las series.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto del Dr. Jorge Sáenz.

**SITIOS WEB RELACIONADOS**

http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/seriegeom/seriegeom2.html

Aquí podrás visualizar la suma de algunas series geométricas.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.
- Ejercicios en línea

**Sumativa.**

Prueba presencial con un valor de 25 puntos, de los cuales 15 corresponden a este tema. La fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual y realiza las actividades propuestas.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Leyes de los límites
- Límites infinitos y al infinito
- Funciones trascendentes
- Formas indeterminadas
- Derivación e integración
- Integrales impropias
- Sucesiones de Números Reales

Y para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

### SERIES INFINITAS DE NÚMEROS REALES

En primer lugar, es importante que comprendas la definición de serie, y la definición de convergencia y divergencia. Además en esta primera etapa debes identificar las series geométricas y las series telescópicas y calcular su suma en caso de que exista. Cerrando esta fase nos encontramos con algunas propiedades de las series, enunciadas a través de varios teoremas.

#### Actividad

- Lee con detenimiento y asegurándote de entender completamente los aspectos mencionados, en las páginas 77 a 81 del texto guía.

- En los ejercicios propuestos 31 al 34 del texto guía, identifica las series geométricas y telescópicas. Determina su convergencia o divergencia y en caso de convergencia encuentra la suma.

Para determinar la convergencia o divergencia de una serie sin necesidad de obtener la suma parcial n-ésima, disponemos de un conjunto de teoremas conocidos como criterios de convergencia. Los mismos pueden agruparse de la siguiente forma:

**Criterios para series de Términos Positivos**

- Criterio de la Integral
- Criterio de Comparación Directa
- Criterio de Comparación por Paso al Límite

**Criterio para Series Alternas:** Criterio de Leibnitz

**Criterios para series de Términos Cualesquiera**

- Criterio del límite del término n-ésimo para divergencia
- Criterio de la raíz n-ésima
- Criterio del Cociente
- Criterio de Raabe

A fin de lograr el aprendizaje de este contenido, procede como sigue:

5. Lee comprensiva y cuidadosamente la teoría y ejemplos del material base a partir del teorema 5.6 (página 81).
6. Toma en consideración los comentarios y observaciones que aparecen a continuación.
7. Consulta las dudas con el profesor y tus compañeros mediante el foro previsto para tal fin.
8. Gana destreza, realizando los ejercicios propuestos para el tema.

**IMPORTANTE**

En el ejemplo 5.10 del texto guía se establece la convergencia y divergencia de un tipo especial de series llamadas **p-series o series p**. Éstas presentan la forma

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ con p ϵ R. Las series p serán de gran ayuda en el estudio de la convergencia o divergencia de otras series más complejas mediante los criterios de comparación.

**Ejemplo**

Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes **p-series:**

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ b) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ d) $\sum_{n=1/2}^{+\infty} n$

**Solución**

e) Esta serie converge ya que p=4 > 1.
f) En este caso p= 1/2 < 1, por lo cual la serie diverge.
g) ¿Cuál es el valor de p? p=1, entonces la serie diverge.
h) Para que ésta se vea como una p-serie debemos reescribirla

en la forma $\sum_{n=1/2}^{+\infty} \frac{1}{n^{-1}}$ . Así p= -1 < 1 y en consecuencia la serie diverge.

***OBSERVACIONES***

1. Si el límite del término n-ésimo o general de una serie dada es igual a cero, no se obtiene información en cuanto a su convergencia o divergencia. Pero si dicho límite resulta diferente de cero, en base al criterio del límite del término n-ésimo , se puede concluir que tal serie diverge.
2. Si al aplicar los criterios de comparación directa y por paso al límite se obtiene una opción diferente a las contenidas en sus incisos, no se puede sacar ninguna conclusión.
3. Para aplicar los criterios de comparación directa y por paso al límite, además de la serie objeto de estudio, se requiere contar con una segunda serie cuya convergencia o divergencia sea más fácil de determinar. Generalmente se opta por una p-serie o una serie geométrica.
4. La escogencia de la segunda serie, mencionada en la observación 3, puede hacerse en base al término general de la serie dada como en los ejemplos 5.15, 5.16 a) y 5.16 b) del texto guía. Cuando se trate de una serie cuyo

término general es una expresión algebraica, se recomienda escoger una serie p del mismo orden que el término de la serie estudiada (Ver ejemplo 5.14 en el texto guía).

5. Antes de aplicar cualquier criterio de convergencia, debemos verificar el cumplimiento de las hipótesis que contiene el enunciado del criterio.

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

### Actividad

- Elabora una tabla resumen con los criterios de convergencia.
- Escribe un procedimiento a seguir para determinar la convergencia o divergencia de una serie de números reales.
- Proporciona los ejemplos que se piden a continuación: una serie absolutamente convergente, una serie condicionalmente convergente y una serie alterna divergente. Justifica en cada caso.

### Ejercicios

Resuelve los ejercicios del 35 al 85 propuestos en el texto guía, justificando el procedimiento y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

## Resumen de la Unidad

El objetivo terminal del tema consiste en analizar la convergencia o divergencia de una serie dada. Para lograrlo se requiere, en primera instancia, conocer las definiciones de: serie de números reales, sucesión de sumas parciales, convergencia, divergencia y suma de una serie. Además debemos estar en capacidad de obtener, en caso de que exista, la suma de algunas series como las geométricas y telescópicas. Así mismo, resulta indispensable conocer y aplicar apropiadamente los Criterios de Convergencia (teoremas que permiten determinar la convergencia o divergencia de una serie) y lo referente a convergencia absoluta y convergencia condicional.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

**SELECCIÓN SIMPLE** (Sólo una de las opciones es correcta)

1. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\,n}{n^2}$ es

a) Alterna

b) De términos positivos

c) Absolutamente convergente

d) Divergente

2. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2+n}$

a) Converge condicionalmente.

b) Es telescópica

c) Diverge

d) Ninguna de las anteriores

## SELECCIÓN MÚLTIPLE (Dos de las opciones son correctas)

1. Para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^n}$ podemos usar los siguientes criterios

a) Criterio de Leibnitz

b) Criterio de la Raíz n-ésima

c) Criterio del Cociente

d) Criterio de la Integral

2. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$

a) Es alterna

b) Converge condicionalmente

c) Diverge

d) Converge absolutamente

## VERDADERO O FALSO

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. Para determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum n3^{n^2}$ podemos aplicar el criterio de la integral. ( )

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{e}{2}\right)^{n}=-\frac{e}{2+e}$ ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

**SELECCIÓN SIMPLE**

1. c 2. b

**SELECCIÓN MÚLTIPLE**

1. b y c 2. a y c

**VERDADERO O FALSO**

1. F 2. F

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si tus respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

¡¡¡ÁNIMO!!!

## Referencias


- Arias, Nicolás. Tópicos para un tercer curso de Matemática. Asociencias.
- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 4

# COORDENADAS POLARES

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos el sistema de Coordenadas Polares: cómo representar y graficar puntos en estas coordenadas, la relación entre este sistema y el de coordenadas rectangulares con la consecuente transformación de puntos y ecuaciones de un sistema a otro, la graficación de curvas, obtención de puntos de intersección entre las mismas y por último el cálculo de área de una región en coordenadas polares.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en asignaturas como Matemática IV, entre otras.

La presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema, brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que éste te brinda; además se proponen actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL

Graficar curvas expresadas a través del sistema de coordenadas polares y Calcular la medida del área de una región en coordenadas polares.


### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Transformar** coordenadas polares a cartesianas y viceversa.
- **Transformar** ecuaciones en coordenadas polares a cartesianas y viceversa.
- **Trazar** gráficas de ecuaciones en coordenadas polares
- **Calcular** los puntos de intersección de gráficas en coordenadas polares.
- **Hallar** las rectas tangentes a curvas en coordenadas polares.
- **Determinar** la medida del área de una región limitada, en coordenadas polares.

## Contenidos

- El Sistema de Coordenadas Polares.
- Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares.
- Distintas formas de una ecuación en coordenadas polares.
- Intersección de gráficas en coordenadas polares.
- Rectas tangentes a curvas en coordenadas polares.
- Medida del área de una región en coordenadas polares.

## Fuentes de Información

### TEXTO GUÍA

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.

Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.


### OTROS TEXTOS

- Sáenz, Jorge. **Cálculo Integral con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería.** Segunda edición. Hipotenusa. Barquisimeto. 2009

El contenido del capítulo 7 te servirá de apoyo para el estudio de este tópico.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto del Dr. Jorge Sáenz.

### SITIOS WEB RELACIONADOS

http://www.slideshare.net/emy20342/coordenadas-polares-8062991

Aquí encontrarás material adicional para el estudio del tema.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Ejercicios en línea.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.

**Sumativa.**

Este contenido se evaluará conjuntamente con el contenido de Polinomios de Taylor en una prueba presencial, constituido por preguntas de desarrollo y ocasionalmente verdadero o falso. La fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Además, es esencial que estés al día en los conocimientos previos requeridos para la comprensión de este tema y que no intentes resolver ejercicios sin antes tener un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- El sistema de coordenadas rectangulares
- Ecuaciones de rectas, circunferencias y cónicas en coordenadas rectangulares
- Trigonometría
- Funciones trigonométricas
- Derivación e integración de funciones trigonométricas

Y con el fin de que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

## COORDENADAS POLARES

En primer lugar debes familiarizarte con este sistema de coordenadas. Para ello:

- Estudia el contenido del texto guía desde la página 1 a la página 6, con énfasis en la representación y graficación de puntos en coordenadas polares y en la conversión de puntos y ecuaciones de coordenadas rectangulares a polares y viceversa.
- Presta atención a las observaciones y ejemplos que se presentan a continuación.
- Realiza los ejercicios propuestos.

***OBSERVACIONES***

- Dada una distancia r y un ángulo Θ, existe exactamente un punto en el plano xy cuyas coordenadas polares son (r,Θ) (Ejemplo a) página5). Sin embargo, para un punto dado (x,y) en el plano existe un número infinito de posibles representaciones en coordenadas polares (Ejemplo b) página 6).
- En algunos procedimientos, será necesario usar identidades trigonométricas como puede verse en el ejemplo d) de la página 6.
- Los ángulos en notación polar se expresan normalmente en grados o en radianes, dependiendo del contexto. Por ejemplo, las aplicaciones de navegación marítima utilizan las medidas en grados, mientras que algunas aplicaciones físicas (especialmente la mecánica rotacional) y la mayor parte del cálculo expresan las medidas en radianes.

**Ejemplo**

a) Llevar la ecuación $r = 2a\cos\theta + 2b\,\text{sen}\theta$ de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

**Solución**

La idea es tratar de usar las fórmulas para cambiar de coordenadas.

$r = 2a\cos\theta + 2b\,\text{sen}\theta$ (1)

$r.r = r\,(2a\cos\theta + 2b\,\text{sen}\theta)$ Multiplicando por r ambos lados de la igualdad

$r^2 = 2ar\cos\theta + 2br\,\text{sen}\theta$

$x^2 + y^2 = 2ax + 2by$ Ya que $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\theta$

$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$

$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2$ Completando cuadrados

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$ Factorizando

Notemos que ésta es la ecuación de una circunferencia con centro C(a,b) y radio r= $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

b) Hallar una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana es 2y + 5x=3.

**Solución**

Recuerde que la gráfica correspondiente a esta ecuación es una línea recta.

$2y + 5x = 3$

$2r\text{sen}\theta + 5r\cos\theta = 3$ Ya que $x= r\cos\theta$ y $y= r\text{sen}\theta$

$r(2\text{sen}\theta + 5\cos\theta) = 3$ Factorizando

$$r = \frac{3}{2sen\theta + 5\text{sen}\theta} \qquad (2)$$

Las gráficas correspondientes a las ecuaciones marcadas con (1) y (2) forman parte de las llamadas ***gráficas especiales en coordenadas polares***, las cuales serán abordadas a continuación.

**Actividad**

- Revisa con detenimiento las páginas de la 7 a la 14 del material didáctico, donde se reseñan las gráficas especiales en coordenadas polares y sus respectivas ecuaciones, con el fin de que aprendas a reconocerlas.
- En las ecuaciones para las lemniscatas, r no está definida para todo $\theta$ en R. En cada caso, encuentra los valores de $\theta$ para los cuales r está definida. Como ayuda, lee el ejemplo 8 de la página 454 del texto del Dr. Sáenz.
- Identifica la gráfica correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones: a) $r = 5$ b) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ c) $r=2\csc\theta$ d) $r=-3\text{sen}\theta$ e) $r=3\text{sen}(2\theta)$ f) $r=2-2\cos\theta$ g)$r=-4$ h) $r= \text{sen}(3\theta)$ i) $r=4 + \text{sen}\theta$ j) $r=4+6\cos\theta$ k) $r=6-4\text{sen}\theta$ l) $r^2 = \cos(2\theta)$

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

Para alcanzar el objetivo terminal en esta parte del programa, requieres dominar el contenido de las páginas 16 a la 32 del material guía. En especial, lo relacionado con el procedimiento para trazar la gráfica de una ecuación (página 21), intersección de gráficas en coordenadas polares (Página 25) y área de una región en coordenadas polares (página 28).

## Actividades

- Lee con atención y comprensivamente el contenido indicado anteriormente; toma nota de las dudas y consúltalas a través del foro para canalizarlas.
- Aplica la igualdad (I) de la página 24 para tratar de obtener las distintas formas de la ecuación $r= 4\cos\theta$. ¿Qué concluyes?
- Encuentra el área de la región encerrada por la gráfica de $r=2\operatorname{sen}\theta$( Rpta.$\pi$ unidades cuadradas).
- Describe un procedimiento para calcular el área de una región entre curvas en coordenadas polares.

## *OBSERVACIONES*

1. Al plantear la(s) integral(es) que proporciona(n) la medida del área de una región, podemos considerar la simetría de la gráfica. Esto se aprecia en el ejemplo de la página 32 del texto guía, en el cual se indican las integrales que dan la medida del área de la mitad de la región en cuestión y luego se multiplica por dos este resultado, debido a la simetría con respecto al eje polar y su extensión.
2. Para calcular el área de una región puede ocurrir que baste plantear sólo una integral (ejemplo página 30), como también puede ser necesario una resta (ejemplo página 32) o incluso una suma de integrales (ejemplo 5 de la página 478 del texto del Dr. Sáenz).

## IMPORTANTE

- En el ejemplo de la página 23, al verificar si el polo pertenece a la gráfica, se resuelve la ecuación $\cos(2\theta)=0$ en el intervalo $[0,4\pi]$, Esto se debe a que el ángulo está multiplicado por 2, puesto que si $0\leq\theta\leq2\pi$ entonces $0\leq2\theta\leq4\pi$.
- Una consecuencia de la multiplicidad para la representación de un punto en coordenadas polares, es que la solución simultánea de dos ecuaciones polares no siempre da todos los puntos de intersección entre sus gráficas (ver ejemplos de las páginas 26 y 27). De allí la necesidad de aplicar el método descrito en la página 25.
- El trazado de la gráfica es de gran ayuda para los problemas de cálculo de área de una región por cuanto nos proporciona información indispensable: número de puntos de intersección, la(s) curva(s) que describe(n) la región y el intervalo que recorre la variable angular; facilitando el planteamiento de la(s) integrale(s) que proporciona(n) la medida del área.

**Ejercicios**

a) Usa la simetría de la gráfica en el ejemplo 31, para expresar la medida del área mediante ángulos correspondientes al segundo cuadrante.
b) Resuelve los ejercicios propuestos en el texto guía y compara tus resultados con las respuestas contenidas en el mismo.

## Resumen de la Unidad

El objetivo terminal del tema exige graficar curvas y encontrar el área de una región en coordenadas polares. Para alcanzarlo se requiere: el conocimiento de este sistema bidimensional, poder identificar y graficar las diferentes curvas, encontrar rectas tangentes en diferentes puntos de las mismas (en especial en el polo) y estar en capacidad de obtener los puntos de intersección entre gráficas en coordenadas polares. Finalmente se necesita plantear y resolver apropiadamente la(s) integral(es) que proporciona(n) la medida del área de una región en este sistema de coordenadas.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

### **SELECCIÓN SIMPLE** (Sólo una de las opciones es correcta)

1. Otra forma de la ecuación $r = 1 - 2\cos\theta$ es
   a) $r = 1 + 2\cos\theta$ b) $r = -1 - 2\cos\theta$ c) $r = -1 + 2\cos\theta$ d) $r = 1 - 2sen\theta$

2. La ecuación cartesiana correspondiente a la ecuación polar $r = \dfrac{-12}{4\cos\theta - 3sen\theta}$ es:

   a) 4x -3y – 12 = 0 b) 4x – 3y = 12 c) 3y – 4x = -12 d) 4x - 3y = -12

### **SELECCIÓN MÚLTIPLE** (Dos de las opciones son correctas)

1. La gráfica de $r = 2\cos(3\theta)$ es:
   a) Simétrica con respecto al eje polar
   b) Una rosa de 6 pétalos
   c) Una rosa de tres pétalos
   d) Una circunferencia

2. Un punto de intersección entre las gráficas de r = cos (2θ) y r = senθ es:
   a) (1, 3π/2) b) El polo c) ( $\sqrt{3}/2$ , 5π/6) d) (1/2, π/6)

## VERDADERO O FALSO

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. El polo está en la gráfica de r = 4 + 2sen$\theta$. ( )

2. La medida del área de la región acotada por la gráfica de r= 2cos (2$\theta$) viene dada por

$$A=16\int_{7\pi/4}^{2\pi}\cos^2(2\theta)\,d\theta \qquad (\ )$$

3. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de r= 1 - cos $\theta$ en el punto donde $\theta$ = π/4 es m= $\sqrt{2}+1$. ( )

4. Una representación en coordenadas polares para el punto en coordenadas rectangulares ( -1,1 ) es ( $\sqrt{2}$ ,7π/4 ). ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

## SELECCIÓN SIMPLE

1. a) 2. d)

## SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. a) y c) 2. b) y d)

## VERDADERO O FALSO

1. F 2. V 3. V 4. F

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si tus respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

¡¡¡ÁNIMO!!!

## Referencias


- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart, James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 5

# NÚMEROS COMPLEJOS

## Introducción

Apreciados estudiantes, en este tema estudiaremos los números complejos, sus propiedades y operaciones y las exponenciales complejas.
Estos contenidos, además de contribuir a la formación de tu perfil profesional, te resultarán de utilidad en el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes.

En cuanto a la presente guía, tiene como propósito acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL

Establecer las propiedades fundamentales de los números complejos y de algunas funciones complejas notables.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Manejar** correctamente las propiedades fundamentales de los números complejos y sus operaciones.
- **Expresar** $e^{z}$ en la forma $a + b\,i$ , $a,b \in \mathbf{R}$. Representar un número complejo en su forma polar.

## Contenidos

- Números complejos. Definición, propiedades y operaciones.
- Exponenciales Complejas.

## Fuentes de Información

**TEXTO GUÍA**

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.


Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

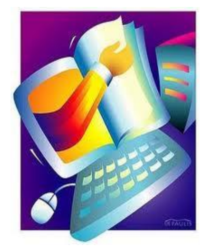
**OTROS TEXTOS**

Stewart, James. **Cálculo, conceptos y contextos.** International Thomson Editores . 1999

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto.

**SITIOS WEB RELACIONADOS**

http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf



En los capítulos 1,2 y 3 obtendrás información de interés (Historia, definición, operaciones, entre otras cosas) para el estudio de los números complejos.

http://gaussianos.com/calcular-las-raices-n-esimas-de-z/

Contiene información relacionada con el cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo z.

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo

Además de ampliar el contenido exigido en el programa, aquí podrás conocer algunas aplicaciones de estos números.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Ejercicios en línea.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la Guía Didáctica.

**Sumativa.**

Este contenido se evaluará mediante una prueba presencial, cuya fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Además es indispensable que domines los contenidos que se indican en la sección de Conocimientos Previos.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener

un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para abordar sin dificultad el tema actual, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Operaciones de los números reales
- Funciones trascendentes

Y para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

### NÚMEROS COMPLEJOS

En este tema debes lograr comprender, en primer término, lo que se entiende por número complejo, sus propiedades, representación gráfica, cómo efectuar operaciones con estos números y las propiedades que verifican dichas operaciones.

#### Actividades

Para alcanzar el aprendizaje efectivo de estos contenidos:

a) Lee comprensivamente el material base desde la página 1 a la página 6.

b) Resuelve los ***ejercicios 1, 2, 4, 8, 10, 11 y 14*** del mismo material y compara tus resultados con las respuestas contenidas en él.

El siguiente paso es efectuar la **representación de un número complejo en su forma polar**. Esta representación será de utilidad para la multiplicación y división de números complejos, así como para aplicar la **Fórmula de De Moivre** en la obtención de la potencia n-ésima de un número complejo y para hallar las n-ésimas raíces de un número complejo cualquiera.

**Actividades**

a) Ahora lee la teoría y los ejemplos requeridos para alcanzar este aprendizaje, en las páginas 6 a 11 del material base.

b) Resuelve los ***ejercicios 3, 5, 6, 7,12 y 17*** del material y compara tus resultados con las respuestas del mismo.

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

Por último estudiaremos las Exponenciales Complejas, es decir, le daremos un significado a la expresión $e^z$ cuando z= x+ iy es un número complejo.

Actividad

a) Lee en las páginas 11 y 12 del material base lo que se refiere al tema.

b) Evalúa :

b.1) $e^{i\pi}$ Rta. -1 b.2) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$ Rta. $\frac{i}{e}$

## Resumen de la Unidad

El objetivo terminal del tema exige establecer las propiedades fundamentales de los números complejos y de algunas funciones complejas notables. Esto involucra: manejar la definición y propiedades de los números complejos y sus operaciones, representar un número complejo como par ordenado, en forma binomial y en forma polar y por último, definir las exponenciales complejas y conocer sus propiedades.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

**SELECCIÓN SIMPLE** ( Sólo una de las opciones es correcta )

1. La parte real de (2- 3i) + (- 5 + 4i) es

a) 1 b) 3 c) -3 d) -1

2. La parte imaginaria del número complejo z= $\sqrt{3}$ + 5 i es

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) – 5 d) i

3. El complejo conjugado de z= 2- 5$\sqrt{3}$ i es

a) -2 – 5 $\sqrt{3}$ i b) -2 + 5$\sqrt{3}$ i c) 2 + 5 $\sqrt{3}$i d) 5$\sqrt{3}$ - 2i

4. $e^{i\frac{\pi}{4}}$ en forma binomial es

a) cis $\frac{\pi}{4}$ b) -$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\left|\frac{1+2i}{3-4i}\right|$ es

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{25}$ c) $\frac{1}{5}$ d) Ninguna de las anteriores

6. La forma polar del número complejo $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$ es

a) $\frac{64}{\sqrt{2}}\,cis\left(\frac{23}{12}\pi\right)$ b) 32$\sqrt{2}$ cis $\left(\frac{17}{12}\pi\right)$ c) $\frac{32}{\sqrt{2}}$ cis $\left(\frac{17}{12}\pi\right)$ d) $\frac{64}{\sqrt{2}}\,cis\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

## VERDADERO O FALSO

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. $\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)^{10}$ es un imaginario puro. ( )
2. Se cumple que $z.\overline{\overline{z}}=z^2$. ( )
3. W = $\sqrt{2}\ cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ es una raíz cuarta de z= -2-2$\sqrt{3}$i. ( )
4. Si $z_1=|z_1|\,cis\theta_1$ y $z_2=|z_2|\,cis\theta_2$ entonces $z_1.z_2=|z_1||z_2|\,cis(\theta_1.\theta_2)$ ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

## SELECCIÓN SIMPLE

1. c) 2. b) 3. c) 4. d) 5. a) 6. b)

### VERDADERO O FALSO

1. V 2. V 3. V 4. F

¿Lo lograste? ¡FELICIDADES!

Si tus respuestas no fueron correctas, es conveniente que estudies nuevamente el material didáctico y consultes oportunamente las dudas que tienes y las que puedan surgir a medida que avanzas. Recuerda que estamos a distancia de un Clic.

**¡ ¡ ¡ ÁNIMO ! ! !**

## Referencias


- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart, James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.

# TEMA 6

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## Introducción

Apreciados estudiantes, a continuación estudiaremos parte de uno de los temas más importantes de la Matemática: las ecuaciones diferenciales. Específicamente discutiremos algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de Bernoulli y ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes.

Estos contenidos, pasarán a formar parte de tu perfil profesional.

En cuanto a la presente guía, tiene como finalidad acompañarte en el recorrido a través del tema:

- Brindándote orientaciones para apoyar el abordaje del material didáctico y complementar la información que te brinda.
- Proponiéndote actividades para motivar y comprobar tu avance en el logro del aprendizaje.

## Objetivos de Aprendizaje

### OBJETIVO TERMINAL


Resolver algunas ecuaciones diferenciales lineales de Primer y Segundo orden.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- **Hallar** las soluciones de una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- **Resolver** problemas de valores iniciales para ecuaciones lineales de primer orden.
- **Hallar** todas las soluciones o una solución particular de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
- **Resolver** algunos problemas con aplicaciones que conducen a ecuaciones lineales de primer orden o segundo orden.

## Contenidos

- Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Ejemplos de problemas económicos que conducen a ecuaciones lineales de primer orden.
- Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.
- Ejemplos de problemas económicos que conducen a ecuaciones lineales de segundo orden.

## Fuentes de Información

### TEXTO GUÍA

**Notas de Matemática III para Ingeniería en Informática.** García, Miguel; Linares, José y Pérez, Dilcia.


Tanto la teoría como los ejercicios tienen la profundidad y el nivel de dificultad apropiados para la carrera. Puedes adquirirla por temas en la Unidad de Reproducción del DCyT.

### OTROS TEXTOS

- Purcell,Edwin y Varberg,Dale . **Cálculo con Geometría Analítica**. Sexta edición.Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México.1993

El contenido del capítulo 18 te servirá de apoyo para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

En la Biblioteca "Félix Morales Bueno" del DCyT encontrarás ejemplares de este texto.

### SITIOS WEB RELACIONADOS

http://www.une.edu.ve/~isisc/ej_ec_dif_de_ber.htm

Aquí encontrarás ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y de Bernoulli.

## Evaluación de los Aprendizajes

**Formativa.**

- Autoevaluaciones interactivas.
- Ejercicios en línea.
- Foros de aprendizaje.
- Ejercicios propuestos en la guía didáctica.

**Sumativa.**

Prueba presencial con un valor de 10 puntos, constituida por preguntas de desarrollo y ocasionalmente, verdadero o falso. La fecha se anunciará en el foro de noticias.

## Orientaciones Para el Estudio.

Ahora que te inicias en la modalidad de estudio semipresencial, es importante que tomes en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Organiza tu tiempo de dedicación al estudio. Cada semana, visita al menos 4 veces el aula virtual.
- Revisa periódicamente el foro de noticias.
- Participa activamente en las actividades propuestas por el tutor.
- En caso de dudas, utiliza el foro para canalizarlas.

Además es indispensable que domines los contenidos que se indican en la sección Conocimientos Previos.

También es esencial que no intentes resolver ejercicios sin antes tener

un buen dominio y comprensión de la teoría.

## Desarrollo de los Contenidos

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para garantizar la comprensión y desenvolvimiento en el desarrollo de este tema, necesitas dominar los siguientes contenidos:

- Propiedades de potenciación y radicación
- Ecuaciones de segundo grado
- Números complejos
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Funciones trascendentes
- Derivación e integración

Y para que conozcas tus fortalezas y debilidades con respecto a tales contenidos, dispones de una prueba exploratoria que encontrarás en el aula virtual del curso.

## ECUACIONES DIFERENCIALES

En principio abordaremos las definiciones y nociones básicas. Con este propósito, estudia el contenido del material guía, correspondiente al tema (páginas 2 y 3) y luego realiza los ejercicios respectivos (páginas 3 y 4).

***OBSERVACIÓN*** 

Por lo general, para poder encontrar una solución particular de una ecuación diferencial, el número de condiciones iniciales debe igualar al número de constantes de la solución general.

Ahora trataremos la **ecuación diferencial lineal de primer orden** y la **ecuación de Bernoulli.** Para alcanzar los objetivos previstos, lleva a cabo las actividades que se proponen a continuación:

### Actividades

- Estudia cuidadosamente la teoría y los ejemplos de las páginas 5,6 y 7 de nuestro material base.
- Toma en consideración los comentarios indicados con la palabra IMPORTANTE que se presentan luego.
- Resuelve los ejercicios propuestos en las páginas 6 y 7 y compara tus resultados con las respuestas incluidas en el material.

**IMPORTANTE**

Para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden o una ecuación de Bernoulli, debes escribirlas en su forma normal ( $y'+P(x)\,y=Q(x)$ o $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^{n}$ , n$\neq o, n\neq 1$ respectivamente).Esto te permitirá distinguirlas e identificar P(x) y Q(x).

***Antes* de continuar, recuerda que puedes comunicar las dudas que tengas a través del foro para canalizarlas donde te responderemos a la brevedad posible.**

Por último, nos dedicaremos al estudio de las **ecuaciones de segundo orden homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes.** A tal efecto, te proponemos lo siguiente:

## Actividad

- Lee cuidadosamente la teoría y el ejemplo contenido en las páginas 8,9 y 10 del material didáctico base.
- Procede a resolver los ejercicios propuestos en las páginas 10 y 11 del mismo material. Verifica tus resultados con las respuestas que acompañan al material.

**IMPORTANTE**

Antes de intentar resolver las ecuaciones de segundo orden, debes asegurarte de que estén expresadas en la forma $y'' + a y' + by = g(x)$.

**¿Tienes alguna duda, inquietud o comentario en relación con el material revisado? Entonces comunícate con tu profesor y tus compañeros a través del foro previsto para tal fin. Recuerda que no estás solo (a).**

## Resumen de la Unidad

A esta altura se espera que estés en capacidad de reconocer una ecuación diferencial y clasificarla según su tipo, orden y según la linealidad.
Además para resolverla, es necesario identificar si la misma es lineal de primer orden, de Bernoulli o de segundo orden homogénea o no homogénea con coeficientes constantes, a objeto de aplicar el procedimiento correspondiente.

## Ejercicios de Autoevaluación de Cierre de la Unidad

### Verdadero o Falso

En cada ítem, escribe V o F dentro del paréntesis, según la proposición sea verdadera o falsa respectivamente.

1. $y'' + 3y' - 4y = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden, no homogénea. ( )

2. $y' - 2y = x^2$ es una ecuación de Bernoulli. ( )

3. $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. ( )

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 4x = e^t$ es una ecuación diferencial en derivadas parciales. ( )

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 4x = e^t$ es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. ( )

6. La ecuación característica de la ecuación $y'' + 3y' - 4y = 0$ es $m^2 + 3m - 4 = 0$. ( )

7. La ecuación $(1 + x^2)\, dy + (xy + x^3 + x)\, dx = 0$ corresponde a una ecuación diferencial lineal de primer orden. ( )

8. En la ecuación diferencial $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$, podemos afirmar que $P(x) = \tan x$ y $Q(x) = \sec x$ . ( )

9. Un factor integrante para la ecuación $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$ viene dado por

$$e^{\int sen\, x\, dx}$$

( )

10. Si $y = C x^3$ es la solución general de la ecuación diferencial $x y' - 3y = 0$, entonces la solución particular determinada por la condición inicial y=2 si x= -3 es $y = \dfrac{-2}{27} x^3$. ( )

## Respuestas a los Ejercicios de Autoevaluación

1. F 2. F 3. V 4. F 5.V 6. V 7. F 8. V 9. F 10. V

## Referencias


- Edwards, C. y Penney, D. Cálculo y Geometría Analítica. 1994. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A.
- Larson, R. y Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. 1998. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Leithold, L. El Cálculo. Editorial Harla. México.
- Purcell E., Varbeg D. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial MacGraw-Hill
- Stewart, James. Cálculo, conceptos y contextos. 1.999. Thomson Editores.