UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Un estudio de los principales estados de pobreza en el contexto de las cadenas de Markov en tiempo discreto

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Isabel Cristina Torres Meza

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Estadística y Probabilidad.
Tutor: MSc. Pedro Harmath

Barquisimeto - Venezuela
2016

Dedicado a Dios,
a mis padres y a mi hermano por apoyarme y guiarme,
por ser las bases que me ayudaron a llegar hasta aquí.

Índice general

Resumen

En la presente investigación se estudian los principales estados de la pobreza, bajo el contexto de las cadenas de Markov en tiempo discreto. En primer lugar, se desarrollan los fundamentos estadísticos necesarios para entender el proceso, centrando la atención en los resultados que puedan explicar las transiciones entre estados de la pobreza, a partir de cadenas de Markov finitas y homogéneas. Posteriormente se realiza un análisis estadístico de los dos principales estados de la pobreza desde el punto de vista Markoviano, en el cual se presentan resultados importantes respecto a la transición entre los estados y su distribución límite. Por último, se presenta una aplicación sencilla del modelo, haciendo uso de datos publicados por el Instituto Nacional de Estadística (INE).

Como hallazgo fundamental del trabajo, se tiene que bajo las hipótesis de homogeneidad y dependencia Markoviana de primer orden, el proceso posee una única distribución límite, tal que en condiciones estacionarias, se espera que aproximadamente 3 de cada 10 hogares venezolanos se encuentren en situación de pobreza en el largo plazo.

Palabras clave: Procesos estocásticos, cadenas de Markov, pobreza, distribución estacionaria.

Introducción y antecedentes

La pobreza es uno de los problemas sociales más apremiantes. Una de sus tantas definiciones se basa en la comparación del ingreso per cápita del hogar con una línea de pobreza pre-establecida. Dicha línea de pobreza relaciona el monto del ingreso, con el precio de un conjunto de alimentos y el costo de servicios prioritarios para la salud y la educación, elementos integrales de la cesta básica (INE, (2011, [7])). Las políticas y medidas sociales necesarias para sacar a las personas de la pobreza dependen, en gran medida, de un mejor conocimiento de cuántos pobres hay, donde viven y, sobre todo, por qué son pobres. Ninguna de estas cuestiones resulta sencilla o directa.

Siguiendo a Cantó, Gradín y Del Río (2008, [5]) el análisis de la dinámica de la pobreza se inicia en los Estados Unidos durante los años ochenta, como resultado de la explotación de un panel de datos longitudinales denominado *Panel Study of Income Dynamics* (PSID), que entrevista a una muestra significativa de familias desde 1968.

Las cadenas de Markov son un tipo especial de proceso estocástico. Fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905. De acuerdo a Rincón (2011, [9]) su intención era crear un modelo probabilístico para analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios. El éxito del modelo propuesto por Markov radica en que es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas, pero al mismo tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente. Las cadenas de Markov pueden aplicarse a una amplia gama de fenómenos científicos y sociales.

Diversos estudios de la pobreza en el contexto de las cadenas de Markov han sido realizados a lo largo del tiempo. Por ejemplo, Casas et al. (2003, [6]) realizaron un estudio de la evolución acerca de la incidencia de la pobreza en España. El estudio se basó en la incidencia de la denominada pobreza económica, por lo que se utilizó como indicador de la posición de los hogares una variable exclusiva monetaria, como el ingreso familiar. Propusieron un modelo Markoviano discreto en el que se analizaron sus características generales. Luego se aplicaron al caso español, y se probó que puede aceptarse la hipótesis de homogeneidad de las matrices de transición para el periodo 1995-1998.

Bárcena, Fernández y Martín (2006, [3]) presentaron un análisis de la pobreza en España desde una perspectiva dinámica, empleando los datos del panel de hogares europeos de 1994-2001 con el objetivo de estimar las probabilidades de re-entrada y salida de la pobreza a través de las funciones de supervivencia. En el mismo, aplicaron la metodología de las cadenas de Markov para estimar las probabilidades de transición entre estados de pobreza y no-pobreza.

Por su parte, Bahamon (2010, [1]) presentó un enfoque dinámico de la pobreza en Colombia y España utilizando las cadenas de Markov, como modelo básico de partida. Propuso un modelo que pueda explicar las transiciones entre estados de pobreza a partir de las cadenas de Markov finitas y homogéneas con tres estados. Los resultados mostraron que las matrices eran homogéneas, pero no confirmaban siempre la dependencia Markoviana de primer orden. Además, el modelo de tres estados comprobó que existen transiciones imposibles de realizar. Para confirmar sus propiedades y darle más riqueza a la clasificación de los hogares, amplió a un modelo de cuatro estados.

Según nuestro conocimiento, el flagelo no ha sido abordado bajo el contexto de los procesos estocásticos mencionados arriba, es por ello que la presente investigación indaga sobre el comportamiento de los principales estados de la pobreza bajo la óptica de las cadenas de Markov a tiempo discreto, esperando que ella sea un referente de los trabajos de esta naturaleza.

Capítulo 1

El Problema

1.1. Planteamiento del problema

El análisis de la dinámica de la pobreza consiste en estudiar el comportamiento de las transiciones a través del tiempo, algunas veces dicho estudio, entre estados, puede hacerse utilizando probabilidades, o bien analizando episodios completos de estancia en la pobreza incluyendo su duración, entre otros. La motivación de estudiar los principales estados de la pobreza en el contexto de las cadenas de Markov en tiempo discreto, subyace en el hecho de que el análisis de la dinámica de la pobreza ha estado enmarcado por el enfoque iniciado por Bane y Ellwood (1986, [2]) y Stevens (1999, [10]), cuyo inconveniente es que solamente estudia los cambios de estados, siendo así el enfoque Markoviano más preciso para estudiar este tipo de fenómenos.

Por otra parte, el análisis a través de la metodología Markoviana no ha tenido un tratamiento extenso, sin embargo en países como España y Colombia, se han realizado estudios sobre la dinámica de la pobreza a través de dicha metodología que han sido exitosos. Tal y como fue señalado anteriormente, en Venezuela no se ha utilizado la metodología Markoviana para el estudio de la pobreza. Además, todos los análisis centrados en identificar las rutas de salida y entrada a la pobreza de la población, resultan de gran utilidad para el diseño de políticas sociales, de allí la concepción de nuestra investigación bajo la estructura enmarcada arriba.

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo general

Estudiar la dinámica de los principales estados de la pobreza bajo el contexto de las cadenas de Markov en tiempo discreto.

1.2.2. Objetivos específicos

- Presentar en forma clara y precisa, las bases teóricas para el estudio de los principales estados de la pobreza en el contexto de las cadenas de Markov.
- Analizar la evolución de los principales estados de pobreza para la identificación de grandes rasgos del fenómeno en cuestión, visto como un proceso estocástico.
- Presentar un análisis sencillo de la dinámica de los principales estados de la pobreza, haciendo uso de datos publicados por el Instituto Nacional de Estadística (INE).

1.3. Metodología y alcances del trabajo

La metodología de investigación en Matemática está concentrada en el método lógico-deductivo, y también en el método lógico-inductivo, por tanto, la presente se concentra en ambos. Las principales herramientas de trabajo a emplear se encuentran, fundamentalmente, en referencias bibliográficas disponibles, como algunos libros especializados y artículos científicos desarrollados en el área de las cadenas de Markov.

A pesar de las limitaciones bibliográficas, que se deben al escaso tratamiento de la dinámica de la pobreza a través de la metodología Markoviana, aparte de cumplir con los objetivos planteados, nos hemos fijado la meta de publicar un artículo científico en una revista arbitrada e indizada.

Capítulo 2

Fundamentos de las Cadenas de Markov

El presente capítulo desarrolla de manera detallada los conocimientos estadísticos necesarios para la elaboración de este trabajo. En primer lugar, se presentan dos secciones de definiciones básicas necesarias para nuestra investigación, en las cuales se define el modelo probabilístico de Kolmogorov, y posteriormente se desarrollan los conceptos básicos de procesos estocásticos. Finalmente, se hace un desarrollo conceptual referente a las cadenas de Markov en tiempo discreto. Para entender mayores detalles al respecto ver [9].

2.1. Modelo probabilístico de Kolmogorov

Definición 2.1 *Un* ***evento*** *es el resultado de un experimento. Cuando un evento no puede descomponerse se le denomina evento simple. Al conjunto de todos los eventos simples se le llama espacio muestral, y se denota con la letra* Ω.

Definición 2.2 *Sea* Ω *un espacio muestral y* $\mathcal{F}$ *la familia de eventos de dicho espacio muestral, la cual cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) *Si* A *pertenece a* $\mathcal{F}$, *entonces el complemento de* A *también pertenece a* $\mathcal{F}$,

(iii) *Si* $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$, *entonces* $\cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

Toda familia $\mathcal{F}$ que cumpla las propiedades antes descritas es denominada σ-álgebra.

Además de ello, se denomina medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$ a la función $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,$

(ii) $0 \leq P(A) \leq 1$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$,

(iii) *Si* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *con* $i \neq j$, *entonces*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad \textit{[numerabilidad aditiva]}$$

Luego, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, también conocida como ***modelo probabilístico de Kolmogorov****.*

2.2. Procesos estocásticos

Definición 2.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, una* ***variable aleatoria*** *es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B, se cumple que $X^{-1}(B)$ pertenece a $\mathcal{F}$.*

Vale destacar que todo conjunto Boreliano B es un elemento de la σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, la cual es la σ-álgebra más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Definición 2.4 *Un* ***proceso estocástico*** *es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$, parametrizada por un conjunto T, llamado espacio de parámetros, y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Todo proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables $X : T \times \Omega \longrightarrow S$, tal que al par (t, ω) se le asocia el estado $X(t, \omega)$, lo que también puede escribirse como $X_t(\omega)$. Para cada valor de t en T, el mapeo $\omega \longmapsto X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, mientras que para cada ω en Ω fijo, la función $t \longmapsto X_t(\omega)$ es llamada una *trayectoria o realización del proceso*.

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para: el espacio parametral, el espacio de estados, las características de las trayectorias, y principalmente las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso. Según Bath (1983, [4]), los procesos estocásticos se pueden clasificar de acuerdo a su espacio de estados y espacio de índices, así como respecto a las relaciones de dependencia entre las variables. Respecto de ambos espacios, se presenta el siguiente cuadro resumen:

Cuadro 2.1: Clasificación de los procesos estocásticos.

		Espacio de estados (S)	
		Discreto	Continuo
Espacio de índices (T)	Discreto	$T = \{0, 1, \ldots\}$ $S \subset \{0, 1, \ldots\}$	$T = \{0, 1, \ldots\}$ $S \subset \mathbb{R}$
	Continuo	$T = [0, +\infty)$ $S \subset T = \{0, 1, \ldots\}$	$T = [0, +\infty)$ $S \subset \mathbb{R}$

Fuente: Méndez (2007, [8]).

2.3. Cadenas de Markov

Definición 2.5 *Una* ***cadena de Markov*** *es un proceso estocástico a tiempo discreto* $\{X_n : n = 0, 1, ...\}$*, con espacio de estados discreto, y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero* $n \geq 0$*, y para cualesquiera estados* $x_0, ..., x_{n+1}$*, se cumple*

$$\mathrm{P}(x_{n+1}|x_0, ..., x_n) = P(x_{n+1}|x_n). \tag{2.1}$$

La condición (2.1) establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro $n+1$ depende únicamente del estado del proceso al tiempo n, y es equivalente a poder calcular la distribución conjunta de las variables $X_0, X_1, .., X_n$ de la siguiente forma

$$\mathrm{P}(x_0, ..., x_n) = P(x_0)P(x_1|x_0)...P(x_n|x_{n-1}). \tag{2.2}$$

Cuando el espacio de estados de una cadena de Markov es un conjunto finito se dice que la cadena es *finita*.

A la probabilidad $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ se le denota por $p_{ij}^{(n,n+1)}$, y representa la probabilidad de transición del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$. Estas probabilidades se conocen como *probabilidades de transición en un paso.* Cuando las probabilidades $p_{ij}^{(n,n+1)}$ no dependen de n se dice que la cadena es *estacionaria* u *homogénea en el tiempo.* Asumiremos tal situación de modo que las probabilidades de transición en un paso se escriben simplemente como p_{ij}. Todas las p_{ij} constituyen la matriz de transición en un paso $P = (p_{ij})$.

Proposición 2.1 *La matriz de probabilidades de transición $P = (p_{ij})$ cumple las siguientes propiedades:*

a) $p_{ij} \geq 0$,

b) $\sum_j p_{ij} = 1$.

Demostración. La primera condición es inmediata dado que los p_{ij} son probabilidades. Ahora bien, para la segunda condición se tiene que para cualquier estado i y cualquier entero $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} 1 &= P(X_{n+1} \in \{0, 1, ...\}) \\ &= P(X_{n+1} \in \{0, 1, ...\}|X_n = i) \\ &= P(\cup_j (X_{n+1} = j)|X_n = i) \\ &= \sum_j P(X_{n+1} = j|X_n = i) \\ &= \sum_j p_{ij}. \end{aligned}$$

□

La condición b) significa que a partir de cualquier estado i con probabilidad uno la cadena pasa necesariamente a algún elemento del espacio de estados al siguiente momento. En general toda matriz cuadrada que cumpla estas dos propiedades se dice que es una *matriz estocástica.*

Definición 2.6 *Una* ***distribución de probabilidad*** *inicial para una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, ...\}$ es simplemente una distribución de probabilidad sobre este conjunto, es decir, una colección de números $p_0, p_1, p_2, ...$ que son no negativos y que suman uno. El número p_i, corresponde a la probabilidad de que la cadena inicie en el estado i.*

Definición 2.7 *La probabilidad $P(X_{m+n} = j|X_m = i)$ corresponde a la probabilidad de pasar del estado i al tiempo m, al estado j al tiempo $m + n$ y se le llama* ***probabilidad de transición en n pasos****. Suponiendo la condición de homogeneidad en el tiempo, esta probabilidad no depende realmente de m, por lo tanto coincide con $P(X_n = j|X_0 = i)$, y se le denota por $p_{ij}(n)$ o $p_{ij}^{(n)}$.*

Cuando $n = 1$, simplemente se escribe p_{ij}. También, si $n = 0$, es natural definir

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j, \\ 1 & si\ i = j. \end{cases}$$

Es decir, después de realizar cero pasos la cadena no puede estar en otro estado mas que en su lugar de origen. Esta es la función *delta de Kronecker*.

2.3.1. Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Teorema 2.1 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov) *Para cualesquiera números enteros r y n tales que $0 \leq r \leq n$, y para cualesquiera estados i y j se cumple*

$$\mathrm{p}_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}. \tag{2.3}$$

Demostración. Por definición, tenemos que

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i).$$

Ahora bien, por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} P(X_n = j|X_0 = i) &= \sum_k P(X_n = j|X_r = k, X_0 = i)P(X_r = k|X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k|X_0 = i) \ (propiedad\ de\ Markov) \\ &= \sum_k p_{kj}^{(n-r)} p_{ik}^{(r)} \\ &= \sum_k p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2 *La probabilidad de transición en n pasos, $p_{ij}^{(n)}$, está dada por la entrada (i, j) de la n-ésima potencia de la matriz P, es decir,*

$$\mathrm{p}_{ij}^{(n)} = (P^n)_{ij}. \tag{2.4}$$

Demostración. Por el teorema anterior tenemos,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1} p_{ik_1}^{(1)} p_{k_1 j}^{(n-1)}.$$

Aplicando nuevamente la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\begin{aligned} p_{k_1 j}^{(n-1)} &= \sum_{k_2} p_{k_1 k_2}^{(1)} p_{k_2 j}^{(n-1-1)} \\ &= \sum_{k_2} p_{k_1 k_2}^{(1)} p_{k_2 j}^{(n-2)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo, nos queda que

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1,k_2} p_{ik_1}^{(1)} p_{k_1 k_2}^{(1)} p_{k_2 j}^{(n-2)}.$$

Aplicando n-1 veces la ecuación de Chapman-Kolmogorov, tenemos

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}} p_{ik_1}^{(1)} p_{k_1 k_2}^{(1)} \cdots p_{k_{n-1} j}^{(1)} \\ &= (P^n)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Cuando la matriz estocástica P es diagonalizable, es decir, $P = QDQ^{-1}$ donde D es una matriz diagonal, las potencias de P se calculan fácilmente, ya que $P^n = QD^nQ^{-1}$.

2.3.2. Accesibilidad y comunicación

Definiremos a continuación, la comunicación entre dos estados de una cadena de Markov.

Definición 2.8 *Se dice que el estado j es **accesible** desde el estado i si existe un entero $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, esto se escribe simplemente como $i \to j$. Se dice además que son **comunicantes**, y se escribe $i \leftrightarrow j$, si se cumple que $i \to j$ y $j \to i$.*

Proposición 2.3 *La comunicación es una relación de equivalencia, es decir, cumple las siguientes propiedades:*

a) Es reflexiva: $i \leftrightarrow i$.

b) Es simétrica: si $i \leftrightarrow j$, entonces $j \leftrightarrow i$.

c) Es transitiva: si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$, entonces $i \leftrightarrow k$.

Demostración.

a) Es reflexiva, dado que para cualquier estado i por definición se tiene que $p_{ii}^{(0)} = 1$, en consecuencia se cumple que $i \leftrightarrow i$.

b) Es simétrica, ya que si $i \leftrightarrow j$, entonces existen $n, m \geq 0$ tales que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$, en consecuencia $j \rightarrow i$ y $i \rightarrow j$. Por lo tanto $j \leftrightarrow i$.

c) Es transitiva, ya que si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$, existen $n_1, m_1, n_2, m_2 \geq 0$ tales que $p_{ij}^{(n_1)} > 0$ y $p_{ji}^{(m_1)} > 0$, $p_{jk}^{(n_2)} > 0$ y $p_{kj}^{(m_2)} > 0$, entonces para $n = n_1 + n_2 \geq 0$ y $m = m_1 + m_2 \geq 0$ se tiene por (2.3) que:

$$\begin{aligned} p_{ik}^{(n)} &= \sum_r p_{ir}^{(n_1)} p_{rk}^{(n_2)} \\ &\geq p_{ij}^{(n_1)} p_{jk}^{(n_2)} > 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_{ki}^{(m)} &= \sum_r p_{kr}^{(m_2)} p_{ri}^{(m_1)} \\ &\geq p_{kj}^{(m_2)} p_{ji}^{(m_1)} > 0. \end{aligned}$$

Por tanto $i \leftrightarrow k$.

□

En consecuencia, la comunicación induce una partición del espacio de estados de una cadena de Markov dada por los subconjuntos de estados comunicantes, es decir, dos estados pertenecen al mismo elemento de la partición si, y sólo si, tales estados se comunican.

Definición 2.9 *El estado i de una cadena de Markov se llama **absorbente** si $p_{ii} = 1$.*

Definición 2.10 *Se dice que una cadena de Markov es **irreducible** si todos los estados se comunican entre si.*

En otras palabras, una cadena de Markov es irreducible si existe sólo una clase de comunicación, es decir, si la partición generada por la relación de comunicación es la trivial.

2.3.3. Periodo

Definición 2.11 *El* ***periodo*** *de un estado i es un número entero no negativo denotado por d(i), y definido como sigue* $\mathrm{d}(i) = m.c.d.\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$.

Respecto a la definición, *m.c.d.* es el *máximo común divisor*. Cuando $p_{ii}^{(n)} = 0$ para todo $n \geq 1$, se dice que $d(i) = 0$. Se dice que un estado i es *aperiódico* si $d(i) = 1$. Cuando $d(i) = k \geq 2$ se dice que i es *periódico* de periodo k.

Proposición 2.4 *Si los estados i y j pertenecen a la misma clase de comunicación, entonces tienen el mismo periodo.*

Demostración. Claramente el resultado es válido para $i = j$. Supongamos entonces que $i \neq j$. Como los estados i y j están en la misma clase de comunicación, existen enteros $n \geq 1$ y $m \geq 1$ tales que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Sea $s \geq 1$ un entero cualquiera tal que $p_{ii}^{(s)} > 0$, este s existe dado que por (2.3)

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n+m)} &= \sum_r p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(m)} \\ &\geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $d(i) \mid s$. Además,

$$\begin{aligned} p_{jj}^{(n+m+s)} &= \sum_r p_{jr}^{(n)} (\sum_k p_{rk}^{(s)} p_{kj}^{(m)}) \\ &\geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(m)} > 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} p_{jj}^{(n+m+2s)} &= \sum_r p_{jr}^{(n)} (\sum_k p_{rk}^{(2s)} p_{kj}^{(m)}) \\ &\geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(2s)} p_{ij}^{(m)} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(j) \mid (n + m + s)$ y $d(j) \mid (n + m + 2s)$. Entonces *d(j)* divide a la diferencia $(n + m + 2s) - (n + m + s) = s$. Así, todo entero $s \geq 1$ tal que $p_{ii}^{(s)} > 0$ cumple $d(j) \mid s$. Pero *d(i)* divide a s de manera máxima, por tanto $d(i) \geq d(j)$. De manera análoga, escribiendo i por j, y j por i, se obtiene $d(j) \geq d(i)$. Se concluye entonces que $d(i) = d(j)$.

□

El recíproco del resultado anterior es en general falso, es decir, dos estados pueden tener el mismo periodo y sin embargo no ser comunicantes.

Proposición 2.5 *Para cada estado i, existe un entero N tal que para todo $n \geq N$, se cumple $p_{ii}^{(nd(i))} > 0$.*

Demostración. Ver [9].

□

Corolario 2.1 *Si $p_{ij}^{(m)} > 0$ para algún entero m, entonces existe un entero N tal que para toda $n \geq N$, se cumple $p_{ij}^{(m+nd(j))} > 0$.*

Demostración. Por la proposición anterior, para n suficientemente grande, se tiene que

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+nd(i))} &= \sum_r p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(nd(j))} \\ &\geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(nd(j))} > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $p_{ij}^{(m+nd(j))} > 0$.

□

2.3.4. Primera visita

Definición 2.12 *Sea A un subconjunto del espacio de estados de una de Markov X_n. El* ***tiempo de la primera visita*** *al conjunto A es la variable aleatoria*

$$\tau_A = \begin{cases} \text{mín}\{n \geq 1 : X_n \in A\} & \textit{si } X_n \in A \textit{ para algún } n \geq 1, \\ \infty & \textit{o.c.} \end{cases}$$

Es decir, τ_A es el primer momento positivo en el cual la cadena toma un valor dentro de la colección de estados A, si ello eventualmente sucede. Cuando A consta de un solo estado j, y suponiendo que la cadena inicia en i, entonces el tiempo de la primera visita al estado j se escribe τ_{ij}.

Definición 2.13 *Para cada $n \geq 1$, el número $f_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que una cadena que inicia en el estado i, llegue al estado j por primera vez en exactamente n pasos, es decir,*

$$f_{ij}^{(n)} = P(\tau_{ij} = n).$$

Adicionalmente, se define $f_{ij}^{(0)} = 0$*, incluyendo el caso* $i = j$*.*

En particular, $f_{ii}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar por primera vez al mismo estado i en el n-ésimo paso, y $f_{ii}^{(1)}$ es simplemente p_{ii}. La probabilidad de una eventual visita al estado j, a partir del estado i, se define como

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

Proposición 2.6 *Para cada* $n \geq 1$*,*

$$\mathrm{p}_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \tag{2.5}$$

Demostración. Por definición, $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i)$. Ahora, consideremos los eventos $E = \{X_n = j\}$ y $E_k = \{X_k = j, X_{k-1} \neq j, ...X_1 \neq j\}$, con $k = 1, ..., n$. Los eventos $E \bigcap E_1$,...,$E \bigcap E_n$ forman una partición del evento E, por tanto haciendo uso de la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}
P(X_n = j|X_0 = i) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j, X_k = j, X_{k-1} \neq j, ...X_1 \neq j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j|X_k = j, X_{k-1} \neq j, ..., X_1 \neq j X_0 = i) \\
&\quad P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, ...X_1 \neq j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = j|X_k = j) P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, ...X_1 \neq j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Así

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

□

2.3.5. Recurrencia y transitoriedad

Los estados de una cadena de Markov pueden ser clasificados, en una primera instancia, en dos tipos, dependiendo si la cadena es capaz de regresar con certeza al estado de partida.

Definición 2.14 *Se dice que un estado i es* ***recurrente*** *si la probabilidad de eventualmente regresar a i, partiendo de i, es uno, es decir, si*

$$P(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 | X_0 = i) = 1.$$

Un estado que no es recurrente se llama ***transitorio****, y en tal caso la probabilidad anterior es estrictamente menor que uno.*

Definición 2.15 *Un estado i es* ***recurrente*** *si $f_{ii} = 1$, es decir, si la probabilidad de regresar a él en un tiempo finito es uno. Análogamente, un estado i es* ***transitorio*** *si $f_{ii} < 1$.*

De manera intuitiva, un estado es *recurrente* si con probabilidad uno la cadena es capaz de regresar eventualmente a ese estado. En cambio, el estado se llama *transitorio* si existe una probabilidad positiva de que la cadena, iniciando en él, ya no regrese nunca a ese estado. Además de la definición, tenemos el siguiente criterio para determinar si un estado es recurrente o transitorio.

Proposición 2.7 (Criterio para la recurrencia) *El estado i es:*

1. *recurrente si, y sólo si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$
2. *transitorio si, y sólo si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$

Demostración. Sea N_i la variable aleatoria que cuenta el número de veces que el proceso regresa al estado i a partir del primer paso. $N_i = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(X_n = i)}$, cuando $X_0 = i$. Para $k \geq 1$ se tiene,

$$\begin{aligned}
P(N_i \geq k|X_0 = i) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(N_i \geq k, X_m = i, X_{m-1} \neq i, ...X_1 \neq i|X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(N_i \geq k|X_m = i, X_{m-1} \neq i, ...X_1 \neq i, X_0 = i) \\
&\quad P(X_m = i, X_{m-1} \neq i, ...X_1 \neq i|X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(N_i \geq k-1|X_0 = i) f_{ii}^m \\
&= P(N_i \geq k-1|X_0 = i) f_{ii} \\
&\vdots \\
&= P(N_i \geq 1|X_0 = i)(f_{ii})^{k-1} \\
&= (f_{ii})^k.
\end{aligned}$$

La esperanza de N_i, puede calcularse de las siguientes maneras. Primero,

$$\begin{aligned}
E(N_i|X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq k|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii})^k \\
&= \begin{cases} \dfrac{f_{ii}}{1 - f_{ii}} & si\ 0 \leq f_{ii} < 1, \\ \infty & si\ f_{ii} = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por otro lado, por el *teorema de la convergencia monótona*,

$$\begin{aligned}
E(N_i|X_0 = i) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{(X_n = i)}|X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i|X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Al igualar estas dos expresiones tenemos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{f_{ii}}{1-f_{ii}} & si\ 0 \leq f_{ii} < 1, \\ \infty & si\ f_{ii} = 1. \end{cases}$$

Por tanto, el estado i es recurrente si, y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

y es transitorio si, y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

□

Observe que la esperanza $E(N_i|X_0 = i)$ es el número promedio de retornos al estado i, de modo que un estado i es recurrente si, y sólo si, el número promedio de retornos a él es infinito. En contraparte, un estado i es transitorio si, y sólo si, el número promedio de retornos a él es finito.

Proposición 2.8 *La recurrencia es una propiedad de clase, es decir,*

1. *Si i es recurrente e $i \leftrightarrow j$, entonces j es recurrente.*

2. *Si i es transitorio e $i \leftrightarrow j$, entonces j es transitorio.*

Demostración. Dado que $i \leftrightarrow j$ existen enteros $n \geq 1$ y $m \geq 1$ tales que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$. Entonces

$$p_{jj}^{(m+n+r)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)}.$$

Por la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+r)} &\geq \sum_{r=1}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} \\ &= p_{ji}^{(m)} \sum_{r=1}^{\infty} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

Si i es recurrente, la suma del lado derecho es infinita. Se sigue entonces que la suma del lado izquierdo también lo es, es decir, j es recurrente. Ahora si i es transitorio, supongamos por el método de reducción al absurdo que j es recurrente. Por hipótesis $i \leftrightarrow j$, entonces por lo demostrado anteriormente se tiene que i es recurrente, lo cual es una contradicción. Por tanto lo supuesto es falso, así, se tiene que si i es transitorio y $i \leftrightarrow j$, entonces j es transitorio.

□

Como consecuencia de lo anterior, cuando una cadena es irreducible y algún estado es recurrente, todos los estados lo son, y se dice que la cadena es *recurrente*. También puede presentarse una situación en donde el espacio de estados conste de varias clases de comunicación recurrente, en tal caso la cadena también es *recurrente*. En contraparte, una cadena es *transitoria* si todos los estados lo son, ya sea conformando una sola clase de comunicación de estados transitorios o varias de ellas. Siempre vale recordar que la *periodicidad*, la *recurrencia* y la *transitoriedad* son propiedades de clase.

Proposición 2.9 *Sea j un estado transitorio. Para cualquier estado inicial i, se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.*

Demostración. De (2.5), se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)}.$$

Ahora, por el *teorema de Fubini*,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} \\
&= f_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} < \infty.
\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty,$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

□

Proposición 2.10 *Toda cadena de Markov finita tiene por lo menos un estado recurrente.*

Demostración. Procedamos por el método de reducción al absurdo, supongamos que todos los estados son transitorios. Entonces, por la proposición anterior, para cualesquiera estados i y j, se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$. Sumando sobre el conjunto de estados, el cual es finito, se obtiene

$$\sum_{j} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{j} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por tanto es erróneo suponer que todos los estados son transitorios, debe existir por lo menos uno que es recurrente.

□

Definición 2.16 *El **tiempo medio de recurrencia** de un estado recurrente j, a partir del estado i, se define como la esperanza de τ_{ij}, y se denota por μ_{ij}, es decir,*

$$\mu_{ij} = E(\tau_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}.$$

Cuando el tiempo de primera visita se refiere al mismo estado de inicio y de llegada j se escribe simplemente como μ_j. Esta esperanza puede ser finita o infinita, y representa el número de pasos promedio que a la cadena le toma regresar al estado recurrente j.

2.3.6. Clases cerradas

Definición 2.17 *Una colección de estados no vacía $\mathscr{C}$ es cerrada si ningún estado fuera de $\mathscr{C}$ es accesible desde algún estado dentro de $\mathscr{C}$, es decir, si para cualquier $i \in \mathscr{C}$ y $j \notin \mathscr{C}$, $i \nrightarrow j$.*

Proposición 2.11 *Toda colección de estados que es cerrada e irreducible es una clase de comunicación.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una colección no vacía de estados que es irreducible y cerrada. y sea $i \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}$ es irreducible todos sus estados se comunican, por lo tanto deben pertenecer a la misma clase de comunicación. entonces $\mathscr{C} \subseteq C(i)$. Ahora, como $C(i)$ es cerrada no es posible salir de tal colección, de modo que la diferencia $C(i) - \mathscr{C}$ es vacía, ya que si existe $j \in C(i) - \mathscr{C}$ entonces $i \to j$, lo cual contradice el supuesto de que $\mathscr{C}$ es cerrada. Por tanto $\mathscr{C} = C(i)$.

□

2.3.7. Número de visitas

Definición 2.18 *Para cualquier tiempo finito n, se define la variable aleatoria que registra el **número de visitas** que una cadena realiza sobre un estado j, a partir del estado i, como*

$$N_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{(X_k = j)},$$

cuando $X_0 = i$.

Cuando los estados i y j coinciden, se escribe $N_i(n)$ en lugar de $N_{ii}(n)$. Como $0 \leq N_{ij}(1) \leq N_{ij}(2) \leq ...$, se tiene entonces una sucesión monótona no decreciente de variables aleatorias no negativas que converge casi seguramente a la variable $N_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{(X_k=j)}$, cuando $X_0 = i$.

Definición 2.19 Recurrencia, transitoriedad y número esperado de visitas. *Podemos distinguir el comportamiento del número de visitas en los casos cuando el estado j es transitorio o recurrente.*

a) Si j es transitorio, entonces sin importar el estado inicial i, con probabilidad uno la cadena realiza sólo un número finito de visitas al estado j, y el número de visitas a tal estado es siempre finito.

b) Si j es recurrente, y si se inicia en j, entonces con probabilidad uno la cadena regresa a j una infinidad de veces, y el número esperado de visitas al estado j es infinito. Si la cadena inicia en cualquier otro estado i, entonces existe la posibilidad de que la cadena nunca visite j ($f_{ij} = 0$), y el número esperado de visitas es cero. Pero si la cadena visita j alguna vez ($f_{ij} > 0$), entonces regresará a j una infinidad de veces, y el número esperado de visitas al estado j es infinito.

En resumen, un estado i es recurrente si, y sólo si, el número promedio de regresos a él es infinito, y es transitorio si, y sólo si, el número promedio de regresos es finito. También en particular, toda cadena de Markov irreducible y recurrente, visita cada uno de sus estados una infinidad de veces con probabilidad uno.

Teorema 2.2 (Teorema ergódico para cadenas de Markov) *Para cualesquiera estados i y j de una cadena de Markov irreducible se cumple que*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = \frac{1}{\mu_j} \ c.s. \tag{2.6}$$

siendo este límite cero cuando $\mu_j = \infty$.

Demostración. Si la cadena es transitoria, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = 0$ pues la cadena visita cada estado j un numero finito de veces, y además $\mu_j = \infty$, en consecuencia ambos lados de la igualdad se anulan.

Supongamos que la cadena es recurrente. El tiempo de primera visita al estado j a partir de i es $\tau_{ij} = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n = j | X_0 = i\}$. Dada la recurrencia e irreducibilidad, $P(\tau_{ij} < \infty) = 1$, y entonces para cualquier $n \geq 1$ se cumple

$$N_{ij}(\tau_{ij} + n) = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}+n} 1_{(X_k=j)} = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} 1_{(X_k=j)} + \sum_{k=\tau_{ij}}^{n} 1_{(X_k=j)} = 1 + N_{jj}(n).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(\tau_{ij}+n)}{\tau_{ij}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + N_{jj}(n)}{\tau_{ij}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{N_{jj}(n)}{n} \frac{n}{\tau_{ij}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{N_{jj}(n)}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar la convergencia para $\frac{N_{jj}(n)}{n}$. Sea $Y(k)$ la variable que registra el número de pasos que transcurren entre la visita k-1 y la visita k que la cadena realiza al estado j. Sabemos que el tiempo medio de recurrencia es $\mu_j = E(Y(k))$, para $j = 1, 2, ...$, y usando la *propiedad fuerte de Markov* se puede demostrar que las variables $Y(1), Y(2), ...$ son independientes. Se tiene entonces,

$$\frac{Y(1) + ... + Y(N_{jj}(n))}{N_{jj}(n)} \leq \frac{n}{N_{jj}(n)} \leq \frac{Y(1) + ... + Y(N_{jj}(n) + 1)}{N_{jj}(n)}$$

Por la recurrencia se tiene que $N_{ij}(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, de modo que por la *ley de los grandes números* se tiene que, $\frac{Y(1)+...+Y(N_{jj}(n))}{N_{jj}(n)} \to \mu_j$ y $\frac{Y(1)+...+Y(N_{jj}(n)+1)}{N_{jj}(n)} \to \mu_j$ casi siempre. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = \frac{1}{\mu_j} \; c.s.$$

□

Para una cadena de Markov irreducible, el número $\pi_j = 1/\mu_j$ es el tiempo promedio que la cadena permanece en el estado j a largo plazo. Tomando la esperanza en (2.6), por el *teorema de convergencia dominada*, y para una cadena irreducible, se cumple

$$
\begin{aligned}
& E(\lim_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n}) = E(\frac{1}{\mu_j}) \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(N_{ij}(n)) = \frac{1}{\mu_j} \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j}.
\end{aligned}
$$

En particular, cuando el tiempo medio de recurrencia μ_j es infinito, y aún más cuando j es transitorio, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0.$$

2.3.8. Recurrencia positiva y nula

Si una cadena de Markov inicia en un estado recurrente, entonces regresa a él una infinidad de veces con probabilidad uno; sin embargo, esta recurrencia puede presentarse de dos formas, y ambas son a su vez propiedades de clase.

Definición 2.20 *Se dice que un estado recurrente i es*

a) ***recurrente positivo*** *si $\mu_i < \infty$.*

b) ***recurrente nulo*** *si $\mu_i = \infty$.*

Proposición 2.12 *Sea i un estado recurrente. Entonces*

a) si i es recurrente positivo e $i \leftrightarrow j$, entonces j es recurrente positivo.

b) si i es recurrente nulo e $i \leftrightarrow j$, entonces j es recurrente nulo.

Demostración. Supongamos que i es un estado recurrente positivo, es decir, i es recurrente y es tal que $\mu_i < \infty$. Como $i \leftrightarrow j$, se tiene que j también es un estado recurrente. Además, existen enteros no negativos n y m tales que

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \ \text{ y } \ p_{ji}^{(m)} > 0.$$

Entonces, para cualquier entero natural k,

$$p_{jj}^{(n+m+k)} = \sum_r p_{jr}^{(m)} p_{rr}^{(k)} p_{rj}^{(n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

Sumando para $k = 1, ..., N$ y dividiendo entre N,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{jj}^{(n+m+k)} \geq p_{ji}^{(m)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

Haciendo $N \to \infty$ se obtiene:

$$\frac{1}{\mu_j} \geq p_{ji}^{(m)} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Por lo tanto μ_j es finito, es decir, j es recurrente positivo.

□

De esta forma, el espacio de estados de toda cadena de Markov puede descomponerse en tres grandes subconjuntos de estados: transitorios, recurrente positivos y recurrentes nulos.

Proposición 2.13 *No existen estados recurrentes nulos en cadenas de Markov finitas.*

Demostración. Sea j un estado recurrente y sea C su clase de comunicación. La clase C es finita pues la cadena completa lo es, y además es cerrada. En efecto, C es recurrente, $i \notin C$ y $j \to i$ entonces necesariamente $i \to j$ pues j es recurrente. Por lo tanto $j \leftrightarrow i$, entonces $i \in C$ lo cual es una contradicción. Ahora bien, para cualquier $i \in C$, y k natural,

$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(k)} = 1.$$

Entonces, sumando para $k = 1, ..., n$ y dividiendo entre n

$$\sum_{j \in C} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in C} p_{ij}^{(k)} = 1.$$

Haciendo $n \to \infty$, por el *teorema ergódico* aplicado a la clase cerrada C, se obtiene

$$\sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j} = 1.$$

Para que esta suma sea uno, debe existir por lo menos un valor de j en C tal que $\mu_j < \infty$, pues de lo contrario cada sumando sería cero y la suma total no podría ser uno. Por lo tanto, existe un estado j que es recurrente positivo. Dado que la recurrencia positiva es una propiedad de clase, todos los elementos de C son recurrentes positivos.

$\square$

En particular, todos los estados de una cadena finita e irreducible son recurrentes positivos.

2.3.9. Distribuciones estacionarias

Consideremos un espacio de estados finito $\{0, 1, ..., N\}$, y una distribución de probabilidad inicial $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, ..., \pi_N^{(0)})$. Después de transcurrida la primera unidad de tiempo, la cadena se encuentra en cualquiera de sus posibles estados de acuerdo a la distribución $\pi^{(1)} = (\pi_0^{(1)}, \pi_1^{(1)}, ..., \pi_N^{(1)})$, en donde la j-ésima entrada de este vector es

$$\pi_j^{(1)} = P(X_1 = j) = \sum_{i=0}^{N} P(X_1 = j|X_0 = i)P(X_0 = i) = (\pi^{(0)}P)_j.$$

Es decir, $\pi^{(1)}$ se obtiene a partir de $\pi^{(0)}$ y la matriz de probabilidades de transición P a través de la fórmula $\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P$. A su vez, la distribución $\pi^{(2)}$ se obtiene a través de la ecuación $\pi^{(2)} = \pi^{(1)}P = \pi^{(0)}P^{(2)}$, y así sucesivamente. En general, $\pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^n$.

Así, se obtiene un sucesión infinita de distribuciones de probabilidad $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}, ...$, en donde cada una de ellas, excepto la primera, es obtenida de la anterior multiplicada por la matriz de probabilidad correspondiente. Por lo tanto, una matriz estocástica establece una dinámica en el conjunto de las distribuciones de probabilidad definidas sobre el espacio de estados de la correspondiente cadena de Markov.

Definición 2.21 *Una distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_N)$ es* ***estacionaria*** *o* ***invariante*** *para una cadena de Markov con probabilidades de transición p_{ij} si*

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}.$$

En términos matriciales, π es estacionaria si $\pi = \pi P$. Esta identidad tiene como consecuencia el hecho de que para cualquier número natural n, se cumpla que $\pi = \pi P^n$, es decir, π es también una distribución estacionaria para la matriz P^n.

Proposición 2.14 (Soporte de una distribución estacionaria) *Sea π una distribución estacionaria. Si j es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces $\pi_j = 0$.*

Demostración. Dado que j es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces para cualquier estado i,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0.$$

Como π es una distribución estacionaria, por definición se tiene,

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(k)}.$$

Sumando para $k = 1, ..., n$ y dividiendo entre n,

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_i \pi_i p_{ij}^{(k)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_i \pi_i p_{ij}^{(k)} \\ &= \sum_i \pi_i (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_i p_{ij}^{(k)}). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, por el *teorema de la convergencia dominada*, se obtiene

$$\pi_j = \sum_i \pi_i (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}) = 0.$$

□

Proposición 2.15 (Existencia y unicidad de la distribución estacionaria) *Toda cadena de Markov que es irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0.$$

En particular, toda cadena finita e irreducible tiene una única distribución estacionaria.

Demostración. Ver [9].

□

2.3.10. Distribuciones límite

Como ya se mencionó anteriormente, toda matriz de probabilidad de transición P determina una sucesión de distribuciones de probabilidad $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, ...$ sobre el estado de espacios en donde

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)}P = \pi^{(0)}P^{n+1}. \tag{2.7}$$

Bajo ciertas condiciones, tal sucesión es convergente a una distribución límite π. Imaginemos por ahora que tal es el caso, por (2.7) se tiene que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = \pi^{(1)} \lim_{n\to\infty} P^{n}.$$

Vale destacar que la distribución límite no depende de la distribución inicial, pues el lado derecho de estas ecuaciones debe ser el mismo. Segundo, la distribución límite está dada por el límite de las potencias de P, pues si se toma como distribución inicial aquella concentrada en el i-ésimo estado, entonces el j-ésimo elemento de la distribución límite es $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Proposición 2.16 *Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición p_{ij} tales que los límites $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existen para cada j, y no dependen del estado i. Entonces:*

1. $\sum_j \pi_j \leq 1$.
2. $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}$.

Cuando el espacio de estados es finito, se cumple la igualdad en el primer resultado, obteniéndose una distribución de probabilidad verdadera.

Demostración. Caso (1): Supongamos que el espacio de estados es el conjunto finito $\{0, 1, ..., N\}$. Entonces la primera afirmación se cumple con la igualdad, pues

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = \sum_{j=0}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Para la segunda afirmación, haciendo uso de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se tiene que para cualquier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij}^{(n)} &= \sum_{i=0}^{N} \lim_{m\to\infty} p_{ki}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{N} p_{ki}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \\ &= \lim_{m\to\infty} p_{kj}^{(m+n)} \\ &= \pi_j.\end{aligned}$$

Así, $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}$.

Caso (2): Supongamos ahora que el espacio de estados es infinito. Para la primera afirmación, se tiene que para cualquier número natural $N \geq 1$,

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = \sum_{j=0}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} \leq \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Haciendo $N \to \infty$ se obtiene

$$\sum_j \pi_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \pi_j \leq \lim_{N\to\infty} 1 = 1.$$

Así, $\sum_j \pi_j \leq 1$. Ahora para la segunda afirmación, nuevamente para cualquier número natural $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij} &= \sum_{i=0}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N} p_{ki}^{(n)} p_{ij} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} p_{kj}^{(n+1)} \\ &= \pi_j.\end{aligned}$$

Si $\pi_j = 0$ para cualquier j, entonces estas desigualdades se convierten en identidades como dice el enunciado. Supongamos que $\sum_j \pi_j > 0$, y que para algún estado j, $\pi_j > \sum_i \pi_i p_{ij}$. Entonces

$$\sum_j \pi_j > \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_i \sum_j p_{ij} = \sum_i \pi_i.$$

Esto es una contradicción, por tanto lo supuesto es falso y se tiene entonces que $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}$.

$\square$

El resultado anterior establece que si el límite de las probabilidades $p_{ij}^{(n)}$ cuando $n \to \infty$ existe y no depende de i, entonces la distribución límite podría ser una distribución estacionaria. Ahora se establecerán condiciones suficientes para que exista el límite de las probabilidades de transición en n pasos.

Teorema 2.3 *Consideremos una cadena de Markov que es:*

a) irreducible,

b) aperiódica,

c) con distribución estacionaria π.

Entonces para cualesquiera estados i y j, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.

Demostración. Sea $\{Y_n\}$ una cadena de Markov independiente de la original $\{X_n\}$, pero con la misma matriz de probabilidades de transición. Entonces, el proceso $\{Z_n\}$ definido por $Z_n = (X_n, Y_n)$ es una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$P(Z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) | Z_n = (x_n, y_n)) = p_{x_n, x_{n+1}} p_{y_n, y_{n+1}},$$

y puede comprobarse que tiene distribución estacionaria $\pi_{x_n, y_n} = \pi_{x_n}\pi_{y_n}$. Puede además verificarse que la cadena $\{Z_n\}$ es recurrente positiva. Además es irreducible, pues como $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ son aperiódicas, existe un número natural N tal que $p_{ij}^{(n)} p_{kl}^{(n)} > 0$ para toda $n > N$, por lo tanto $p_{(i,k)(j,l)}^{(n)} > 0$.

Sea j un estado de la cadena original. Se define el primer momento en el que la cadena $\{Z_n\}$ visita al estado *(j,j)* como $\tau_j = \min\{n \geq 1 : Z_n = (j,j)\}$. Sea además $\tau = \min\{n \geq 1 : X_n = Y_n\}$, este es el primer momento de acople de las dos cadenas. Como $\{Z_n\}$ es recurrente, $P(\tau < \infty) = 1$, además $\tau \leq \tau_j$. Por la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}
P(X_n = x, \tau \leq n) &= \sum_j \sum_{r=1}^{n} P(X_n = x, X_r = j, \tau = r) \\
&= \sum_j \sum_{r=1}^{n} P(X_n = x | X_r = j, \tau = r) P(X_r = j | \tau = r) \\
&= \sum_j \sum_{r=1}^{n} P(Y_n = x | Y_r = j, \tau = r) P(Y_r = j | \tau = r) \\
&= \sum_j \sum_{r=1}^{n} P(Y_n = x | Y_r = j) P(Y_r = j | \tau = r) \\
&= P(Y_n = x, \tau \leq n),
\end{aligned}$$

es decir, sobre el evento $(\tau \leq n)$, las variables X_n y Y_n tienen la misma distribución de probabilidad. Por otro lado

$$\begin{aligned}
P(X_n = j) &= P(X_n = j, \tau \leq n) + P(X_n = j, \tau > n) \\
&= P(Y_n = j, \tau \leq n) + P(X_n = j, \tau > n) \\
&\leq P(Y_n = j, \tau \leq n) + P(Y_n = j, \tau > n) + P(\tau > n) \\
&= P(Y_n = j) + P(\tau > n).
\end{aligned}$$

De manera análoga, $P(Y_n = j) \leq P(X_n = j) + P(\tau > n)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&-P(\tau > n) \leq P(X_n = j) - P(Y_n = j) \leq P(\tau > n) \\
&\Rightarrow | P(X_n = j) - P(Y_n = j) | \leq P(\tau > n),
\end{aligned}$$

y cuando $n \to \infty$,

$$|P(X_n = j) - P(Y_n = j) | \leq P(\tau > n) \to 0. \tag{2.8}$$

Si ahora se toma $X_0 = i$ con probabilidad uno, y Y_0 con la distribución estacionaria π, entonces $P(X_n = j) = P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} P(X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$, y $P(Y_n = j) = \sum_i P(Y_n = j | Y_0 = i)\pi_i = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. Por lo tanto (2.8) establece que $| p_{ij}^{(n)} - \pi_j | \to 0$, así

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

$\square$

Teorema 2.4 *Considere una cadena de Markov que es:*

a) irreducible,

b) recurrente positiva,

c) aperiódica.

Entonces las probabilidades límite $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j}$ *existen, y constituyen la única solución al sistema de ecuaciones*

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \tag{2.9}$$

sujeto a las condiciones $\pi_j \geq 0$, *y* $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$.

Demostración. Dado que la cadena es irreducible y recurrente positiva, por el *teorema de existencia y unicidad*, tiene una única distribución estacionaria dada por $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$. Es decir, es la única solución del sistema de ecuaciones $\pi = \pi P$, con $\pi_j \geq 0$ y $\sum_j \pi_j = 1$. Además, por la aperiódicidad, $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$.

□

Capítulo 3

Análisis y Dinámica de las Transiciones Básicas de la Pobreza

3.1. La pobreza como proceso estocástico

En la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, definimos una colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto de índices T, que toma valores en un espacio de estados S. En particular,

X_t: Estado de pobreza en que se encuentra un hogar al tiempo t, $t = 0, 1, ...,$

con T un espacio de parametrización del tipo discreto. Respecto del espacio de estados S, vamos a considerar que un hogar sólo puede clasificarse según dos condiciones del flagelo, tal que

p: Hogar en condición de pobreza,
np: Hogar en condición de no pobreza.

Así, $S = \{p, np\}$. Por lo tanto, $\{X_t : t \in T\}$ es una cadena de Markov finita en tiempo discreto y con espacio de estados discreto.

Por otra parte, suponemos que la cadena satisface la propiedad (débil) de Markov

$$P(x_{t+1}|x_0, ..., x_t) = P(x_{t+1}|x_t). \tag{3.1}$$

Ella también es conocida como la dependencia Markoviana de primer orden. Esto es, la condición de un hogar respecto a la situación económica-social en el futuro inmediato solamente depende de su condición en el presente. Además, suponemos que la cadena admite la hipótesis de homogeneidad, en el sentido que las probabilidades de transición solamente dependen del lapso de tiempo transcurrido, mas no de los instantes puntuales en el tiempo considerado. Esto es

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(s,t)} &= P(X_t = j|X_s = i) \\ &= P(X_{t-s} = j|X_0 = i) \\ &= p_{ij}^{(t-s)} \text{ , } para\ 0 < s < t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Posterior a ello, definimos las probabilidades condicionales:

$$\begin{aligned} 1-\beta &= P(X_t = p|X_{t-1} = p), \\ \beta &= P(X_t = np|X_{t-1} = p), \\ \alpha &= P(X_t = p|X_{t-1} = np), \\ 1-\alpha &= P(X_t = np|X_{t-1} = np). \end{aligned}$$

Tal que en términos económicos, $1-\beta$ es la *probabilidad de permanencia en condición de pobreza*; β es la *probabilidad de salida de la pobreza*; α es la *probabilidad de propensión a la pobreza*; y $1-\alpha$ es la *probabilidad de permanencia en condición de no pobreza*, respectivamente. A partir de estas, la matriz estocástica de probabilidades de transición a un paso, P, queda configurada como sigue

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Al suponer que $\alpha, \beta \in (0,1)$, es importante hacer las siguientes consideraciones respecto del proceso:

a) Los estados p y np se comunican entre ellos, puesto que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, y en consecuencia la cadena es irreducible.

b) La cadena de Markov es finita, y por tanto, tiene por lo menos un estado recurrente. Además es irreducible, y como consecuencia de ello la cadena es recurrente. Respecto de los tiempos medios de recurrencia de estos dos estados, tenemos que $f_{pp}^{(1)} = P(\tau_{pp} = 1) = 1-\beta$, y para

$n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_{pp}^{(n)} &= P(\tau_{pp} = n) \\ &= P(X_n = p, X_{n-1} = np, ..., X_1 = np | X_0 = p) \\ &= \alpha\beta(1-\alpha)^{n-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{pp}^{(n)} &= (1-\beta) + \alpha\beta \sum_{n=2}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-2} \\ &= (1-\beta) + \alpha\beta(\frac{\alpha+1}{\alpha^2}) \\ &= \frac{\beta+\alpha}{\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

De manera análoga, se encuentra que $\mu_{np} = \frac{\beta+\alpha}{\beta} < \infty$. Por tanto, la cadena es recurrente positiva. También podemos llegar a esta conclusión haciendo uso de la proposición 2.13.

c) Por ser $\alpha < 1$ y $\beta < 1$, se tiene que los dos estados tienen periodo 1, y entonces la cadena es aperiódica.

Una vez aclarado esto, antes de proporcionar un resultado fundamental respecto de la cadena, se presenta el siguiente lema bastante sencillo y útil para calcular las probabilidades de transición en n pasos. Tal resultado es presentado en [9] a modo de ejemplo.

Lema 3.1 *Considere una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición a un paso*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz de probabilidad de transición en n pasos, está dada por

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \frac{(1-\beta-\alpha)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Demostración. Los autovalores de la matriz P son los escalares λ tales que

$$\begin{aligned} det(P - \lambda I) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\beta-\lambda)(1-\alpha-\lambda) - \beta\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 1-\beta-\alpha. \end{aligned}$$

Así, los autovalores de la matriz P son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - \beta - \alpha$, y los autovectores asociados son (1,1) y $(\beta, -\alpha)$. La matriz Q esta compuesta por los autovectores como columnas, y si suponemos que $\beta + \alpha > 0$ se cumple que la siguiente matriz es invertible, es decir

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

y

$$Q^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, si D es la matriz diagonal que contiene a los dos autovalores, se tiene que

$$\begin{aligned} QDQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \beta - \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= P. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz P es diagonalizable y en consecuencia,

$$\begin{aligned} P^n &= QD^nQ^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \beta - \alpha)^n \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \frac{(1 - \beta - \alpha)^n}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

El teorema presentado a continuación, es una prueba alternativa a la que aparece en [6].

Teorema 3.1 *Dada una cadena de Markov con la matriz de probabilidad de transición en un paso descrita arriba. Sean $\alpha, \beta \in (0, 1)$, supongamos que el proceso satisface la propiedad Markoviana de primer orden, y además es homogénea. Entonces la cadena posee una única distribución estacionaria*

$$\pi = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right). \tag{3.5}$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que la cadena de Markov con matriz de probabilidad de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

es una cadena irreducible, recurrente positiva y aperiódica, entonces por el teorema 2.4 se tiene que la cadena posee una única distribución estacionaria π tal que

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Ahora bien, a partir del lema anterior se tiene

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \frac{(1-\beta-\alpha)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P^{(n)} &= \frac{1}{\alpha+\beta}\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \alpha+\beta(1-\beta-\alpha)^n & \beta-\beta(1-\beta-\alpha)^n \\ \alpha-\alpha(1-\beta-\alpha)^n & \beta+\alpha(1-\beta-\alpha)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distribución estacionaria es $\pi = (\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta})$.

□

Del teorema, se deduce que las probabilidades de pasar de un estado al otro en un tiempo n, corresponden a las expresiones

$$\begin{aligned} P_{pnp}^{(n)} &= (P^{(n)})_{pnp} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-(1-\alpha-\beta)^n), \\ P_{npp}^{(n)} &= (P^{(n)})_{npp} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-(1-\alpha-\beta)^n). \end{aligned}$$

Además, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ y $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ representan para el flagelo en este contexto, la proporción de hogares pobres y no pobres en el largo plazo; mientras que $(1-\alpha-\beta)^n$ determina la velocidad de convergencia hacia (3.5).

3.2. Una aplicación sencilla

Acorde con la definición de la pobreza expuesta en la introducción de la investigación, tomamos como información estadística punto de partida, la publicada por el INE respecto a los niveles de pobreza y no pobreza de los hogares en Venezuela, en el segundo semestre del año 2012 y en el segundo del 2013, respectivamente (ver [7]). Para la distribución de probabilidad inicial $\pi^{(0)} = (\pi_p^{(0)}, \pi_{np}^{(0)})$, consideramos las estimaciones oficiales para el primer período antes mencionado. Así

$$\pi^{(0)} = (0{,}212; 0{,}788). \tag{3.6}$$

Por otra parte, para la construcción de la matriz de probabilidad de transición a un paso, P, consideramos respecto de la probabilidad de permanencia en condición de pobreza $(1-\beta)$, la estimación del porcentaje de hogares pobres para el 2013; mientras que para la probabilidad de permanencia en condición de no pobreza $(1-\alpha)$, tomamos en cuenta la estimación respecto del porcentaje de hogares no pobres para tal período. Así

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}73 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Haciendo uso del lema 3.1, las matrices de probabilidad de transición para algunos pasos hasta el *n-ésimo* son respectivamente:

$$\begin{aligned}
P^2 &= \begin{pmatrix} 0,2773 & 0,7227 \\ 0,2772 & 0,7228 \end{pmatrix}, \\
P^3 &= \begin{pmatrix} 0,277227 & 0,722773 \\ 0,277228 & 0,722772 \end{pmatrix}, \\
P^4 &= \begin{pmatrix} 0,27722773 & 0,72277227 \\ 0,27722772 & 0,72277228 \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
P^n &= \frac{1}{1,01}\begin{pmatrix} 0,28 & 0,73 \\ 0,28 & 0,73 \end{pmatrix} + \frac{(-0,01)^n}{1,01}\begin{pmatrix} 0,73 & -0,73 \\ -0,28 & 0,28 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En las matrices anteriores, observamos como las potencias de la matriz P van convergiendo a una matriz de la forma

$$\frac{1}{1,01}\begin{pmatrix} 0,28 & 0,73 \\ 0,28 & 0,73 \end{pmatrix}.$$

Empíricamente, observamos que la distribución límite viene dada por el límite de las potencias de la matriz P, el cual es una matriz con todas sus filas iguales. En efecto, haciendo uso del teorema 3.1, la única distribución límite estacionaria corresponde a los valores

$$\pi = (0,277; 0,722). \tag{3.8}$$

En términos económicos, la distribución sugiere que de haber cambios en las políticas públicas, sociales o económicas adoptadas por parte de los agentes responsables; o presenciar choques estructurales en la economía, que no conlleven a diferencias significativas entre el ingreso promedio de los hogares venezolanos y el costo de los bienes y servicios, traerá como consecuencia en el largo plazo que, aproximadamente, 3 de cada 10 hogares venezolanos no podrán adquirir la canasta básica oficial, y por ende, deberían considerarse en situación de pobreza según la línea de ingresos; claro está, siempre y cuando el INE no modifique la metodología o los parámetros de medición en el tiempo.

Adicionalmente, las probabilidades de que el proceso comience en un estado i cualquiera, y visite por primera vez un estado j en n-pasos, vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}
f_{pp}^{(n)} &= \beta(1-\alpha)^{n-2}\alpha = 0{,}20(0,72)^{n-2},\\
f_{pnp}^{(n)} &= \alpha(1-\alpha)^{n-1} = 0{,}28(0,72)^{n-1},\\
f_{npp}^{(n)} &= \beta(1-\beta)^{n-1} = 0{,}73(0,27)^{n-1},\\
f_{npnp}^{(n)} &= \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta = 0{,}20(0,27)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Ellas son de suma importancia, ya que sustituyendo los valores correspondientes allí, obtenemos por una parte, las probabilidades de una eventual visita entre diversos estados; además, se pueden estimar los tiempos promedio de recurrencia para ambos de la cadena. Así:

$$
\begin{aligned}
f_{pp} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{pp}^{(n)} = f_{pp}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} 0{,}20(0,72)^{n-2} = 1, \\
f_{pnp} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{pnp}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}28(0,72)^{n-1} = 1, \\
f_{npp} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{npp}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}73(0,27)^{n-1} = 1, \\
f_{npnp} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{npnp}^{(n)} = f_{npnp}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} 0{,}20(0,27)^{n-2} = 1, \\
\mu_p &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{pp}^{(n)} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha} = 3,6, \\
\mu_{np} &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{npnp}^{(n)} = \frac{\beta+\alpha}{\beta} = 1,38.
\end{aligned}
$$

En estas sumas, observamos que si la cadena comienza en un estado i, la probabilidad de una eventual visita al estado j es 1. Así, si un hogar se encuentra por ejemplo, en condición de pobreza, eventualmente pudiese encontrarse en una situación de no pobreza. Además, también puede corroborarse empíricamente que ambos estados p y np son recurrentes, pues $f_{pp} = f_{npnp} = 1$. Por ello, los hogares que se encuentran en un estado i ($i = p, np$), con probabilidad 1 regresarán al estado i una infinidad de veces, pues el número esperado de visitas a i es infinito.

Finalmente, $\mu_p = 3,6 < \infty$ y $\mu_{np} = 1,38 < \infty$, por lo que los tiempos promedio de recurrencia son finitos y distintos para p y np, lo cual ejemplifica que los tiempos promedio de recurrencia no son necesariamente idénticos para elementos de la misma clase de comunicación recurrente. Estos resultados reflejan lo expuesto al principio del capítulo, en el cual se mostró que si $\alpha, \beta \in (0,1)$ la cadena es recurrente positiva.

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

En el presente trabajo, se planteó como objetivo fundamental estudiar la dinámica de los principales estados de la pobreza, bajo el enfoque de las cadenas de Markov en tiempo discreto. De manera precisa, se trabajó con una cadena de dos estados, p y np, la cual se supuso homogénea, irreducible, recurrente positiva y aperiódica. Dicho modelo nos permitió estudiar la evolución en el tiempo de estos dos estados de la pobreza, desde un punto de vista teórico y empírico.

Una vez clarificada la distribución límite del proceso, la dinámica empírica de los principales estados de la pobreza, sugiere que de no haber cambios abruptos en la economía venezolana respecto al poder adquisitivo de los hogares a partir del período de análisis, traerá como consecuencia observar proporciones de hogares pobres y no pobres en el largo plazo de $0,277$ y $0,723$, respectivamente.

Si bien el modelo utilizado admite dos importantes restricciones, tales como la propiedad débil de Markov y la homogeneidad de las matrices de transición, está claro que la investigación deja abierta un abanico de posibilidades, en el sentido de que es muy probable avanzar en estudios posteriores relajando considerablemente estos supuestos; e inclusive, cabe la posibilidad de generar pronósticos respecto del problema pobreza a partir de estimaciones propias utilizando datos oficiales o de otra índole.

Por último, las estimaciones publicadas por el INE respecto a los niveles de pobreza observados en el segundo semestre del año 2014 y el primer semestre del 2015 (0,326 y 0,331 respectivamente), sugieren que desde el período analizado por nosotros hasta acá, ha habido un estancamiento significativo en el ingreso real de los trabajadores venezolanos que constituyen la población económicamente activa. Por supuesto, este no es el escenario deseado, pues de continuar tal tendencia en el tiempo, ello traerá como consecuencia un alejamiento considerable del fenómeno respecto de la distribución límite estacionaria enfatizada arriba, la cual, de por sí, no es un buen escenario de comportamiento en términos económicos.

Apéndice A

Definiciones y algunos resultados

Teorema A.1 (Ley fuerte de los grandes números) *Si* $X_1, X_2, ...$ *es una sucesión de variables aleatorias con media* μ. *Entonces* $\frac{X_1+...+X_n}{n}$ *converge fuertemente a* μ.

Definición A.1 (Tiempo de parada) *Una variable aleatoria* $T : \Omega \to \{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ *es un tiempo de parada del proceso* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si el evento* $\{T = n\}$ *depende sólo de las variables* $X_1, X_2, ..., X_n$ *para* $n = 0, 1, 2, ...$

Teorema A.2 (Propiedad fuerte de Markov) *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de Markov homogénea con distribución inicial* π *y matriz de probabilidades* P, *y sea* T *un tiempo de parada de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces, condicionado en* $\{T < \infty\}$ *y* $\{X_T = i\}$, $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ *es una cadena de Markov homogénea independiente de* $X_1, X_2, ..., X_T$.

Teorema A.3 (Teorema de convergencia monótona) *Sea* $X_1, X_2, ...$ *una sucesión de variables aleatorias tales que* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq ...$ *y* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *casi seguramente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n).$$

Teorema A.4 (Teorema de convergencia dominada)

a. Sea $X_1, X_2, ...$ *es una sucesión de variables aleatorias tales que* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *casi seguramente, y para cada valor de* n, $|X_n| \leq Y$, *para una variable* Y *con* $E|Y| < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n).$$

b. Sea $\{a_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ *una colección de números reales tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$ *existe para cada* m, $|a_{nm}| \leq b_m$, *independientemente de* n, *y* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nm}.$$

Teorema A.5 (Teorema de Fubini) *Sea*

$$S = \{(x,t)|x \in C \subset \mathbb{R}^{n-1}, \phi(x) \leq t \leq \psi(x)\},$$

una región simple en $\mathbb{R}^n$. *Sea* $f : S \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* f *es integrable sobre* S, *y*

$$\int_S f = \int_{x\in C} \int_{t=\phi(x)}^{t=\psi(x)} f(x,t).$$

Bibliografía

[1] M. Bahamon (2010). *Dimensiones de la pobreza mediante curvas globales y transiciones. Análisis de los casos colombiano y español.* Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá de Henares, España.

[2] M. J. Bane and D. Ellwood (1986). Splipping into and out of Poverty: The Dynamics of spells. *Journal of Human Resources.* **21(1)**, 1–23.

[3] E. Bárcena, A. Fernández y G. Martín (2006). El efecto del tiempo en las probabilidades de transición entre distintos estados de la distribución de la renta. XIII Encuentro de Economía Publica. Almeria, España.

[4] U. Bath (1972). *Elements of applied Stochastic processes.* First Edition, Jhon Wiley and Sons, New York.

[5] O. Cantó, C. Gradín y C. Del Río (2008). La dinámica de la pobreza en España: Cronicidad, Transitoriedad y Recurrencia. Documentos de trabajo, FOESSA.

[6] J. Casas, J. Domínguez, R. Herrerías y J. Nuñez (2003). Estudio dinámico de la incidencia de la pobreza en España mediante un modelo Markoviano en el periodo 1994-1998. *Anales de economía aplicada.* Universidad de Alcalá de Henares, España.

[7] Instituto Nacional de Estadística (2016). Disponible en: http://www.ine.gob.ve [Accedido 1 de Julio de 2016].

[8] J. Méndez (2007). *Análisis de Series Temporales. Volumen I: Modelos Univariantes.* Universidad de los Andes, ULA-Venezuela.

[9] L. Rincón (2011). *Introducción a los procesos estocásticos.* Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM, México DF.

[10] A. F. Stevens (1999). Climbing Out of Poverty, Falling Back In: Measuring the Persistence of Poverty Over Multiple Spells. *Journal of Human Resources.* **34(3)**, 557–558.