



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
COORDINACIÓN DE POSTGRADO

Familias de secciones locales para atractores hiperbólicos singulares

Ronald Gutiérrez

Barquisimeto, diciembre 2015

Ronald Gutiérrez

Familias de secciones locales para atractores hiperbólicos singulares

Área de conocimiento: Sistemas Dinámicos.

Mathematics Subject Classification 2010: 52A10, 46B20, 46C15

Tesis de Grado presentada ante la ilustre
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado,
como requisito para optar al grado académico de
Doctor en Matemáticas.
Tutor: Dr. Wilmer Colmenárez.

Barquisimeto, diciembre 2015

Índice general

Índice de figuras	vii
Resumen	1
Abstract	3
Introducción	5
1. Preliminares	9
1.1. Nociones Preliminares	9
1.2. El atractor de Lorenz	11
1.3. Atractores hiperbólicos singulares	15
2. Propiedad s-Markov	21
2.1. s -rectángulos	21
2.2. Familias s -Markov	24
2.3. Construcción de familias de Poincaré	26
3. Existencia de familias s-Markov	39
3.1. Construcción de propiedad Markoviana parcial	39
3.2. Demostración del teorema 2.1	44
4. Transformación unidimensional inducida	55
Referencias	61

Índice de figuras

1.1. Construcción del atractor de Lorenz.	12
1.2. Transformación de Poincaré P_1	13
1.3. Transformación de Poincaré P_2	14
1.4. Transformación F	15
2.1. Función Proyección Pr_T	22
2.2. Hoja estable de x en T	23
2.3. s -parametrización de T	23
2.4. Secciones locales de tipo A	27
2.5. Vecindad linearizada: Caso 1.	28
2.6. Vecindad linearizada: Caso 2.	30
2.7. s -paralelepípedo de tipo 1.	32
2.8. s -paralelepípedo de tipo 2.	32
2.9. Variedad estable de x en V	32
2.10. Proyección de S sobre T	33
2.11. Subespacio $E_R^{cu}(x)$	36
3.1. Partición de Z_p	46
3.2. Construcción de $\overline{B}(y)$	47
3.3. Construcción de $\Gamma(B)$	49
3.4. Figura ilustrativa 1 de la demostración del Lema 3.9.	51
3.5. Figura ilustrativa 2 de la demostración del Lema 3.9.	53

Resumen

En este trabajo se estudian *atractores hiperbólicos singulares* para flujos de clase C^2 en dimensión tres. Estos atractores son topológicamente transitivos, parcialmente hiperbólicos, contienen singularidades del campo y la derivada expande volumen en la dirección central bidimensional. Para estos atractores se demuestra la existencia de una familia finita \mathcal{J} de secciones locales de cruce con interiores disjuntos dos a dos que tienen una propiedad Markoviana en las direcciones estables.

Abstract

In this work we study a large class of attractors for flows in three dimensional manifolds, called *singular hyperbolic attractors*. These attractors are topologically transitive, partially hyperbolic, contains singularities of the associated vector field and the flow derivative expands volume in the two dimensional central manifold. For these attractors it is shown the existence of a finite family of local cross sections with pairwise disjoint interiors, for which the first return time is integrable and the corresponding Poincaré first return map has a partial Markovian property along stable directions.

Introducción

Una herramienta básica para el estudio de muchos problemas dinámicos de sistemas de tiempo continuo es la construcción de sistemas discretos asociados a un flujo, con los cuales se intenta deducir propiedades dinámicas a partir de los sistemas discretos asociados. La técnica general basada en la construcción de subvariedades de codimensión uno transversas al campo, y la introducción de la transformación de primer retorno entre estas subvariedades, tiene sus orígenes en los trabajos de H.J. Poincaré*, y por esa razón las transformaciones de primer retorno también son conocidas como transformaciones de Poincaré. Su importancia ha sido establecida, entre muchas otras situaciones, al constituirse en uno de los procedimientos básicos para la determinación de dinámica caótica en ecuaciones diferenciales, vea por ejemplo [AD] para una revisión histórica y [Wi] para ejemplos concretos de aplicación.

El análisis de estructuras Markovianas para difeomorfismos de Anosov y su importancia para la construcción de modelos dinámicos simbólicos, como herramienta para el estudio de sus propiedades dinámicas y ergódicas, fue puesto de manifiesto en el trabajo fundamental de Yakov Sinai [S]. Posteriormente, en los años setenta, fueron introducidos refinados procedimientos de discretización temporal para el estudio de flujos. Particularmente se destacan los trabajos de Bowen sobre la construcción de la dinámica simbólica para flujos hiperbólicos en [B3], en donde se extiende la construcción de particiones de Markov para difeomorfismos Axioma A desarrollada en [B1] y [B2]. Cabe destacar que Bowen elaboró en [B5] una versión simplificada de su método de construcción de particiones de Markov para conjuntos básicos de difeomorfismos, la cual no se aplica al caso de flujos hiperbólicos. Exposiciones de esta versión se encuentran en [Ro] y [Sh]. La dinámica simbólica

*H.J. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vols 1-3. Gauthiers-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899. (English translation edited by D. Goroff, published by the American Institute of Physics, New York, 1993.)

de flujos es el fundamento técnico para la teoría ergódica de flujos Axioma A expuesta en [BR]. En [R], Marina Ratner sigue las ideas de [B3] y [B2] para construir familias de secciones transversas con propiedad Markoviana para flujos de Anosov.

Uno de los principales ejemplos de sistemas no hiperbólico y no trivial es el conocido *atractor de Lorenz geométrico*, cuya construcción es inspirada en el comportamiento de soluciones del sistema de Lorenz, que fuera originalmente propuesto por Edward Lorenz como una simplificación de un modelo para la convección termal atmosférica, a mediados de la década de los sesenta. En su trabajo, Lorenz desarrolló estudios numéricos sobre un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden, obtenido como simplificación de un modelo clásico de la convección termal atmosférica debido a Boltzman. El modelo geométrico para el atractor de Lorenz fue introducido por John Guckenheimer [G] (vea también [GW], [ABS1], [ABS2]), el cual intenta extraer las características dinámicas esenciales del modelo analítico de Lorenz. En términos simples, este modelo geométrico es descrito (vea [MPP2], [W]) por retornos no lineales a una sección transversa y con un comportamiento de tipo hiperbólico y Markoviano en un entorno de una singularidad hiperbólica, generando un atractor transitivo conteniendo la singularidad. Desde su aparición en [G], el atractor de Lorenz geométrico se constituyó en uno de los más interesantes objetos de la Teoría de Sistemas Dinámicos y de la Matemática en general en las últimas décadas, originando incluso profundas consideraciones de orden filosófico sobre el comportamiento caótico de la naturaleza. Su estudio ha dado lugar a importantes resultados matemáticos sobre su estructura [W], nociones de estabilidad [GW], técnicas unidimensionales [K], como también ha motivado generalizaciones y extensiones teóricas [APe], [P]. En el año 1999 Warwick Tucker [T] presentó una demostración asistida por computador de la equivalencia dinámica entre el modelo geométrico de Guckenheimer y Williams con el modelo de Lorenz para los parámetros clásicos, vea también [T2] y [V].

Una de las más recientes e importantes generalizaciones inspiradas en el atractor de Lorenz geométrico es presentada por Morales, Pacífico y Pujals en [MPP2], la cual intenta capturar las propiedades débiles de hiperbolicidad del atractor de Lorenz mediante condiciones de hiperbolicidad parcial y expansión de volumen en la dirección central, esto para atractores de campos de vectores con singularidades. De hecho ellos introducen una clase sistemas llamados *hiperbólicos singulares* que son campos de vectores en variedades de

dimensión tres, cuyo conjunto no errante posee una descomposición espectral entre cuyas piezas se incorporan los llamados *conjuntos hiperbólicos singulares*, aparte de otras componentes de tipo hiperbólico uniforme. Entre otros ejemplos de conjuntos hiperbólicos singulares destacan la herradura singular [LP] y el atractor de Lorenz geométrico (vea [GW], [W] y [G]). Sobre estos sistemas hiperbólicos singulares ha venido desarrollándose una teoría enfocada, entre otros problemas, en las bifurcaciones y estructura topológica, [M1], [M2], [M3], [M4], en la transitividad robusta [MP1], [MP2], [MPP1], [MPP3], caracterización de clases homoclínicas [BM], hiperbolicidad no uniforme [C], medidas invariantes [APPV] y órbitas periódicas [AP].

El propósito de este trabajo es establecer la existencia de una estructura de tipo Markoviana para los atractores hiperbólicos singulares, asociados a campos de vectores en variedades de dimensión tres. La estructura de tipo Markoviana viene dada por una familia finita de secciones locales transversas al campo, respecto de la cual existe una transformación de Poincaré con retornos en tiempos no acotados, pero integrables. Particularmente las secciones locales transversas son uniones de láminas estables cuya dinámica en el cociente respectivo se corresponde con una transformación expansora por pedazos, obteniendo así un contexto apropiado para el estudio de propiedades ergódicas del atractor a partir de esta representación unidimensional. Para tal fin se recurrirá a la adaptación parcial de algunos de los métodos desarrollados por Bowen y Ratner ([B1], [B2], [B3] y [R]) para la construcción de familias de secciones. Podemos resumir en cuatro pasos la estrategia que se seguirá para estos fines:

1. Construir una familia finita de secciones locales transversas a trayectorias regulares del atractor en entornos de las singularidades, que exhiban propiedades dinámicas y geométricas derivadas de la hiperbolicidad no uniforme de las trayectorias y de los índices de las singularidades, a fin de que el tiempo de retorno a la unión de las secciones sea integrable (capítulo 2).
2. Construir una familia finita de secciones locales transversas a trayectorias regulares del atractor lejos de las singularidades, que exhiban propiedades dinámicas y geométricas derivadas de la hiperbolicidad no uniforme de las trayectorias, en el sentido que se asemejen a rectángulos de las familias Markovianas de los conjuntos básicos de flujos Axioma A (capítulo 2).

3. Demostrar la existencia de familias finitas de secciones locales con una transformación de Poincaré asociada de tal manera que el conjunto saturado en los tiempos de retorno cubran al atractor (capítulo 3).
4. Desarrollar un proceso de refinamiento de secciones locales transversas que culmine con una familia finita de secciones locales transversas que exhiba una propiedad de Markov en las direcciones estables (capítulo 3), y que induzca una transformación expansora sobre el espacio de hojas estables de la unión de las secciones locales (capítulo 4).

El teorema principal (Teorema 2.1) es enunciado en la página 25 y su demostración se desarrolla en los pasos anteriormente señalados.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones y resultados básicos necesarios para la comprensión y desarrollo de nuestro trabajo. En la primera sección se muestran definiciones, notaciones y resultados relacionados con la teoría de los sistemas dinámicos (en particular dinámica hiperbólica), luego presentaremos el atractor de Lorenz. En la construcción de dicho ejemplo veremos como característica sobresaliente un comportamiento de tipo Markoviano en hojas estables sobre una sección transversa casi global (definición 2.1). El atractor de Lorenz es un ejemplo particular de los conjuntos atractores hiperbólicos singulares que veremos en la sección 1.3. Nuestra intención es generalizar el comportamiento de tipo markoviano del atractor de Lorenz a los atractores hiperbólicos singulares (capítulos 2 y 3).

1.1. Nociones Preliminares

Fijemos una variedad Riemanniana tridimensional compacta sin frontera M y sea dist la distancia inducida por la métrica en M .

DEFINICIÓN 1.1. Sea M una variedad diferenciable compacta tridimensional sin frontera. Un *campo de vectores* X en M , es una función continua $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = I_M$ o equivalentemente $X(x) \in T_x M$ para todo $x \in M$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ al espacio de los campos $X : M \rightarrow TM$ con la topología C^r . Si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, entonces X caracteriza una ecuación

diferencial, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_t}{dt} &= X(\alpha_t) \\ \alpha_p(0) &= p.\end{aligned}$$

Si M es compacta, la ecuación tiene solución para todo $p \in M$ y todo t real. A cada $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ que satisfaga la ecuación se le llama *curva integral* de X . Agrupando todas las curvas integrales, se obtiene el *flujo*

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

de clase C^r , definido como $\Phi(t, p) = \alpha_p(t)$. En general, se escribirá $\Phi_t(p)$ en lugar de $\Phi(t, p)$.

Una *singularidad* de un campo X es un punto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$, particularmente σ es un punto fijo para el flujo, en el sentido que $\Phi_t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto *regular* es un punto $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. La *órbita* de un punto q bajo la acción de X es el conjunto $\mathcal{O}_X(q) = \{\Phi_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$. Para el caso de una singularidad σ se tiene que $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Llamaremos la *órbita positiva* de q al conjunto $\mathcal{O}_X^+(q) = \{\Phi_t(q) : t \geq 0\}$ y la *órbita negativa* de q al conjunto $\mathcal{O}_X^-(q) = \{\Phi_t(q) : t \leq 0\}$. Una *órbita periódica* de X es una órbita $\mathcal{O}_X(q)$ tal que $\Phi_T(q) = q$ para algún tiempo (minimal) $T > 0$, esto equivale a decir que $\mathcal{O}_X(q)$ es compacta y q no es una singularidad. Para $q \in M$ definimos el conjunto ω -límite de q , denotado como $\omega_X(q)$ al conjunto de puntos de acumulación de la órbita positiva de q , análogamente se define el conjunto α -límite de q , denotado como $\alpha_X(q)$ al conjunto de puntos límite de la órbita negativa de q .

TEOREMA 1.1. (Teorema del flujo tubular) Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ un punto regular de X . Sea $C = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i| < 1\}$ y X_C el campo en C definido por $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces existe un difeomorfismo $h : V_p \rightarrow C$ de clase C^r , donde V_p es una vecindad de p en M , que envía trayectorias de X en trayectorias de X_C . En tal caso diremos que V_p tiene la propiedad del flujo tubular.

TEOREMA 1.2. (Hartman-Grobman) Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y sea $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Sea $DX(0) : T_p M \rightarrow T_p M$ el campo vectorial lineal en $T_p M$ dado por la transformación lineal $DX(0)$. Entonces existen una vecindad U de p en M , una vecindad V del vector nulo 0 en $T_p M$ y un

homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ el cual envía trayectorias de X a trayectorias en $DX(0)$, esto es, $X|_U$ es topológicamente equivalente a $DX(0)|_V$.

1.2. El atractor de Lorenz

Con la intención de investigar los efectos de la no linealidad en las predicciones basadas en cálculos efectuados con el computador, Edward Lorenz estudió, en la primera mitad de los años sesenta, varios modelos matemáticos asociados al fenómeno de convección termal. Después de probar varios modelos, Lorenz conoció un trabajo de B. Saltzman (que era a su vez una simplificación de uno de los modelos más importantes de convección termal debido a Lord Rayleigh, de 1916), sobre el cual efectuó ciertas simplificaciones y reducciones dimensionales para construir el sistema conocido hoy como *sistema de Lorenz*:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Los experimentos numéricos de Lorenz sobre este sistema con parámetros $\sigma = 11,83$, $\gamma = 22,83$ y $\beta = 8/3$ (o valores aproximados), indujeron a pensar en la posibilidad de que existiese un atractor extraño en un entorno de la singularidad en el origen, principalmente por la observación cuantitativa de lo que podría ser el fenómeno de dependencia sensitiva de las condiciones iniciales. Con el propósito de describir la dinámica del sistema de Lorenz, en 1976 John Guckenheimer construyó un modelo geométrico apoyado en figuras elaboradas sobre estudios computacionales del sistema antes mencionado. A continuación presentamos una descripción de los elementos esenciales de este modelo geométrico (vea por ejemplo [W] y [GW]).

Sea $\{L_t\}$ el flujo asociado al sistema de Lorenz. Para describir el modelo geométrico de Guckenheimer consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = -by \\ \dot{z} = -cz \end{cases}$$

donde $a, -b, -c$ son los autovalores (reales) de $DL(0)$, con $0 < c < a < b$. El flujo asociado a este sistema viene dado por

$$\tilde{L}_t(x, y, z) = (e^{at}x, e^{-bt}y, e^{-ct}z) \quad (1.1)$$

Por el Teorema 1.2, el flujo $\{L_t\}$ asociado al sistema de Lorenz es localmente conjugado, en una vecindad del origen O , al flujo lineal $\{\tilde{L}_t\}$. Esto significa que existen vecindades U y V del origen en \mathbb{R}^3 y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tales que

$$h \circ \tilde{L}_t = L_t \circ h,$$

y h preserva la orientación de las trayectorias de los flujos en la dirección del tiempo. La función h no es otra cosa que un cambio de coordenadas que preserva pedazos de órbitas de los flujos L_t y \tilde{L}_t en vecindades del origen. Continuando con la construcción, supondremos en lo que sigue que los ejes de coordenadas en \mathbb{R}^3 son invariantes por el flujo lineal.

Fijemos tres superficies

$$\Sigma = \{(x, y, z_0) : |x|, |y| \leq \alpha\}, \quad \alpha, z_0 > 0 \text{ fijos}$$

$$S^\pm = \{(\pm x_1, y, z) : |y|, |z| \leq \beta\}, \quad \beta, x_1 > 0 \text{ fijos}$$

y denotemos

$$\ell = \{(0, y, z_0) : |y| \leq \alpha\} \quad \text{y} \quad \Sigma' = \Sigma \setminus \ell.$$

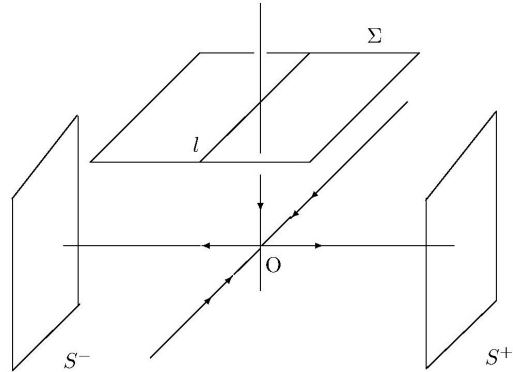


Figura 1.1: Construcción del atractor de Lorenz.

Observe que para $p \in \ell$, $\tilde{L}_t(p) \rightarrow O$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Por otro lado, la órbita partiendo desde cualquier punto en Σ' intersecta la superficie $S = S^+ \cup S^-$ en un tiempo mínimo positivo. Esto es, si $p = (x, y, z_0) \in \Sigma'$, entonces

existe $\tau = \tau(p) > 0$ tal que

$$\tilde{L}_\tau(p) \in S, \quad \text{y } \tilde{L}_t(p) \notin S \cup \Sigma \quad \text{para } 0 < t < \tau(p).$$

El *tiempo de retorno* τ está determinado por

$$\tau(p) = \log \left| \frac{x_1}{x} \right|^{1/a} \quad \text{para } p = (x, y, z_0) \in \Sigma, \quad x \neq 0;$$

en particular, τ es integrable. La *transformación de Poincaré* $P_1 : \Sigma' \rightarrow S$ está definida para $p = (x, y, z_0) \in \Sigma'$ por

$$P_1(p) = \tilde{L}_{\tau(p)}(p) = (y(\tau(p)), z(\tau(p))) = (yx^{b/a}x_1^{-b/a}, x^{c/a}z_0x_1^{-c/a}).$$

Note que

$$P_1(p) \in \begin{cases} S^+, & \text{si } p \in \Sigma^+ = \{(x, y, z_0) \in \Sigma : x > 0\} \\ S^-, & \text{si } p \in \Sigma^- = \{(x, y, z_0) \in \Sigma : x < 0\} \end{cases}$$

Puesto que la órbita de todo punto en la curva ℓ converge a la singularidad

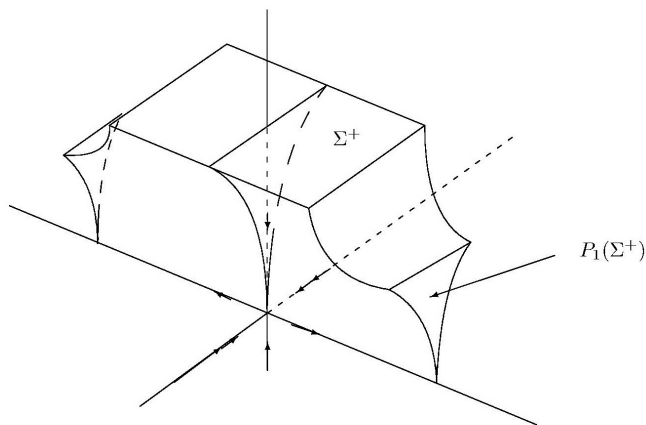


Figura 1.2: Transformación de Poincaré P_1 .

cuando $t \rightarrow +\infty$, la imagen en S^\pm de Σ^\pm tiene forma triangular (cuya frontera está formada por tres curvas regulares) y además, dado que la contracción en la dirección del eje Y es más fuerte que la correspondiente en el eje Z (por la relación $c < b$), este conjunto de forma triangular tiene un vértice cuspidal el cual está en el eje X y que no es imagen de punto alguno en Σ .

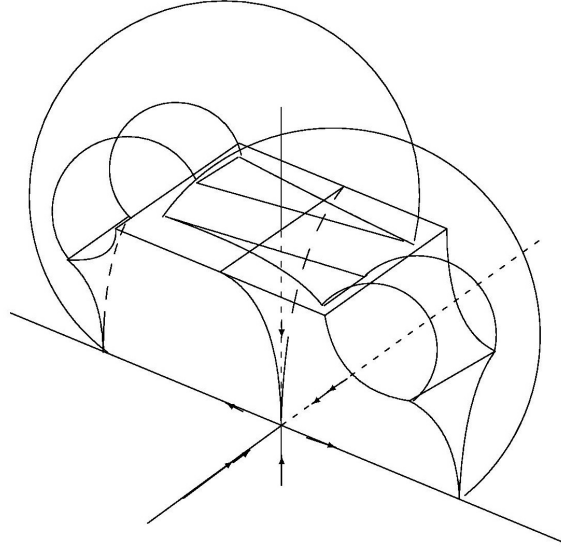


Figura 1.3: Transformación de Poincaré P_2 .

El modelo geométrico de Guckenheimer es un flujo no lineal, y lo que se ha descrito hasta ahora corresponde al comportamiento lineal en una vecindad de la singularidad hiperbólica. Fuera de esta vecindad, supondremos que el flujo Φ_t correspondiente al modelo geométrico retorna a Σ desde S , de manera tal que se verifican las condiciones que se enuncian a continuación:

1. El flujo Φ_t tiene la misma simetría del flujo de Lorenz.
2. Líneas horizontales $\{z = \text{ctte.}\}$ en S retornan en el interior de líneas $\{x = \text{ctte.}\}$ en Σ por medio de una transformación de Poincaré $P_2 : S \rightarrow \Sigma$ asociada al flujo Φ_t en un tiempo de retorno τ_2 como se ve en la figura (??). De este modo la *transformación de primer retorno* $F = P_2 \circ P_1 : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ preserva la partición de Σ definida como el conjunto \mathcal{F}^s formado por líneas horizontales $\{x = \text{ctte.}\}$ y las contrae con una tasa uniforme (propiedad Markoviana en hojas estables). En términos más precisos, F tiene la forma $F(x, y) = (F_1(x), F_2(x, y))$ y las funciones $F_2(x, \cdot)$ son contracciones uniformes, esto es existe un número real positivo $\mu < 1$ tal que para todo $x \neq 0$ fijo se tiene

$$|F_2(x, y_1) - F_2(x, y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in (-\beta, \beta).$$

3. $|F'_1(x)| > \sqrt{2}$ para todo x con $|x| \leq \alpha$. Esto significa que F expande distancias en la dirección del eje X .

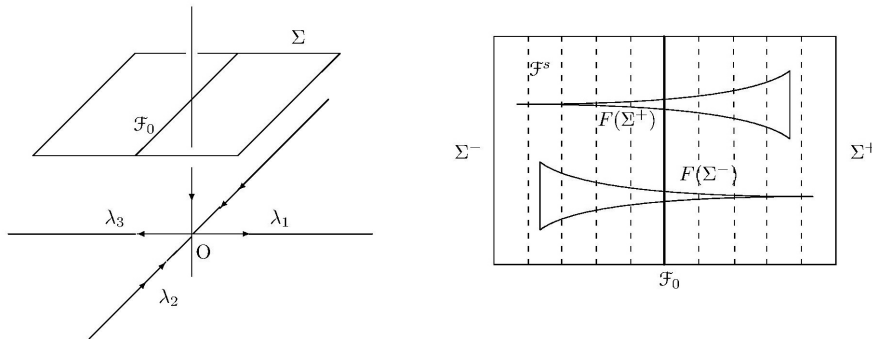


Figura 1.4: Transformación F .

El *atractor de Lorenz* es el conjunto Λ definido como la clausura del conjunto formado por la unión de órbitas positivas que intersectan Σ en un número infinito de tiempos tanto negativos como positivos.

Ahora, la invarianza de la partición \mathcal{F}^s nos permite representar la transformación F por una función factor f definida en un intervalo, la cual es expansora por pedazos. Formalmente consideramos el espacio cociente $I = \Sigma/\mathcal{F}^s$ el cual es difeomorfo al intervalo compacto $[-\alpha, \alpha]$ y la transformación $f : I \setminus \{0\} \rightarrow I$ inducida por F sobre I tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$, donde $\pi : \Sigma \rightarrow I$ es la proyección canónica. Esto corresponde simplemente a la identificación de líneas en la partición \mathcal{F}^s con puntos del intervalo I (la función f es, esencialmente, F_1). En este modelo geométrico, las transformaciones P y f inducidas por el flujo como transformación de retorno y transformación factor, respectivamente, son fundamentales para el estudio de propiedades dinámicas y ergódicas del sistema, de hecho atractor extraño, presente en este modelo (vea [GW], [W], [Ro], [ABS1], [BS]). La inducción de estas transformaciones se apoya en la existencia de la sección transversa global (excepto por la línea ℓ) y de la invarianza de la partición de Σ , la cual juega un papel central en la misma definición del modelo geométrico.

1.3. Atractores hiperbólicos singulares

Una de las más recientes e importantes generalizaciones inspiradas en el atractor de Lorenz geométrico es presentada por Morales, Pacífico y Pujals

en [MPP2], la cual intenta capturar las propiedades débiles de hiperbolicidad del atractor de Lorenz mediante condiciones de hiperbolicidad parcial y expansión de volumen en la dirección central para atractores de campos de vectores con singularidades no aisladas en conjuntos invariantes. Ellos introducen una clase de sistemas llamados *sistemas hiperbólicos singulares* que son campos de vectores en variedades de dimensión tres, cuyo conjunto no errante posee una descomposición espectral entre cuyas piezas se incorporan los llamados conjuntos *hiperbólicos singulares*, aparte de otras componentes de tipo hiperbólico uniforme.

Sea X un campo con flujo asociado Φ_t . Diremos que un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ es un *atractor* si para algún entorno U de Λ tenemos $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(U)$ (U como antes es llamado una *región de atracción* de Λ), y $X|_\Lambda$ es *topológicamente transitivo*, esto es Λ es el conjunto ω -límite de alguna órbita. Diremos que Λ es *parcialmente hiperbólico* si existen una descomposición $D\Phi_t$ -invariante y continua $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ donde el subfibrado estable E_Λ^s es unidimensional, el subfibrado central E_Λ^c es bidimensional, contiene la dirección del flujo E_Λ^X y existen constantes positivas λ, c con $\lambda > 1$ tales que, para todo $t \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|D\Phi_t|_{E_\Lambda^s}\| &\leq c\lambda^{-t} \quad (E_\Lambda^s \text{ es contractivo}) \text{ y} \\ \|D\Phi_t|_{E_\Lambda^s}\| \cdot \|D\Phi_{-t}|_{E_\Lambda^c}\| &\leq c\lambda^{-t} \quad (E_\Lambda^c \text{ es dominado por } E_\Lambda^s). \end{aligned}$$

Un conjunto *básico singular* es un conjunto hiperbólico singular el cual es aislado y transitivo.

DEFINICIÓN 1.2. Un *atractor hiperbólico singular* es un atractor parcialmente hiperbólico conteniendo singularidades, todas ellas hiperbólicas, y cuya dirección central E_Λ^c *expande volumen*:

$$|\det(D\Phi_t|_{E_\Lambda^c})| \geq c\lambda^{-t} \quad \text{para } t > 0, \quad (1.2)$$

donde \det es el determinante respecto de la métrica Riemanniana de M .

Consideremos $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} (\Phi_t(U))$ un atractor singular hiperbólico para X con región de atracción U . Por hiperbolicidad singular, el subfibrado estable E_Λ^s sobre Λ es contraído exponencialmente por $D\Phi_t$. De manera que E_Λ^s es tangente a una foliación unidimensional que es contraída exponencialmente por $D\Phi_t$. Esta foliación es $C^{1+\alpha}$ para algún $0 < \alpha < 1$ ya que X es C^2 , y se extiende a una vecindad $U_0 \subset U$ de Λ , debido a la compacidad de Λ (vea

[PT]). Sea $\tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^{cu}$ una extensión continua de $T_\Lambda M$ a una vecindad pequeña U_0 de Λ positivamente invariante. El fibrado \tilde{E}^s se puede elegir invariante bajo la derivada, para ello consideremos en cada punto la dirección formada por aquellos vectores que son fuertemente contraídos por $D\Phi_t$ para $t > 0$. Pero en general \tilde{E}^{cu} no es invariante, sin embargo para resolver este problema podemos considerar un campo de conos alrededor de U_0 ,

$$C_a^{cu}(x) = \{v = v^s + v^{cu} : v^s \in \tilde{E}_x^s, v^{cu} \in \tilde{E}_x^{cu}, \|v^s\| \leq a\|v^{cu}\|\} \quad (1.3)$$

el cual es invariante para $a > 0$ y t grande:

$$D\Phi_t(C_a^{cu}(x)) \subset C_a^{cu}(\Phi_t(x)).$$

El parámetro a se puede tomar pequeño reduciendo U_0 de ser necesario. Por simplicidad de ahora en adelante se escribirá E^s , E^{cu} en lugar de \tilde{E}^s , \tilde{E}^{cu} respectivamente.

Para $x \in U_0$ definimos:

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0\}$$

$$W^s(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\Phi_t(x)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Phi_t(W^{ss}(x)).$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ y sea $\mathcal{E}^1(I_1, M)$ el conjunto de todas las inmersiones regulares $f : I_1 \rightarrow M$ de clase C^1 dotado con la topología C^1 .

TEOREMA 1.3. (Teorema de la variedad estable y centro inestable)

Existen funciones continuas $\phi^{ss} : U_0 \rightarrow \mathcal{E}^1(I_1, M)$ y $\phi^{cu} : U_0 \rightarrow \mathcal{E}^1(I_1 \times I_1, M)$ tales que para cualquier $0 < \gamma < 1$ y $x \in U_0$, si denotamos $W_\gamma^{ss}(x) = \phi^{ss}(x)(I_\gamma)$ y $W_\gamma^{cu}(x) = \phi^{cu}(x)(I_\gamma \times I_\gamma)$, entonces

1. $T_x(W_\gamma^{ss}(x)) = E_x^s$.
2. $T_x(W_\gamma^{cu}(x)) = E_x^{cu}$.
3. $W_\gamma^{ss}(x)$ es una vecindad de x dentro de $W^{ss}(x)$.
4. $y \in W^{ss}(x)$ si y sólo si existe $T \geq 0$ tal que $\Phi_T(y) \in W_\gamma^{ss}(\Phi_T(x))$ (invarianza local).
5. $d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) \leq c\lambda^{-t}d(x, y)$ para todo $t > 0$ y todo $y \in W_\gamma^{ss}(x)$.

Las constantes c y λ son aquellas dadas por la definición de atractor hiperbólico singular. Llamaremos *variedad estable fuerte local* y *variedad centro-inestable local* de x a $W_\gamma^{ss}(x)$ y $W_\gamma^{cu}(x)$ respectivamente. En lo que sigue, $\text{span}\{w\}$ es el espacio generado por w y $\delta > 0$ es un número real fijo pequeño. Sea $E_x^{cs} = E_x^s \oplus E_x^X$, donde $E_x^X = \text{span}\{X(x)\}$. De esta manera se tiene que $T_x W^{ss}(x) = E_x^s$ y $T_x W^s(x) = E_x^{cs}$. Definimos la *hoja estable* de tamaño δ para un punto $z \in U_0$ como el conjunto

$$W_\delta^{ss}(z) = \{y \in W^{ss}(z) : \text{dist}(\Phi_t(z), \Phi_t(y)) \leq \delta \text{ para todo } t \geq 0\},$$

donde dist denota la distancia inducida en M por la estructura Riemanniana. Para puntos z en el atractor y $\delta \leq \gamma$, su hoja estable correspondiente es la variedad estable fuerte local. Dado $Z \subset M$, se define $W_\delta^{ss}(Z)$, como

$$W_\delta^{ss}(Z) = \bigcup_{x \in Z} W_\delta^{ss}(x).$$

LEMA 1.1. [B2] Sea X como antes, entonces:

1. $W_{\delta_1}^{ss}(W_{\delta_2}^{ss}(x)) \subset W_{\delta_1 + \delta_2}^{ss}(x)$.
2. Para γ como en el teorema de la variedad estable, $Z \subset M$ y $Y \subset W_\delta^{ss}(Z)$, con $\delta \leq \gamma$, se cumple que $\Phi_m(Y) \subset W_{c\delta\lambda^{-m}}^{ss}(\Phi_m(Z))$ para todo entero positivo m .

Demostración. Sea $y \in W_{\delta_1}^{ss}(W_{\delta_2}^{ss}(x))$. Entonces $y \in W_{\delta_1}^{ss}(z)$ para algún $z \in W_{\delta_2}^{ss}(x)$, luego para todo $t \geq 0$ se tiene

$$d(\Phi_t(y), \Phi_t(z)) \leq \delta_1, d(\Phi_t(z), \Phi_t(x)) \leq \delta_2$$

y así para todo $t \geq 0$ tenemos

$$d(\Phi_t(y), \Phi_t(x)) \leq d(\Phi_t(y), \Phi_t(z)) + d(\Phi_t(z), \Phi_t(x)) \leq \delta_1 + \delta_2$$

es decir, $y \in W_{\delta_1 + \delta_2}^{ss}(x)$ y se tiene así la primera parte del lema.

Por otro lado, sea $y \in W_\delta^{ss}(z)$ para algún $z \in Z$. Para $t \geq 0$ se tiene por el teorema de la variedad estable y la definición de variedad estable fuerte que

$$d(\Phi_t(\Phi_m(z)), \Phi_t(\Phi_m(y))) \leq c\lambda^{-t-m}d(z, y) \leq c\delta\lambda^{-m}$$

de donde se desprende que $\Phi_m(y) \in W_{c\delta\lambda^{-m}}^{ss}(\Phi_m(z))$, con lo que se tiene la segunda parte del lema. ■

DEFINICIÓN 1.3. Sea $\mathfrak{X}^1(M)$ dotado con la topología C^1 . Diremos que un conjunto aislado $\Lambda \subset M$ es *transitivo robusto* de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, si existe una vecindad U de Λ y una vecindad $\mathbf{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X tal que $\Lambda_Y = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U)$ es transitivo y no trivial (esto es, no es una singularidad o una órbita periódica) para todo $Y \in \mathbf{U}$.

DEFINICIÓN 1.4. Diremos que un conjunto aislado $\Lambda \subset M$ es *singular robusto* de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, si existe una vecindad U de Λ y una vecindad C^1 $\mathbf{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X tal que $\Lambda_Y = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U)$ contiene una singularidad para todo $Y \in \mathbf{U}$.

Sea $\text{sing}(X|\Lambda)$ el conjunto de las singularidades del campo de vectores X contenidas en Λ . Diremos que una singularidad σ es *adjunta* a Λ si es acumulada por órbitas periódicas de X en Λ . Decimos que una singularidad σ de un campo de vectores es de *tipo Lorenz* si $DX(\sigma)$ posee autovalores reales $\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ satisfaciendo

$$-\lambda_2 < -\lambda_3 < 0 < \lambda_3 < \lambda_1.$$

Los conjuntos hiperbólicos no pueden tener singularidades adjuntas. Existen conjuntos hiperbólicos singulares los cuales son hiperbólicos. El ejemplo (que no es transitivo) es la unión de un conjunto básico no trivial y una singularidad tipo Lorenz. Nótese que, por definición, un conjunto hiperbólico singular debe contener singularidades.

TEOREMA 1.4. [MPP2] Sea Λ un conjunto hiperbólico singular de X y supongamos que Λ no es hiperbólico. Entonces, Λ posee al menos una singularidad acumulada por X -órbitas regulares en Λ . En adición, lo siguiente vale o para X o para $-X$: cada singularidad adjunta σ de Λ es de tipo Lorenz y satisface

$$\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Si Λ es hiperbólico singular, entonces el conjunto $\text{sing}(X|\Lambda)$ de singularidades de X contenidas en Λ , es un subconjunto no vacío de Λ consistente de singularidades hiperbólicas, todas ellas de tipo Lorenz por [MPP1]. En particular, $\text{sing}(X|\Lambda)$ es finito. Sea $\Lambda^* = \Lambda \setminus W^u(\text{sing}(X|\Lambda))$, donde

$W^u(\text{sing}(X|\Lambda))$ denota la unión de las variedades inestables de elementos en $\text{sing}(X|\Lambda)$. La hiperbolicidad singular y $\dim(M) = 3$ implican que algún subconjunto grande Λ^* de órbitas en Λ es hiperbólico no uniformemente. Más precisamente, la condición de expansión uniforme de volumen implica que las órbitas en Λ^* son regulares en el sentido de Lyapunov y los correspondientes *exponentes de Lyapunov*

$$\chi(x, v) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|D\Phi_t(x)v\|$$

son no nulos para $v \notin \{s \cdot \Phi(x) : s \in \mathbb{R}\}$. En [C] fue demostrado que si Λ es un atractor hiperbólico singular para un campo de vectores de clase C^2 sobre una variedad tridimensional y Λ contiene órbitas periódicas densas, entonces toda órbita en Λ^* es hiperbólica no uniformemente. Posteriormente Arroyo y Pujals han demostrado en [AP] que todo atractor hiperbólico singular posee órbitas periódicas densas, con lo cual la densidad de las órbitas periódicas es una propiedad general de los atractores hiperbólicos singulares, de modo que también lo es la hiperbolicidad no uniforme ya mencionada.

TEOREMA 1.5. [MPP2] Sea Λ un conjunto singular hiperbólico para $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Entonces existe una vecindad U de Λ y una vecindad $\mathbf{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que si $Y \in \mathbf{U}$, entonces cualquier conjunto invariante de Y en U es singular hiperbólico.

Enunciamos algunas propiedades a continuación algunas propiedades relacionadas a atractores robustos (para mayor información ver [APa], [BDV] [MP2], [MPP1] y [MPP3]).

1. Un conjunto transitivo robusto que contiene singularidades de un flujo en una variedad cerrada tridimensional o es un atractor propio o es un repulsor propio.
2. Toda singularidad de un atractor robusto es tipo Lorenz.
3. Los atractores robustos de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, que contienen singularidades son singulares hiperbólicos.
4. Los atractores robustos de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ son o hiperbólicos o singulares hiperbólicos.

Capítulo 2

Propiedad s –Markov

A continuación se presentan definiciones y resultados que nos llevarán al objetivo principal de nuestro trabajo. Supondremos en todo el capítulo y resto del trabajo que tenemos un atractor hiperbólico singular Λ sobre una variedad Riemanniana tridimensional M asociado al campo X con región de atracción U_0 como en las páginas 16 y 17. En la sección 2.1 nuestra meta es la construcción de secciones locales de cruce que son la unión de hojas estables (proyecciones a lo largo de líneas del flujo de variedades estables fuertes sobre las secciones), llamadas s –rectángulos. Luego en la sección 2.2, presentaremos la definición de una familia de Poincaré, esto es, una colección finita de s –rectángulos con la propiedad de que cada s –rectángulo de dicha familia intersecta al atractor, también presentamos la definición de los se –rectángulos, estos son s –rectángulos que poseen una curva que intersecta transversalmente a cada hoja estable del s –rectángulo en un único punto y que son expandidos por el flujo y por la transformación de retorno a la familia de Poincaré. Finalizamos el capítulo (sección 2.3) con la construcción de una familia de Poincaré formada por se –rectángulos, esto con la finalidad de construir la propiedad Markoviana parcial sobre hojas estables en el Capítulo 3.

2.1. s –rectángulos

DEFINICIÓN 2.1. Una *sección local de cruce* de Λ es un disco $T \subset U_0$ transversal al flujo Φ_t tal que $T \cap \Lambda \neq \emptyset$ y existe un número real positivo ξ , llamado *tiempo de cruce de T* , tal que $\Phi_{[-\xi, \xi]}(T)$ tenga la propiedad del flujo tubular, en particular, $\Phi_{[-\xi, \xi]}(x) \cap T = \{x\}$ para todo punto $x \in T$.

En tal caso escribimos $\text{int}(T)$ para denotar al interior de T en la topología de subespacio respecto de T . La función $(z, t) \mapsto \Phi_t(z)$ es un difeomorfismo de $T \times [-\xi, \xi]$, sobre una vecindad cerrada en M de los puntos en $\text{int}(T)$, denotaremos por $U_\xi(T)$ a tal vecindad.

Asociada a cada sección local de cruce tenemos la *función proyección* $\text{Pr}_T : U_\xi(T) \rightarrow T$, definida como $\text{Pr}_T(\Phi_t(z)) = z$ para $z \in T$ y $|t| \leq \xi$. Para

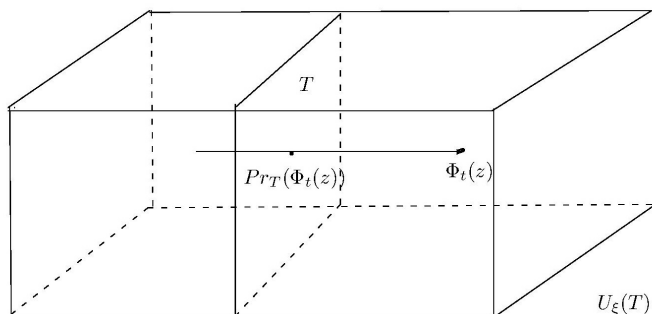


Figura 2.1: Función Proyección Pr_T .

cada punto $x \in T \cap U_0$ definimos la *hoja estable* de x en T , denotada por $W^s(x, T)$, como el conjunto

$$W^s(x, T) = \text{Pr}_T(W^{ss}(x, T, \xi)), \quad (2.1)$$

donde $W^{ss}(x, T, \xi)$ es la componente conexa de $W_\xi^{ss}(x) \cap U_\xi(T)$ que contiene a x .

DEFINICIÓN 2.2. Una sección local de cruce $T \subset U_0$ es un *s-rectángulo*, si existe una función continua $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow T$, que llamaremos *s-parametrización de T* tal que:

1. $\phi|_{(0,1) \times (0,1)} : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \text{int}(T)$ es difeomorfismo.
2. $\phi([0, 1] \times \{y\}) = W^s(\phi(x, y), T)$ para todo $x, y \in [0, 1]$.

Escribiremos en tal caso

1. $\partial^{cu}T = \phi(\{0\} \times [0, 1]) \cup \phi(\{1\} \times [0, 1])$ es llamada *frontera centro-inestable de T*.

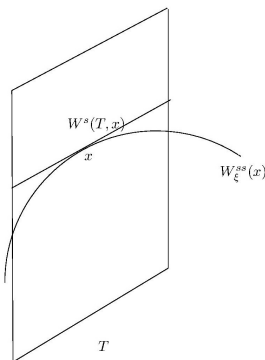


Figura 2.2: Hoja estable de x en T .

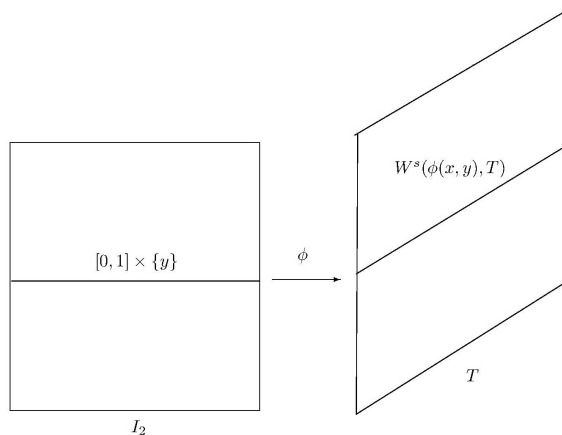


Figura 2.3: s -parametrización de T .

2. $\partial^s T = \phi([0, 1] \times \{0\}) \cup \phi([0, 1] \times \{1\})$ es llamada *frontera estable de T* .

Esto significa que la colección $W^s(T)$ de hojas estables $W^s(x, T)$ es una partición de T que llamaremos *laminación estable de T* . Por ejemplo, si γ es como en el teorema de la variedad estable (Teorema 1.3) una sección local de cruce T con diámetro menor que γ es s -rectángulo ([APPV]).

DEFINICIÓN 2.3. Diremos que una sección local de cruce T es δ -*adaptada* si

$$\text{dist}(T \cap \Lambda, \partial^{cu} T) > \delta,$$

donde dist es la distancia intrínseca de T , esto es, respecto de la métrica Riemanniana inducida sobre T .

2.2. Familias s -Markov

Sea \mathcal{T} una familia de secciones locales de cruce de Φ_t , denotemos por Σ a la unión $\bigcup \mathcal{T}$ de sus elementos y sea $T \in \mathcal{T}$. Definimos:

$$S_\Sigma = \{q \in \Lambda : \Phi_t(q) \notin \Sigma, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

$$L_T = \{q \in T : \Phi_t(q) \notin \Sigma, \text{ para todo } t > 0\},$$

$$L_\Sigma = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} L_T.$$

DEFINICIÓN 2.4. Una familia finita \mathcal{T} de secciones locales de cruce con interiores disjuntos dos a dos es una *familia de Poincaré* para un atractor hiperbólico singular Λ si todo elemento de \mathcal{T} contiene puntos de Λ , $S_\Sigma = \text{sing}(X|\Lambda)$ y todo punto en Λ , no singular, es alcanzado por la órbita de algún punto de Σ . En tal caso diremos que $\Sigma = \bigcup \mathcal{T}$ es una *sección de cruce de Poincaré* para Λ .

Definimos el *tiempo de retorno* $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$\tau(z) = \begin{cases} \inf\{t > 0 : \Phi_t(z) \in \Sigma\} & \text{si } \Phi_{(0,+\infty)}(z) \cap \Sigma \neq \emptyset \\ \tau(z) = +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Denotaremos como $D(\tau)$ al conjunto de puntos de Σ donde τ es finito. La *función de primer retorno* a Σ (o *función de Poincaré*) se define como

$$F(z) = \Phi_{\tau(z)}(z), \text{ para } z \in D(\tau).$$

Notemos que $D(\tau) \cap L_\Sigma = \emptyset$ y que $\Lambda \cap \Sigma \setminus L_\Sigma \subset D(\tau)$. Por otro lado, se puede ver que para $z, F(z) \in D(\tau)$ se tiene que $\tau^2(z) = \tau(F(z))$, más aún para todo entero positivo n , $\tau^n(z) = \tau(F^{n-1}(z))$, si $F^k(z) \in D(\tau)$ para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

DEFINICIÓN 2.5. Sea \mathcal{T} una familia de Poincaré y sea F la función de Poincaré asociada a \mathcal{T} . Una *transversal* para $T \in \mathcal{T}$ es una curva conexa compacta suave $\gamma \subset T$ que interseca transversalmente cada hoja estable de T en un único punto y que no interseca la frontera centro-inestable de T . Diremos que K es un *transversal expensor* (*e-transversal* para abreviar) de T si existen constantes positivas C_γ, ρ_γ con $\rho_\gamma > 1$ tales que para $q \in \text{int}(\gamma)$,

donde $\text{int}(\gamma)$ es relativa a la topología subespacio de T , se cumple que:

$$\|DF^n(q)(v)\| \geq C_\gamma \rho_\gamma^{\tau^n(q)} \|v\|; \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+, \text{ y todo } v \in T_q\gamma$$

donde

$$DF^n(q) : T_qT \rightarrow T_{F^n(q)}R,$$

con $R \in \mathcal{T}$, tal que $F^n(q) \in R$. Diremos que un s -rectángulo T es se -rectángulo si admite una e -transversal.

OBSERVACIÓN 2.1. Si T es se -rectángulo con s -parametrización ϕ y γ es una transversal para T , entonces $\phi^{-1}(\gamma)$ es una curva en I_2 que corta en un único punto a cada segmento de recta de la forma $[0, 1] \times \{a\}$ para todo $a \in [0, 1]$.

DEFINICIÓN 2.6. Una familia de Poincaré \mathcal{T} se dice que es s -Markov si

$$F(W^s(x, T)) \subset W^s(F(x), S),$$

para todo $x \in \text{int}(T) \cap F^{-1}(\text{int}(S))$, $T, S \in \mathcal{T}$.

LEMA 2.1. Si T es una sección local de cruce que está lejos de las singularidades entonces $T \cap \Lambda^*$ es denso en $T \cap \Lambda$.

Demostración. Sea U abierto en $T \cap \Lambda$. Como T es sección local existe δ tal que $V = U \times (-\delta, \delta)$ tiene la propiedad del flujo tubular, de manera que si escogemos $W \subset V$ abierto en Λ , entonces por la densidad de Λ^* , existe $x \in W \subset \Lambda^*$, y así la proyección de x en T estará en $U \cap T \cap \Lambda^*$, lo que concluye la demostración. ■

LEMA 2.2. [APPV] Para $x \in \Lambda$ regular existe $\delta > 0$ y T sección local de cruce con x en su interior tal que T es δ -adaptada.

COROLARIO 2.1. Para $x \in \Lambda$ regular existe $\delta > 0$ y T s -rectángulo con x en su interior tal que T es δ -adaptada.

El objetivo central en este trabajo es la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 2.1. Sea Λ un atractor hiperbólico singular para un flujo Φ_t de clase C^2 . Entonces existe una familia s -Markov \mathcal{T} consistente de se -rectángulos. El tiempo de retorno a la sección de cruce de Poincaré $\Sigma = \bigcup \mathcal{T}$ es integrable con respecto a la medida de Lebesgue en Σ .

2.3. Construcción de familias de Poincaré

La construcción de esta familia se hará en dos partes, por un lado secciones locales transversas a trayectorias regulares del atractor en entornos de las singularidades, que exhiban propiedades dinámicas y geométricas derivadas de la hiperbolicidad no uniforme de las trayectorias y de los índices de las singularidades, a fin de que el tiempo de retorno a la unión de las secciones sea integrable, y por otro lado secciones locales transversas a trayectorias regulares del atractor lejos de las singularidades, que exhiban propiedades dinámicas y geométricas derivadas de la hiperbolicidad no uniforme de las trayectorias, en el sentido que se asemejen a rectángulos de las familias Markovianas de los conjuntos básicos de flujos Axioma A. La unión de ambas familias finitas de secciones locales tendrán asociada una transformación de Poincaré de tal manera que el conjunto saturado en los tiempos de retorno cubran al atractor. Luego de esto desarrollaremos un proceso de refinamiento de las secciones locales transversas que culmine con una familia finita de s -rectángulos, que escogeremos con diámetro acotado que ayudarán a conseguir la condición de Markov en las direcciones estables (próximo capítulo). Más aún la familia estará formada por se -rectángulos, de manera que induzca una transformación expansora sobre el espacio de hojas estables de la unión de las secciones locales (sección global).

Sea Λ un atractor hiperbólico singular de X con región de atracción U_0 y fijemos $0 < \varepsilon < \gamma$, donde γ es como en el teorema de la variedad estable. Por hiperbolicidad singular, toda singularidad de X en Λ es hiperbólica, y es tipo Lorenz (Teorema 1.4). De esta manera, para una singularidad σ en el atractor, podemos aplicar el Teorema de Hartman-Grobman (ver [PM]) para escoger una vecindad abierta $U_\sigma \subset U_0$ de σ tal que $X|_{U_\sigma}$ es topológicamente conjugado a un flujo lineal $L_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ver 1.1). Sea $h : U_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una conjugación local de $X|_{U_\sigma}$ a L_t tal que $h(\sigma) = 0$ y

$$h(W_{loc}^u(\sigma)) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$$

$$h(W_{loc}^s(\sigma)) = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$$

donde $W_{loc}^u(\sigma)$ y $W_{loc}^s(\sigma)$ son la variedad inestable débil local y la variedad estable débil local de σ , respectivamente.

Para U_σ pequeño puede ocurrir que $h^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}) \cap \Lambda$ o $h^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}) \cap \Lambda$ sea vacío. Sin pérdida de generalidad

supongamos que el primer conjunto es vacío.

Tomemos un s -rectángulo $A \subset U_\sigma$ transversal a $W_{loc}^s(\sigma)$ con s -parametrización ϕ tal que $l_\sigma = A \cap W_{loc}^s(\sigma) = \phi(I_1 \times \{\frac{1}{2}\})$ sea una curva conexa que separa A en dos componentes conexas, a saber, A_\pm . Escribamos $A^* = A \setminus l_\sigma = A_+ \cup A_-$. Sean $A^+ = A_+ \cup l_\sigma$, $A^- = A_- \cup l_\sigma$ (de esta manera, los conjuntos $l_s^+ = \phi(I_1 \times \{1\})$ y $l_s^- = \phi(I_1 \times \{0\})$ son hojas estables de A disjuntos de l_σ). Llamaremos *sección local de tipo A* a cualquier sección local de cruce contenida en A^+ o en A^- . En particular A^+ y A^- son secciones locales de cruce de tipo A.

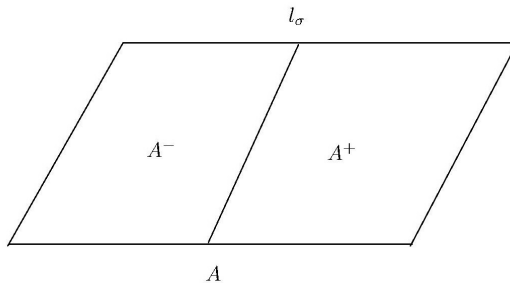


Figura 2.4: Secciones locales de tipo A.

Podemos cambiar h si es necesario, para suponer que $h(A)$ es el gráfico de una función continua G con $\text{dom}(G) \subset \{(x, y, 0) : |x|, |y| \leq 1/2\}$ que es una vecindad conexa y compacta del origen en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ tal que $G(x, y) > 1$ para todo $(x, y) \in \text{dom}(G)$. Denotemos $E_\pm = \{(\pm 1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Puesto que O es tipo Lorenz para L_t ([Ro]), para todo punto $p \in h(A)$ existe un único $\rho(p) \in \mathbb{R}^+$ tal que $L_{\rho(p)}(p) \in E_\pm$ si $p \in h(A_\pm)$.

Si $\lambda_u > 1$ denota el mayor autovalor de $DX(\sigma)$, entonces la función ρ satisface la siguiente desigualdad

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\lambda_u} \log |1/x| < -\log(x) \text{ para } (x, y, z) \in h(A^*)$$

Sea $\tau : A^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función C^2 tal que para $q \in A^*$, $h(q) \in h(A^*)$.

$$\rho(h(q)) \leq \tau(q) < -\log(x(q)),$$

donde $x(q)$ es la primera coordenada de $h(q)$. Notemos que τ es integrable

con respecto a la medida de Lebesgue en A .

Llamaremos *vecindad linearizada* de la singularidad σ , al conjunto

$$V(\sigma) = \overline{\bigcup_{q \in A^*} \Phi_{[0, \tau(q))}(q)}.$$

Sabemos por [MPP2] que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ y así, si tomamos A suficientemente cerca de σ , entonces $V(\sigma)$ contiene una vecindad de σ en Λ . En particular el conjunto $(\text{int}(V(\sigma)) \cup \{\sigma\}) \cap \Lambda$ es una vecindad abierta de σ en Λ . Sea

$$B^\pm = \overline{\bigcup_{q \in A_\pm} \Phi_{\tau(q)}(q)}, \quad (2.2)$$

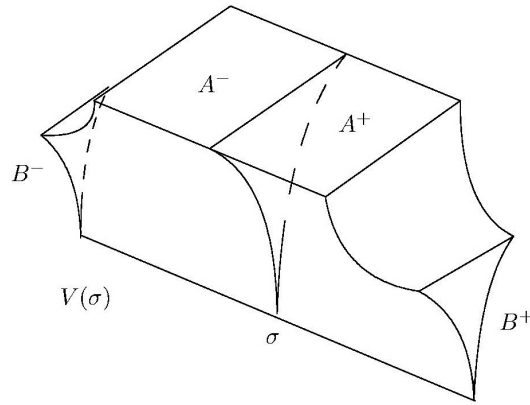


Figura 2.5: Vecindad linearizada: Caso 1.

Llamaremos *sección local de tipo B* a una sección local de cruce de la forma

$$B = \overline{\bigcup_{q \in T \setminus l_\sigma} \Phi_{\tau(q)}(q)}$$

donde T es una sección local de tipo A . Es claro que si T es s -rectángulo o se -rectángulo, entonces B también lo será respectivamente. Por construcción B^+ y B^- son secciones locales de tipo B , más aún para todo $q \in A_\pm$ se satisface que

$$\Phi_{\tau(q)}(W^s(q, A^\pm)) \subset W^s(\Phi_{\tau(q)}(q), B^\pm). \quad (2.3)$$

Ahora, como A es sección local de cruce existe un número real positivo ε_σ tal que en $\Phi_{[-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]}(A)$ vale el teorema del flujo tubular y no contiene a la

singularidad σ .

Consideremos ahora el caso en que para una singularidad $\sigma \in \Lambda$ los conjuntos

$$h^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}) \cap \Lambda$$

$$h^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}) \cap \Lambda$$

son ambos no vacíos. Entonces $h(W_{loc}^u(\sigma)), h(W_{loc}^s(\sigma))$ son no vacíos para U_σ pequeño. Tomemos, para $i \in \{1, 2\}$, secciones locales de cruce $A_i \subset U_\sigma$ transversales a $W_{loc}^s(\sigma)$ satisfaciendo las mismas condiciones que en el primer caso. Pongamos

$$l_\sigma^i = A_i \cap W_{loc}^s(\sigma); \quad l_\sigma = l_\sigma^1 \cup l_\sigma^2$$

$$A_i^* = A_i^- \cup A_i^+, \quad A^* = A_1^* \cup A_2^*$$

Como antes, se puede suponer que para $i = 1, 2$ los conjuntos $h(A_i)$ son gráficos de respectivas funciones continuas G_i tales que $G_1(x, y) > 1$ y $G_2(x, y) < -1$ para $(x, y) \in \text{dom}(G_i)$. Sea $\rho(p)$ también como en el caso anterior para $p \in h(A^*)$ y denotemos como $\rho_i : h(A_i^*) \rightarrow \mathbb{R}$ a la restricción de ρ al conjunto $h(A_i^*)$ que satisface las mismas condiciones que en el caso anterior para $i = 1, 2$. Similarmente consideremos una función $\tau : A^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^2 tal que

$$\rho(h(q)) \leq \tau(q) < -\log(x(q)), \quad q \in A_i^*, \quad h(q) \in h(A_i^*)$$

por lo que τ es Lebesgue integrable.

Definamos ahora

$$V(\sigma) = \overline{\bigcup_{q \in A^*} \Phi_{[0, \tau(q)]}(q)}.$$

que también llamaremos *vecindad linearizada* de la singularidad σ . Recordemos que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ así que podemos tomar A_i suficientemente cerca de σ de tal manera que $V(\sigma)$ contenga una vecindad de σ en Λ . En particular el conjunto $(\text{int}(V(\sigma)) \cup \{\sigma\}) \cap \Lambda$ es una vecindad abierta de σ en Λ . Para $i = 1, 2$, sean

$$B_i^\pm = \overline{\bigcup_{q \in A_{\pm i}} \Phi_{\tau(q)}(q)}.$$

Cada B_i^\pm es, por construcción s -rectángulo del tipo B . Nuevamente, como A_1 y A_2 son secciones locales de cruce, existe un número real positivo ε_σ tal que en $\Phi_{[-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]}(A_1)$ y en $\Phi_{[-\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\sigma]}(A_2)$ vale el teorema del flujo tubular y no

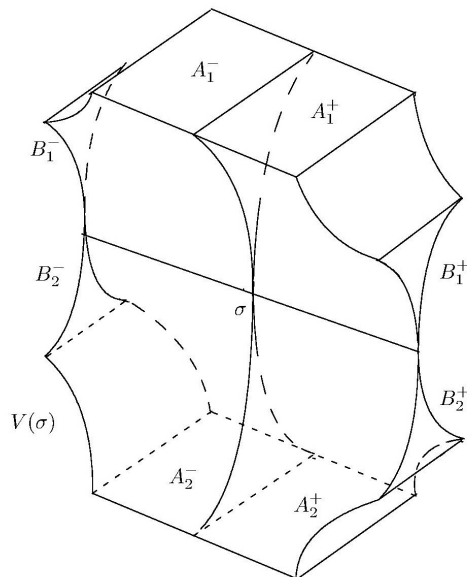


Figura 2.6: Vecindad linealizada: Caso 2.

contienen a la singularidad σ .

La frontera $\partial V(\sigma)$ de $V(\sigma)$ es unión finita de superficies suaves con interiores disjuntos dos a dos, que llamaremos componentes regulares de $\partial V(\sigma)$. Denotaremos por $\mathcal{V}_A(\sigma)$ a la familia de componentes regulares de $\partial V(\sigma)$ en los que el flujo entra a $V(\sigma)$ transversalmente a medida que el tiempo crece, cada una de estas componentes es un rectángulo del tipo A . Por otro lado, denotaremos por $\mathcal{V}_B(\sigma)$ a la familia de componentes regulares de $\partial V(\sigma)$ en los que el flujo sale de $V(\sigma)$ transversalmente a medida que el tiempo crece, en este caso cada componente es un s -rectángulo del tipo B . Denotemos por $\mathcal{V}(\sigma)$ al conjunto $\mathcal{V}_A(\sigma) \cup \mathcal{V}_B(\sigma)$.

Ya sabemos que cada singularidad de X en Λ es de tipo Lorenz y que solo tenemos un número finito de ellas. Supongamos que tales singularidades son $\sigma_1, \dots, \sigma_d$. Finalmente, definamos:

$$V = \bigcup_{i=1}^d V(\sigma_i), \quad \mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^d \mathcal{V}(\sigma_i).$$

Pediremos que cada sección de tipo A de la construcción previa sea 2δ -adaptado, y puesto que se tiene una cantidad finita de singularidades se puede tomar el mismo δ para cada rectángulo. Para cada A consideremos

un s -rectángulo $A_0 = \phi([a, b] \times [0, 1])$ con $A_0 \subset A$ y A_0 con la propiedad de ser δ -adaptado. Denotemos por $V(\sigma)_0$ a la vecindad linearizada construida a partir de A_0 y como B_0 a su rectángulo del tipo B asociado y definamos V_0 y \mathcal{V}_0 como en los contextos previos. Sea $W = U_0 \setminus V_0$.

- OBSERVACIÓN 2.2.**
1. Sea $L = \bigcup_{\sigma \in \text{sing}(X|\Lambda)} l_\sigma$. Denotemos por τ al tiempo de retorno del flujo desde $\bigcup \mathcal{V}^- \setminus L$ hasta \mathcal{V}^+ , como se definió en $A \setminus l_\sigma$ para cada $\sigma \in \text{sing}(X|\Lambda)$. Entonces τ es Lebesgue integrable.
 2. Diremos que un se -rectángulo T es *de tipo C* si T no es de tipo A ni de tipo B .
 3. Por construcción para cada punto en el interior de una sección del tipo A se satisface la propiedad Markoviana en hojas estables (2.3).

DEFINICIÓN 2.7. Un conjunto $V = \Phi_{[-\alpha_1, \alpha_2]}(T)$ se llama s -*paralelepípedo de tipo 1* si T es un se -rectángulo de tipo C , y $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ son tales que V tenga la propiedad del flujo tubular. En tal caso se dice que $\Phi_0(T) = T$ es *base* de V . Para un se -rectángulo T de tipo A , llamaremos s -*paralelepípedo de tipo 2* de base T al conjunto

$$\overline{\bigcup_{q \in T \setminus l_\sigma} \Phi_{[0, \tau(q)]}(q)} \subset V_0(\sigma).$$

En general diremos que P es un s -*paralelepípedo* si P es un s -paralelepípedo del tipo 1 o de tipo 2.

DEFINICIÓN 2.8. Sea V un s -paralelepípedo. Para cada $x \in V$ definimos la *hoja estable de x en V* , denotada como $W^{ss}(x, V)$, a la componente conexa de $W_\varepsilon^{ss}(x) \cap V$ que contiene a x .

LEMA 2.3. Si V es un s -paralelepípedo con base T y S es un se -rectángulo tal que $\text{int}(S) \cap V \neq \emptyset$, entonces la proyección $\text{Pr}_T(S)$ de S sobre T , es un se -rectángulo.

A continuación cubriremos $W = U_0 \setminus V_0$ con una cantidad finita de s -paralelepípedos que iremos refinando hasta obtener una colección de s -paralelepípedos con s -rectángulos asociados con un tiempo de cruce uniforme y suficientemente pequeño para garantizar ciertas propiedades sobre

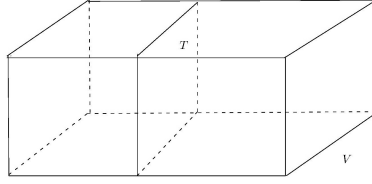


Figura 2.7: s-paralelepípedo de tipo 1.

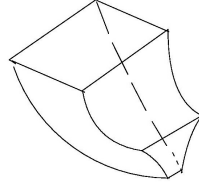
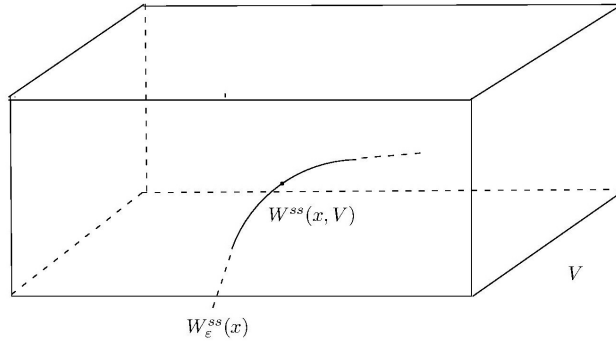


Figura 2.8: s-paralelepípedo de tipo 2.

Figura 2.9: Variedad estable de x en V .

las hojas estables de cada uno de ellos que necesitaremos para la obtención de una condición markoviana parcial (Lemas 3.1, 3.2 y 3.3 del capítulo 3).

Para cada punto $x \in W \cap \Lambda^*$, por el corolario 2.1 podemos encontrar un s -rectángulo $2\delta_x$ -adaptado T'_x con x en su interior tal que T'_x no intersekte a ninguno de los elementos de $\mathcal{V}(\sigma)_0$. Sea $\varepsilon_x > 0$ pequeño tal que el s -paralelepípedo $V'_x = \Phi_{[-\varepsilon_x, \varepsilon_x]}(T'_x)$ tenga la propiedad del flujo tubular. Sea $V_x = \Phi_{[-\frac{\varepsilon_x}{4}, 0]}(T_x)$, donde $T_x \subset T'_x$ es un s -rectángulo δ_x -adaptado. Como $W \cap \Lambda^*$ es denso en $W \cap \Lambda$ (2.1), tenemos que $\{\text{int}(V_x)\}_{x \in W \cap \Lambda^*}$ es un cubrimiento abierto de $\overline{W} \cap \Lambda$, el cual es compacto. Así que podemos cubrir este último conjunto con una cantidad finita de s -paralelepípedos, digamos,

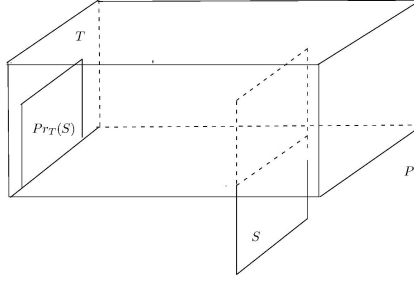


Figura 2.10: Proyección de S sobre T .

$\{V_{x_1}, \dots, V_{x_p}\}$ con s -rectángulos asociados T_{x_1}, \dots, T_{x_p} respectivamente. Sea \mathcal{C}' la colección de los s -rectángulos $T'_{x_1}, \dots, T'_{x_p}$ más todos los s -rectángulos A y B . Supongamos sin pérdida de generalidad que los elementos de dicha familia tienen interiores disjuntos dos a dos. Podemos escoger $0 < b < \varepsilon$ tal que cada $S \in \mathcal{C}'$ se pueda particionar en una cantidad finita de s -rectángulos con interiores disjuntos dos a dos de manera que si T es uno de tales s -rectángulos entonces para cada $x \in \text{int}(T)$ se cumple que

$$\Pr_S^{-1}(W^s(x, T)) \cap W_\varepsilon^{ss}(x) \subset W_{b/4}^{ss}(x) \subset \Pr_S^{-1}(W^s(x, S)) \cap W_\varepsilon^{ss}(x). \quad (2.4)$$

OBSERVACIÓN 2.3. Por simplicidad, para cualquier s -rectángulo T que sea subconjunto de un s -rectángulo $S \in \mathcal{C}'$ escribiremos de ahora en adelante $\Pr^{-1}(W^s(x, T))$ en lugar de $\Pr_S^{-1}(W^s(x, T)) \cap W_\varepsilon^{ss}(x)$.

Llamemos \mathcal{C} a la colección de todos los s -rectángulos T_{x_1}, \dots, T_{x_p} más todos los s -rectángulos A_0, B_0 , la cual es una familia de Poincaré por construcción, con función de primer retorno digamos τ y función de retorno F . Denotemos por \mathcal{C}^0 a la unión de los interiores de todos los elementos de la familia \mathcal{C} y definamos $f : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \tau(x)$ si x está en un rectángulo de la forma T_x o del tipo B y como $f(x) = \tau(F(x))$ si es del tipo A . Recordemos que si x está en un s -rectángulo de tipo A , entonces $F(x)$ está en uno del tipo B por lo que la función f está bien definida. Definamos:

$$L = \max_{x \in \bigcup \mathcal{C}^0} f(x) < \infty \quad (2.5)$$

$$l = \min_{x \in \bigcup \mathcal{C}^0} \tau(x) > 0 \quad (2.6)$$

Para $T \in \mathcal{C}$, $x \in \text{int}(T)$, $y \in W_\varepsilon^{ss}(x) \cap V_T$ sea q_y la distancia a lo largo del flujo

entre y y T y definamos

$$q_T^x = \max_{y \in W_{\varepsilon}^{ss}(x) \cap V_T} \{q_y\}$$

$$q = \max_{x \in \text{int}(T), T \in \mathcal{C}} \{q_T^x\}$$

Podemos acotar q_T^x uniformemente para cada x (de ser necesario se particiona cada T para lograr esto), por lo que q se puede elegir tan pequeño como se desee, en particular tal que $2q < l$.

Sean $T, S \in \mathcal{C}$ con T del tipo B o C , $x \in \text{int}(T) \cap F^{-1}(\text{int}(S))$ y sea $s = \tau(x)$. Entonces por el Teorema del flujo tubular existe una sección local de cruce $R \subset S$ conteniendo $F(x)$ y un número real positivo r_x tal que el conjunto V_R definido como

$$V_R = \Phi_{[-r_x - s, r_x]}(R)$$

sea un s -paralelepípedo de base R . De manera que podemos agregar otros s -rectángulos de tipo C a la familia \mathcal{C} , de tal manera que podamos elegir

$$L < \tau < L + l, \quad (2.7)$$

tal que para cada $T \in \mathcal{C}$, $\Phi_{[-2q - \tau, 2q]}(T)$ tenga la propiedad del flujo tubular. Sea $\mathcal{T}^0 = \{T_1^0, \dots, T_k^0\}$ la familia refinada final. Esta familia también es de Poincaré y su función de Poincaré es F . Para $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ del tipo A definamos

$$V_i^0 = \overline{\bigcup_{q \in T_i^0 \setminus I_\sigma} \Phi_{[0, \tau(q)]}(q)},$$

y para los $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ del tipo C definimos

$$V_i^0 = \Phi_{[-\tau, 0]}(T_i^0),$$

$$\mathcal{F}^0 = \{V_i^0 : T_i^0 \in \mathcal{T}^0\}.$$

Por construcción \mathcal{F}^0 cubre al atractor.

Sean R un s -rectángulo en \mathcal{T}^0 y $F : D(\tau) \rightarrow \Sigma$ la función de Poincaré. La descomposición $E^s \oplus E^{cu}$ sobre U_0 induce una descomposición $E_R^s \oplus E_R^{cu}$ del fibrado tangente TR sobre R , dada por los subespacios $E_R^s(x)$ y $E_R^{cu}(x)$

definidos como

$$E_R^{cu}(x) = E_x^{cu} \cap T_x R, \quad E_R^s(x) = E_x^s \cap T_x R.$$

Dado un número positivo ρ , y un punto $x \in R$, definimos el *cono inestable de longitud ρ en x* al conjunto

$$C_\rho^u(x, R) = \{v = v^s + v^u : v^s \in E_R^s(x), v^u \in E_R^{cu}(x) \text{ y } \|v^s\| \leq \rho \|v^u\|\}.$$

LEMA 2.4. [APPV] Para cada s -rectángulo $R \in \mathcal{T}^0$ existe ρ tal que para todo $x \in R \cap D(\tau)$ se cumple que

$$DF(x)(C_\rho^u(x, R)) \subset C_{\rho/2}^u(F(x), S),$$

donde S es el s -rectángulo en \mathcal{T}^0 que contiene a $F(x)$

TEOREMA 2.2. Todo s -rectángulo $R \in \mathcal{T}^0$ es *se*-rectángulo.

Demostración. Sea R un s -rectángulo en \mathcal{T}^0 . Por el lema anterior y puesto que el campo es uniformemente transverso a las secciones en \mathcal{T}^0 , se tiene que los ángulos entre $X(x)$ y $T_x R$ están uniformemente acotados lejos de ∞ y cero. Entonces podemos fijar una familia continua de conos $C_\rho^u(x, R) \supset T_x R$, para cada $x \in T$, con abertura uniforme ρ alrededor de $E_R^{cu}(x)$ tales que $E_R^{cu}(x) \cap C_\rho^u(x, R) = \{0\}$. De esta manera, podemos escoger una curva γ de clase C^2 en R tal que $T_x \gamma \subset C_\rho^u(x, R)$ para todo $x \in \gamma$. Fijemos $x \in \gamma \cap \text{int}(R) \cap F^{-1}(\text{int}(S))$, donde $S \in \mathcal{T}^0$ es la sección local de cruce que contiene a $F(x)$. Consideremos vecindades U, V en Σ para los puntos x y $F(x)$ respectivamente tales que $F(U) \subset V$ y denotemos $F = F|_U : U \rightarrow V$. Entonces $DF(x) : T_x R \rightarrow T_{F(x)} S$.

Por otro lado,

$$DF(x) = \pi_{F(x)} \circ D\Phi_{\tau(x)}|_{T_x R}, \quad (2.8)$$

donde $\pi_{F(x)}$ es la proyección sobre $T_{F(x)} S$ a lo largo de la dirección de $X(F(x))$, asociada a la descomposición $T_{F(x)} M = T_{F(x)} S \oplus \text{span}\{X(F(x))\}$.

Como Σ es compacto y sin singularidades existe $K > 1$ tal que para cada $x \in \Sigma$ se verifica

$$\frac{1}{K} \leq \|X(x)\| \leq K. \quad (2.9)$$

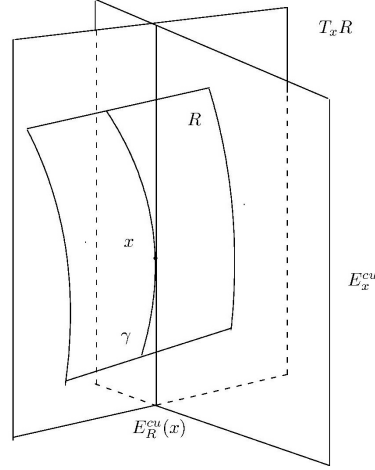


Figura 2.11: Subespacio $E_R^{cu}(x)$.

Para cada $x \in \gamma$ consideremos las bases

$$\left\{ \frac{X(x)}{\|X(x)\|}, e_x^u \right\} \quad \left\{ \frac{X(F(x))}{\|X(F(x))\|}, e_{F(x)}^u \right\}$$

de E_x^{cu} y $E_{F(x)}^{cu}$ respectivamente, donde e_x^u y $e_{F(x)}^u$ son vectores unitarios en la correspondiente dirección de $E_R^{cu}(x)$ y de $E_{S^u}^{cu}(F(x))$ respectivamente.

Empleando la notación $\Phi(t, p) = \Phi_t(p)$ para el flujo de X y usando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} D_2\Phi(\tau(x), x)X(x) &= D_2\Phi(\tau(x), x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t, x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\tau(x), \Phi(t, x)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\tau(x) + t, x) \\ &= X(\Phi(\tau(x), x)). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_2\Phi(\tau(x), x) \cdot \frac{X(x)}{\|X(x)\|} = \frac{X(\Phi(\tau(x), x))}{\|X(\Phi(\tau(x), x))\|} \frac{\|X(\Phi(\tau(x), x))\|}{\|X(x)\|}. \quad (2.10)$$

De la ecuación (2.10) y puesto que la dirección del campo es invariante, se tiene que la matriz de $D\Phi_{\tau(x)}|E_x^{cu} : E_x^{cu} \rightarrow E_{F(x)}^{cu}$ respecto de las bases ya fijadas tiene la forma triangular

$$D\Phi_{\tau(x)}|E_x^{cu} = \begin{pmatrix} \frac{\|X(F(x))\|}{\|X(x)\|} & B \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

donde $F(x) = \Phi(\tau(x), x)$. Ahora,

$$\det(D\Phi_{\tau(x)}|E_x^{cu}) = \frac{\|X(F(x))\|}{\|X(x)\|} A. \quad (2.11)$$

Entonces, por la definición de $\pi_{F(x)}$, las ecuaciones (2.9), (2.11) y la condición de expansión de volumen (Definición 1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \|DF(x)e_x^u\| &= \|\pi_{F(x)}[D\Phi_{\tau(x)}(x)|E_x^{cu}](e_x^u)\| \\ &= \|Ae_{F(x)}^u\| \\ &= |A| \cdot \|e_{F(x)}^u\| \\ &= |A| \\ &\geq K^{-2} |\det(D\Phi_{\tau(x)}|E_x^{cu})| \\ &\geq K^{-2} c^{-1} \lambda^{\tau(x)}, \end{aligned}$$

donde c y λ son las constantes dadas en la definición de atractor hiperbólico singular. Puesto que $E_R^{cu}(x)$ es unidimensional, la estimación anterior establece que

$$\|DF(x)(v)\| \geq K^{-2} c^{-1} \lambda^{\tau(x)} \|v\|.$$

Más aún, se demuestra por inducción que para $n \geq 1$ se cumple que

$$\|DF^n(x)(v)\| \geq K^{-2} c^{-1} \lambda^{\tau^n(x)} \left(\frac{\lambda^{\tau^{n-1}(x) + \dots + \tau(x)}}{(K^2 c)^{n-1}} \right) \|v\|.$$

Fijemos N entero positivo, recordando la elección de l en (2.6), se tiene para

$n > N$

$$\begin{aligned}
\|DF^n(x)(v)\| &\geq K^{-2}c^{-1}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{\lambda^{\tau^{n-1}(x)+\dots+\tau(x)}}{(K^2c)^{n-1}}\right)\|v\| \\
&\geq K^{-2}c^{-1}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{\lambda^{l(n-1)+l(n-2)+\dots+l(n-N)+\dots+l}}{(K^2c)^{n-1+N-N}}\right)\|v\| \\
&\geq (K^{-2}c^{-1})^{2-N}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{\lambda^{l(n-N)+\dots+l(n-N)}}{(K^2c)^{n-N}}\right)\|v\| \\
&\geq (K^{-2}c^{-1})^{2-N}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{\lambda^{lN}}{(K^2c)}\right)^{n-N}\|v\|.
\end{aligned}$$

De esta manera, si escogemos N entero positivo tal que $\frac{\lambda^{lN}}{(K^2c)} > 1$ y escribimos $C_N = (K^{-2}c^{-1})^{2-N}$, tenemos que para $n \geq N$ se verifica

$$\|DF^n(x)(v)\| \geq C_N\lambda^{\tau^n(x)}\|v\|. \quad (2.12)$$

Ahora, si para $n \in \{1, \dots, N-1\}$ definimos $C_n = \frac{1}{(K^2c)^n}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|DF^n(x)(v)\| &\geq K^{-2}c^{-1}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{\lambda^{\tau^{n-1}(x)+\dots+\tau(x)}}{(K^2c)^{n-1}}\right)\|v\| \\
&\geq K^{-2}c^{-1}\lambda^{\tau^n(x)}\left(\frac{1}{(K^2c)^{n-1}}\right)\|v\| \\
&= C_n\lambda^{\tau^n(x)}\|v\|.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \min\{C_1, \dots, C_{N-1}, C_N\}$, entonces por (2.12) y la desigualdad anterior tenemos que para todo entero positivo n se cumple que

$$\|DF^n(x)(v)\| \geq C\lambda^{\tau^n(x)}\|v\|,$$

esto es, γ es e -transversal para R , es decir, R es un se -rectángulo. ■

OBSERVACIÓN 2.4. Notemos que la elección de C en la demostración anterior no depende de la sección R , por lo que es escogida uniformemente para todo $R \in \mathcal{T}^0$.

COROLARIO 2.2. Todo s -rectángulo $S \subset R \in \mathcal{T}^0$ es se -rectángulo.

Capítulo 3

Existencia de familias s –Markov

Hasta ahora hemos construido familias de Poincaré formadas por se –rectángulos con características especiales, ahora deseamos conseguir una familia s –Markov. Para tal fin, comenzaremos por conseguir una condición markoviana parcial para una función auxiliar $g = \Phi_m$ (Lema 3.3) que no necesariamente es la función de Poincaré F asociada a la familia \mathcal{T}^0 , esto se hará apoyados en los métodos de Bowen [B2] y Ratner [R]. Luego mediante una serie de procesos de refinamientos conseguiremos la propiedad markoviana es hojas estables para F (Lemas 3.6 y 3.9).

3.1. Construcción de propiedad Markoviana parcial

Sea \mathcal{T}^0 la familia de se –rectángulos que se construyó en el capítulo anterior. Para cada $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ fijemos una e –transversal $K_{T_i^0}^u$ y para $x \in K_{T_i^0}^u$, denotemos

$$D_i^0(x) = W^s(x, T_i^0),$$

a la lámina estable de T_i^0 pasando por x como fue definido en (2.1). Denotemos por t_M al mayor de los tiempos de cruce de las secciones de tipo C que pertenecen a \mathcal{T}^0 , pidamos además que t_M sea mayor a todo ε_σ , para cada $\sigma \in \text{sing}(X|\Lambda)$. Definamos ahora $g = \Phi_m$, $\beta = \lambda^{-m} < 1$ donde m es un entero positivo tal que $m > L + t_M$ y $c\gamma \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j < \min(1, b/2)$, donde γ es como en el Teorema de la variedad estable.

LEMA 3.1. Para $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ del tipo B o C , $x \in K_{T_i^0}^u$ existen puntos $x_{i1}, \dots, x_{is(i)} \in \text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))$ tales que

$$D_i^0(x) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} D_{x_{ij}}^0,$$

donde $D_{x_{ij}}^0$ es la proyección del conjunto $g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^0))$ sobre la sección local $S \in \mathcal{C}$ que contiene a T_i^0 .

Demostración. Para cada $y \in \text{Pr}^{-1}(D_i^0(x)) \subset W_{b/4}^{ss}(x)$, donde b es el número que satisface (2.4), existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $g^{-1}(y) \in V_j^0$. Entonces

$$\{\text{int}(g(W^{ss}(g^{-1}(y), V_j^0))) : y \in \text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))\}$$

es una familia de subconjuntos de $W_{b/4}^{ss}(W_{b/4}^{ss}(x)) \subset W_{b/2}^{ss}(x)$ que cubre a $\text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))$ (por la elección de g y el teorema de la variedad estable). Usando compacidad podemos encontrar puntos $x_{i1}, \dots, x_{is(i)}$ en $\text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))$ tales que

$$\text{Pr}^{-1}(D_i^0(x)) \subset \bigcup_{j=1}^{s(i)} g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^0)),$$

de manera que al proyectar tenemos

$$D_i^0(x) \subset \bigcup_{j=1}^{s(i)} D_{x_{ij}}^0,$$

donde $D_{x_{ij}}^0$ es la proyección del conjunto $g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^0))$ sobre la sección local $S \in \mathcal{C}'$ que contiene a T_i^0 . ■

Para $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ del tipo B o C , $x \in K_{T_i^0}^u$ definamos

$$D_i^1(x) = \bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} D_{z_{ij}}^0,$$

$$T_i^1 = \bigcup_{x \in K_{T_i^0}^u} D_i^1(x).$$

Si $T_i^0 \in \mathcal{T}^0$ es de tipo A , existe un se -rectángulo de tipo B en \mathcal{T}^0 , digamos

$T_{r(i)}^0$ tal que $T_{r(i)}^0 = \overline{\bigcup_{q \in T_i^0} \Phi_{\tau(q)}(q)}$, definimos en este caso

$$T_i^1 = \overline{\bigcup_{q \in T_{r(i)}^1} \Phi_{\tau(q)}(q)},$$

todos estos T_i^1 son *se*-rectángulos por construcción. Sea $\mathcal{T}^1 = \{T_1^1, \dots, T_k^1\}$. Y sea \mathcal{V}^1 la colección de *s*-paralelepípedos asociados a \mathcal{T}^1 . Cabe destacar que $V_i^1 = \Phi_{[-\tau, 0]}(T_i^1)$ si T_i^1 es de tipo *C*, y $V_i^1 = \overline{\bigcup_{q \in T_i^1 \setminus l_\sigma} \Phi_{[0, \tau(q)]}(q)}$ si T_i^1 es de tipo *A*.

Aplicando el lema anterior a los *se*-rectángulos de tipo *B* y *C* de \mathcal{T}^1 y denotando a $D_{x_{ij}}^1$ como la proyección de $g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^1))$ sobre la sección local $S \in \mathcal{C}$ que contiene a T_i^1 , definimos:

$$D_i^2(x) = \bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} D_{x_{ij}}^1,$$

$$T_i^2 = \bigcup_{x \in K_{T_i^1}^u} D_i^2(x).$$

Para T_i^1 de tipo *A* se definen sus respectivos T_i^2 como antes, y de esta manera se obtienen las respectivas familias \mathcal{T}^2 y \mathcal{F}^2 de *se*-rectángulos y *s*-paralelepípedos. Repitiendo el proceso recursivamente para todo $n \geq 2$ definen los $D_i^n(x)$, T_i^n , \mathcal{T}^n , \mathcal{F}^n .

$$D_i^{n-1}(x) \subset D_i^n(x). \quad (3.1)$$

La buena definición de los *se*-rectángulos T_i^n es garantizada por el siguiente resultado.

LEMA 3.2. Sea $n \geq 1$. Para T_i^n del tipo *B* o *C* y $x \in K_{T_i^n}^u$ se tiene

$$\text{Pr}^{-1}(D_i^n(x)) \subset W_{c\beta^n\alpha}^{ss}(\text{Pr}^{-1}(D_i^{n-1}(x))) \subset W_{c(1+\dots+\beta^n)\alpha}^{ss}(x) \subset W_{2\alpha}^{ss}(x), \quad (3.2)$$

donde $\alpha = b/2$.

Demostración. Procedemos por inducción. Para $x \in K_{T_i^n}^u$ sean los x_{ij} como en el lema anterior. Como $x_{ij} \in \text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))$, entonces

$$W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^0) \subset W_\alpha^{ss}(g^{-1}(x_{ij})) \subset W_\alpha^{ss}(g^{-1}(\text{Pr}^{-1}(D_i^0(x))))$$

y al variar $j \in \{1, \dots, s(i)\}$ obtenemos, por el Lema 1.1,

$$\begin{aligned} \Pr^{-1}(D_i^1(x)) &= g\left(\bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^0)\right) \\ &\subset g(W_\alpha^{ss}(g^{-1}(\Pr^{-1}(D_i^0(x)))))) \\ &\subset W_{c\beta\alpha}^{ss}(\Pr^{-1}(D_i^0(x))). \end{aligned}$$

Por otro lado, la condición $\Pr^{-1}(D_i^0(x)) \subset W_{c\alpha}^{ss}(x)$ implica $W_{c\beta\alpha}^{ss}(\Pr^{-1}(D_i^0(x))) \subset W_{c\alpha+c\beta\alpha}^{ss}(x) = W_{c(1+\beta)\alpha}^{ss}(x)$, de esto último y lo anterior tenemos que

$$\Pr^{-1}(D_i^1(x)) \subset W_{c\beta\alpha}^{ss}(\Pr^{-1}(D_i^0(x))) \subset W_{c(1+\beta)\alpha}^{ss}(x) \subset W_{2\alpha}^{ss}(x),$$

lo cual verifica el caso $n = 1$. Supongamos que la propiedad en (3.2) es cierta para $n - 1 \geq 1$ con lo que tendríamos que

$$\Pr^{-1}(D_i^{n-1}(x)) \subset W_{c\beta^{n-1}\alpha}^{ss}(\Pr^{-1}(D_i^{n-2}(x))) \subset W_{c(1+\dots+\beta^{n-1})\alpha}^{ss}(x), \quad (3.3)$$

De la primera inclusión en (3.3) se infiere

$$W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-1}) \subset W_{\beta^{n-1}\alpha}^{ss}(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-2}))$$

y así

$$\bigcup_{j=1}^{s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-1}) \subset W_{c\beta^{n-1}\alpha}^{ss}\left(\bigcup_{j=1}^{s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-2})\right). \quad (3.4)$$

Luego, por la definición de los D_i^n (página 45), la inclusión (3.4) y el Lema 1.1 tenemos

$$\begin{aligned} \Pr^{-1}(D_i^n(x)) &= g\left(\bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-1})\right) \\ &\subset g\left(W_{c\beta^{n-1}\alpha}^{ss}\left(\bigcup_{j=1}^{s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-2})\right)\right) \\ &\subset W_{c\beta^{n-1}\alpha}^{ss}\left(g\left(\bigcup_{1 \leq j \leq s(i)} W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j^{n-2})\right)\right) \\ &\subset W_{c\beta^{n-1}\alpha}^{ss}(\Pr^{-1}(D_i^{n-1}(x))). \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis inductiva $\text{Pr}^{-1}(D_i^{n-1}(x)) \subset W_{c(1+\dots+\beta^{n-1})\alpha}^{ss}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1}(D_i^n(x)) &\subset W_{c\beta^n\alpha}^{ss}(\text{Pr}^{-1}(D_i^{n-1}(x))) \\ &\subset W_{c\beta^n\alpha}^{ss}(W_{c(1+\dots+\beta^{n-1})\alpha}^{ss}(x)) \\ &= W_{c(1+\dots+\beta^n)\alpha}^{ss}(x), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. \blacksquare

Debe ser claro que para todo $n, m \geq 0$, $K_{T_i^n}^u = K_{T_i^m}^u$, por lo que de ahora en adelante solo escribiremos K_i^u . Definamos para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y $x \in K_i^u$

$$\begin{aligned} D_i(x) &= \overline{\bigcup_{n \geq 0} D_i^n(x)}, \\ T_i &= \bigcup_{x \in K_i^u} D_i(x). \end{aligned}$$

Cada $D_i(x)$ está bien definido por el lema anterior y por la definición $W^s(x, T_i) = D_i(x)$. Por otro lado, cada T_i es *se*-rectángulo y además K_i^u es *e*-transversal para T_i . Denotemos por V_i al *s*-paralelepípedo asociado al *se*-rectángulo T_i . Para $x \in K_i^u$ y $z \in D_i(x)$, escribiremos $D_i(z) = D_i(x)$.

OBSERVACIÓN 3.1. Respecto de los $D_i(x)$ y V_i se verifican:

1. $D_i(x) = \overline{\text{int}(D_i(x))}$ en T_i .
2. Si $w \in W^{ss}(z, V_j)$, entonces $W^{ss}(w, V_j) = W^{ss}(z, V_j)$.
3. Para cada $z \in V_j$ se tiene

$$W^{ss}(z, V_j) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} W^{ss}(z, V_j^i). \quad (3.5)$$

LEMA 3.3. Para $T_i \in \mathcal{T}$ del tipo *B* o *C*, $x \in K_i^u$ y $z \in D_i(x)$, entonces existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $g^{-1}(z) \in V_j$ y

$$g(W^{ss}(g^{-1}(z), V_j)) \subset \text{Pr}^{-1}(D_i(z)),$$

esto es,

$$D_z \subset D_i(z).$$

Demostración. Sea $z \in D_i(x)$. Entonces, de la definición de $D_i(z)$, siendo g difeomorfismo y de la ecuación (3.5), tenemos

$$\begin{aligned}
\Pr^{-1}(D_i(z)) = \Pr^{-1}(D_i(x)) &= \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Pr^{-1}(D_i^n(x))} \\
&= \overline{\bigcup_{n > 0} \Pr^{-1}(D_i^n(x))} \\
&= \overline{\bigcup_{n > 0} \bigcup_{j=1}^{s(i)} g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j))} \\
&= \bigcup_{j=1}^{s(i)} \bigcup_{n > 0} g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j)) \\
&= \bigcup_{j=1}^{s(i)} g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j)).
\end{aligned}$$

Por tanto existe $j \in \{1, \dots, s(i)\}$ tal que $g^{-1}(z) \in g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j))$. Luego, por la última igualdad conseguimos $g(W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j)) \subset \Pr^{-1}(D_i(z))$. Por la parte tres de la observación anterior tenemos que $W^{ss}(g^{-1}(x_{ij}), V_j) = W^{ss}(g^{-1}(z), V_j)$, con lo que concluye la demostración. ■

3.2. Demostración del teorema 2.1

Procederemos ahora a construir la propiedad markoviana en hojas estables para la función de Poincaré F . Recordemos que por ahora logramos una condición markoviana parcial para la función auxiliar g y se -rectángulos de la familia \mathcal{T} (Lema 3.3). Ahora procederemos a aplicar refinamientos a estos se -rectángulos (Lemas 3.5, 3.6 y 3.8), a fin de conseguir la propiedad markoviana para F (Lema 3.9).

Denotemos por \mathcal{T}_1 a la colección de todos los se -rectángulos $T_i \in \mathcal{T}$ de tipo C . Para $T_i \in \mathcal{T}_1$ definamos

$$V_i = \bigcup_{t=-2q}^{\tau+2q} \Phi_t(T_i),$$

$$T_i^t = \Phi_t(T_i),$$

$$\mathcal{V}_1 = \{V_i : T_i \in \mathcal{T}_1\}.$$

Notemos que V_i es un s -paralelepípedo de tipo 1 de base T_i que está foliado por se -rectángulos T_i^t . Denotemos ahora \mathcal{T}_2 a la familia de se -rectángulos $T_i \in \mathcal{T}$ de tipo A . Cada $T_i \in \mathcal{T}_2$ tiene asociado un s -paralelepípedo $V_i(\sigma)$ de tipo 2, tal que

$$V_i(\sigma) = \overline{\bigcup_{q \in T_i \setminus l_\sigma} \Phi_{[0, \tau(q)]}(q)}.$$

Sea $h : [0, 1] \times T_i \setminus l_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase de $C^{1+\alpha}$ tal que para todo $q \in T_i \setminus l_\sigma$ se cumpla que

$$h(0, q) = 0 \text{ y } h(1, q) = \tau(q)$$

y tal que para todo $x \in W^s(q, T_i)$ y todo $s \in [0, 1]$ se satisfaga que

$$h(s, x) = h(s, q).$$

De esta manera,

$$T_i^s = \overline{\bigcup_{q \in T_i \setminus l_\sigma} \Phi_{h(s, q)}(q)}$$

es un se -rectángulo y además

$$V_i(\sigma) = \bigcup_{s \in [0, 1]} T_i^s.$$

Con esto hemos logrado foliar también el s -paralelepípedo $V_i(\sigma)$ en unión disjuntas de se -rectángulos. Cabe destacar que $T_i^0 = T_i$ y T_i^1 es el se -rectángulo de tipo B asociado a T_i por la ecuación (2.2). Denotemos por $\mathcal{V}_2 = \{V_i : T_i \in \mathcal{T}_2\}$ y definamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ que contiene al atractor y además es región de atracción del mismo. Definamos:

$$\mathcal{K}_1 = \{T_i^t : t \in [-2q, \tau + 2q], T_i \in \mathcal{T}_1\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{T_i^t : t \in [0, 1], T_i \in \mathcal{T}_2\},$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2.$$

Para $P \in \mathcal{K}$, sea $K_P = \{i : V_i \cap P \neq \emptyset, V_i \in \mathcal{V}\}$. Tomemos $i \in K_P$ y sea T_i^t que intersekte a P para algún t . Por simplicidad, escribiremos P_i para la

proyección de T_i^t sobre P . Definamos ahora

$$R_i = \{j \in K_P : P_i \cap P_j \neq \emptyset\},$$

$$Z_P = P \setminus \bigcup_{i \in K_P} (\partial P_i).$$

Para $y \in Z_P$ definamos $R(y) = \bigcup_{y \in P_i} R_i$, y para cada $j \in R(y)$ definimos:

$$B_{1j}(y) = P_j \cap Z_P, \quad (3.6)$$

$$B_{2j}(y) = \{x \in Z_P \setminus P_j : W^s(x, P) \cap P_j \neq \emptyset\},$$

$$B_{3j}(y) = \{x \in Z_P \setminus P_j : W^s(x, P) \cap P_j = \emptyset\}.$$

En las figuras que siguen vemos dos casos particulares de la descomposición de Z_P en términos de los conjuntos $B_{1j}(y)$, $B_{2j}(y)$ y $B_{3j}(y)$.

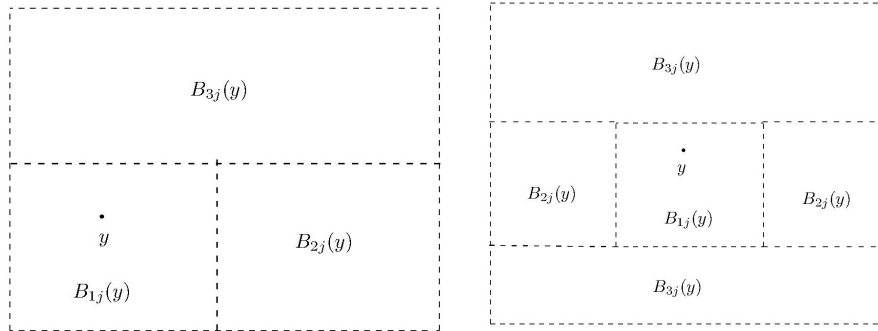


Figura 3.1: Partición de Z_P .

Los conjuntos $B_{1j}(y)$, $B_{2j}(y)$, $B_{3j}(y)$ cubren a Z_P y son disjuntos dos a dos; por supuesto puede darse el caso en que $B_{2j}(y)$ o $B_{3j}(y)$ sean vacíos. Si un conjunto $B_{kj}(y)$ como antes es no vacío, entonces es claro que $\overline{B_{kj}(y)}$ es un *se*-rectángulo. Para cada $y \in Z_P$ definamos

$$B(y) = \bigcap_{j \in R(y), k \in \{1,2,3\}: y \in B_{kj}(y)} B_{kj}(y). \quad (3.7)$$

Podemos ver que la clausura de $B(y)$ es también un *se*-rectángulo para $y \in Z_P$. La figura (3.2) ilustra un caso particular de $\overline{B(y)}$. Sea $y \in Z_P$ y

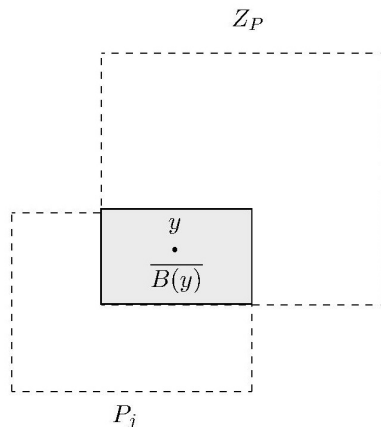


Figura 3.2: Construcción de $\overline{B(y)}$.

$x \in B(y)$, entonces de la ecuación (3.7) se tiene

$$W^s(x, B(y)) = \bigcap_{j \in R(y), k \in \{1,2,3\}: y \in B_{kj}(y)} W^s(x, B_{kj}(y)).$$

Fijemos $j \in R(y)$, de manera que $x \in V_j$ y existe un número real no negativo $t(x) \leq L$ tal que $\Phi_{t(x)}(x) \in T_j$, esto es, $x \in T_j^{-t(x)}$ y así $x \in P_j = \text{Pr}_P(T_j^{-t(x)})$. De todo esto se deduce el siguiente Lema.

LEMA 3.4. Si $y \in Z_P$ y $x \in \overline{B(y)}$, entonces

$$W^s(x, \overline{B(y)}) = \bigcap_{n \in R(y)} \text{Pr}_P(W^s(x, T_n^{-t(x)})),$$

donde $t(x)$ es un número real no negativo $t(x) \leq L$ tal que $\Phi_{t(x)}(x) \in T_n$.

LEMA 3.5. Si para $y, z \in Z_P$ se tiene que $B(y) \cap B(z) \neq \emptyset$, entonces $B(y) = B(z)$.

Demostración. Consideremos y, z como en el enunciado y sea $w \in B(y) \cap B(z) \subset Z_P$. Esto implica que $B(w)$ está contenido en $B(z)$ (al igual que en $B(y)$), pues el conjunto $B_{kj}(z)$ que aparece en la intersección que define a $B(z)$ (ecuación (3.7)), estará contenido en el que define a $B(w)$.

Si $y \in B_{kj}(y)$, entonces $w \in B_{kj}(y)$, y puesto que $B(w) \subset B(z)$, se tiene

$$\emptyset \neq B_{kj}(y) \cap B(w) \subset B(z),$$

y así $B_{kj}(y) \cap B(z) \neq \emptyset$. Por otro lado, sabemos que los conjuntos $B_{1j}(y), B_{2j}(y), B_{3j}(y)$ son disjuntos dos a dos y cubren Z_P por lo que z está en uno y solo uno de ellos; además tal conjunto aparecerá en la intersección que define a $B(z)$, por lo que debe ser tal conjunto $B_{kj}(y)$, esto es, $z \in B_{kj}(y)$, y por tanto $B(z) \subset B(y)$, la otra inclusión se obtiene de manera análoga. ■

OBSERVACIÓN 3.2. Para la demostración del siguiente lema tengamos presente dos cosas:

1. Por construcción, los conjuntos $B(y)$ son abiertos regulares, esto es, $B(y) = \text{int}(\overline{B(y)})$.
2. Si A y B son abiertos regulares y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \partial \overline{A} \cap \partial \overline{B}$.

LEMA 3.6. Para todo $P \in \mathcal{K}$, la familia $V_P = \{\overline{B(y)} : y \in Z_P\}$ es una partición finita de P formada por *se*-rectángulos con interiores disjuntos dos a dos.

Demostración. Claramente cada $\overline{B(y)}$ es *se*-rectángulo. Ahora puesto que cada $B(y)$ está determinado por $R(y)$ y los $B_{kj}(y)$, entonces solo puede haber una cantidad finita de $B(y)$. Por otro lado $\bigcup_{y \in Z_P} B(y)$ cubre Z_P , pero este último es denso en P , por lo que $\bigcup_{y \in Z_P} \overline{B(y)}$ cubre P .

Finalmente, si $\emptyset \neq \text{int}(\overline{B(y)}) \cap \text{int}(\overline{B(z)}) = B(y) \cap B(z)$, entonces por el lema anterior y la propiedad de abierto regular tenemos que $B(y) = B(z)$, y por tanto $\overline{B(y)} = \overline{B(z)}$. ■

LEMA 3.7. Sea $A \in V_{T_i}$ tal que $\text{int}(A) \cap F^{-1}(\text{int}(T_j)) \neq \emptyset$, donde $T_i, T_j \in \mathcal{T}$. Si T_i es de tipo C , entonces $F(\text{int}(A)) \subset T_j$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existen x y z tales que $x \in \text{int}(A) \cap F^{-1}(\text{int}(T_j))$ y $z \in \text{int}(A) \cap F^{-1}(\text{int}(T_k))$, donde $j \neq k$. Puesto que $F(x) \in T_j$ se tiene que $A \cap V_j \neq \emptyset$, por la elección de τ (ver desigualdad (2.7)), entonces por la definición de A (ver las igualdades (3.6) y (3.7)) se cumple que $A \subset \text{Pr}_{T_i}(T_j)$. De igual manera se tiene que $A \subset \text{Pr}_{T_i}(T_k)$. Entonces,

$$A \subset \text{Pr}_{T_i}(T_j) \cap \text{Pr}_{T_i}(T_k).$$

Esto último quiere decir o que $F(x) \in T_k$ o que $F(z) \in T_j$, lo cual es una contradicción porque $T_j \cap T_k = \emptyset$. ■

Definamos

$$\Omega = \{Q \in V_P : P \in \mathcal{K}\},$$

$$Z = U_0 \setminus \bigcup_{Q \in v} \bigcup_{t=0}^{m+2q} \Phi_{-t}(\partial Q).$$

Sea $T_i \in \mathcal{T}$, $B \in V_{T_i}$, denotemos $B_t = \Phi_{-t}(B)$ para $t > 0$, y tomemos $z \in B_t \cap Z$. Definamos

$$K(z) = \{P \in \mathcal{K} : z \in P\},$$

$$K(B_t) = \{P \in K(z) : z \in B_t \cap Z\},$$

$$V(B_t) = \{B_t Q : Q \in V_P, P \in K(B_t)\},$$

donde $B_t Q$ es la proyección $\text{Pr}_{B_t}(Q)$ de Q sobre B_t . Ahora para $y \in B \cap Z$, definamos

$$V_t(y) = \{Q \in \Omega : \Phi_{-t}(y) \in B_t Q, B_t Q \in V(B_t)\}.$$

$$\Gamma(B) = \left\{ \bigcap_{Q \in V_t(y); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(B_t Q) : y \in B \cap Z \right\}. \quad (3.8)$$

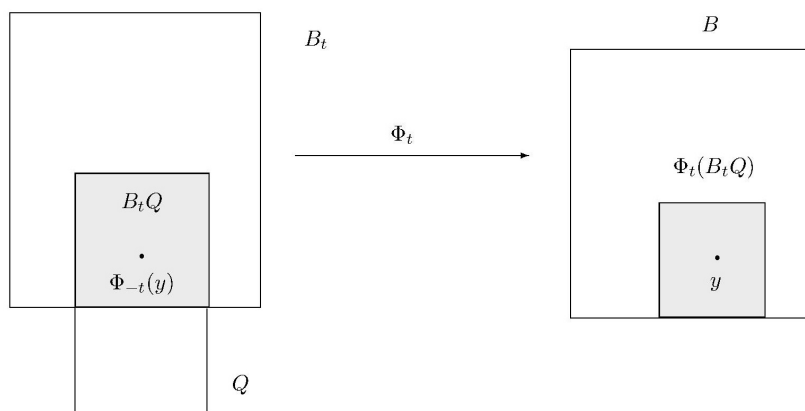


Figura 3.3: Construcción de $\Gamma(B)$.

LEMA 3.8. Para todo $B \in V_{T_i}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ la familia $\Gamma(B)$ es una partición finita de B de *se*-rectángulos con interiores disjuntos dos a dos.

Demostración. Cada elemento de $\Gamma(B)$ es un *se*-rectángulo por construcción y es claro que $\Gamma(B)$ es un cubrimiento de B , que es finito pues cada $K(z)$, $K(B_t)$ lo es, al igual que lo es cada $V(B_t)$, $V_t(y)$, $V(y)$ (por ser V_P finito). Para finalizar la demostración veamos que los elementos de $\Gamma(B)$ tienen interiores disjuntos dos a dos. Sean

$$P(x) = \bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(B_t Q),$$

$$P(y) = \bigcap_{Q \in V_t(y); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(B_t Q),$$

tales que $P(x) \cap P(y) \neq \emptyset$. Sea $z \in P(x) \cap P(y)$. Entonces, $z \in \bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(B_t Q)$ si y sólo si $z \in \Phi_t(B_t Q)$ para todo $Q \in V_t(x)$ con $t \in [0, m]$, es decir, si y sólo si

$$\Phi_{-t}(z) \in B_t Q \in V(B_t), \Phi_{-t}(x) \in B_t Q \in V(B_t) \text{ para todo } t \in [0, m]$$

de donde se infiere que $V_t(z) = V_t(x)$ para todo $t \in [0, m]$ y así $P(z) = P(x)$. Con el mismo razonamiento tendremos que $P(z) = P(y)$, y por tanto $P(x) = P(z) = P(y)$. ■

LEMA 3.9. La colección $\mathcal{M} = \{P \in \Gamma(B) : B \in V_{T_i}, i \in \{1, \dots, k\}\}$ es una familia *s*-Markov.

Demostración. Notemos que las funciones de Poincaré asociadas a las familias \mathcal{M} y \mathcal{T} son iguales, por lo que seguiremos denotando por F a la función de Poincaré asociada a \mathcal{M} .

Es claro que los elementos de \mathcal{M} son *se*-rectángulos. Consideremos $x \in \text{int}(R) \cap F^{-1}(\text{int}(S))$ con $R, S \in \mathcal{M}$ y sea $s = \tau(x)$, es decir, $F(x) = \Phi_s(x)$. Sea $y = F(x)$ y sean $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$, tales que $R \in \Gamma(A)$ y $S \in \Gamma(B)$ con $A \in V_{T_{r_x}}$, $B \in V_{T_{r_y}}$ donde $T_{r_x}, T_{r_y} \in \mathcal{T}$ para ciertos $r_x, r_y \in \{1, \dots, k\}$. En el caso en que R es un *se*-rectángulo tipo A , el rectángulo S necesariamente es de tipo B , no hay nada que demostrar, pues en tal caso se tiene la propiedad *s*-Markoviana por construcción (ver observación 2.2 en la página 31). Entonces consideremos el caso en que R no es de tipo A y en consecuencia S no es de tipo B .

Por definición

$$R = \bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(A_t Q),$$

$$\begin{aligned}
S &= \bigcap_{Q \in V_t(y); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(B_t Q), \\
W^s(x, R) &= \bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(\text{Pr}_{A_t}(W^s(\Phi_{-t}(x), Q))), \\
W^s(y, S) &= \bigcap_{Q \in V_t(y); 0 \leq t \leq m} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))).
\end{aligned}$$

Por ser s el tiempo de retorno a la familia de Poincaré \mathcal{M} , para $0 \leq t < s$, el punto $\Phi_{-t}(y)$ no pertenece a ningún s -paralelepípedo salvo el correspondiente a T_{r_y} , así que $V_t(y) = \{B_t\}$, y además para tales t ,

$$\Phi_t(W^s(\Phi_{-t}(y), B_t)) = \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) = W^s(y, B),$$

de modo que se verifica

$$W^s(y, S) = W^s(y, B) \bigcap \left(\bigcap_{Q \in V_t(y); t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \right). \quad (3.9)$$

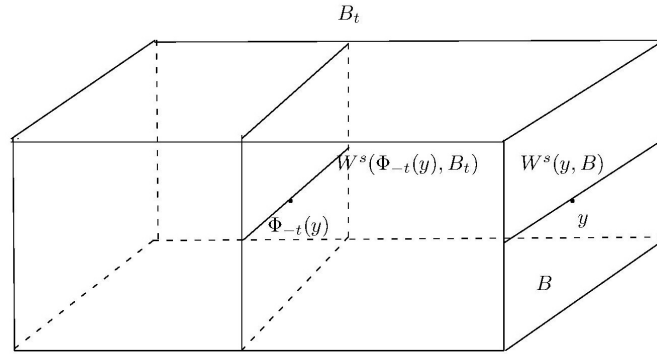


Figura 3.4: Figura ilustrativa 1 de la demostración del Lema 3.9.

Afirmamos que

$$\bigcap_{Q \in V_t(y); t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \subset W^s(y, B). \quad (3.10)$$

De esta manera, por la inclusión (3.9) se tendría

$$W^s(y, S) = \bigcap_{Q \in V_t(y); t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))). \quad (3.11)$$

Veamos a continuación que la afirmación (3.10) es correcta. Sea $n \in R(y)$ (de modo que $y \in V_n$). Entonces para algún $t(y)$ no negativo tenemos que $z = \Phi_{t(y)}(y) \in T_n$, esto es, $y \in T_n^{t(y)}$. Por el Lema 3.3, existe un s -paralelepípedo V tal que

$$W^{ss}(g^{-1}(z), V) \subset g^{-1}(\text{Pr}_{T_n}^{-1}(W^s(z, T_n))) = \Phi_{-m}(\Phi_{t(y)}(\text{Pr}_{T_n^{-t(y)}}^{-1}(W^s(y, T_n^{-t(y)})))).$$

Sea $P \in \mathcal{K}$ conteniendo $g^{-1}(z)$ y sea $Q \in V_P$ conteniendo $g^{-1}(z)$. Entonces

$$\text{Pr}_{T_{r_y}^{m-t(y)}}(W^s(\Phi_{-m+t(y)}(y), Q)) \subset \text{Pr}_{T_{r_y}^{m-t(y)}}(\Phi_{-m+t(y)}(W^s(y, T_n^{-t(y)}))),$$

luego,

$$\text{Pr}_{T_{r_y}^{m-t(y)}}(W^s(\Phi_{-m+t(y)}(y), Q)) \subset \Phi_{-m+t(y)}(\text{Pr}_{T_{r_y}}(W^s(y, T_n^{-t(y)}))),$$

de donde se obtiene

$$\Phi_{m-t(y)}(\text{Pr}_{T_{r_y}^{m-t(y)}}(W^s(\Phi_{-m+t(y)}(y), Q))) \subset \text{Pr}_{T_{r_y}}(W^s(y, T_n^{-t(y)})). \quad (3.12)$$

Ahora, como $\Phi_{-m+t(y)}(y) = g^{-1}(z) \in T_n^{m-t(y)} \cap Q$, entonces $Q \in V_{m-t(y)}(y)$, y dado que $m > L + t_M \geq s + t(y)$ (ver la escogencia de m y las definiciones de t_M y L y en las páginas 43, 36 respectivamente), se tiene que $m - t(y) > s$, y se cumple que

$$\bigcap_{Q \in V_t(y), t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \subset \Phi_{m-t(y)}(\text{Pr}_{T_{r_y}^{m-t(y)}}(W^s(\Phi_{-m+t(y)}(y), Q))),$$

luego por (3.12) se obtiene

$$\bigcap_{Q \in V_t(y), t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \subset \text{Pr}_{T_{r_y}}(W^s(y, T_n^{-t(y)})),$$

puesto que lo anterior vale para todo $n \in R(y)$, tenemos que

$$\bigcap_{Q \in V_t(y); t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \subset \bigcap_{n \in R(y)} \text{Pr}_{T_{r_y}}(W^s(y, T_n^{-t}(y))).$$

Esto junto el Lema 3.4 establece que

$$\bigcap_{Q \in V_t(y); t \geq s} \Phi_t(\text{Pr}_{B_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q))) \subset W^s(y, B),$$

con lo que hemos demostrado 3.10.

Pasemos a probar finalmente la propiedad s -markoviana para la familia \mathcal{M} . Del Lema 3.6 y como $\Phi_{-t}(x) = \Phi_{-r}(y)$ para $r = t + s$, se tiene que

$$\{Q \in V_r(y) : s \leq r \leq m\} = \{Q \in V_t(x) : s \leq t + s \leq m\}. \quad (3.13)$$

Ahora, $A \in V_s(y)$, pues $\Phi_{-s}(y) = x \in A$, esto junto con las ecuaciones (3.11) y (3.13) y el Lema 3.7 nos da

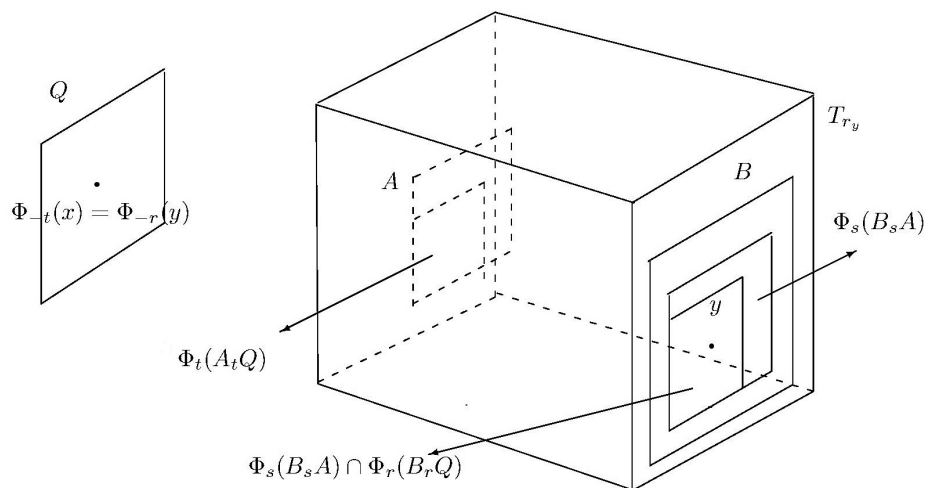


Figura 3.5: Figura ilustrativa 2 de la demostración del Lema 3.9.

$$\begin{aligned}
W^s(y, S) &= \bigcap_{Q \in V_r(y); s \leq r \leq m} \Phi_r(\text{Pr}_{B_r}(W^s(\Phi_{-r}(y), Q))) \\
&= \bigcap_{Q \in V_t(x); s \leq t+s \leq m} F(\Phi_t(\text{Pr}_{A_t}(W^s(\Phi_{-t}(x), Q)))) \\
&\supseteq F\left(\bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m-s} \Phi_t(\text{Pr}_{A_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q)))\right).
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$W^s(x, R) \subset \bigcap_{Q \in V_t(x); 0 \leq t \leq m-s} \Phi_t(\text{Pr}_{A_t}(W^s(\Phi_{-t}(y), Q)))$$

tenemos que $F(W^s(x, R)) \subset W^s(y, S)$. ■

Capítulo 4

Transformación unidimensional inducida

En esta sección mostramos que la transformación de retorno F a la sección de Poincaré Σ de un atractor hiperbólico singular Λ de un flujo C^2 induce una transformación factor unidimensional f de clase $C^{1+\alpha}$ sobre el espacio de las láminas estables en Σ . Usaremos los e -transversales para mostrar que f es una transformación expansora por pedazos de clase $C^{1+\alpha}$.

Sea $W^s(\Sigma)$ el espacio de las láminas estables de Σ . Esto es, $W^s(\Sigma)$ es la partición de Σ en láminas estables $W^s(x, T)$ para $T \in \mathcal{T}$ y $x \in T$, donde \mathcal{T} es la familia s -Markov del Teorema 2.1. Denotamos también $W^s(T)$ a la partición de T por hojas estables $W^s(x, T)$, con $x \in T$ para cada $T \in \mathcal{T}$.

LEMA 4.1. Si K es un e -transversal C^2 para el se -rectángulo T , entonces el espacio cociente $T/W^s(T)$ es $C^{1+\alpha}$ -difeomorfo a K .

Demostración. Sea $\pi_T : T \rightarrow T/W^s(T)$ la proyección sobre el espacio cociente y denote $h_K : T \rightarrow K$ a la transformación de holonomía sobre K a lo largo de láminas estables dada por

$$h_K(x) = y \quad \text{donde } \{y\} = W^s(x, T) \cap K, \quad \text{para todo } x \in T.$$

Entonces h_K está bien definida por causa de la definición de e -transversal. Puesto que \mathcal{F}^{ss} es una foliación $C^{1+\alpha}$, las funciones π_T y h_K son también de clase $C^{1+\alpha}$ (suponiendo que K es al menos $C^{1+\alpha}$). Además, estas funciones son constantes sobre láminas estables. Así, podemos identificar

$$\pi_T(W^s(x, T)) = \pi_T(x) \quad \text{y} \quad h_K(W^s(x, T)) = h_K(x),$$

respectivamente para cada $x \in T$. Por tanto, la transformación $\pi_T \circ h_K^{-1}$ está bien definida y es un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de K sobre $T/W^s(T)$, donde h_K^{-1} es la aplicación que toma la imagen inversa bajo h_K de puntos en K . En particular $T/W^s(T)$ es difeomorfa a un segmento compacto. ■

Para proseguir establecemos primero algunas notaciones. Sea N una variedad Riemanniana unidimensional con componentes conexas N_i difeomorfas a intervalos compactos, para $1 \leq i \leq k$. Sea $\text{int } N_i$ el conjunto $N \setminus \partial N_i$ (el *interior* de N_i), donde ∂N_i es el borde de N_i . Sea $f : N \rightarrow N$ cualquier transformación C^r por pedazos con $r \geq 1$, y $Df \neq 0$ sobre $\text{int } N_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Para efectos de estudiar propiedades ergódicas o medibles podemos suponer que N no posee componentes de medida cero respecto de Lebesgue en lo que sigue.

Sea $\mathcal{P}^{(1)} = \{\text{int } N_i : i = 1, \dots, k\}$ la partición módulo 0 de N en conjuntos abiertos maximales sobre los cuales f es diferenciable. Para $n > 1$ defina $\mathcal{P}^{(n)}$ como la partición módulo 0 de N en subconjuntos abiertos maximales tales que $\mathcal{P}^{(n)}(x) = \mathcal{P}^{(n)}(y)$ si y sólo si

$$\mathcal{P}^{(1)}(f^j(x)) = \mathcal{P}^{(1)}(f^j(y)), \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n-1\},$$

donde $\mathcal{P}^{(j)}(z)$ denota el elemento de $\mathcal{P}^{(j)}$ al cual z pertenece. Es claro que para un conjunto $\eta \in \mathcal{P}^{(n)}$ dado, la restricción $f^n|_\eta$ es un difeomorfismo C^r sobre algún $\xi \in \mathcal{P}^{(1)}$.

DEFINICIÓN 4.1. La función f es llamada *expansora por pedazos* si existen constantes positivas C_0, λ_0 con $\lambda_0 > 1$ tales que

$$\inf_{z \in \eta} \|Df^n(z)\| \geq C_0 \lambda_0^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \eta \in \mathcal{P}^{(n)}.$$

TEOREMA 4.1. El espacio $N = W^s(\Sigma)$ de las láminas estables de Σ es una variedad unidimensional disconexa de clase $C^{1+\alpha}$ con componentes difeomorfas a intervalos compactos. La transformación de retorno a Σ induce una transformación factor f de clase $C^{1+\alpha}$ sobre N la cual es expansora por pedazos.

Demostración. Como establecimos antes, la foliación estable \mathcal{F}^{ss} asociada al flujo parcialmente hiperbólico Φ_t induce sobre Σ una partición en láminas estables $W^s(x, T)$, para $T \in \mathcal{T}$ y $x \in T$. Puesto que Φ_t es un flujo C^2 , tenemos que \mathcal{F}^{ss} es $C^{1+\alpha}$ para algún $\alpha \leq 1$ positivo. Sea N el espacio cociente

$\Sigma/W^s(\Sigma)$ de láminas estables en Σ , provisto de la estructura diferenciable $C^{1+\alpha}$ inducida por \mathcal{F}^{ss} . Suponga que \mathcal{T} consiste de k secciones locales transversas T_1, \dots, T_k . Como cada $T_i \in \mathcal{T}$ es *se*-rectángulo, el espacio cociente $N_i = T_i/W^s(T_i)$ es difeomorfo a un segmento compacto por el Lema 4.1. Así, $N = \bigcup_{i=1}^k N_i$ es una variedad unidimensional disconexa con un número finito de componentes.

Sea $\pi_s : \Sigma \rightarrow N$ la proyección natural sobre el cociente dada por $\pi_s(x) = W^s(x, T)$ para $x \in T$ y $T \in \mathcal{T}$. La propiedad *s*-Markov (Definición 2.5) implica que la laminación estable sobre Σ es F -invariante, en el sentido que $F(\pi_s(x)) \subset \pi_s(F(x))$. Por tanto, existe una *transformación factor* $f : N \rightarrow N$ de clase $C^{1+\alpha}$ bien definida por la relación $f(\pi_s(x)) = \pi_s(F(x))$, para $x \in \Sigma$.

Nos resta mostrar que f es expansora por pedazos. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ fijemos un e -transversal K_i del *se*-rectángulo T_i . Entonces por la Observación 2.4 y el Corolario 2.2 existe una constante $C > 0$ tal que para $q \in K_i^u$ y $v \in T_q K_i^u$ se satisface

$$\|DF^n(q)(v)\| \geq C\lambda^{\tau^n(q)}\|v\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.1)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ sea $h_i : N_i \rightarrow K_i^u$ el difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ dado por el Lema 4.1. Recordemos que para cualquier transformación lineal L entre espacios vectoriales finitodimensionales, la *norma mínima* de L es definida como

$$m(L) = \inf_{\|u\|=1} \|Lu\|,$$

y ésta satisface la relación $m(L_1 \circ L_2) \geq m(L_1) \cdot m(L_2)$ siempre que la compuesta esté definida. Además, la norma mínima coincide con la norma de operadores cuando los espacios son unidimensionales. Denotemos

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \min_{1 \leq i \leq k} \inf_{z \in K_i} \|Dh_j(z)\|, \\ c_2 &= \inf_{z \in \Sigma} m(D\pi_s(z)) \quad \text{y} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Observamos que $c_1, c_2 > 0$ porque K_i y Σ son compactos, h_i es un difeomorfismo y $D\pi_s$ es acotado lejos de cero, respectivamente.

Ahora, para $n \geq 1$, tomemos arbitrariamente un η en $\mathcal{P}^{(n)}$. Supongamos que $\eta \subset N_{i_0}$ y $f^n(\eta) = \text{int } N_{i_1} \in \mathcal{P}^{(1)}$ para algún i_0 y i_1 . Consideremos la

restricción

$$f^n|_\eta = \pi_s \circ (F^n|_{K_{i_0}^u}) \circ h_{i_0}.$$

Dado $x \in \eta$ denotamos $q = h_{i_0}(x) \in K_{i_0}^u$. Puesto que $K_{i_0}^u$ y N_{i_0} son unidimensionales, a partir de (4.1) y (4.2) podemos estimar $\|Df^n|_\eta(x)\|$ como sigue:

$$\begin{aligned} \|Df^n|_\eta(x)\| &= \left\| D \left[(\pi_s \circ F^n|_{K_{i_0}^u}) \circ h_{i_0} \right] (x) \right\| \\ &= \left\| D\pi_s(F^n(q)) \circ D(F^n|_{K_{i_0}^u})(q) \right\| \cdot \|Dh_{i_0}(x)\| \\ &\geq m[D\pi_s(F^n(q))] \cdot \left\| D(F^n|_{K_{i_0}^u})(q) \right\| \cdot \|Dh_{i_0}(x)\| \\ &\geq c_1 c_2 C \lambda^{\tau^n(q)}. \end{aligned}$$

Así, $\|Df^n|_\eta(x)\| \geq C_0 \lambda^{\tau^n(q)}$ para todo $x \in \eta$, donde $C_0 = c_1 c_2 C > 0$. Es claro que $\tau^n(q) \geq n\tau_0$, donde $\tau_0 = \inf_\Sigma \tau$. Entonces, fijamos como constante de expansión el número $\lambda_0 = \lambda^{\tau_0} > 1$, con lo cual obtenemos finalmente

$$\inf_{x \in \eta} \|Df^n(x)\| \geq C_0 \lambda_0^n,$$

para todo $\eta \in \mathcal{P}^{(n)}$. Por tanto la transformación factor f es expansora por pedazos y el Lema 4.1 está probado. ■

Conclusiones

1. Para atractores hiperbólicos singulares de dimensión tres de clase C^2 , se demostró la existencia de una familia finita \mathcal{T} de secciones locales de cruce con interiores disjuntos dos a dos cuya transformación de Poincaré (de primer retorno) exhibe una propiedad Markoviana en las direcciones estables.
2. El tiempo de retorno asociado a la familia de secciones es integrable.
3. La transformación de Poincaré induce una transformación expansora por pedazos de clase $C^{1+\alpha}$ en el espacios de hojas estables de la unión de las secciones locales transversas.

Referencias

- [A] R. L. ADLER, B. WEISS (1967). *Entropy, a complete metric invariant for automorphism of the torus* Proceedings of the National Academy of Science. **57**: 1573–1576.
- [ABS1] . V. AFRAIMOVICH, V. BYKOV, L. SHIL'NIKOV. (1977). *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*; Dokl. Akad. Nauk SSSR **234**: 336–339.
- [ABS2] V. AFRAIMOVICH, V. BIKOV, L, SHIL'NIKOV. (1977). *On the origin and structure of the Lorenz attractor*. Sov. Phys. Dokl.**22**: 53–55.
- [AD] D. AUBIN & A. DAHAN-DALMEDICO. (2002). *Writing the history of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, disciplines and cultures*. Historia Mathematica **28**: 1–67.
- [AP] A. ARROYO, E. PUJALS. (2007). *Dynamical properties of singular hyperbolic attractors*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **19**: 67–87.
- [APa] V. ARAÚJO, M.J. PACÍFICO (2010). *Three-dimensional flows*. Springer.
- [APe] V. AFRAIMOVICH, Y. PESIN. (1987). *The dimension of Lorenz type attractors*. In Sov. Math. Phys. Rev., 6.
- [APPV] V. ARAÚJO, E. PUJALS, M.J. PACÍFICO, M. VIANA. (2009). *Singular-hyperbolic attractors are chaotic*. Trans. Am. Math. Soc. **361**: 2431–2485.
- [B1] R. BOWEN. (1970). *Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms*. American Journal of Mathematics Vol. **92**: 907–918.

- [B2] R. BOWEN. (1970). *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*. Amer. J. Math. **92**: 725–747.
- [B3] R. BOWEN. (1973). *Symbolic dynamics for hyperbolic flows*. Amer. J. Math. **95**: 429–460.
- [B5] R. BOWEN. (1975). *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics 470, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [BDV] C. BONATTI, L. DIAZ AND M. VIANA. (2005). *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics III. Springer-Verlag, Berlin.
- [BM] S. BAUTISTA, C. MORALES. (2006). *Existence of periodic orbits for singular-hyperbolic sets*. Mosc. Math. J. **6**: 265–297.
- [BR] R. BOWEN. D. RUELLE (1975). *The ergodic theory of Axiom A flows*. Invent. Math. **29**: 181–202.
- [BS] L. A. BUNIMOVICH, YA. G. SINAI. (1980). *Stochasticity of the attractor in the Lorenz model*. Nonlinear Waves, Ed. (A. V. Gaponov-Grekhov, ed.), (“Nauka”, Moscow), 212–226 .
- [C] W. COLMENÁREZ. (2005). *Nonuniform hyperbolicity for singular hyperbolic attractors*. Trans. Am. Math. Soc. **357**: 4131–4140.
- [G] J. GUCKENHEIMER. (1976). *A strange strange attractor*. In: The Hopf bifurcation and its applications. Marsden, J. and McCracken (Eds.). Applied Mathematical Series **9**, Springer Verlag. Berlin.
- [GW] J. GUCKENHEIMER, R. F. WILLIAMS. (1979). *Structural stability of Lorenz attractors* Publ. Math. IHÉS **50**: 59–72.
- [K] G. KELLER (1985). *Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete., 69.
- [LP] R. LABARCA, M.J. PACÍFICO. (1986). *Stability of singular horseshoes*. Topology **25**: 337–352.

- [M1] C. MORALES. (2003). *Singular-hyperbolic sets and topological dimension*. Dyn. Syst. **18**: 181–189.
- [M2] C. MORALES. (2004). *The explosion of singular-hyperbolic attractors*. Ergod. Theory Dyn. Syst. **24**: 577–591.
- [M3] C. MORALES. (2007). *Examples of singular-hyperbolic attracting sets*. Dyn. Syst. **22**: 339–349.
- [M4] C. MORALES. (2007). *Singular-hyperbolic attractors with handlebody basins*. J. Dyn. Control Syst. **13**: 15–24.
- [MP1] C. MORALES, M. J. PACIFICO. (2003). *A dichotomy for three-dimensional vector fields*. Ergod. Theory Dyn. Syst. **23**: 1575–1600.
- [MP2] C. MORALES M. J. PACÍFICO. (2004). *Sufficient conditions for robustness of attractors*. Pac. J. Math. **216**: 327–342.
- [MPP1] C. MORALES, M. J. PACÍFICO, E. PUJALS. (1998). *On C^1 robust singular transitive sets for threedimensional flows*. C. R. Acad. Sci., Sér. 1 Math. **326**: 81–86.
- [MPP2] C. MORALES, M. J. PACIFICO AND E. PUJALS. (1999). *Singular hyperbolic systems*. Proc. Amer. Math. Soc. **127**: 3393–3401.
- [MPP3] C. MORALES, M.J. PACÍFICO, E. PUJALS. (2004). *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers*. Ann. Math. **160**: 375–432.
- [P] YA. PESIN. (1992). *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*. Ergod. Th. and Dynam. Sys. **12**: 123–151.
- [PM] J. PALIS, W DE MELO (1982). *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer-Verlag. New York.
- [PT] J. PALIS, F. TAKENS. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors*; Cambridge Univerisity Press.
- [R] M. RATNER. (1973). *Markov partitions for Anosov flows on n -dimensional manifolds*. Israel. J. Math **15**, 92–114.

- [RT] D. RUELLE, F. TAKENS (1971). *On the nature of turbulence*. Comm. Math. Phys.**20**: 167–192.
- [Ry] M. RYCHLIK. (1983). *Invariant measure and the variational principle for Lozi mappings*. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- [Ro] C. ROBINSON. (1995). *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. CRC Press Inc.
- [S] YA. SINAI. (1968). *Markov partitions and C -diffeomorphisms*. Funkts. Anal. Prilozh., **2**: 64–89.
- [Sh] M. SHUB. (1987). *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer.
- [T] W. TUCKER. (1999). *The Lorenz attractor exists* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics.**328**: 1197–1202.
- [T2] W. TUCKER. (2001). *A Rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*. Comput. Math. **2**: 53–117.
- [V] M. VIANA. (2000). *What's new on Lorenz strange attractor*. Mathematical Intelligencer. **22**: 6–19.
- [W] R. F. WILLIAMS. *The structure of Lorenz attractors*. IHES vol **50**: 321–347.
- [Wi] S. WIGGINS. (1990). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Texts in applied mathematics 2. Springer-Verlag. New York.