



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO  
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA  
COORDINACIÓN DE POSTGRADO

---

---

Acerca de la dinámica de endomorfismos cuadráticos  
planos con retardo y del tipo horizontal

Por: Lic. Massiel Gatica

Barquisimeto, Enero 2017



Massiel Gatica

Acerca de la dinámica de endomorfismos cuadráticos  
planos con retardo y del tipo horizontal

Área de Conocimiento: Sistemas Dinámicos

---

*Mathematics Subject Classification 2010: 37C05, 37D05, 37D10*

---

Tesis de Grado presentado ante la ilustre  
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado,  
como requisito para optar al grado académico de  
Magíster Scientiarum Mención Matemática.  
Tutor: Dr. Neptalí Romero.

Barquisimeto, Enero 2017



# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por permitirme hacer mis estudios de postgrado y cumplir de manera satisfactoria todos los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Ciencias, mención Matemáticas.

A la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", en donde tuve el privilegio de adquirir muchos conocimientos productivos, a lo largo de estos últimos años.

A mi tutor, el Dr. Neptalí Romero por guiarme, corregirme, enseñarme y compartirme sus conocimientos durante todo el tiempo en el que se elaboró este trabajo.

A mis profesores, todos grandes educadores y brillantes científicos e investigadores, por transmitirme su sabiduría e ideas en este trayecto de mi vida académica.

A mis compañeros de estudio, las amistades que hice, por compartir esta etapa tan importante de mi vida junto a mi.

A mis padres, por su valioso soporte y estímulo, grandes personas que me apoyaron siempre, creyeron en mi, en mis capacidades, y estuvieron conmigo en todo momento.



# Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico principalmente a Dios, que me iluminó siempre y me dió la sabiduría necesaria y la fortaleza para lograr culminar exitosamente mis estudios de postgrado en esta prestigiosa Casa de Estudios, la UCLA.

A mis hijos, César y Diego, a mi esposo, a mis padres y mi hermana, los cuales fueron mi estímulo para seguir y apoyo en las dificultades a lo largo de toda esta gran importante etapa de mi vida y me alentaron a no rendirme.

A mi amiga Alba Espinoza por su motivación constante y su ayuda incondicional.





# Acerca de la dinámica de endomorfismos cuadráticos planos con retardo y del tipo horizontal

Lcda. Massiel Gatica

## RESUMEN

En este artículo describimos el comportamiento asintótico de las soluciones acotadas de una clase especial de familias a un parámetro de ecuaciones de diferencia autómatas cuadráticas. Para tal fin, primero consideramos los sistemas dinámicos discretos proporcionados por ciertos endomorfismos con retardo. Luego mostramos que si la intersección de la imagen del conjunto crítico de los endomorfismos y un continuo de superficies de nivel de las funciones que definen las ecuaciones en diferencia es la unión disjunta de dos anillos, entonces el conjunto de condiciones iniciales generando las soluciones acotadas de las ecuaciones es el producto de un conjunto de Cantor y una circunferencia, y el conjunto no errante de los sistemas dinámicos es un conjunto hiperbólico del tipo silla y topológicamente conjugado al shift unilateral en dos símbolos.



# Capítulo 1

## Introducción

Este capítulo está destinado a presentar aspectos generales de los endomorfismos con retardo; especial atención haremos sobre el caso cuadrático en el plano que es marco en el cual se desarrolla el contenido de la monografía.

### 1.1. Generalidades

Una ecuación en diferencia con *retardo de orden  $k$*  es cualquier ecuación en diferencia del tipo

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}), \text{ con } n \geq 0 \quad (1.1)$$

donde  $f$  es una función a valores reales definida en algún subconjunto de  $\mathbb{R}^k$  llamadas ecuaciones en diferencia con retardo de orden  $k$ .

Note que a partir de  $k$  valores, o datos iniciales  $x_0, \dots, x_{k-1}$ , la función  $f$  que define la ecuación (1.1) genera recursivamente la sucesión  $(x_n)_{n \geq 0}$ , donde

$$x_m = f(x_{m-k}, \dots, x_{m-1}), \text{ para todo } m \geq k + 1.$$

La sucesión así obtenida se denomina *solución* de la ecuación (1.1) con datos iniciales  $x_0, \dots, x_{k-1}$ .

El problema fundamental de las ecuaciones en diferencia con retardo es describir el comportamiento asintótico de sus soluciones, no su existencia pues a partir de una condición inicial  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  se obtiene por recurrencia la sucesión  $(x_n)_{n \geq 0}$  que es la solución de (1.1) correspondiente al dato inicial

dado. Con el objeto de intentar dar respuestas parciales a este problema, P. Montel en 1957, ver [16], usó el endomorfismo

$$F(x_1, \dots, x_k) = (x_2, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k)), \quad (1.2)$$

conocido como *endomorfismo con retardo*, para estudiar el comportamiento límite de las soluciones de (1.1) en las proximidades de una solución estacionaria; esto es, una solución  $(x_n)_{n \geq 0}$  donde  $x_n = \alpha$  para todo  $n \geq 0$ . En general, la consideración del endomorfismo  $F$  permite abordar el problema central de las ecuaciones en diferencia (1.1) mediante la teoría de los sistemas dinámicos, ya que estudiar los puntos de acumulación de las soluciones de (1.1) equivale a estudiar el comportamiento asintótico de las órbitas positivas por el endomorfismo  $F$  definido en (1.2); nóte que  $(x_n)_{n \geq 0}$  es solución de (1.1) si, y solo si,  $\{(x_n, \dots, x_{n+k-1}) : n \geq 0\}$  es la órbita del punto  $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$  por  $F$ . Así, las soluciones de (1.1) están en correspondencia biunívoca con las órbitas del endomorfismo asociado; además, la dinámica que describen las órbitas de puntos por  $F$  se corresponde con el comportamiento asintótico de esas soluciones.

En el marco de los endomorfismos con retardo, intentar establecer propiedades dinámicas generales e interesantes, digamos que no triviales, es una tarea difícil; ejemplo de ello son los diversos tipos de dinámicas, incluso topológicas, con las cuales uno puede encontrarse. Esta es una razón por la cual se dedique un considerable esfuerzo en analizar clases especiales de endomorfismos con retardo; una parcial lista de publicaciones que evidencian esta afirmación es por ejemplo: [8], [9], [11], [15], [19],[20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [28],[29] y [27].

Los objetos de estudio en este proyecto tienen su origen en el artículo [25] y en la monografía [19]. En la primera de estas referencias se consideran funciones de clase  $C^2$  que semejan (en cierta forma) funciones cuadráticas del plano con especiales características de convexidad; en la monografía son estudiadas algunas propiedades dinámicas de la familia a un parámetro:

$$F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y)) \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.3)$$

donde  $f_\mu(x, y) = f(x, y) - \mu$  cualquiera sea  $\mu \in \mathbb{R}$ ; siendo  $f$  la función cuadrática dada por

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey, \quad (1.4)$$

la cual supondremos convexa; esto es:  $a > 0$  y  $\Delta = 4ab - c^2 > 0$ . En [19] son consideradas dos clases,  $\mathcal{D}_V$  y  $\mathcal{D}_H$ , de endomorfismos con dinámicas diferentes; estas clases son definidas como sigue:

1.  $\mathcal{D}_V$  son las transformaciones  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  tales que:
  - (a)  $\infty$  es un atractor para  $F$ , y
  - (b) el conjunto no errante de  $F$ ,  $\Omega(F)$ , o es vacío o es un conjunto de Cantor que coincide con el complemento de la cuenca de atracción de  $\infty$  y  $F$  restricto a  $\Omega(F)$  expande.
2.  $\mathcal{D}_H$  como los endomorfismos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  que satisfacen:
  - (a)  $\infty$  es un atractor para  $F$ , y
  - (b)  $\Lambda(F) := \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty(F)$  es vacío, o bien homeomorfo al producto de un círculo  $\mathbb{S}^1$  y un conjunto de Cantor; en este último caso, su conjunto no errante  $\Omega(F) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(\Lambda(F))$  es hiperbólico del tipo silla.

En esa misma monografía se hace un bosquejo, en términos de los endomorfismos en las clases  $\mathcal{D}_V$  y  $\mathcal{D}_H$ , del siguiente resultado que depende del espacio de los parámetros de la función cuadrática  $f$ :

**Teorema 1.1.** *Dada  $f$  como en 1.4, se tiene:*

- (i) *Si  $a$  es suficientemente grande respecto de  $b$  y  $c$ , entonces existe  $\mu_1$  tal que para todo  $\mu \geq \mu_1$ ,  $F_\mu \in \mathcal{D}_V$ .*
- (ii) *Si  $b$  es suficientemente grande respecto de  $a$  y  $c$ , entonces existe  $\mu_0$  tal que para todo  $\mu \geq \mu_0$ ,  $F_\mu \in \mathcal{D}_H$ .*

Es importante mencionar que como parte esencial para la descripción de la dinámica de endomorfismos con retardo y no invertibles, es el caso de los mapas  $F_\mu$  como en (1.4), es necesario hacer uso tanto el conjunto crítico del mapa como el conjunto de sus imágenes; esto es, sus valores críticos. Es simple ver en este caso, la matriz Jacobiana de  $F_\mu$  en cualquier punto  $p$  del plano no depende de  $\mu$  y viene dada por

$$D_p F_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(p)}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

de donde, el conjunto de puntos críticos de  $F_\mu$  es

$$\ell = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f(p)}{\partial x_1} = 0 \right\}.$$

En nuestro contexto, el cuadrático como en (1.3) y (1.4), los conjuntos  $\ell$ ,  $F_\mu(\ell)$  y  $F_\mu(\mathbb{R}^2)$  están especialmente definidos y relacionados entre sí:  $\ell$  es una recta,  $F_\mu(\ell)$  es una parábola  $P_\mu$  de ecuación  $y = p_\mu(x)$ , cuyo epigráfico  $Epi(p_\mu) = \{(x, y) : y \geq p_\mu(x)\} = F_\mu(\mathbb{R}^2)$ ; además, para todo  $(x, y) \notin Epi(p_\mu)$  se tiene que  $F_\mu^{-1}(x, y) = \emptyset$ ; todo  $(x, y)$  en el interior del epigráfico tiene exactamente dos preimágenes que están ubicadas con cierta simetría a diferentes lados de  $\ell$ ; mientras que  $F_\mu$  mapea difeomórficamente  $\ell$  en  $P_\mu$ . Soportado en ello y haciendo uso de la convexidad de las funciones  $f_\mu$  se verifica que existe un valor  $\mu^* > 0$  del parámetro  $\mu$  de forma que para todo  $\mu > \mu^*$  están definidos números reales  $\tilde{s}_\mu < 0 < s_\mu$ , ambos del orden de  $\sqrt{\mu}$ , tales que el conjunto  $\Lambda_\mu$  de puntos que tienen órbita acotada es dado por:

$$\Lambda_\mu = \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty = \bigcap_{k \geq 0} F_\mu^{-k}(C_\mu),$$

donde  $C_\mu = \bigcup_{\beta \in [\tilde{s}_\mu, s_\mu]} f_\mu^{-1}(\beta)$ . Adicionalmente, también se muestra en [19] que existe  $\mu_* < \mu^*$  tal que para todo  $\mu < \mu_*$  se tiene que toda órbita por  $F_\mu$  es no acotada; esto es,  $B_\infty = \mathbb{R}^2$ , o equivalentemente  $\Omega(F_\mu) = \emptyset$ . En realidad esta situación es un hecho general para familias de endomorfismos con retardo en el que sus funciones asociadas satisfacen una condición de convexidad; véase [20] para mayor precisión en esa noción de convexidad.

Una vez determinado el conjunto  $\Lambda_\mu$  se discute en [19] la posición relativa de las curvas de nivel (elipses) de las funciones cuadráticas  $f_\mu$  con respecto a la imagen  $P_\mu$  del conjunto crítico. Es allí cuando surgen los dos casos referidos en el enunciado del Teorema 1.1. El primer caso, descrito en (i), significa que el anillo  $C_\mu$  está contenido estrictamente en el interior de  $Epi(p_\mu)$ ; mientras que en el segundo caso  $C_\mu$  atraviesa transversalmente  $P_\mu$ ; de hecho, la intersección de  $C_\mu$  con  $Epi(p_\mu)$  es la unión disjunta de dos franjas.

En [23] la situación geométrica correspondiente al ítem (i) es colocada en un contexto bastante más general; en ese artículo es introducido el concepto de *funciones del tipo vertical*, noción que es formulada en términos de una cierta relación entre las derivadas parciales de segundo orden de la función en cuestión. Justamente tal propiedad de verticalidad está presente en las funciones cuadráticas  $f_\mu$  cuando los valores de  $a, b$  y  $c$  son como lo expresa

(i) en el Teorema 1.1. Así que para los endomorfismos con retardo cuyas funciones asociadas son del tipo vertical es demostrado un resultado similar al de la primera parte del Teorema 1.1. En cuanto a la segunda parte de ese teorema, en [25] se demuestra a una extensión del mismo a una clase de funciones que incluyen las cuadráticas y convexas con las restricciones sobre los coeficientes  $a, b, c$  como en el enunciado del Teorema 1.1; de hecho, se muestra la existencia de un conjunto abierto (en la topología  $C^2$  de Whitney) de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  tal que, para toda  $f$  en ese abierto, el endomorfismo con retardo  $F_\mu$  asociado a  $f_\mu = f - \mu$  pertenece a la clase  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  siempre que  $\mu$  sea suficientemente grande. Es de hacer notar que las herramientas empleadas en [25] para mostrar ese resultado son significativamente diferentes a las empleadas en [19] para mostrar la parte (ii) del Teorema 1.1. Creemos importante destacar que no hay, hasta el momento, una extensión similar a la expuesta en [23] para el caso descrito en (ii) del Teorema 1.1 o en [25]. No obstante, resultados parciales en dimensión 3 y en el contexto cuadrático han sido tratados por Jesús Silva en su tesis doctoral; ver [26].

## 1.2. Objetivo central

Considerando la importancia de la búsqueda de una extensión de la parte (ii) en el Teorema 1.1 y de las herramientas de trabajo ligeramente descritas en [19], el objetivo principal de esta monografía es hacer una exposición más detallada y autocontenida para justamente esa parte del Teorema 1.1, siguiendo de hecho las ideas expuesta en [19]. Haremos énfasis en los detalles que conducen a la demostración de que para un abierto  $\mathcal{V}$  (en la topología de los coeficientes) de funciones cuadráticas como en (1.4), se cumpla que para toda  $f \in \mathcal{V}$ , el endomorfismo con retardo  $F_\mu$ , definido como en (1.3), pertenezca a la clase  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  cuando  $\mu$  es grande. De significativa importancia en esos detalles está la construcción de familias de conos (horizontales y verticales) que en definitiva constituyen la herramienta fundamental para demostrar que para todo  $\mu$  suficientemente grande, tanto que el conjunto de puntos con órbita acotada para  $F_\mu$  es homeomorfo al producto de un conjunto de Cantor en un intervalo y la circunferencia unitaria; como la hiperbolicidad (del tipo silla) del conjunto no errante de  $F_\mu$ .





# Capítulo 2

## Preliminares

El contexto donde se ubica el temario de esta monografía es el de los endomorfismos planares cuadráticos con retardo, en el cual la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que induce un tal endomorfismo tiene ciertas propiedades geométricas, las cuales agrupamos bajo un concepto: *funciones del tipo horizontal*. Más específicamente, consideraremos la familia uniparamétrica  $f_\mu = f - \mu$ , donde  $f$  como en (1.4) de forma que los coeficientes de  $f$  satisfacen las condiciones:

$$a > 0, \Delta = 4ab - c^2 > 0 \text{ y } b > \max\{a, |c|\}. \quad (2.1)$$

Una función cuadrática  $f$  cuyos coeficientes satisfagan estas condiciones la llamaremos función del tipo *horizontal*. Las dos primeras de las condiciones refieren a la convexidad estricta de la función  $f$ , y por tanto esta misma propiedad geométrica se transfiere a cada  $f_\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

### 2.1. Funciones cuadráticas convexas

Consideremos cualquier función cuadrática y convexa  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , las siguientes propiedades son simples de verificar:

**Propiedad 2.1.** Existe  $R > 0$  tal que  $f(x) \geq \frac{\alpha}{3}x^2$ , si  $x \geq R$ .

**Propiedad 2.2.** La función  $f$  tiene un único punto crítico, y allí la función tiene su valor mínimo.

**Propiedad 2.3.** El conjunto de nivel  $s$  de  $f$ ,  $f^{-1}(s) = \{w \in \mathbb{R}^2 : f(w) = s\}$ , es siempre compacto cualquiera sea  $s \in \mathbb{R}$ ; de hecho:

- (a) Si  $s < \text{mín } f$ , entonces  $f^{-1}(s) = \emptyset$ .
- (b) El conjunto de nivel  $f^{-1}(s)$  es el punto crítico de  $f$  si, y solo si, el nivel  $s$  es el valor mínimo de  $f$ .
- (c) Si  $s > \text{mín } f$ , entonces  $f^{-1}(s)$  es una elipse; la componente acotada de su complemento es  $i(f^{-1}(s)) = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) < s\}$ , la componente no acotada es denotada por  $e(f^{-1}(s))$ . Obviamente cada una de esas elipses tiene exactamente dos puntos de tangencia horizontal y dos de tangencia vertical.

Observe que la familia de elipses  $\{f^{-1}(s) : s > \text{mín } f\}$  constituye una foliación de  $\mathbb{R}^2$  excepto el punto crítico  $w_0$  de  $f$ ; además,  $c \in i(f^{-1}(s))$  para cada  $s > \text{mín } f$ , y  $f^{-1}(s) \subset i(f^{-1}(t))$  para todo  $\text{mín } f < s < t$ .

Antes de enunciar la próxima propiedad introducimos las siguientes notaciones. Las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  serán denotadas por  $\partial_i f$  y  $\partial_{ij} f$  respectivamente, el vector gradiente de  $f$  por  $\nabla f$ , y para  $i = 1, 2$  definimos los conjuntos  $\ell_i(f) = \{x \in \mathbb{R}^k : \partial_i f(x) = 0\}$ , las cuales llamamos *líneas críticas* de  $f$ .

**Propiedad 2.4.** Cada conjunto  $\ell_i(f)$ , con  $i = 1, 2$  es una recta:

$$\ell_1(f) = \{(x, y) : 2ax + cy + d = 0\} \text{ y } \ell_2(f) = \{(x, y) : 2by + cx + e = 0\}, \quad (2.2)$$

siendo  $f$  como en (1.4).

Debe hacerse notar que las rectas  $\ell_1(f)$  y  $\ell_2(f)$  corresponden a los lugares geométricos donde ocurren las tangencias horizontales y verticales de las curvas de nivel de la función  $f$ . Ahora bien, al considerar la familia uniparamétrica  $f_\mu = f - \mu$ , sigue inmediatamente que las correspondientes líneas  $\ell_i(f_\mu)$ ,  $i = 1, 2$ , son las mismas que para  $f$ . Note además que:

- El punto crítico de  $f_\mu$  es el mismo de  $f$ .
- $\text{mín } f_\mu = \text{mín } f - \mu$ .
- Para cada  $\mu \in \mathbb{R}$  y todo  $\beta > \text{mín } f_\mu$ , se tiene  $f_\mu^{-1}(\beta) = f^{-1}(\mu + \beta)$ . Claramente, para todo  $\mu \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{c\} = \bigcup_{\beta > \text{mín } f_\mu} f_\mu^{-1}(\beta). \quad (2.3)$$

La siguiente proposición es crucial para nuestros posteriores propositos

**Proposición 2.1.** Sean  $f$  como en (1.4) y  $f_\mu = f - \mu$ . Existe  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  tal que para cada  $\mu > \mu_0$  estan definidos números  $\tilde{s}_\mu < s_\mu$  de forma que:

- $f_\mu^{-1}(s_\mu)$  tiene como tangencias horizontales a  $y = s_\mu$  y  $y = \tilde{s}_\mu$ .
- $s_\mu \rightarrow +\infty$  y  $\tilde{s}_\mu \rightarrow -\infty$  cuando  $\mu \rightarrow +\infty$ ; de hecho, tanto  $s_\mu$  como  $\tilde{s}_\mu$  son del orden de  $\sqrt{\mu}$

*Esbozo de la demostración.* Consideremos  $\beta > \min f_\mu$ , los puntos de tangencia horizontal de  $f_\mu^{-1}(\beta)$  constituyen la solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu = \beta, & (a) \\ 2ax + cy + d = 0. & (b) \end{cases}$$

De (b)  $x = \frac{-cy - d}{2a}$ , que al sustituirlo en (a) define una función de  $y$  con parámetro  $\mu$ ,  $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . dada por:

$$\varphi_\mu(y) = f_\mu \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right).$$

Una simple cuenta nos muestra que  $\varphi_\mu$  tiene puntos fijos siempre que

$$\mu > -\frac{(2ae - cd)^2}{4a\Delta} - \frac{d^2}{4a}.$$

Tomamos el mayor de ellos

$$s_\mu = \frac{1}{\Delta} \left[ (cd + 2a - 2ae) + \sqrt{(2ae - cd - 2a)^2 + \Delta(4a\mu + d^2)} \right]$$

y su otra  $\varphi_\mu$ -preimagen

$$\tilde{s}_\mu = -\frac{4ae - 2cd}{\Delta} - s(\mu)$$

De esta forma los únicos puntos que no se van al infinito; es decir, que no pertenecen a  $B_\infty(\mu)$ , son aquellos cuya órbita permanece en  $C_\mu(f)$

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu &= \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty(\mu) \\ &= \{(x, y) : F_\mu^n(x, y) \in C_\mu(f)\} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu(f)) \end{aligned}$$

Observe que  $\mu \rightarrow s_\mu$  y  $\mu \rightarrow \tilde{s}_\mu$  cumplen con las afirmaciones de la proposición. □

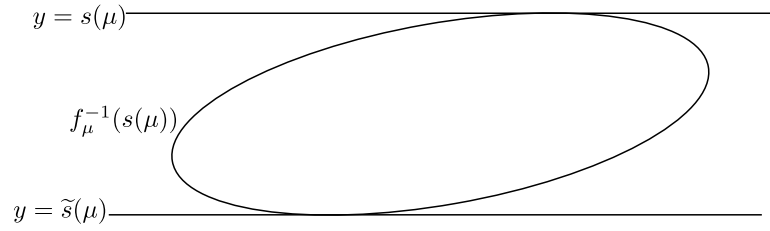


Figura 2.1: Tangencia horizontal de curva de nivel  $f_\mu^{-1}(s(\mu))$

## 2.2. Endomorfismos cuadráticos con retardo

Consideremos, para cada  $\mu$  en  $\mathbb{R}$ , el endomorfismo  $F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y))$ , donde  $f_\mu$  es como en (1.4). Varias consecuencias dinámicas simples siguen del hecho que  $f$  sea convexa; la primera de ellas es que  $\infty$  es un atractor para  $F_\mu$ ; es decir, existe  $r > 0$  tal que el complemento de la bola cerrada  $B$  de centro en el origen y radio  $r$  es invariante por  $F_\mu$ , y para cada  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus B$  se tiene que  $\|F_\mu^n(w)\| \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . La cuenca de atracción del  $\infty$  es el conjunto abierto  $B_\infty(\mu) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \|F_\mu^n(w)\| \rightarrow +\infty \text{ si } n \rightarrow +\infty\}$ . En caso que  $F_\mu$  no tenga puntos fijos,  $B_\infty(\mu) = \mathbb{R}^2$ ; lo cual equivale a que el conjunto  $\omega$ -límite de cada punto sea vacío, esta es la situación de dinámica trivial. Por otro lado, con el auxilio de las funciones  $\mu \rightarrow s_\mu$  y  $\mu \rightarrow \tilde{s}_\mu$  arriba enunciadas se muestran:

1.  $e(f_\mu^{-1}(s_\mu)) \cup i(f_\mu^{-1}(\tilde{s}_\mu)) \subset B_\infty(\mu)$ , y
2.  $F_\mu(f_\mu^{-1}(\beta)) \subset C_\mu := \bigcup_{\beta \in I_\mu} f_\mu^{-1}(\beta)$ , cualquiera sea  $\beta \in I_\mu := [\tilde{s}_\mu, s_\mu]$ .

El conjunto de puntos cuya órbita nunca abandona el conjunto  $C_\mu$  es un anillo cuyos bordes externos son las elipses  $f_\mu^{-1}(s_\mu)$  y  $f_\mu^{-1}(\tilde{s}_\mu)$ . En general el conjunto  $\Lambda_\mu$  no es igual al conjunto no errante de  $F_\mu$ ; de hecho un ejemplo de esto es cuando el coeficiente  $b$  en (2.1) es superior a  $\max\{a, |c|\}$ , que es el caso que denominamos horizontal. Ello se debe a la forma de cómo el anillo  $C_\mu$  está posicionado respecto de la parábola  $P_\mu$ , que es la imagen del conjunto de puntos críticos  $\ell$  de  $F_\mu$ , el cual coincide con la línea donde ocurren las tangencias horizontales en las elipses de nivel de la función  $f_\mu$ . En otras palabras, las curvas de nivel en  $C_\mu$  atraviesan transversalmente la parábola  $P_\mu$  de manera que la intersección entre  $C_\mu$  y el epigráfico de la función que define a  $P_\mu$  es la unión de dos bandas disjuntas. La preimagen de cada una de esas bandas da origen a una región anular que preserva la intersección

transversal con  $P_\mu$ , observándose así la formación de un conjunto de Cantor de curvas cerradas (próximas a elipses) que atraviesan transversalmente a la parábola  $P_\mu$ . Una parte de estas curvas en el complemento del epigráfico no son puntos del conjunto no errante pues ellos no tienen preimagen, sin embargo tienen órbitas acotadas. De esta forma, el conjunto no errante  $\Omega_\mu$  de  $F_\mu$  es dado por  $\bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(C_\mu)$ . En [19] se hace un esbozo (aunque preciso) que

evita los cálculos que efectivamente demuestran que el conjunto de puntos con órbita acotada es un Cantor de curvas cerradas tipo elipses, y de que en el conjunto no errante se pueden construir familias de conos, estables e inestables, mediante los cuales se obtenga la hiperbolicidad (tipo silla) del conjunto  $\Omega_\mu$ .

### 2.3. Mapas con retardo cuadrático horizontal en $\mathbb{R}^2$

Nos proponemos a estudiar la dinámica de una categoría especial de familias a un parámetro de endomorfismos con retardo en  $\mathbb{R}^2$ ; se trata de aquellos endomorfismos

$$F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y))$$

Asociados a las ecuaciones en diferencia con retardo dadas por las funciones

$$f_\mu(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu = f(x, y) - \mu$$

donde  $\mu$ .  $F_\mu$  tendrá a lo más dos puntos fijos y esto ocurrirá si el parámetro  $\mu$  es suficientemente grande, esto es:

$$\begin{aligned} F_\mu(x, y) = (x, y) &\Leftrightarrow x = y \quad y \quad f_\mu(x, x) = x \\ &\Leftrightarrow f_\mu(x, x) = x \end{aligned}$$

En el caso cuadrático:

$$(a + b + c)x^2 + (d + e - 1)x - \mu = 0$$

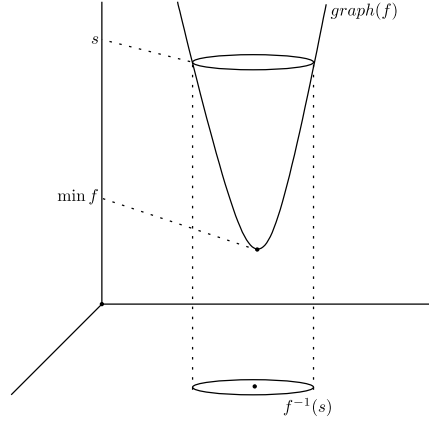
hay puntos fijos sii

$$(d + e - 1)^2 + 4(a + b + c)\mu \geq 0$$

si  $(a + b + c) \neq 0$ , tenemos que

$$\mu \geq -\frac{(d + e - 1)^2}{4(a + b + c)}$$

Sea  $\mu^* = -\frac{(d + e - 1)^2}{4(a + b + c)}$ . En adelante,  $\mu > \mu^*$ ; por lo tanto,  $F_\mu$  tiene dos puntos fijos si  $\mu > \mu^*$  como se muestra en la figura



## 2.4. Conjunto imagen de $F_\mu$

Dado  $(x, y) \in l_1$  calculamos  $F_\mu(x, y)$ , esto es,

$$\begin{aligned} F_\mu(x, y) &= (y, f_\mu(x, y)) \\ &= (y, ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu) \\ &= (y, h_\mu(y)) \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} h_\mu(y) &= \frac{1}{4}[\Delta y^2 + (4ae - 2cd)y - 4a\mu - d^2] \\ &= \frac{\Delta}{4a}y^2 + \frac{4ae - 2cd}{4a}y - \frac{d^2}{4a} - \mu \end{aligned}$$

$$P_\mu = F_\mu(l_1) = \{(y, h_\mu(y)) : y \in \mathbb{R}\} = \text{graph}(h_\mu)$$

Por lo tanto, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f_\mu(x, y) = \frac{1}{4a}(2ax + cy + d)^2 \pm h_\mu(y)$$

## 2.5. Puntos de tangencia horizontales y el conjunto de puntos con órbita acotada.

Consideremos el siguiente sistema , tomemos  $\beta > \text{mín } f_\mu$

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu = \beta, & (a) \\ 2ax + cy + d = 0, & (b) \end{cases}$$

De (b) tenemos  $x = \frac{-cy - d}{2a}$  al sustituir en (a) se define una función de  $y$  con parámetro  $\mu$ ;  $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\varphi_\mu(y) = f_\mu \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right)$$

Calculemos sus derivadas

$$\begin{aligned} \varphi'_\mu(y) &= \partial_1 f_\mu \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right) + \partial_2 f_\mu \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right) \\ &= \partial_2 f_\mu \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right) \end{aligned}$$

Sea  $q_y = \left( -\frac{cy + d}{2a}, y \right)$  luego

$$\begin{aligned} \varphi''_\mu(y) &= \partial_{12} f_\mu(q_y) \left( \frac{-c}{2a} \right) + \partial_{22} f_\mu(q_y) \\ &= \frac{4ab - c^2}{2a} > 0 \end{aligned}$$

Si  $\mu \gg 1$  (suficientemente grande) entonces  $\varphi_\mu$  tiene dos puntos fijos; uno de ellos positivo, el otro negativo y a los lados opuestos del punto crítico de  $\varphi_\mu$ . Al positivo lo llamaremos  $s(\mu)$  y su preimagen la denotaremos por  $\tilde{s}(\mu)$ .

$$\begin{aligned} s(\mu) &= \varphi_\mu(s(\mu)) = f_\mu \left( -\frac{c(s(\mu)) + d}{2a}, s(\mu) \right) \\ \tilde{s}(\mu) &= \varphi_\mu(\tilde{s}(\mu)) = f_\mu \left( -\frac{c(\tilde{s}(\mu)) + d}{2a}, \tilde{s}(\mu) \right) \end{aligned}$$

los puntos  $\left( -\frac{c(s(\mu)) + d}{2a}, s(\mu) \right)$  y  $\left( -\frac{c(\tilde{s}(\mu)) + d}{2a}, \tilde{s}(\mu) \right)$  están en  $l_1$  y su imagen por  $f_\mu$  es  $s(\mu)$ ; por tanto, ellos pertenecen a  $f_\mu^{-1}(s(\mu)) \cap l_1$ , esto significa que:

$$y = s(\mu) \quad \text{y} \quad y = \tilde{s}(\mu)$$

definen la tangencia horizontal de  $f_\mu^{-1}(s(\mu))$ ; ver figura de tangencia 2.1

Para cada  $\mu \gg 1$ , existe  $s(\mu) \sim \sqrt{\mu}$  ( $\tilde{s}(\mu) \sim -\sqrt{\mu}$ ) tal que si tomamos  $\beta > s(\mu)$  y sean  $v(\beta), \tilde{v}(\beta)$  sus preimágenes por  $\varphi_\mu$

$$\varphi_\mu(v(\beta)) = \varphi_\mu(\tilde{v}(\beta)) = \beta, \text{ por ser cuadrático, } s(\mu) < v(\beta) < \beta.$$

Si  $(x, y) \in e(f_\mu^{-1}(s(\mu)))$  entonces existe  $\beta > s(\mu)$  tal que  $(x, y) \in f_\mu^{-1}(\beta)$  Al tomar

$$F_\mu(x, y) = (y, f_\mu(x, y)) = (y, \beta)$$

Implica  $e(f_\mu^{-1}(s(\mu))) \subset B_\infty(\mu)$ .

Si  $(x, y) \in i(f_\mu^{-1}(\tilde{s}(\mu))) \setminus \{c\}$ , entonces existe  $\beta < \tilde{s}(\mu)$  tal que  $f_\mu(x, y) = \beta$  y  $F_\mu \in e(f_\mu^{-1}(s(\mu)))$  Por lo tanto,

$$i(f_\mu^{-1}(s(\mu))) \subset B_\infty(\mu).$$

Definimos  $C_\mu(f) = \bigcup_{\beta \in [\tilde{s}(\mu), s(\mu)]} f_\mu^{-1}(\beta)$ ; por lo que:

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus C_\mu(f) \subset B_\infty(\mu)$
2.  $F_\mu^{-1}(C_\mu) \subset C_\mu$

Así

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu &= \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty(\mu) \\ &= \{(x, y) : F_\mu^n(x, y) \in C_\mu(f)\} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu(f)) \end{aligned}$$

Lo cual denominamos Conjunto de puntos de órbitas acotadas.

**Lema 2.1.** *f es horizontal si los puntos de tangencia vertical de  $f_\mu^{-1}(\tilde{s}(\mu))$  están fuera de  $P_\mu$ , es decir, están en el  $\text{ext}(P_\mu)$ ; para todo  $\mu$  suficientemente grande.*

*Demostración.* Los puntos de tangencia de  $f_\mu^{-1}(\tilde{s}(\mu))$  son los únicos que resuelven el sistema:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = \mu + \tilde{s}(\mu), & (a) \\ 2by + cx + e = 0, & (b) \end{cases}$$



de (b):  $y = -\frac{cx + e}{2b}$ ; al sustituir en (a)

$$ax^2 + b \left( \frac{cx + e}{2b} \right)^2 - cx \frac{cx + e}{2b} + dx - e \frac{cx + e}{2b} = \tilde{s}(\mu) + \mu$$

Luego,

$$x^2 \left( \frac{4ab - c^2}{4b} \right) + x \left( \frac{2bd - ec}{2b} \right) + \left( \frac{3e^2 - 4b\tilde{s}(\mu) - 4b\mu}{4b} \right) = 0$$

Analicemos el discriminante de esta ecuación

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2bd - ec}{4b} \right)^2 - 4 \left( \frac{4ab - c^2}{4b} \right) \left( \frac{3e^2 - 4b\tilde{s}(\mu) - 4b\mu}{4b} \right) \\ &= \frac{1}{4} [(2bd - ec)^2 + (4ab - c^2)(-3e^2 + 4b\tilde{s}(\mu) + 4b\mu)] \end{aligned}$$

Conocemos que

$$4ab - c^2 > 0$$

Veamos para que valores de  $b$ ,  $-3e^2 + b\tilde{s}(\mu) + 4b\mu > 0$

$$\begin{aligned} -3e^2 + b\tilde{s}(\mu) + 4b\mu &> 0 \\ \Rightarrow 4b(\tilde{s}(\mu) + \mu) &> 3e^2 \\ \Rightarrow b &> \frac{3e^2}{4b(\tilde{s}(\mu) + \mu)}, \quad \mu \gg 1 \end{aligned}$$

Asi pues

$$x = \frac{-(2bd - ec) \pm \sqrt{\frac{1}{4b} [(-ec + 2bd)^2 + (4ab - c^2)(-3e^2 + 4b\tilde{s}(\mu) + 4b\mu)]}}{4ab - c^2}$$

Al sustituir  $x$  en  $y = -\frac{cx+e}{2b}$  se obtiene

$$y = \frac{-c(ec - 2bd) \pm \sqrt{\frac{1}{4b} [(-ec + 2bd)^2 + (4ab - c^2)(-3e^2 + 4b\tilde{s}(\mu) + 4b\mu)]} + e}{4ab - c^2}$$

□

Introducimos la siguiente notación:

Si  $h$  es una función de  $\mu$  escribimos  $h \sim \mu^a$  si  $\frac{h}{\mu^a} \rightarrow a$  con  $a \neq 0$ .

Sin pérdida de generalidad resolvemos el sistema anterior asintóticamente

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = \mu + \tilde{s}(\mu), & (a) \\ 2by + cx + e = 0, & (b) \end{cases}$$

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = \mu + \tilde{s}(\mu)$$

$$\frac{1}{\mu}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey) \sim 1$$

puesto que  $\frac{|x|,|y|}{\mu} \rightarrow 0$  cuando  $\mu \rightarrow +\infty$ , tenemos

$$\frac{1}{\mu}(ax^2 + by^2 + cxy) \sim 1$$

por otra parte tenemos de (b)

$$y = -\frac{cx + e}{2b}$$

de aqui

$$y \sim -\frac{cx}{2b}$$

De aqui,

$$\frac{1}{\mu} \left( a + \frac{c^2}{4b} - \frac{c^2}{2b} \right) x^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta}{4b} x^2 \sim 1$$

De aqui,  $x^2 \sim \frac{4b}{\Delta} \mu$ , esto es,  $x \sim \pm 2\sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu}$

Por lo tanto,

$$y \sim \mp \frac{c \left( 2\sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu} \right)}{2b} = \mp \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu}$$

Definimos ahora

$$V_1(\mu) = \left( 2\sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu}, -\frac{c}{b} \sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu} \right)$$

$$V_2(\mu) = \left( -2\sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu}, +\frac{c}{b} \sqrt{\frac{b}{\Delta} \mu} \right)$$

Queremos probar que  $V_1(\mu), V_2(\mu) \in Ext(P_\mu)$  conocemos que

$$P_\mu = F_\mu(l_1) = \{(y, h_\mu(y)) : y \in \mathbb{R}\} = graph(h_\mu)$$

$h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función cuadrática (convexa).

Si  $(u, v) \in l_1 \cap P_\mu$ , existe  $y \in \mathbb{R}$  de manera que

$$(u, v) = (y, h_\mu) \Leftrightarrow u = y, \quad v = h(y)$$

De donde se obtiene:  $v = h_\mu$ . Así

$$\text{ext}P_\mu = \{(x, y) : h_\mu(x) > y\}, \quad \text{int}P_\mu = \{(x, y) : h_\mu(x) < y\}$$

Probemos ahora:

$$h\left(2\sqrt{\frac{b}{\Delta}\mu}\right) > \left(-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b}{\Delta}\mu}\right)$$

$$h_\mu(y) = \left\{\frac{\Delta}{4a}y^2 + \frac{2ae - cd}{2a}y - \frac{d^2}{4a} - \mu\right\}$$

Asintóticamente

$$\frac{h_\mu(y)}{\mu} = \frac{\Delta}{4a}y^2 - 1$$

evaluando:

$$\begin{aligned} \frac{h_\mu(2\sqrt{\frac{b}{\Delta}\mu})}{\mu} &= \frac{\Delta}{4a}4\frac{b}{\Delta}\mu - 1 \\ &= \frac{b}{a}\mu - 1 \end{aligned}$$

tenemos

$b \gg a$ ,  $|c|$ , por lo que  $\frac{b}{a}\mu - 1 > 1$ .

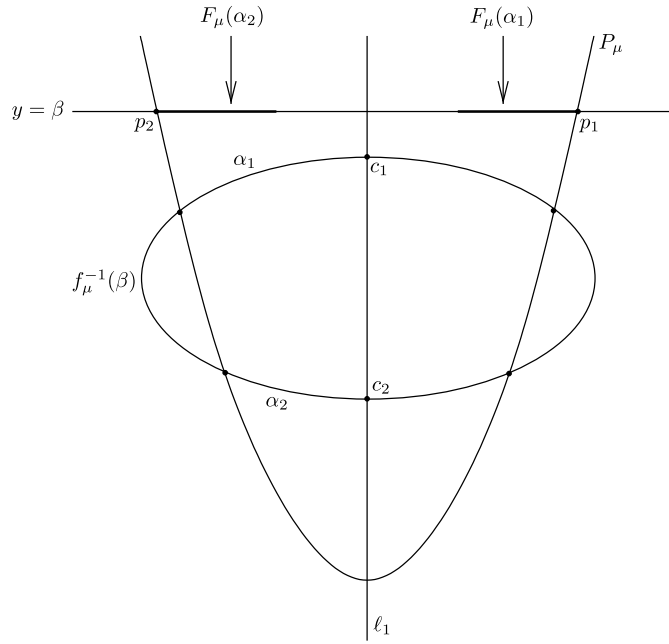
Por otra parte,

$\frac{|c|}{b} \ll 1$ , por lo tanto,  $-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b}{\Delta}\mu} < h\left(\sqrt{\frac{b}{\Delta}\mu}\right)$

Concluimos así que  $V_1 \in \text{ext}(P_\mu)$ . De manera análoga se prueba que  $V_2 \in \text{ext}(P_\mu)$ .

Calculemos  $F_\mu^n(C_\mu)$ .

Sea  $\beta \in I_\mu = [\tilde{s}(\mu), s(\mu)]$ , sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los arcos de  $f_\mu^{-1}$  en  $\overline{\text{int}(P_\mu)}$

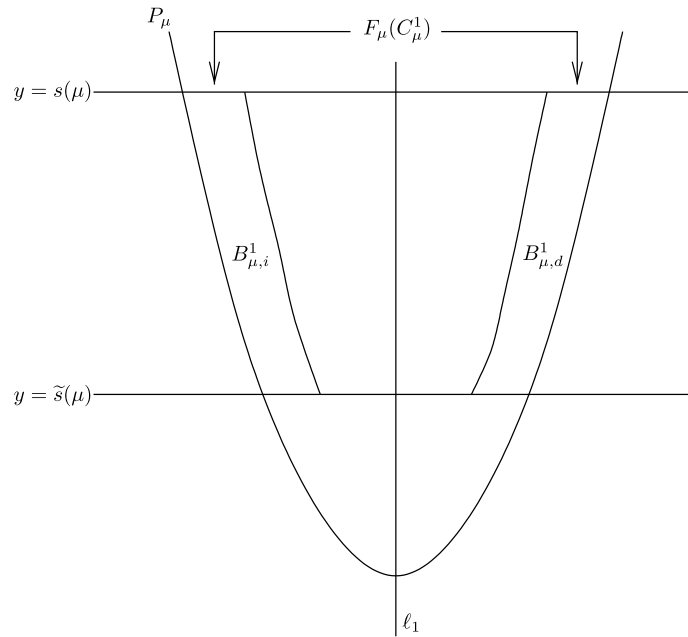


Sabemos que  $F_\mu(f_\mu^{-1}(\beta))$  es un segmento en  $y = \beta$  con extremos a diferentes lados de  $l_1$  y sobre  $P_\mu$ .

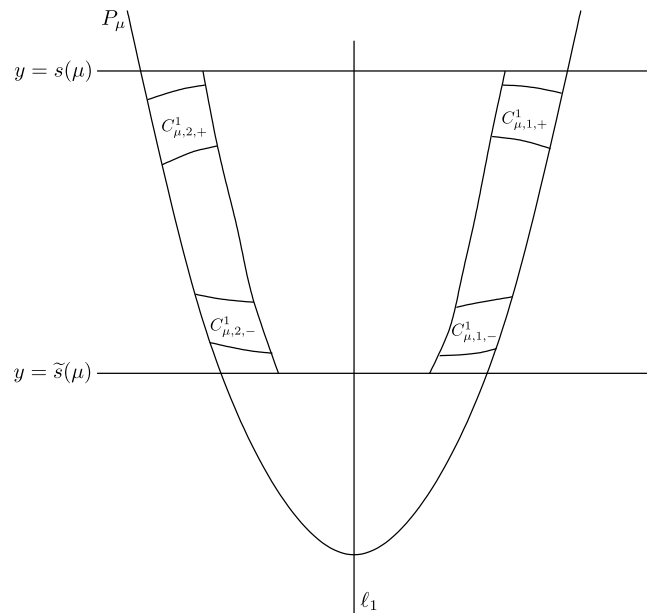
Sean  $c_i = l_1 \cap \alpha_i$  y  $p_i = F_\mu(c_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Es claro que  $p_i \in P_\mu$ .

Dado que  $\mu \gg 1$ , suponemos que  $\pi_2(\alpha_1) > 0$  y  $\pi_2(\alpha_2) < 0$ , luego  $F_\mu(\alpha_i)$  es un segmento (al lado derecho de  $l_1$  si  $i = 1$ , y al lado izquierdo si  $i = 2$ ).

La unión  $F_\mu(\alpha_1) \cup F_\mu(\alpha_2)$  no cubre a  $F_\mu(f_\mu^{-1}(\beta))$  porque la imagen de  $f_\mu^{-1}(\beta) \cap \overline{ext(P_\mu)}$  es un segmento en  $\overline{p_1 p_2}$ . Por tanto,  $F_\mu(f_\mu^{-1}(\beta))$  es la unión de dos segmentos disjuntos contenidos en la recta  $y = \beta$  y a distintos lados de  $l_1$ .



De hecho cada una de estas bandas es foliada por los segmentos que definen a  $f_\mu^{-1}(\beta)$ , cualquiera sea  $\beta \in I_\mu$ .  $F_\mu(C_\mu^1) \cap C_\mu$  es la unión de cuatro sectores disjuntos, dos a cada lado de  $\ell_1$ , dos de ellos con segunda componente positiva y los otros dos con segunda componente negativa.



$$\begin{aligned}
C_{\mu 2} &= F_{\mu}(C_{\mu}^1) \\
&= C_{\mu,1,+}^1 \cup C_{\mu,2,+}^1 \cup C_{\mu,1,-}^1 \cup C_{\mu,2,-}^1
\end{aligned}$$

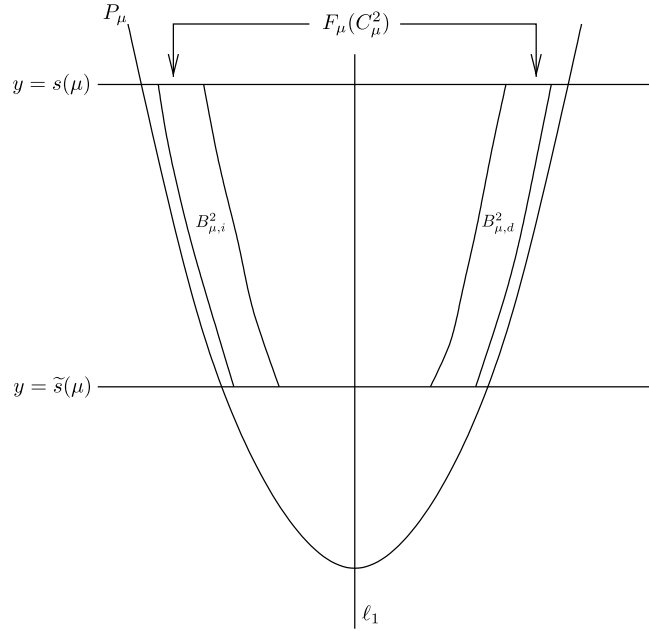
Tomemos  $\beta$  como antes; luego  $f_{\mu}^{-1}(\beta) \cap C_{\mu}^2$  es la unión de 4 arcos: 2 arriba y 2 abajo, es decir, 2 contenidos en  $\alpha_1$  y 2 contenidos en  $\alpha_2$ .

Si  $\alpha_1^e$  es el segmento en  $\alpha_1$ , entonces los segmentos de  $f_{\mu}^{-1}(\beta) \cap C_{\mu}^2$  son  $C_{\mu,1,+}^1 \cup C_{\mu,2,+}^1$ ; entonces su imagen es un segmento  $c \{y = \beta\}$  al lado derecho de  $l_1$ , con un extremo en  $P_{\mu}$  y contenido propiamente en el segmento imagen de  $\alpha_1$ . Por tanto,  $F_{\mu}(\alpha_1 \setminus \alpha_1^e)$  es el completo del segmento descrito.

Con un argumento similar en el otro arco  $\alpha_2$ , y haciendo variar  $\beta \in I_{\mu}$  concluimos:

$F_{\mu}(C_{\mu}^2)$  es una unión de dos bandas.

$$B_{\mu,d}^2 = F_{\mu}(C_{\mu,1,+}^1 \cup C_{\mu,2,+}^1), \quad B_{\mu,i}^2 = F_{\mu}(C_{\mu,1,-}^1 \cup C_{\mu,2,-}^1)$$



Por inducción para cada  $n \geq 2$  tenemos:

(a)

$$\begin{aligned}
C_{\mu}^n &= F_{\mu}(C_{\mu}^{n-1}) \cap C_{\mu} \\
&= C_{\mu,i,+}^{n-1} \cup C_{\mu,i,-}^{n-1}, \quad i = 1, 2
\end{aligned}$$

(b)

$$F_\mu(C_\mu^n) = B_{\mu,d}^n \cup C_{\mu,i}^n$$

$$\text{donde } B_{\mu,d}^n = F_\mu(C_{\mu,1,+}^{n-1} \cup C_{\mu,2,+}^{n-1}).$$

Teneomos así dos secuencias de bandas  $(B_{\mu,d}^n)_{n \geq 0}$  y  $(C_{\mu,i}^n)_{n \geq 0}$ .

**Observación:**

Consideremos la curva  $\gamma$  que intersecta a  $P_\mu$ , digamos en  $a$  y  $b$  como muestra la figura.

Luego  $F_\mu^{-1}(\gamma)$  es una curva cerrada que sale de  $P_\mu$ .

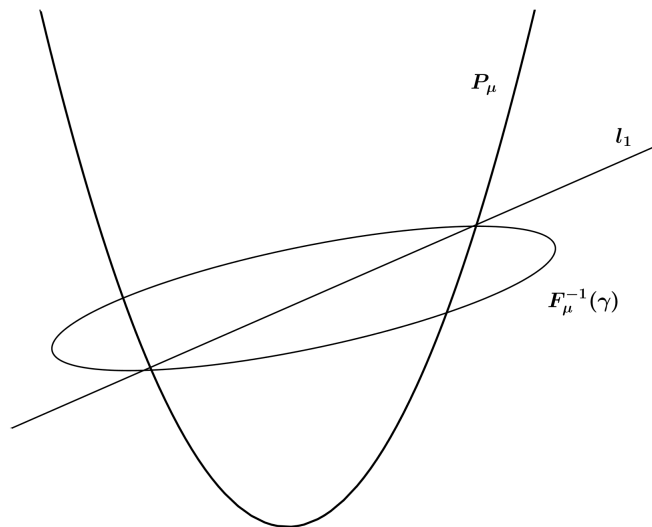


Figura 19

Esto es, por el hecho de que las preimágenes de  $a$  y  $b$  están sobre la línea crítica  $l_1$ , es decir, sus coordenadas están posicionadas una a la derecha y otra a la izquierda de  $l_1$ .

**Teorema 2.1.**  $\Lambda_\mu$  es el producto de un cantor y un  $S^1$ .

Proceso inductivo de construcción de  $\Lambda_\mu$ .

$F_\mu^{-1}(C_\mu)$  es la unión de dos anillos  $A_\mu^e$  y  $A_\mu^i$ .

Denotemos por  $A_\mu^0$  l anillo interior y  $A_\mu^1$  el anillo exterior. Luego,

$F_\mu^{-1}(C_\mu) \cap \overline{int(P_\mu)}$  es la unión de 4 bandas disjuntas con bordes a diferentes lados de  $l_1$  y sobre  $P_\mu$ , las denotamos por:

$$A_\mu^0 \cap \overline{int(P_\mu)} = B_0^u \cup B_0^d$$

$$A_\mu^1 \cap \overline{int(P_\mu)} = B_1^u \cup B_1^d$$

Veamos ahora que

$$F_\mu^{-1}(A_\mu^0) = A_\mu^{00} \cup A_\mu^{10}$$

$$F_\mu^{-1}(A_\mu^1) = A_\mu^{11} \cup A_\mu^{01}$$

donde:  $F_\mu(A_\mu^{00}) = B_0^u$ ,  $F_\mu(A_\mu^{10}) = B_0^d$ ,  $F_\mu(A_\mu^{11}) = B_1^d$ ,  $F_\mu(A_\mu^{01}) = B_1^u$

Calculemos  $F_\mu^{-2}(C_\mu)$ .

$$\begin{aligned} F_\mu^{-2}(C_\mu) &= F_\mu^{-1}(F_\mu^{-1}(C_\mu)) \\ &= F_\mu^{-1}(A_\mu^0 \cup A_\mu^1) \\ &= F_\mu^{-1}(A_\mu^0) \cup F_\mu^{-1}(A_\mu^1) \\ &= A_\mu^{00} \cup A_\mu^{10} \cup A_\mu^{11} \cup A_\mu^{01} \\ &= \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} A_\mu^{ij} \end{aligned}$$

donde  $A_\mu^{ij} = \{z : z \in A_\mu^i, F_\mu(z) \in A_\mu^j\}$

$F_\mu^{-2}(C_\mu) \cap \overline{int(P_\mu)}$  es la unión de 8 bandas disjuntas con bordes a diferentes lados de  $l_1$  y sobre  $P_\mu$

$$A_\mu^{00} \cap \overline{int(P_\mu)} = B_{00}^d \cup B_{00}^u$$

$$A_\mu^{10} \cap \overline{int(P_\mu)} = B_{10}^u \cup B_{10}^d$$

por lo que

$$A_\mu^{ij} \cap \overline{int(P_\mu)} = B_{ij}^u \cup B_{ij}^d$$



Así

$$F_\mu^{-1}(A_\mu^{ij}) = A_\mu^{0ij} \cup A_\mu^{1ij}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} F_\mu^{-3}(C_\mu) &= F_\mu^{-1}(F_\mu^{-2}(C_\mu)) \\ &= F_\mu^{-1}\left(\bigcup_{i,j \in \{0,1\}} A_\mu^{ij}\right) \end{aligned}$$

En general,

$$F_\mu^{-n}(C_\mu) = \bigcup_{i_k \in \{0,1\}} A_\mu^{i_0 \dots i_{k-1}}$$

donde

- $A_\mu^{i_0 \dots i_k} = \{z \in C_\mu : F_\mu^j(z) \in A_\mu^{ij}, 0 \leq j < k\}$
- $A_\mu^{i_0 \dots i_k} \subset A_\mu^{i_1 \dots i_k}$
- $F_\mu(A_\mu^{i_0 \dots i_k}) = A_\mu^{i_1 \dots i_k}$

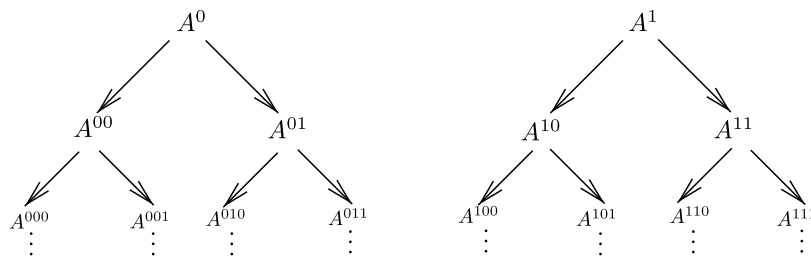


Figura 2.2: Diagrama de inclusión

$$F_\mu^{-n}(C_\mu) = \bigcup_{i_k \in \{0,1\}} A_\mu^{i_0 \dots i_{k-1}}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu &= \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{i_k \in \{0,1\}} A_\mu^{i_0 \dots i_{k-1}} \\ &= \bigcap_{\gamma_j \in \{0,1\}} (A_\mu^{\gamma_0} \cap A_\mu^{\gamma_0 \gamma_1} \cap \dots \cap A_\mu^{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} A_\mu^\gamma$$

para todo  $x \in \Lambda_\mu$ , existe un único  $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$F_\mu^n(x) \in A_\mu^{\gamma^{(n)}}, \quad \forall n \geq 0$$

Consideremos la función *Cod*:

$$\Lambda_{\mu \xrightarrow{\text{Cod}} \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$$

$$x \rightarrow \text{Cod}(x) = ?$$

Si  $(x, y) \in \Lambda_\mu$  definimos:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{Cod}(x) = \text{Cod}(y)$$

Esta relación es de equivalencia, por lo que

$$\Lambda_{\mu/\sim} = \{[x] : x \in \Lambda_\mu\}$$

y la aplicación

$$\Lambda_{\mu/\sim \xrightarrow{\text{Cod}} \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$$

es biyectiva. Por lo tanto,  $\Lambda_{\mu/\sim}$  con la topología cociente es homeomorfo a  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  con la topología producto.

Aún es necesario realizar algunos estudios previos para lograr demostrar el teorema 2.1.

## 2.6. Acotamientos importantes

¿Cómo es  $x$  en  $P_\mu \cap \{\tilde{s}(\mu) \leq y \leq s(\mu)\}$ ?

$$(x, h_\mu(x)) \in P_\mu, \quad h_\mu(x) \in [\tilde{s}(u), s(u)]$$

conocemos

$$h_\mu(x) = \frac{\Delta}{4a}x^2 + \frac{2ae - cd}{2a}x - \frac{d^2}{4a} - \mu$$

Asintóticamente tenemos

$$x^2 \sim \frac{4a}{\Delta} \mu \quad (a)$$

¿Cómo es  $y$  en  $P_\mu \cap C_\mu$ ?

$$(x, y) \in P_\mu \cap C_\mu \Leftrightarrow y = h_\mu(x)$$

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey - \mu = \beta \text{ para algún } \beta \in I_\mu$$

Tenemos de (a)  $x^2 \sim \frac{4a}{\Delta} \mu$

y el sistema

$$\begin{cases} y = h_\mu(x), \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = \mu + \beta, \quad \beta \in I_\mu \end{cases}$$

Asintóticamente al sustituir el valor de la  $x$

$$\frac{4a^2}{\Delta} \mu + by^2 \pm 2c\sqrt{\frac{a\mu}{\Delta}}y - \mu = 0$$

$$by^2 \pm 2c\sqrt{\frac{a\mu}{\Delta}}y + \left(\frac{4a^2}{\Delta} - 1\right)\mu = 0 \quad (1)$$

La ecuación (1) tiene discriminante

$$\begin{aligned} \frac{4c^2a\mu}{\Delta} - \frac{16ba^2}{\Delta}\mu + \frac{4b\Delta\mu}{\Delta} &= \frac{4\mu}{\Delta}(ac^2 - 4ba^2 + b\Delta) \\ &= \frac{4\mu}{\Delta}(-a(4ab - c^2) + b\Delta) \\ &= \frac{4\mu}{\Delta}(-a\Delta + b\Delta) \\ &= \frac{4\mu}{\Delta}(b - a)\Delta \\ &= 4\mu(b - a) > 0 \quad \text{puesto que } b \gg a \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y = \frac{1}{2b} \left[ -sg(x)2c\sqrt{\frac{a\mu}{\Delta}} \pm \sqrt{4\mu(b - a)} \right]$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $x > 0$ , luego

$$y = \frac{1}{b} \left[ -c\sqrt{\frac{a}{\Delta}}\sqrt{\mu} \pm \sqrt{(b-a)}\sqrt{\mu} \right]$$

para  $y > 0$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{\mu}}{b} \left[ -c\sqrt{\frac{a}{\Delta}} + \sqrt{b-a} \right] \\ &= \frac{\sqrt{(b-a)}\mu}{b} \left[ 1 - c\sqrt{\frac{a}{\Delta(b-a)}} \right] \end{aligned}$$

Sea  $k = 1 - c\sqrt{\frac{a}{\Delta(b-a)}}$ ; así  $k > 0$  si  $b \gg a$ .

Por tanto, asintóticamente

$$y \sim \frac{\sqrt{b-a}}{b} k \sqrt{\mu}$$

Verifiquemos que

$$\frac{\sqrt{(b-a)}}{b} \left[ 1 - c\sqrt{\frac{a}{\Delta(b-a)}} \right] \leq 2\sqrt{\frac{a}{\Delta}}$$

es decir,

$$\frac{\sqrt{(b-a)}}{b} \left[ \frac{\sqrt{\Delta(b-a)} - c\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta(b-a)}} \right] \leq 2\sqrt{\frac{a}{\Delta}} \quad (2)$$

(2) vale sii

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta(b-a)} - c\sqrt{a} &\leq 2\sqrt{ab} \\ \sqrt{\Delta(b-a)} &\leq \sqrt{a}(2b+c) \\ \Delta(b-a) &\leq a(2b+c)^2 \\ 4ab^2 - c^2b - 4a^2b + ac^2 &\leq a(4b^2 + 4bc + c^2) \\ -4a^2 - c^2 &\leq 4ac \\ 0 &\leq 4a^2 + 4ac + c^2 \\ 0 &\leq (2a+c)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mu \frac{\sqrt{b-a}}{b} k \leq x^2, y^2 \leq 4\frac{a}{\Delta}\mu$$

# Capítulo 3

## Hiperbolicidad del conjunto no errante

### 3.1. Familia de Conos Horizontales

Consideremos en cada punto  $p \in C_\mu^1$  el cono

$$H^s(p) = \{(u, v) : |v| \leq |u|\}$$

Tomemos puntos  $p, q \in C_\mu^1$  tales que  $F_\mu(q) = p$ .

Note que  $p \in C_\mu^2 \subset C_\mu^1$ ; también es claro que  $q \in F_\mu^{-1}(p)$ .

Por lo tanto,  $q \in C_\mu^1 \cap F_\mu^{-1}(C_\mu) = C_\mu \cap F_\mu^{-1}(C_\mu)$ ; así por definición ( e invarianza de  $F_\mu^{-1}$ ) si  $p \in C_\mu^2$ , entonces  $F_\mu^{-1}(p) \subset C_\mu^1$ .

Sean  $G_\mu$  la rama de la inversa de  $F_\mu$  tal que  $G_\mu(p) = q$  y  $(u, v) \in H^s(p)$ . Deseamos comparar la imagen de  $(u, v)$  por  $D_p G_\mu$  con  $H^s(q)$ .

Calculemos las ramas de la inversa:

Si  $(x, y)$  pertenece a  $\overline{\text{int}(P_\mu)}$ ,  $(u, v) \in F_\mu^{-1}(x, y)$  sii

$$F_\mu(u, v) = (x, y) = (v, f_\mu(u, v))$$

sii

$$\begin{cases} v = x \\ f_\mu(u, x) = y = au^2 + bx^2 + cux + du + ex - \mu \end{cases}$$

De aquí,

$$au^2 + (cx + d)u + bx^2 + ex - y - \mu = 0$$

luego

$$u = \frac{1}{2a} \left[ -(cx + d) \pm \sqrt{(cx + d)^2 - 4a(bx^2 + ex - y - \mu)} \right]$$

Analicemos el radical:

$$\begin{aligned} (cx + d)^2 - 4a(bx^2 + ex - y - \mu) &= c^2x^2 + 2cdx + d^2 - 4abx^2 - 4aex + 4ay + 4a\mu \\ &= -\Delta x^2 + 2(cd - 2ae)x + 4ay + d^2 + 4a\mu \\ &= r_\mu(x, y) \end{aligned}$$

Así

$$G_\mu^+(x, y) = \left( \frac{1}{2a} \left( -(cx + d) + \sqrt{r_\mu(x, y)} \right), x \right)$$

$$G_\mu^-(x, y) = \left( \frac{1}{2a} \left( -(cx + d) - \sqrt{r_\mu(x, y)} \right), x \right)$$

son las ramas de  $F_\mu^{-1}$ .

$$\begin{cases} (x, y) \in \overline{\text{int}(P_\mu)} \Leftrightarrow r_\mu(x, y) \geq 0 \\ (x, y) \in P_\mu \Leftrightarrow r_\mu(x, y) = 0 \end{cases}$$

Llamemos:

$$t_\mu^\pm(x, y) = \frac{1}{2a} \left[ -(cx + d) \pm \sqrt{r_\mu(x, y)} \right]$$

Consideremos sólo  $G_\mu^+$ :

$$D(x, y)G_\mu^+ = \begin{bmatrix} \partial_1 t^+(x, y) & \partial_2 t^+(x, y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \partial_1 t^+(x, y) = \frac{-c}{2a} + \frac{1}{4a} (r_\mu(x, y))^{(-1/2)} \partial_1 r_\mu(x, y) \\ \partial_1 r_\mu(x, y) = -2\Delta x + 2(cd - 2ae) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_2 t^+(x, y) = \frac{1}{4a} (r_\mu(x, y))^{(-1/2)} \partial_2 r_\mu(x, y) \\ \partial_2 r_\mu(x, y) = 4a \end{cases}$$

Si  $w \in H_1^s(p)$  :

$$D_p G(w) = \begin{bmatrix} u\partial_1 t^+(p) + v\partial_2 t^+(p) \\ u \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$|u\partial_1 t^+(p) + v\partial_2 t^+(p)| = \left| u \left[ \frac{-c}{2a} + \frac{(cd - 2ae) - \Delta x}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} + \frac{v}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} \right] \right| \quad (3.2)$$

Queremos:

$$|u\partial_1 t^+(p) + v\partial_2 t^+(p)| \gg |u|$$

De (1.3):

$$\begin{aligned} |u\partial_1 t^+(p) + v\partial_2 t^+(p)| &= \frac{1}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} \left| u[-c\sqrt{r_\mu(x, y)} + (cd - 2ae) - \Delta x] + v \right| \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} |u|\Delta|x| \left( \left| 1 + \frac{c\sqrt{r_\mu(x, y)}}{\Delta x} - \frac{(cd - 2ae)}{\Delta x} - \frac{v}{\Delta x\mu} \right| \right) \\ &\geq \frac{\Delta|x||u|}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} \left( 1 - \frac{|c|\sqrt{r_\mu(x, y)}|}{\Delta|x|} \frac{|cd - 2ae|}{\Delta|x|} - \frac{|v|}{\Delta|\mu||x|} \right) \end{aligned}$$

$$r_\mu(x, y) = -\Delta x^2 + 2(cd - 2ae)x + 4ay + d^2 + 4a\mu$$

$$\frac{r_\mu(x, y)}{\Delta^2 x^2} = -\frac{1}{\Delta} + 2\frac{(cd - 2ae)}{\Delta^2 x^2} + \frac{4ay}{\Delta^2 x^2} + \frac{d^2}{\Delta^2 x^2} + \frac{4a\mu}{\Delta^2 x^2}$$

Si  $\mu$  es suficientemente grande,  $b \gg a$  y  $|c|$ , entonces  $\frac{r_\mu(x, y)}{\Delta^2 x^2} \ll 1$ .

Como  $x$  es del orden de  $\sqrt{\mu}$  y

$$\frac{\mu\sqrt{b - ak}}{b} \leq x^2, y^2 \leq \frac{4a\mu}{\Delta}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta|x|}{2a\sqrt{r_\mu(x, y)}} &\geq \frac{\sqrt{\mu}(b - a)^{1/4}\sqrt{k} \Delta}{\sqrt{b}2\sqrt{a}\sqrt{\mu} 2a} \\ &= \frac{(4ab - c^2)(b - a)^{1/4}\sqrt{k}}{\sqrt{b}4a^{3/2}} \\ &> 1 \end{aligned}$$

$k \sim 1$  si  $b \gg 1$ .

Por lo tanto,

$$|u\partial_1 t^+(p) + v\partial_2 t^+(p)| \geq |u|$$

Así,  $|v| \geq |u|$ .

Con esto hemos probado que para todo  $p \in C_\mu^1$  la derivada en  $p$  de cualquier rama de  $F_\mu^{-1}$  mapea a  $C^s(p) \setminus \{0\}$  en el interior topológico de  $C^s(q)$ , cualquiera que sea  $q \in F_\mu^{-1}(p)$ . Además, lo anterior también demuestra que la derivada expande.

**Lema 3.1.** *Si  $b \gg a$  y  $|c|$  entonces existe  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \hat{\mu}$ ,  $p \in C_\mu^2$ ,  $w = (u, v) \in H_1(p)$  se cumple:*

1.  $D_p F_\mu(H^s(p) \setminus \{0\}) \subset \text{int}(H^s(q))$ ,

2.  $\|D_p G_\mu(\vec{w})\| > \lambda \|\vec{w}\|$

para todo  $\vec{w} \in H^s(p) \setminus \{0\}$  donde  $G_\mu$  es la rama de la inversa de  $F_\mu$  tal que  $G_\mu(p) = q$ .

## 3.2. Familia de Conos Verticales

Consideremos en cada punto  $p \in C_\mu^1$  el cono:

$$V^s(p) = \{(u, v) : |u| \leq |v|\}$$

Tomemos puntos  $p, q \in C_\mu^1$  tales que  $F_\mu(q) = p$ . Note que  $p \in C_\mu^2 \subset C_\mu^1$  también es claro que  $q \in F_\mu^{-1}(p)$ , por lo tanto,  $q \in C_\mu^1 \cap F_\mu^{-1}(C_\mu) = C_\mu \cap F_\mu^{-1}(C_\mu)$ . Si  $p \in C_\mu^2$  entonces  $F_\mu^{-1}(p) \subset C_\mu^1$ .

**Teorema 3.1.** *Si  $b \gg a$  y  $|c|$  entonces existe  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\mu > \hat{\mu}$ ,  $p \in C_\mu^2$  y  $w = (u, v) \in V_1(p)$  se cumple:*

1.  $D_p F_\mu(w) \in V_{1/2}(p)$ ,

2.  $|D_p F_\mu(\vec{w})| \geq 2\|w\|$



*Demostración.* Sea  $\vec{w} = (u, v)$  tal que  $w \in V_1(p)$

$$D(x, y)F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial_1 F(x, y) & \partial_2 F(x, y) \end{bmatrix}$$

$$D(x, y)F(\vec{w}) = \vec{w}_1(u_1, v_1)$$

$$u_1 = v$$

$$v_1 = \partial_1 f(x, y)u + \partial_2 f(x, y)v$$

$$\begin{aligned} |v_1| &\geq |\partial_2 f(x, y)||v| \left(1 - \frac{|\partial_1 f(x, y)||u|}{|\partial_2 f(x, y)||v|}\right) \\ &\geq |\partial_2 f(x, y)||v| \left(1 - \frac{|\partial_1 f(x, y)|}{|\partial_2 f(x, y)|}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\mu\sqrt{b-ak}}{b} \leq x^2, y^2 \leq \frac{4a\mu}{\Delta} \quad (3.3)$$

donde  $k = 1 - c\sqrt{\frac{a}{\Delta(b-a)}}$

$$\left| \frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)} \right| = \frac{|2ax + cy + d|}{|2by + cx + e|} \leq \frac{2a|x| + |c||y| + |d|}{2b|y| - |c||x| - |e|}$$

Veamos que:

$$2b|y| - |c||x| - |e| = 2b|y| \left(1 - \frac{|c||x|}{2b|y|} - \frac{|e|}{2b|y|}\right)$$

por (1.4)

$$\frac{x^2}{y^2} \geq \frac{\mu k \frac{\sqrt{b-a}}{b}}{\frac{4a}{\Delta}\mu} = \frac{k\Delta\sqrt{b-a}}{4ab} \quad \text{para } b \gg a, |c|$$

Tenemos que  $\frac{|c||x|}{2b|y|} \rightarrow 0$  y para  $\mu$  suficientemente grande ( $u \rightarrow +\infty$ )

$$\frac{|e|}{2b|y|} \rightarrow 0$$

Así, asintóticamente tenemos:

$$2b|y| - |c||x| - |e| \geq 2b|y| \left(1 - \frac{k|c|\Delta\sqrt{b-a}}{8ab^2}\right) > b|y| \quad \text{si } b \gg a, |c|$$

por lo que:

$$\left| \frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)} \right| \leq \frac{2a|x| + |c||y| + |d|}{b|y|} = 2 \frac{|a||x|}{b|y|} + \frac{|c|}{b} + \frac{|c|}{b|y|}$$

u suficientemente grande ( $u \rightarrow +\infty$ ),  $b \gg |c|$  y por (1.4) se tiene

$$\left| \frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)} \right| < \frac{1}{4}$$

$$|v_1| \geq |\partial_2 f(x, y)| |u_1| \left(1 - \frac{1}{4}\right) = |\partial_2 f(x, y)| |u_1| \frac{3}{4}$$

Por lo que,

$$|u_1| \leq \frac{4}{3|\partial_2 f(x, y)|} |v_1|$$

Como  $|\partial_2 f(x, y)| \rightarrow +\infty$  cuando  $u \rightarrow +\infty$  se tiene:

1.  $D_p F_\mu(w) \in V_{1/2}(p)$ ,
  2.  $\|D_p F_\mu(w)\| \geq 2\|(u_1, w_1)\|$
- $\forall n \geq 1, V^n = D_{z_n} F^n(V(z_n))$

□

### 3.3. Construcción Topológica Parcial de $\tilde{\Lambda}_\mu$

$$\tilde{\Lambda}_\mu = \bigcup_{n \geq 0} F_\mu^n(C_\mu) = \bigcap_{n \geq 1} C_\mu^n$$

$$C_\mu^1 = F_\mu(C_\mu) \cap C_\mu$$

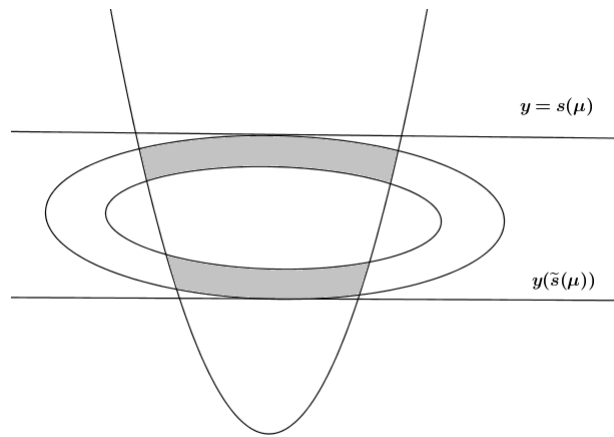
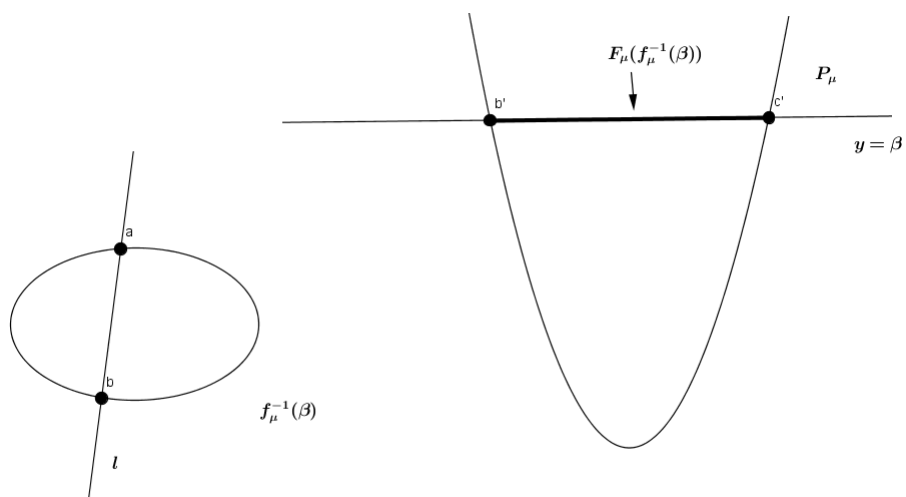


Gráfico 20

$$F_\mu(f_\mu^{-1}(\beta)) \subset \overline{\text{int}(P_\mu)} \cap \{y = \beta\}$$

$$\beta \in I_\mu$$



Por lo tanto,

$$C_\mu^1 = \{(x, y) \in \overline{\text{int}(P_\mu)} : \tilde{s}(\mu) \leq y \leq s(\mu)\}$$

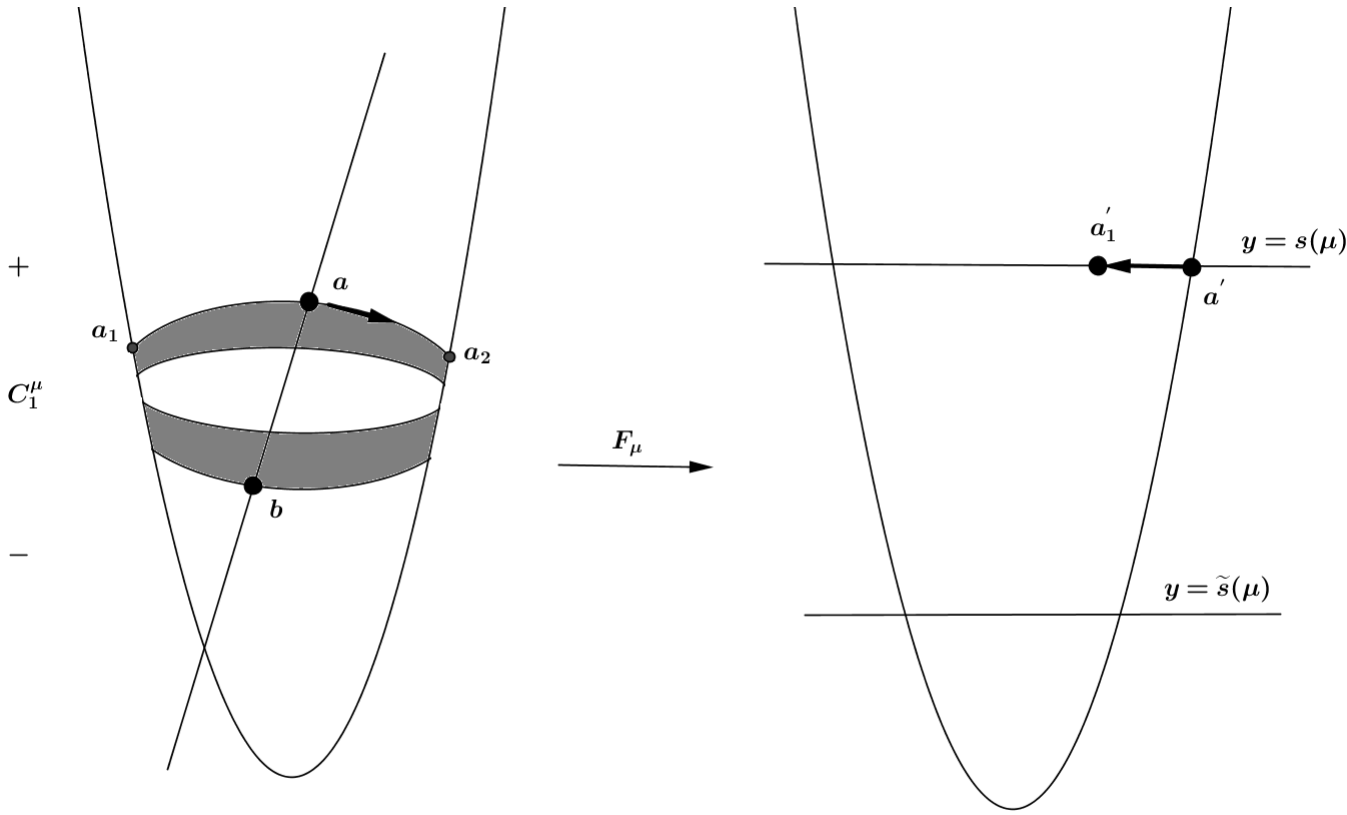


Gráfico 22

$$F_\mu(\overline{a_1 a_2}) = \overline{a'_1 a'}$$

En general:

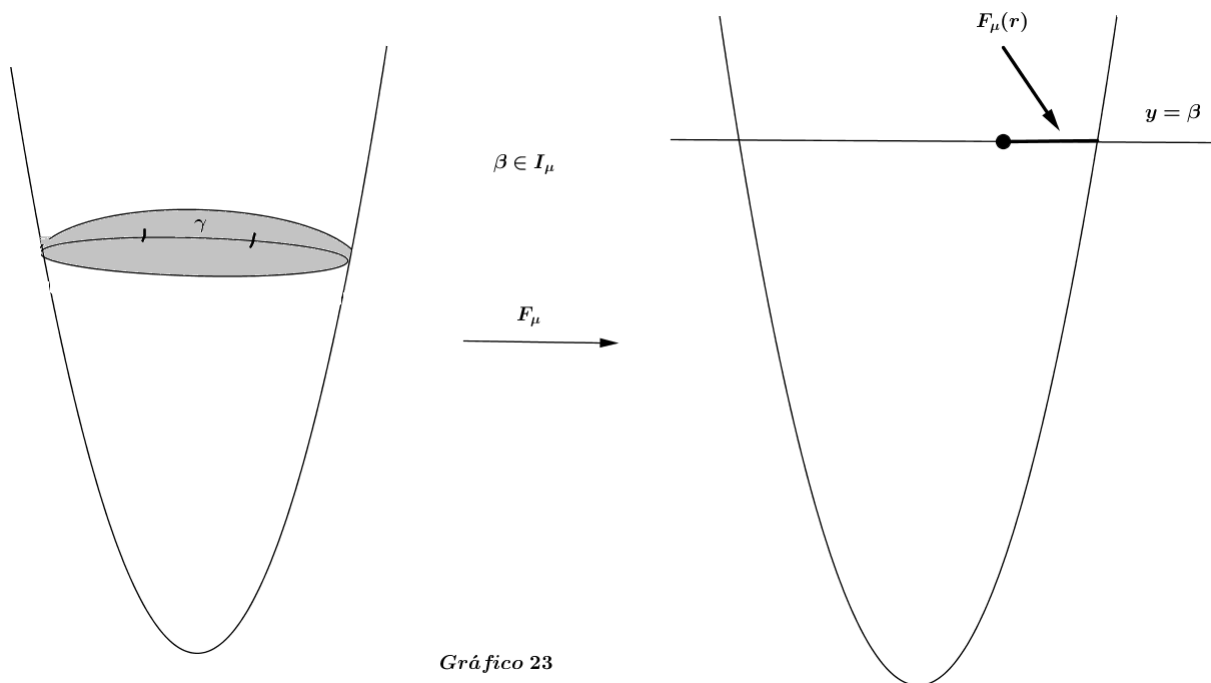


Gráfico 23

$$\gamma \subset f_\mu^{-1}(\beta), \quad sg\pi_2(\gamma) > 0$$

Por lo tanto,  $C_\mu^1 \rightarrow F_\mu(C_\mu^1)$

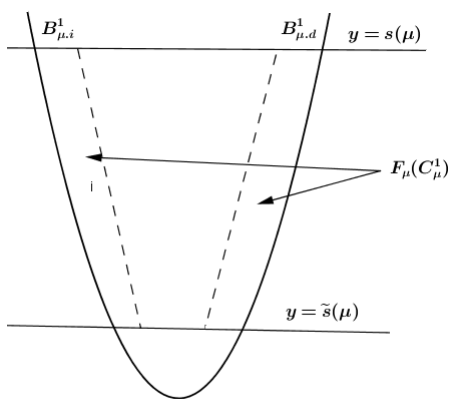


Gráfico 24

$$F_\mu(C_\mu^1) = B_{\mu,i}^1 \cup B_{\mu,d}^2$$

Así,

$$\begin{aligned}
C_\mu^2 &= F_\mu(C_\mu^1 \cap C_\mu) \\
&= C_{\mu,i,+}^1 \cup C_{\mu,i,-}^1 \cup C_{\mu,d,+}^1 \cup C_{\mu,d,-}^1 \\
&= \bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,k}^1
\end{aligned}$$

Por recurrencia tenemos:

(a)

$$\begin{aligned}
C_\mu^n &= F_\mu(C_\mu^{n-1}) \cap C_\mu, \quad n \geq 2 \\
&= \bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,k}^n
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
F_\mu\left(\bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,+}^n\right) &= B_{\mu,d}^{n+1} \\
F_\mu\left(\bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,-}^n\right) &= B_{\mu,i}^{n+1}
\end{aligned}$$

i.e.

$$F_\mu(C_\mu^n) = \bigcup_{j \in \{i,d\}} B_{\mu,j}^{n+1}$$

Cada  $B_{\mu,j}^n$  es una banda verical desde  $y = \tilde{s}(\mu)$  hasta  $y = s(\mu)$  contenido propiamente en  $B^{n-1}$ .

$$(B_{\mu,i}^n)_{n \geq 1}, \quad (B_{\mu,d}^n)_{n \geq 1}$$

encajadas

$$B_{\mu,j}^\infty = \bigcap_{n \geq 0} B_{\mu,j}^n, \quad j \in \{i, d\}$$

Así

$$\bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(C_\mu) = \bigcap_{n \geq 1} C_\mu^n$$

Luego,

$$F_\mu(C_\mu^n \cap \{y > 0\}) = B_{\mu,+}^{n+1}$$

$$F_\mu(C_\mu^n \cap \{y < 0\}) = B_{\mu,-}^{n+1}$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{n \geq 1} C_\mu^n = \bigcup_{j \in \{i,d\}} \left( \bigcap_{n \geq 1} C_{\mu,j,k}^n \right)$$

Para cada  $j \in \{i, d\}$  y  $k \in \{+, -\}$

$$C_{\mu,j,k}^{m+1} \subset C_{\mu,j,k}^m$$

y cada  $C_{\mu,j,k}^n$  tiene tope inferior en  $f_\mu^{-1}(\tilde{s}(\mu))$  y superior en  $F_\mu^{-1}(s(\mu))$ , además

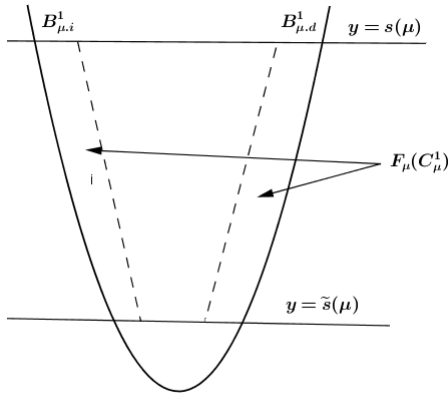


Gráfico 24

$$F_\mu \left( \bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,+}^n \right) = B_{\mu,d}^{n+1}; F_\mu \left( \bigcup_{j \in \{i,d\}} C_{\mu,j,-}^n \right) = B_{\mu,i}^{n+1} \quad (3.4)$$

**Afirmación:**

$\forall j \in \{i, d\}, \forall k \in \{+, -\}, S_{\mu,j,k} = \bigcap_{n \geq 1} C_{\mu,j,k}^n$  es una curva que va desde  $f_\mu^{-1}(\tilde{s}(\mu))$  a  $f_\mu^{-1}(s(\mu))$ .

Notese que de (3.5)

$$F_\mu \left( \bigcup_{j \in \{i,d\}} S_{\mu,j,+} \right) = B_{\mu,d}^\infty; F_\mu \left( \bigcup_{j \in \{i,d\}} S_{\mu,j,-} \right) = B_{\mu,i}^\infty \quad (3.5)$$

Supongamos que  $\bigcap_{n \geq 1} C_{\mu,d,+}^n$  los bordes laterales no colapsan, esto equivale a que en cierta horizontal  $y = \beta$  con  $\beta \in I_\mu$ ,  $B_{\mu,d}^\infty$  tiene separados los

bordes laterales (esto sigue de (3.5)).

Notación:  $\forall j \in \{i, d\}, \forall k \in \{-, +\}$ :

$$S_{\mu,j,k} = \delta_{j,k}^i \cup \delta_{j,k}^d \cup R_{\mu,j,k}$$

donde  $\delta_{j,k}^i$  es el borde lateral izquierdo,  $\delta_{j,k}^d$  es el borde lateral derecho y  $R_{\mu,j,k}$  es el conujunto de pedazos de curva de nivel  $f_\mu$  donde  $\delta_{j,k}^i$  es distinto de  $\delta_{j,k}^d$

**Proposición 3.1.**  $R_{\mu,j,k} = \emptyset$

*Demostración. Afirmación:*

Si  $\gamma$  es una curva regular contenida en  $S_{\mu,j,k}$  tiene tangentes en los conos horizontales, entonces  $l(\gamma) < \infty$  ( $l(\gamma) =$  longitud de arco).

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

$$\gamma'(t) \in H(\gamma(t))$$

es decir,

$$|\gamma_2'(t)| \leq |\gamma_1'(t)|$$

De aqui, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2} dt &\leq \int_0^1 \sqrt{2} |\gamma_1'(t)| dt \\ &\leq \sqrt{2} |\gamma(0) - \gamma(1)| \\ &\leq \sqrt{2} L \quad (L = \max d(p, q); p \in \delta^i, q \in \delta^d) \end{aligned}$$

Supongamos que  $R_{\mu,j,k} \neq \emptyset$ . Tomamos  $p \in R_{\mu,j,k}$   $\gamma$  un pedazo de una curva de nivel de  $f_\mu$  contenido en  $R_{\mu,j,k}$  y conteniendo a  $p$ .

Entonces  $\gamma'(t) \in$  conos horizontales.



$$G_{\mu}^{-}(S_{\mu,d,+}) \subset S_{\mu,i,+}$$

$$G_{\mu}^{-}(S_{\mu,d,+}) \subset S_{\mu,i,+}$$

$$G_{\mu}^{+}(\gamma) = \gamma_1,$$

$$(G_{\mu}^{+})^n(\gamma) = \gamma_n \subset S_{\mu,d,+}$$

con extremos  $\gamma^i, \gamma^d$

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \in H(\gamma(t)) &\Rightarrow \gamma'(t) \in H(\gamma_n(t)), \forall t \\ &\Rightarrow l(\gamma_n) < \sqrt{2}l\forall n. \end{aligned}$$

Luego,

$$l(\gamma_n) = l(G_{\mu}^{+}(\gamma_{n-1})) = \int_0^1 \|D_{\gamma_{n-1}} G_{\mu}^{+}(\gamma'_{n-1}) dt\|$$

Para  $n$  suficientemente grande,  $l(\gamma_n) \rightarrow +\infty$  y por otra parte  $l(\gamma_n) < \sqrt{2}l$  Contradicción.

□

### 3.4. Hiperbolicidad del conjunto no errante

En las secciones anteriores hemos analizado la estructura topológica tanto del conjunto  $\Lambda_{\mu}$  de puntos con órbita positiva acotada, como el conjunto  $\tilde{\Lambda}_{\mu}$  formado por los puntos en  $C_{\mu}$ ; es decir, el conjunto de puntos  $x$  tales que

$$\bigcup_{n \geq 0} F_{\mu}^{-n}(x) \subset C_{\mu}$$

De allí se deduce claramente que el conjunto no errante  $\Omega_{\mu}$  de  $F_{\mu}$  es la intersección  $\Lambda_{\mu} \cap \tilde{\Lambda}_{\mu}$  que es un compacto no vacío  $F_{\mu}$  invariante ( $F_{\mu}(\Omega_{\mu}) = \Omega_{\mu}$ ) con  $F_{\mu}^{-1}(\Omega_{\mu}) = \Omega_{\mu}$ .

$$A_\mu^p = \bigcap_{n \geq 0} A_\mu^{p(0) \dots p(n)}$$

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu) = \bigcup_{p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} A_\mu^p$$

$$x \in \Lambda_\mu \Leftrightarrow \exists! p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / \forall n \geq 0 F_\mu^n(x) \in A_\mu^{p(n)}$$

$$F_\mu^{-1}(A_\mu^0) = A_\mu^{00} \cup A_\mu^{10}$$

$$F_\mu^{-1}(A_\mu^1) = A_\mu^{01} \cup A_\mu^{11}$$

$$A_\mu^{ij} = \{x / x \in A_\mu^i, F_\mu(x) \in A_\mu^j\}$$

En general:

$$\begin{cases} A_\mu^{i_0 \dots i_n} = \{x : F_\mu^j(x) \in A_\mu^{i_j}, 0 \leq i, j \leq n \\ F_\mu(A_\mu^{i_0 \dots i_n}) \subset A_\mu^{i_1 \dots i_n} \end{cases}$$

Por otra parte

$$\tilde{\Lambda}_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(C_\mu^n) = \bigcup_{j \in \{i,d\}} S_{\mu,j,k}$$

$$\begin{cases} C_\mu^1 = F(C_\mu) \cap C_\mu \\ C_\mu^n = F(C_\mu^{n-1}) \cap C_\mu \end{cases}$$

$$B_{\mu,k}^{n+1} \subset B_{\mu,k}^n$$

$$S_{\mu,j,k}^{n+1} \subset S_{\mu,j,k}^n$$

$$S_{\mu,j,k} = \bigcap_{n \geq 1} S_{\mu,j,k}^n; \quad B_{\mu,k} = \bigcap_{n \geq 1} B_{\mu,k}^n$$

Para cada  $p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , el conjunto

$$A_\mu^p = \bigcap_{n \geq 0} A_\mu^{p(0) \dots p(n)}$$

intersecta  $\Omega_\mu$  en cuatro partes disjuntas:

$$A_\mu^p \cap \Omega_\mu = \bigcup_{j \in \{i, d\}} (A_\mu^p \cap S_{\mu, j, k})$$

**Lema 3.2.** *Para cada  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $j \in \{i, d\}$  y  $k \in \{+, -\}$  se tiene:  $\text{card}(A_\mu^p \cap S_{\mu, j, k}) = 1$*

*Demostración.* Dado que las tangentes de cada curva  $S_{\mu, j, k}$  están en los conos verticales, las ramas de la inversa de  $F_\mu$  restringidas a estos conjuntos contraen diámetro.

Sean  $B_{\mu, i}$  y  $B_{\mu, d}$  los límites de las bandas verticales cuando se hizo la construcción de los  $C_\mu^n$  ( $n \geq 1$ ); como sabemos estas son curvas a diferentes lados de la línea crítica, con extremos en las rectas horizontales  $y = \tilde{s}(\mu)$  y  $y = s(\mu)$ .

Por construcción tenemos:

- (a)  $S_{\mu, j, +} \cup S_{\mu, j, -} \subset B_{\mu, j}$ ;  $j \in \{i, d\}$
- (b)  $\begin{cases} F_\mu(S_{\mu, j, +} \cup S_{\mu, d, +}) = B_{\mu, +} \\ F_\mu(S_{\mu, i, -} \cup S_{\mu, d, +}) = B_{\mu, -} \end{cases}$

Por tanto,

$$\begin{cases} F_\mu(S_{\mu, i, +} \cup S_{\mu, d, +}) \cap C_\mu = S_{\mu, d, -} \cup S_{\mu, d, +} \\ F_\mu(S_{\mu, i, -} \cup S_{\mu, d, +}) \cap C_\mu = S_{\mu, i, -} \cup S_{\mu, i, +} \end{cases}$$

Dado que  $DF_\mu$  expande con tasa mayor que 2 en los conos verticales sobre cada  $S_{\mu, j, k}$  tenemos que cualquier rama  $F_\mu^{-1}$  contrae con tasa menor que  $\frac{1}{2}$ . Sean  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  tal que si  $S$  es cualquier arco en alguna de las curvas  $S_{\mu, j, k}$  y  $G$  es una rama de la inversa, entonces

$$\text{diam}(G|S) \leq \lambda \text{diam}(S)$$

Denotemos por  $U_{\mu, 0}$  y  $U_{\mu, 1}$  los subconjuntos en  $C_\mu \cap P_\mu$  tales que:

- \*  $C_\mu \cap P_\mu = U_{\mu, 0} \cup U_{\mu, 1}$
- \* las ordenadas de los puntos en  $U_{\mu, 0}$  son positivas y las de  $U_{\mu, 1}$  negativas, para todo  $\mu$  suficientemente grande.

Note que:

$$A_\mu^j = F_\mu^{-1}(U_{\mu,j}); \quad j = 0, 1$$

Tomemos  $p_0, p_1 \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \{i, d\}$  y  $k \in \{+, -\}$  cualesquiera.

Luego,

$$A_\mu^{p_0 p_1} = F_\mu^{-1}(A_\mu^{p_1} \cup U_{\mu, p_0})$$

Además, existe una única rama  $G_j$  de  $F_\mu^{-1}$  y una curva  $s \in \{s_{\mu,j,k} : j \in \{i, d\}, k \in \{+, -\}\} = \mathcal{S}$  tal que:

$$A_\mu^{p_0 p_1} \cap S_{\mu,j,k} = G_j(A_\mu^{p_1} \cap \mathcal{S})$$

Por lo que

$$\text{diam}(A_\mu^{p_0 p_1} \cap S_{\mu,j,k}) < \frac{1}{2}$$

$$\text{máx}\{\text{diam}(A_\mu^p \cap S) : p \in \{0, 1\} \text{ y } S \in \mathcal{S}\}$$

Por recurrencia sigue que

$$\text{diam}(A_\mu^{p_0 \dots p_n} \cap S_{\mu,j,k}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto

$$\text{card}(A_\mu^p \cap S_{\mu,j,k}) = 1$$

□

**Teorema 3.2.**  $F_\mu|_{\Omega_\mu}$  es topológicamente conjugado a 2-shift unilaterales

*Demostración.* Sabemos que cada punto en  $\tilde{\Lambda}_\mu$  tiene un itinerario  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  en términos de los anillos  $A_\mu^0$  y  $A_\mu^1$ ; de hecho

$$x \in \tilde{\Lambda} \text{ es tal que } F_\mu^n(x) \in A_\mu^{p(n)} \text{ sii}$$

$$x \in A_\mu^{p_0} \cup A_\mu^{p_0 p_1} \cup \dots \cup A_\mu^{p_0 \dots p_n} \cup \dots = A_p \text{ con } p = (p_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Para cada  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  existen exactamente cuatro puntos en  $\Omega_\mu$ ,  $(A_\mu^p \cap \Omega_\mu)$  cuyo itinerario es  $p$ .

Para proceder a demostrar que  $F_\mu|_{\Omega_\mu}$  es topológicamente conjugado a 2-shift unilaterales hagamos lo siguiente:

Sean:

$$S_{\mu,i} = S_{\mu,i,-} \cup S_{\mu,i,+}$$

$$S_{\mu,i} = S_{\mu,i,-} \cup S_{\mu,i,+}$$

$$(S_{\mu,j} = S_{\mu,j,-} \cup S_{\mu,j,+}, j \in \{d, i\})$$

Note que:

1.  $\Omega_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(S_{\mu,i} \cup S_{\mu,d})$
2. Cada pieza de  $S_{\mu,i}$  tiene una preimagen en  $S_{\mu,i,-}$  y otra en  $S_{\mu,d,-}$ ; mientras que las piezas de  $S_{\mu,d}$  tienen una preimagen en  $S_{\mu,i,+}$  y otra en  $S_{\mu,d,+}$ .

Así que  $F_\mu^{-1}(S_{\mu,j})$  tiene una parte en  $S_{\mu,i}$  y otra  $S_{\mu,d}$  cualquiera sea  $j \in \{i, d\}$

$$F_\mu^{-1}(S_{\mu,j}) = S_{\mu,i,j} \cup S_{\mu,d,j}$$

donde

$$S_{\mu,l,d} \subset S_{\mu,l} \text{ y } F_\mu(S_{\mu,l,j}) = S_{\mu,j}, \forall l, j \in \{i, d\} \quad (3.6)$$

$S_{\mu,j}$  tiene dos piezas ( $S_{\mu,j,-}$  y  $S_{\mu,j,+}$ ).

$S_{\mu,l,j}$  también tiene dos piezas y el diámetro de cualquiera de ellas es menor que  $\frac{1}{2}$  por el máximo del diámetro de las piezas en  $S_{\mu,j}$ .

Con ello tenemos el clásico árbol de Cantor:

Así,

$$\Omega_\mu = \bigcap_{p \in \{i,d\}^{\mathbb{N}}} S_{\mu,p}$$

$$S_{\mu,p} = S_{\mu p_0} \cap S_{\mu p(0)p(1)} \cap \dots = \{x_p\}$$

el cual es punto (por (1.7)).

$$x \xrightarrow{\varphi} \varphi(x)$$

$$\Omega_\mu \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$\varphi(x) = p$  si  $p$  es el itinerario en  $S_{\mu,i}$  y  $S_{\mu,d}$ .  $\varphi$  es un homeomorfismo que conjuga  $F_\mu|_{\Omega_\mu}$  y el 2-shift unilateral.

□

### 3.5. Variedades estables

Examinaremos ahora las variedades estables de puntos en el conjunto no errante  $\Omega_\mu$ . Sabemos que cada curva  $S_{\mu,j,k}$  ( $j \in \{i, d\}, k \in \{-, +\}$ ) en  $\tilde{\Lambda}_\mu$  es el limite de los bordes laterales de la componente de los conjuntos  $C_\mu^n$   $n \geq 1$ , a la cual pertenece. Por construcción, los bordes laterales de las componentes de cada  $C_\mu^n$  ( $n \geq 1$ ) son mapeados recursivamente en los bordes laterales de las bandas verticales mediante las cuales se obtuvieron los conjuntos  $C_\mu^n$ .

Dado que para cada  $p \in \Omega_\mu$ , su variedad estable local  $W_{loc}^s(p)$  interseca transversalmente (en  $p$ ) a la curva  $S_{\mu,j,k}$  que contiene a  $p$  (por compacidad), podemos escoger  $n_0 \geq 1$  tal que para cada  $p \in \Omega_\mu$ ,  $W_{loc}^s(p)$  atraviesa transversalmente los bordes laterales de cada pieza de  $C_\mu^n$ , cualquiera sea  $n \geq n_0$ , que contiene a  $p$ . De acá que si  $k \geq 1$  es cualquier entero suficientemente grande, entonces  $F_\mu^{-k+1}(W_{loc}^s(F_\mu^k(p)))$  contiene una curva pasando por  $F_\mu(p)$  cuyos extremos están a diferentes lados de la línea crítica  $l$  y sobre la parábola  $P_\mu$ :  $S$  es la componente de  $\tilde{\Lambda}_\mu$  que contiene a  $F_\mu(p)$  y  $S'$  es la que contiene a  $F_\mu(p)$  (comentario de la figura que va aquí)

Sigue por tanto que  $F_\mu^{-k}(W_{loc}^s(F_\mu^k(p)))$ , que es parte de  $W^s(p)$ , contiene una curva simple cerrada que interseca exactamente cada  $S_{\mu,j,k}$  en un único punto; esto es consecuencia de lo anterior y el hecho de que:

$$F_\mu^{-1}(F_\mu^{-k+1}(W_{loc}^s(F_\mu^k(p)))) = F_\mu^{-k}(W_{loc}^s(F_\mu^k(p)))$$

y

$$W^s(p) = \bigcup_{k \geq 0} F_\mu^{-k}(W_{loc}^s(F_\mu^k(p)))$$

Ahora tomemos  $r > 0$  tal que para cada  $p \in \Omega_\mu$ . Si  $q \in \mathbb{R}^2$  cumple  $d(F_\mu^k(p), F_\mu^k(q)) \leq r$  para todo  $k \geq 0$ , entonces  $q \in W_{loc}^s(p)$ . En vista que  $\text{card}(A_\mu^p \cap \Omega_\mu) = 4$  (un punto por cada pieza  $S_{\mu,j,k}$ ) cualquiera sea  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , podemos escoger  $n_1 \geq 1$  de forma que para todo  $n \geq n_1$  y cada  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  se tiene que la intersección de  $A_\mu^p$  con cada componente de  $C_\mu^n$  está contenida en una bola de radio  $r$  y centrada en uno de los 4 puntos de  $A_\mu^p \cap \Omega_\mu$ . Consideremos cualquier  $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  y cualquier punto  $p \in A_\mu^p \cap \Omega_\mu$  contenido en la bola  $B_r(p)$  por la construcción de los conjuntos  $A_\mu^p$  y  $C_\mu^n$  se tiene que

$$F_\mu^k(A) \subset B_r(F_\mu^k(p)), \quad \text{para todo } k \geq 0;$$

esto obviamente implica que  $A \subset W_{loc}^s(p)$ ; de hecho  $A$  es un arco en  $W_{loc}^s(p)$  conteniendo a  $p$  en su interior. Por tanto, podemos considerar a  $A$  como la

propia variedad estable local  $W_{loc}^s(p)$ . De esta discusión se concluye que  $A_\mu^p$  es la componente conexa de  $W^s(p)$  que contiene a  $p$ . De allí que  $\Lambda_\mu$  sea el producto de un conjunto de Cantor ( $\Omega_\mu$  en este caso) y  $S^1$ .





# Referencias

- [1] L. A. Bunimovich (2005). Coupled Map Lattices: at the Age of Maturity, *Lect. Notes Phys.* **671**, 9–32.
- [2] I. Frøyland (1983). Some symmetric, two-dimensional, dissipative maps. *Physica D.* **8**, 423–434.
- [3] K. Kaneko (1993). *Theory and Applications of Coupled Map Lattices (Nonlinear Science: Theory and Applications)*. John Wiley & Sons, New York. ISBN 0–471–93741–X
- [4] P. Lind (2003). *Pattern Formation in Diffusive-Aective Networks of Discrete-Time Oscillators*. PhD Thesis, University of Lisbon.
- [5] J. G. Learned (2001). The atmospheric neutrino anomaly: muon neutrino disappearance, 89–130. En: Caldwell, E.O. et al. (eds.). *Current aspects of neutrino physics*. Springer, Berlin. ISBN 2–351–23141–0
- [6] P. Silas, J. R. Yates and P. D. Haynes (2008) Density-functional investigation of the rhombohedral to simple cubic phase transition of arsenic. Preprint. (opcional:) Disponible en <http://arxiv.org/abs/0810.1692>
- [7] European Space Agency. (2008) ESA: Missions, Earth Observation: ENVISAT. Disponible en: <http://envisat.esa.int/> [Accedido 3 Julio 2008]
- [8] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Bounded Solutions of Quadratic Circulant Difference Equations*. Journal of Difference Equation and Applications. Vol. **11(10)**. 897-907, (2005).
- [9] V.A. Dobryn'skii, *On semi-unimodal maps of the plane and the structure of their sets of nonwandering points*, Izv. Math. Vol **61:5**, 899-931 (1997).

- [10] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Undergraduate texts in mathematics. 3rd ed. Springer-Verlag. New York, (2005).
- [11] M. Hénon, *A two dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. Vol **50**, 69-77 (1976).
- [12] M. Jonsson, *Hyperbolic dynamics for endomorphisms*. Preprint University of Michigan (1997), 16 pages.  
<http://www.math.lsa.umich.edu/~mattiasj/notes/hypend.pdf>
- [13] V.L. Kocic and G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Kluwer Academic, Dordrecht (1993).
- [14] Y. Kuang and J. Cushing. *Global stability in a nonlinear difference-delay equation model of flour beetle population growth*. J. Difference Equ. Appl. Vol **2**(1), 31-37, (1996).
- [15] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J. Cathala, *Chaotic Dynamics in 2-dimensional Noninvertible Maps*. World Scientific Publ. Co. Nonlinear Sciences, Series A, Singapore (1996).
- [16] P. Montel. *Leçons sur les Récurrences et leurs Applications*. Gauthier Vilars, (1957).
- [17] S. Newhouse, *Cone-fields, Domination and Hyperbolicity*. In Modern dynamical systems and applications, 419-432. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [18] N. Romero. *Dinámica de Endomorfismos Convexos*. Proceeding del III Coloquio sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Vol **II**. 5-10, (1997).
- [19] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Endomorfismos convexos con retardo: la dinámica de los cuadráticos de  $\mathbb{R}^2$* . XI Escuela Venezolana de Matemática. Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados – Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, (1998).
- [20] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *On the dynamics of  $n$ -dimensional quadratic endomorphisms*. Commun. Math. Phys. Vol**195**, 295-308 (1998).

- [21] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Invariant manifolds for delay endomorphisms*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. **7(1)**, 35-50 (2001).
- [22] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Perturbations of the quadratic family of order two*. Nonlinearity, Vol. **14**, 1633-1652 (2001).
- [23] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Dynamics of vertical delay endomorphisms*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. Vol. **3(3)**, 409-422 (2003).
- [24] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó. *Perturbations of the quadratic family of order two: the boundary of hyperbolicity*. Nonlinearity, Vol. **22**, 1145-1165 (2009).
- [25] A. Rovella & F. Vilamajó. *Convex Delay Endomorphisms*. Commun. Math. Phys. **174**, 393-407 (1995).
- [26] J. Silva. *Acerca de la dinámica de endomorfismos con retardo del tipo horizontal*. Tesis Doctoral en Matemática, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Abril, 2016.
- [27] D. Whitley, *On the Periodic Points of a Two-Parameter Family of Maps of the Plane*, Acta Appl. Math. Vol **5**, 79-311 (1986).
- [28] W.B. Zhang, *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 204. Elsevier Science (2006).
- [29] Z. Zhou and J. Wu. Attractive Periodic Orbits in Nonlinear Discrete-time Neural Networks with Delayed Feedback. *J. Difference. Equ. and Appl.* Vol. **8**, 467-483 (2001).