

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
COORDINACIÓN DE POSTGRADO



Campos Vectoriales sobre Paredes de Dominio bajo Acoplamientos no
Convencionales

Autor: Juan C. La Cruz V.
Tutor: Rafael O. Rodriguez.

Trabajo de Grado presentado ante la Ilustre Universidad Centroccidental
“Lisandro Alvarado” como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum
en Ciencias, mención Física-Matemática.

Barquisimeto -Venezuela

Enero 2016

RESUMEN

Se estudia el mecanismo propuesto por Ghoroku-Nakamura [1], el cual radica en localizar campos vectoriales y no de calibre sobre la brana RS [2]. En este sentido, el problema que se concibe, consiste en hacer una revisión del mecanismo generalizado de Ghoroku-Nakamura planteado por Rodriguez y Guerrero [3, 4], en donde se logra mediante un acoplamiento no convencional entre el campo y la pared, localizar los campos de calibre sobre la pared de dominio. Y al reducir dimensionalmente la teoría efectiva cuatro-dimensional corresponde a la teoría de Maxwell desacoplada, mas una torre de campos de Stueckelberg [5, 6].

Índice general

Índice general	II
Introducción	1
1. Paredes de Dominio	5
1.1. Pared de Dominio	5
1.2. Bulk	6
1.3. Soluciones Tipo Pared de Dominio	7
1.3.1. Pared Simple	7
1.3.2. Paredes Dobles	9
2. El Campo Electromagnético	12
2.1. Ecuaciones de Maxwell	12
2.2. Transformación de Calibre	14
3. El Campo de Calibre Libre sobre la Pared	16
3.1. Reducción Dimensional para el Campo de Calibre Libre sobre la Pared . . .	17
4. Campo Vectorial Acoplado a la Pared	22
4.1. Mecanismo de Ghoroku-Nakamura	22
4.2. Acoplamiento $V(\kappa, z)A^2$	24
4.3. Reducción Dimensional	25
5. Campo de Calibre Acoplado a la Pared	29
5.1. Reducción Dimensional	31
Conclusion	33
Bibliografía	35

Introducción

Dentro de la comunidad de la física teórica han venido surgiendo modelos y mecanismos en espaciotiempo de mayor dimensionalidad a las (3+1) dimensiones que se conocen del universo [7]. Todo esto en pro de resolver discrepancia en la teoría, como la generada por problema de jerarquía concebido entre la escala de Planck y la escala electrodébil [8].

En relación con este planteamiento se define un espaciotiempo cinco-dimensional que es llamado Bulk, dentro del cual se encuentra sumergida la pared de dominio cuatro-dimensional [9], que no es mas que un defecto topológico provocado por una fuente de energía altamente concentrada de grosor δ que proviene de un campo escalar, bajo autointeracción. Las paredes de dominio a su vez dan solución al sistema de ecuaciones acoplado Einstein-Campo Escalar, donde el campo escalar es un kink topológico que interpola entre los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial de autointeracción. La brana a diferencia de la pared, no posee grosor $\delta \rightarrow 0$, es decir esta se obtiene como el límite de pared delgada de la estructura de grosor finito.

Ahora bien, uno de los modelos pioneros en este ámbito es el presentado por Randall y Sundrum (RS), [2]. En este se describe un espaciotiempo Minkowskiano (M_4), confinado a una lámina mundo cuatro-dimensional, o tres-brana, el cual se encuentra dentro de un espaciotiempo cinco-dimensional Anti de Sitter (AdS_5), con simetría de reflexión Z_2 , y cuyo tensor métrico g en la variedad R^5 esta dado por

$$g_{mn} = e^{2a(z)}(\eta_{\mu\nu}dx_m^\mu dx_n^\nu + dz_m dz_n) \quad (1)$$

con

$$a(z) = -\ln(1 + \alpha|z|), \quad (2)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ y x^μ , son la métrica y las coordenadas del espaciotiempo cuatro-dimensional y z es la coordenada de la dimensión transversa. La densidad de energía en este escenario viene dada por

$$\rho(z) = \frac{6\alpha\delta(z)}{e^{a(z)}} - 6\alpha^2, \quad (3)$$

en la que se observa sobre la brana en $z = 0$, que existe una alta concentración de energía, mientras que para $z \rightarrow \infty$, se obtiene la densidad de vacío, dada por la constante cosmológica que es $\Lambda = -6\alpha^2$.

Bajo esta configuración los modos que definen al potencial gravitacional entre dos partículas m_1 y m_2 separadas una distancia r sobre la brana, es dado por

$$U(r) = G \frac{m_1 m_2}{r} \left[\Psi_0(0)^2 + \int_0^\infty \Psi_m(0)^2 e^{-mr} dm \right], \quad (4)$$

siendo ψ_0 el modo cero del graviton, el cual se encuentra localizado y tiene por solución $\psi_0 \sim e^{3a(z)/2}$. Este se encuentra ubicado sobre la brana en $z = 0$ y reproduce la gravitación Newtoniana, mientras los modos masivos ψ_m se propagan libremente a lo largo de la dimension adicional y dan las correcciones a dicho potencial.

Cabe considerar, que la localización de otros campos sobre la pared RS, será factible siempre que se pueda obtener los campos asociados del universo cuatro-dimensional conocido sobre la brana, entre los que se encuentran los campos definidos por las interacciones fundamentales.

Por consiguiente unos de los campos asociados a la interacción fundamental, es el campo electromagnético. La fuerza interacción electromagnética sobre la brana RS, puede ser descrita por una lagrangiana tipo Maxwell sin fuente $J^\mu = 0$ en cinco-dimensiones, cuya acción es dada por

$$S_M = \int d^5x \sqrt{g} \mathcal{L}_M, \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}, \quad (5)$$

donde

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a, \quad (6)$$

es el tensor de campo electromagnético. Además el boson vectorial cinco-dimensional A_b no esta unívocamente definido, es decir, no cambian si se escoge otro que difiera del original en el gradiente de un campo escalar

$$A_b(x) \longrightarrow A'_b(x) = A_b(x) + \partial_b \Lambda(x), \quad (7)$$

en la que $\Lambda(x)$ es una función arbitraria. Esta libertad se denomina transformación de calibre, y la invarianza de las ecuaciones de Maxwell respecto a ella se denomina invarianza de calibre del electromagnetismo. La arbitrariedad del boson vectorial A_b se puede fijar de formas alternativas

$$\begin{cases} A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \\ A'_5(x) = A_5(x) + \partial_5 \Lambda(x), \end{cases} \quad (8)$$

en la que se puede pedir que $A_5 = 0$, esto implica que $\partial_5 \Lambda = A'_5$, lo que constituye la llamada fijación de calibre. Así para el propósito de este trabajo se utilizara la fijación del calibre axial nulo, dado por $A_5 = 0$.

De este modo se plantea el problema de reducir dimensionalmente la acción en (5), para verificar si la teoría efectiva cuatro-dimensional concierne a Maxwell, en esta perspectiva se estima solo la contribución del estado base, ψ_0 . Considerando la factorización [10]

$$A_\mu(x, z) \sim a_\mu(x) \psi_0(z), \quad (9)$$

y el calibre axial $A_5 = 0$, se tiene

$$S_M = -\frac{1}{4} \int dz e^{a(z)} \psi_0^2 \int d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int dz e^{a(z)} (\partial_z \psi_0)^2 \int d^4x \eta^{\mu\alpha} a_\mu a_\alpha, \quad (10)$$

en el cual se aprecia que el segundo término contiene un campo masivo dado por a_μ . Como el fotón es un campo de masa nula, debe pedirse que $\partial_z \psi_0 = 0$, así la solución viene como

$\Psi_0 = ctte$. En consecuencia Ψ_0 no es normalizable ya que¹

$$\begin{aligned} \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{a(z)} \Psi_0^2 &= \Psi_0^2 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{a(z)} \\ &= \Psi_0^2 \lim_{y_r \rightarrow \infty} \int_{-y_r}^{y_r} dy \quad (\text{Coordenada Longitud Propia}) \\ &= \Psi_0^2 \lim_{y_r \rightarrow \infty} y \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

De esta manera no es posible reconocer una teoría cuatro-dimensional que concierna al fotón sobre la pared RS, para la acción (5) tipo Maxwell [10].

En tal sentido Ghoroku y Nakamura [1], incorporan términos de acoplamiento no convencionales entre el campo vectorial y la brana, para localizar el modo vectorial no-masivo, asociado al fotón sobre la brana. Este mecanismo propone que la dinámica de un campo vectorial cinco-dimensional, que se propaga en el escenario RS, viene como

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} (m_5^2 - \eta \delta(z)) A_a A^a \quad (12)$$

donde m_5 es la masa y se acopla a la brana en $z = 0$, vía el parámetro η .

El término de acoplamiento en (12) es cuadrático, lo que implica que la teoría no es invariante de calibre² y por ende el modo cero asociado a este mecanismo no corresponde al fotón.

En este trabajo se considera una generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura a paredes de dominio propuesta en [3, 4],

$$\mathcal{L}_{gn} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{2}{3} V(\kappa, z) A_a A^a. \quad (13)$$

Visto de esta forma, la simetría de calibre de la teoría se rompe, ya que el término de acoplamiento es cuadrático para el campo vectorial y el modo cero vinculado a esta generalización sobre la pared de dominio no corresponde al fotón. Para eliminar este inconveniente se propone adicionar dos términos a nivel de la lagrangiana [3, 4], dada por

$$\mathcal{L}'_c = \mathcal{L}_{gn} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z a A^z \partial^c A_c + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) (\partial_z^2 a + (\partial_z a)^2) - \frac{2}{3} V(\kappa, z) e^{2a} \right] (A^z)^2, \quad (14)$$

la cual es invariante bajo la transformación de calibre

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_b \Lambda - \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' \Lambda \delta_b^z, \quad (15)$$

¹El cambio de coordenadas conformes a coordenadas de longitud propia no afecta la física del sistema, este cambio sigue visualizando la misma simetría plano paralela.

² Nótese que el campo de Maxwell no puede ser masivo, ya que un término tipo A^2 rompe la simetría de calibre. Esto es

$$\begin{aligned} A_a A^a \longrightarrow A'_a A'^a &= g^{ab} (A_a + \partial_a \Lambda) (A_b + \partial_b \Lambda) \\ &= g^{ab} (A_a A_b + 2A_a \partial_b \Lambda + \partial_a \Lambda \partial_b \Lambda). \end{aligned}$$

el segundo y tercer término no se puede escribir como una derivada total de manera que diverjan y dejen invariante $A_a A^a$. Por lo tanto no es invariante bajo la transformación de calibre (7).

se reconoce en (14) que bajo el calibre axial $A_z = 0$, la teoría se reduce a Ghoroku-Nakamura y la localización del modo vectorial no masivo esta asociada al fotón, al ser esta teoría invariante de calibre.

Esta monografía esta estructurada en cinco Capítulos. En el Capítulo 1 se presenta la definición de pared de dominio, lográndose encontrar a través del sistema Einstein-Campo Escalar las ecuaciones para el campo escalar, potencial de autointeracción, densidad de energía y presión; de igual manera, se propone un espaciotiempo estático con curvatura AdS₅ sobre el Bulk, para el estudio de una familia de soluciones del tipo pared doble [9]. En los Capítulos 2 y 3 se hace una breve revisión sobre la teoría de Maxwell cuatro-dimensional y se plantea la acción cinco-dimensional tipo Maxwell, comprobándose que bajo reducción a cuatro-dimensiones no es posible identificar a nivel de la acción el modo cero asociado al fotón. Finalmente, en los Capítulos 4 y 5 se presentan el mecanismo de Ghoroku-Nakamura [1], incorporando la simetría de calibre, así como su generalización a través de acoplamientos no convencionales [3, 4]. Posterior a esto se desarrollan las conclusiones respectivas.

En adelante se define el uso de subíndices en letras latinas minúsculas (a, b, c, \dots) para el espaciotiempo cinco-dimensional y letras griegas minúsculas ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) para el espaciotiempo cuatro-dimensional, además $i, j = 1, 2, 3$. También se definen las métricas usadas con signatura positiva $(-, +, +, +, +)$ a menos que se indique lo contrario.

Paredes de Dominio

En este capítulo se presenta las condiciones que sigue una pared de dominio, se analizan dos tipos de soluciones, una en un caso sencillo para ilustrar sus características [11], y otra en el caso de la familia de soluciones llamadas paredes dobles [9].

1.1. Pared de Dominio

Las paredes de dominio son soluciones al sistema Einstein-Campo Escalar, compuesto por

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}, \quad (1.1)$$

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla_d \phi \nabla^d \phi + V(\phi) \right], \quad (1.2)$$

$$\nabla_d \nabla^d \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.3)$$

donde G_{ab} es el Tensor de Einstein; T_{ab} es el Tensor Energía-Impulso que representa la fuente del campo gravitacional dado por el campo escalar ϕ con potencial de autointeracción $V(\phi)$; g_{ab} es el tensor métrico del sistema que representa la geometría del espaciotiempo; R_{ab} es el Tensor de Ricci y R es el escalar de curvatura o escalar de Ricci.

El tensor métrico g , para que el espaciotiempo cinco-dimensional sea dinámico y con simetría plano paralela [12], se describe como

$$g_{ab} = f^2(z)(-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i) + f^2(z) dz_a dz_b, \quad \beta \geq 0, \quad (1.4)$$

donde $e^{2\beta t}$ es el factor de escala o parámetro de expansión del universo. En el caso que $\beta = 0$, la métrica (1.4) es

$$g_{ab} = f^2(z)(-dt_a dt_b + dx_a^i dx_b^i) + f^2(z) dz_a dz_b, \quad (1.5)$$

en esta se estará hablando de un universo estático, el cual sera el objeto de estudio a lo largo del trabajo.

Ahora para encontrar la solución a las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3), se deben cumplir con las siguientes condiciones

1. El campo escalar solo depende de la coordenada adicional z ,

$$\phi = \phi(z) \quad (1.6)$$

2. El campo escalar interpola entre los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial de autointeracción,

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_{\pm}} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \implies \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi(z) = \phi_{\pm}, \quad \phi_{\pm} \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

3. La geometría del espaciotiempo se describe en un sistema de coordenadas cartesiano, en otras palabras se tiene simetría plano paralela.

Dadas estas condiciones y con la métrica (1.5), se construyen las componentes del Tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{f^2} \left(\frac{f''}{f} \right), & G_z^z &= \frac{6}{f^2} \left(\frac{f'^2}{f^2} \right), \\ G_1^1 &= \frac{3}{f^2} \left(\frac{f''}{f} \right), & G_2^2 = G_3^3 &= G_1^1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

y las componentes del Tensor Energía-Impulso

$$\begin{aligned} T_t^t &= -\rho = -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), & T_1^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), \\ T_z^z &= -P = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), & T_2^2 = T_3^3 &= T_1^1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde T_t^t y T_z^z se interpretan como la densidad de energía ρ , y la densidad de presión P con signo opuesto, respectivamente.

Sucede pues, que tomando la suma $G_t^t + G_z^z = T_t^t + T_z^z$, se consigue

$$\phi'^2 = 3 \left[2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} \right], \quad (1.10)$$

y haciendo la resta $G_t^t - G_z^z = T_t^t - T_z^z$, se obtiene

$$V(\phi) = -\frac{3}{2f^2} \left[2 \frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} \right]. \quad (1.11)$$

En efecto, el Sistema Einstein-Campo Escalar se resume en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que vienen dadas por (1.10) y (1.11).

1.2. Bulk

Se llama Bulk al espaciotiempo cinco-dimensional, en el cual se encuentra sumergida la pared de dominio cuatro-dimensional. La pared divide al Bulk en dos sub-espacios, que pueden ser

- Planos, tipo Minkowski.
- De curvatura positiva dS, o de curvatura negativa AdS.

Dicha curvatura puede determinarse calculando el Tensor Energía-Impulso cuando $z \rightarrow \pm\infty$, donde los efectos gravitacionales de la pared son despreciados y sólo permanece la contribución de la energía en el vacío, asociada al espaciotiempo donde está la pared. En (1.2) se anulan los dos primeros términos, cuando se evalúa $z \rightarrow \pm\infty$, dado que el campo escalar ϕ tiende a una constante ϕ_{\pm} , esto es

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} T_{ab} = -g_{ab} \lim_{\phi \rightarrow \phi_{\pm}} V(\phi). \quad (1.12)$$

Al mismo tiempo (1.1) se reduce a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ_{\pm} , así

$$G_{ab} + \Lambda_{\pm} g_{ab} = 0, \quad \Lambda_{\pm} = \lim_{\phi \rightarrow \phi_{\pm}} V(\phi). \quad (1.13)$$

Evidentemente esta última expresión muestra que la curvatura del Bulk también puede ser determinada evaluando el potencial de autointeracción $V(\phi)$ en sus mínimos, en otras palabras, cuando $\phi \rightarrow \phi_{\pm}$.

Vale destacar que las paredes de dominio son regiones del espaciotiempo que poseen curvatura propia diferente de la del Bulk. Para el sector cuatro-dimensional de la métrica (1.4),

$$g_{\mu\nu} = -dt_{\mu}dt_{\nu} + e^{2\beta t} dx_{\mu}^i dx_{\nu}^i, \quad \beta \geq 0, \quad (1.14)$$

calculando las componentes distintas de cero del Tensor de Einstein, se tiene

$$G_{tt} = 3\beta^2, \quad G_{11} = -3\beta^2 e^{2\beta t}, \quad G_{11} = G_{22} = G_{33}, \quad (1.15)$$

la cual se puede escribir como

$$G_{\mu\nu} = -3\beta^2 g_{\mu\nu} \longrightarrow G_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.16)$$

que es la ecuación de Einstein en el vacío con constante cosmológica $\Lambda_0 = 3\beta^2$. Por lo que la curvatura sobre la pared y el Bulk, quedan determinadas por Λ_0 y Λ_{\pm} , es decir, poseen curvatura diferente.

1.3. Soluciones Tipo Pared de Dominio

Para ilustrar las características de las paredes de dominio, se tomara un caso sencillo [11] y luego una familia de soluciones [9], todo esto en el caso estático $\beta = 0$, esto es para la métrica (1.5).

1.3.1. Pared Simple

De la solución reportada en [11], cuyo factor métrico se expresa como

$$f(z) = [1 + (\alpha z)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.17)$$

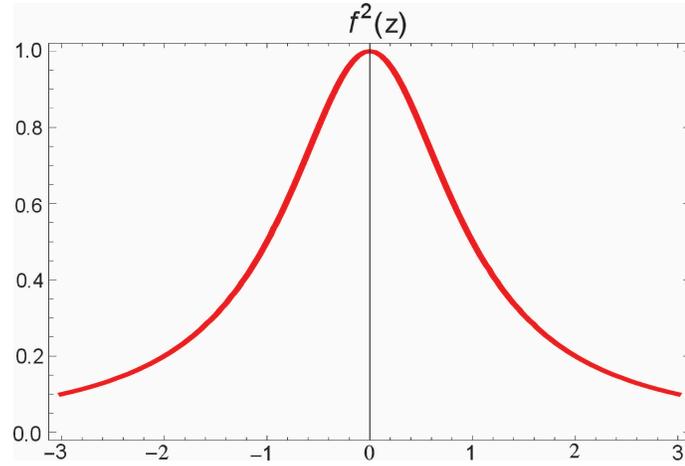


Figura 1.1: Factor Métrico $f^2(z)$.

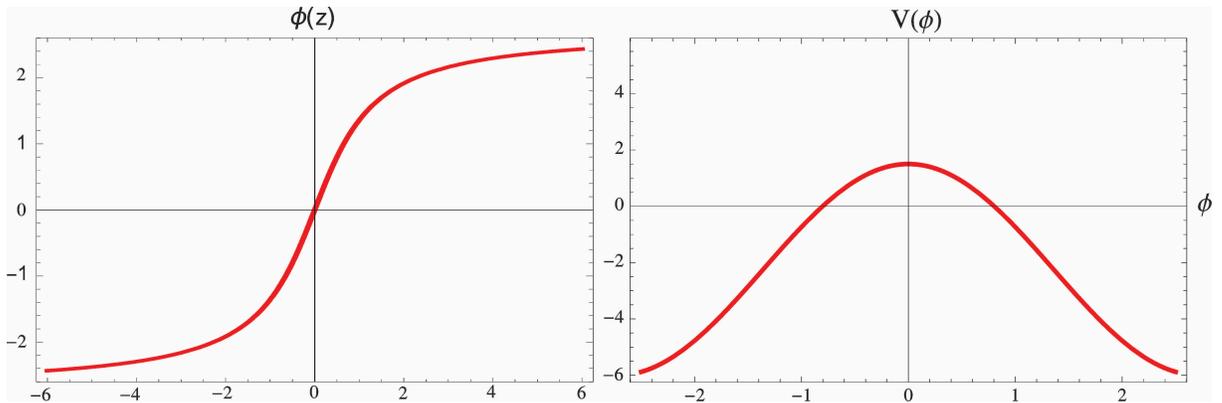


Figura 1.2: Campo Escalar $\phi(z)$ (izquierda) y Potencial de Autointeracción $V(\phi)$ (derecha).

donde α es una constante.

Dentro de este marco se observa que se tiene el comportamiento convencional en forma de campana para f , figura 1.1. Por consiguiente resolviendo (1.10) y (1.11), se obtienen el campo escalar y el potencial de autointeracción

$$\phi(z) = \sqrt{3} \arctan(\alpha z), \quad (1.18)$$

$$V(\phi) = 3\alpha^2 \left[\frac{5}{2} \cos^2(\phi/\sqrt{3}) - 2 \right], \quad (1.19)$$

los cuales se puede ver en la figura 1.2, en donde se percibe que el campo escalar es un kink topológico que interpola entre los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial de autointeracción, o sea que cuando $z \rightarrow \pm\infty$, entonces $\phi \rightarrow \pm \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

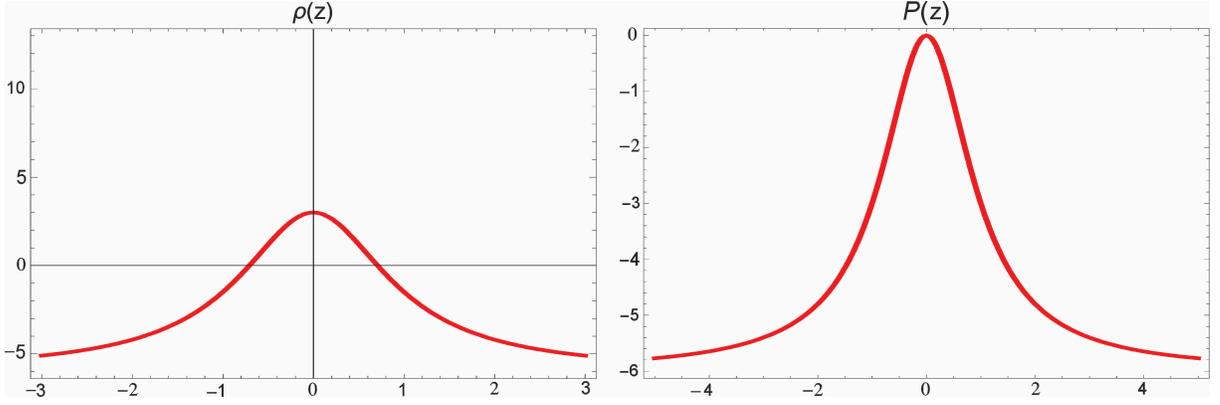


Figura 1.3: Densidad de Energía $\rho(z)$ (izquierda) y Densidad de Presión $P(z)$ (derecha).

De este modo resolviendo (1.9), se halla la densidad de energía y la densidad de presión

$$\rho(z) = -3\alpha^2 \left(\frac{2(\alpha z)^2 - 1}{1 + (\alpha z)^2} \right), \quad (1.20)$$

$$P(z) = \frac{-6\alpha^2}{1 + (\alpha z)^{-2}}, \quad (1.21)$$

ambas presentan una alta concentración de energía alrededor de $z = 0$. Desde la densidad de energía (1.20) se observa que existe una pared de dominio alrededor de este punto, la cual interpola entre dos vacíos AdS₅ con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$, figura 1.3.

1.3.2. Paredes Dobles

En [9], se muestran un conjunto de soluciones tipo pared de dominio, en la que el factor métrico f , es dado como

$$f(z) = [1 + (\alpha z)^{2s}]^{-\frac{1}{2s}}, \quad (1.22)$$

donde α es una constante y s es el parámetro del conjunto de soluciones.

Para los diferentes valores de s , el factor métrico toma la forma acampanada, en particular para $s = 1$ que es la pared discutida en la sección previa, 1.3.1. No obstante, se presenta una región plana alrededor de $z = 0$, para aquellos valores de $s \neq 1$, figura 1.4. Esto apunta que la geometría del espaciotiempo define una estructura interna en los alrededores de este punto.

Con el fin de determinar el campo escalar y el potencial de autointeracción se resuelve (1.10) y (1.11), obteniendo

$$\phi(z) = \phi_0 \arctan(\alpha^s z^s), \quad \phi_0 = \frac{\sqrt{3(2s-1)}}{s}, \quad s = 1, 3, 5 \quad (1.23)$$

$$V(\phi) = 3\alpha^2 \sin^{2-2/s}(\phi/\phi_0) \left[\frac{(2s+3)}{2} \cos^2(\phi/\phi_0) - 2 \right], \quad (1.24)$$

se verifica que el campo escalar interpola entre los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial, para diferentes valores de s , esto es que si $z \rightarrow \pm\infty$, entonces $\phi \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}\phi_0$, siempre

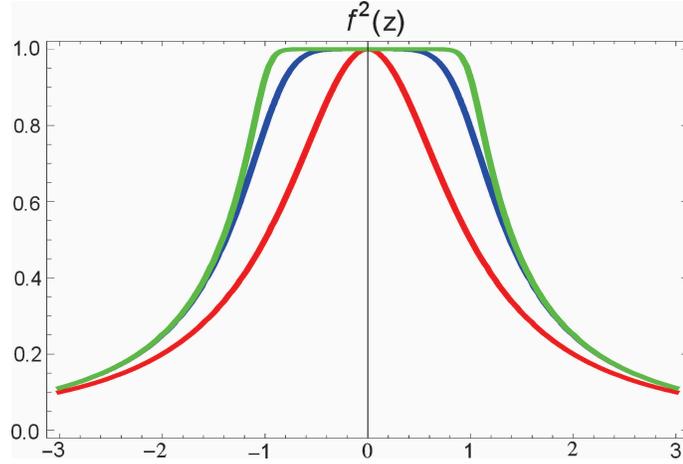


Figura 1.4: Factor Métrico, $f^2(z)$, para $s=1$ (rojo), $s=3$ (azul) y $s=9$ (verde).

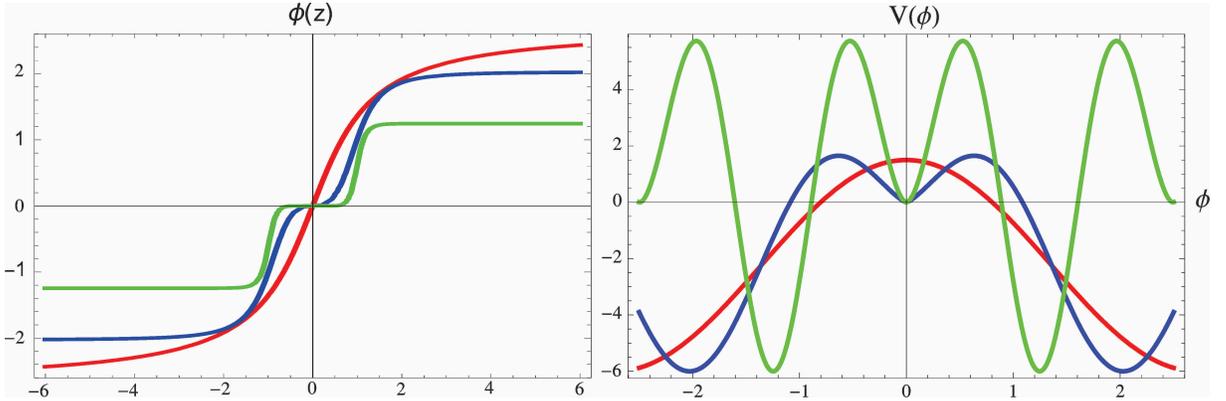


Figura 1.5: Campo Escalar $\phi(z)$ (izquierda) y Potencial de Autointeracción $V(\phi)$ (derecha), ambas para $s = 1$ (rojo), $s = 3$ (azul) y $s = 9$ (verde).

que s pertenezca a los enteros impares positivos, figura 1.5. Esta última condición se desglosa de (1.23), que para $\phi \in \mathbb{R}$, debe ser $s > 1/2$. Asimismo, s debe ser impar para interpolar entre mínimos consecutivos del potencial, ya que el campo pierde la forma tipo kink para los valores pares de s , tendiendo a valores iguales cuando $z \rightarrow \pm\infty$.

Para hallar la densidad de energía y la densidad de presión, se resuelve (1.9), consiguiendo

$$\rho(z) = -6\alpha^2 [1 + (\alpha z)^{-2s}]^{\left(\frac{1}{s}-2\right)} \left[1 + \frac{1-2s}{2} (\alpha z)^{-2s}\right], \quad (1.25)$$

$$P(z) = -6\alpha^2 [1 + (\alpha z)^{-2s}]^{\left(\frac{1}{s}-2\right)}. \quad (1.26)$$

De ahí que cuando $s = 1$, se observa una alta concentración de energía alrededor del origen. Pero para $s \neq 1$, se nota una fuerte concentración de energía en dos lugares cercanos al origen, que se incrementa a medida que s toma dichos valores, figura 1.6. Esto indica que la pared de dominio esta compuesta por dos subparedes paralelas, ya que en sus alrededores posee cierta estructura interna. A este tipo de solución se le conoce como pared doble y se

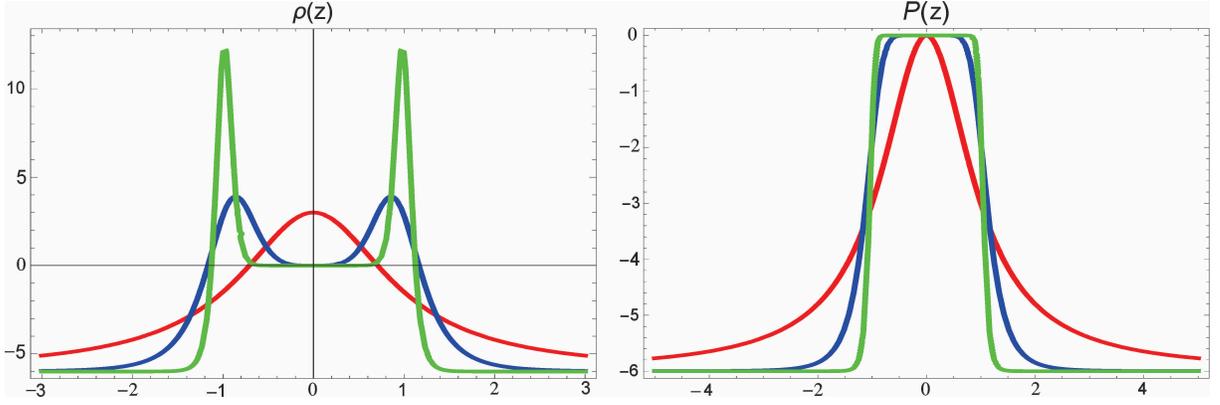


Figura 1.6: Densidad de Energía $\rho(z)$ (izquierda) y Densidad de Presión $P(z)$ (derecha), ambas para $s = 1$ (rojo), $s = 3$ (azul) y $s = 9$ (verde).

establece que cada subpared interpola entre un vacío Minkowskiano y un vacío AdS con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$.

Así se ha verificado que para $s = 1$, el campo presenta una forma tipo kink simple, e interpola suavemente entre los mínimos del potencial, esto es $\pm \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. Pero para aquellos valores impares mayores que uno de s , el campo tiene una forma de kink doble y se encuentra el mínimo local del potencial entre dos mínimos globales. Además, el campo escalar toma valores en el mínimo local en una región cercana al origen; mientras que tiende a los mínimos globales del potencial cuando la coordenada espacial adicional tiende a infinito.

Es importante acotar que las soluciones pared de dominio, representaran un modelo factible de universo cuatro-dimensional, siempre que se pueda encontrar los campos asociados a las fuerzas de interacción fundamental. En adelante, esta monografía se enfocara en el estudio de los campos de calibre sobre paredes de dominio.

El Campo Electromagnético

Debe señalarse que el comportamiento de nuestro universo cuatro-dimensional es regido por las fuerzas de interacción fundamental, es por esto que todo modelo acorde de universo debe contener la fuerza de interacción electromagnética, la cual es transmitida por los fotones. A continuación se presenta la teoría de Maxwell cuatro-dimensional, que describe el comportamiento del campo electromagnético, la cual esta fundamentada por cuatro leyes

- Ley de Gauss para el campo eléctrico.
- Ley de Ampere.
- Ley de Gauss para el campo magnético.
- Ley de Faraday.

También se verificara el principio de conservación de la carga, así como la invarianza de calibre de la cual goza la teoría. Esta última de gran repercusión, ya que permite reconocer cuando un sistema posee en su estructura la teoría de Maxwell.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

El campo electromagnético es representado por el cuadrivector $a^\mu = (\phi, \mathbf{a})$, llamado el potencial de calibre. La fuente de este campo viene dada por la corriente conservada $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ donde ρ y \mathbf{j} son la densidad de carga y de corriente respectivamente. Ahora, si el campo de calibre se propaga libremente en un espaciotiempo cuatro-dimensional de Minkowski, entonces su dinámica es descrita por la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - J_\mu a^\mu, \quad (2.1)$$

donde los componentes del tensor

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu, \quad (2.2)$$

están asociados con los campos eléctricos y magnéticos de la siguiente forma

$$f^{0i} = -E^i, \quad f^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_k. \quad (2.3)$$

La ecuación de movimiento de a_μ , viene dada por

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.4)$$

la cual se deduce de (2.1), como sigue

De la ecuación de Euler-Lagrange

$$\partial^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta a^\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^\alpha}, \quad (2.5)$$

sustituyendo $f_{\mu\nu}$ en la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\nu\sigma} (\partial^\mu a^\sigma - \partial^\sigma a^\mu) (\partial^\lambda a^\nu - \partial^\nu a^\lambda) - J_\lambda a^\lambda, \quad (2.6)$$

desarrollando los términos entre paréntesis y derivando

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^\beta a^\alpha)} (\partial^\mu a^\sigma - \partial^\sigma a^\mu) = \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\sigma - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\mu, \quad (2.7)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^\beta a^\alpha)} (\partial^\lambda a^\nu - \partial^\nu a^\lambda) = \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\nu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\lambda, \quad (2.8)$$

luego derivando en (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta a^\alpha)} &= -\frac{1}{4} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\nu\sigma} (\delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\sigma f^{\lambda\nu} - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\mu f^{\lambda\nu} + \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\nu f^{\mu\sigma} - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\lambda f^{\mu\sigma}) \\ &= -\frac{1}{4} (f_{\beta\alpha} - f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha} - f_{\alpha\beta}) \\ &= -f_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

de acá que

$$\partial^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta a^\alpha)} \right) = -\partial^\beta f_{\beta\alpha}, \quad (2.10)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^\alpha} = -J_\alpha, \quad (2.11)$$

sustituyendo (2.10) y (2.11), en (2.5), se consigue que la ecuación de movimiento para el campo a_α , esta dada por

$$\partial^\beta f_{\beta\alpha} = J_\alpha \quad \text{ó} \quad \partial_\beta f^{\beta\alpha} = J^\alpha. \quad (2.12)$$

■

De hecho por ser J_μ una corriente conservada, se verifica que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.13)$$

esto se deduce derivando (2.12), ya que las dos derivadas son simétricas (conmutan) y el tensor es antisimétrico, con lo que su contracción se anula, esto es

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\beta f^{\beta\mu} = 0 &\Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \\ &\Rightarrow \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

que es la ecuación de continuidad, que corresponde a la conservación de la carga. ■

Al mismo tiempo de la ecuación de movimiento (2.12), se deduce en términos del campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} , que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (2.15)$$

correspondientes a la ley de Gauss y de Ampere [13]. Y de la identidad de Bianchi

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.16)$$

donde

$$\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}, \quad (2.17)$$

se deduce en términos del campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} , que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (2.18)$$

concernientes a la ley de Gauss para el campo magnético (que niega la existencia de monopolos magnéticos) y la ley de Faraday [13]. Estas últimas cuatro ecuaciones (2.15) y (2.18), representan las ecuaciones de Maxwell en cuatro-dimensiones que definen el electromagnetismo.

2.2. Transformación de Calibre

Se dice que un campo es de calibre, dado que es invariante bajo la transformación de calibre dada por

$$a_\mu(x) \longrightarrow a'_\mu(x) = a_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (2.19)$$

donde $\Lambda(x)$ es una función arbitraria. Se prueba que (2.1), es invariante de calibre, si se cumple que

$$S' = \int d^4x \mathcal{L}' = \int d^4x \mathcal{L} = S. \quad (2.20)$$

Primero se demuestra que

$$\begin{aligned} f'_{\mu\nu} &= \partial_\mu (a_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (a_\mu + \partial_\mu \Lambda) \\ &= \partial_\mu a_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu a_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \\ &= f_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

y de forma similar (subiendo los índices), se obtiene que $f'^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$. Luego,

$$\begin{aligned}
 J^\mu a'_\mu &= J^\mu (a_\mu + \partial_\mu \Lambda) \\
 &= J^\mu a_\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda \\
 &= J^\mu a_\mu + J^\mu \partial_\mu \Lambda + \Lambda \partial_\mu J^\mu \quad (\text{Conservación de la Carga}) \\
 &= J^\mu a_\mu + \partial_\mu (\Lambda J^\mu).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Regresando a la acción S' , se tiene

$$\begin{aligned}
 S' &= \int d^4x \mathcal{L}' \\
 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} f'_{\mu\nu} f'^{\mu\nu} - J^\mu a'_\mu \right) \\
 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \right) - \int d^4x J^\mu a_\mu - \int d^4x \partial_\mu (\Lambda J^\mu) \\
 &= \int d^4x \mathcal{L} - \int d \sum_\mu (\Lambda J^\mu) \\
 &= \int d^4x \mathcal{L} \\
 &= S,
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde se utilizó el teorema de la divergencia y la condición que los campos tienden a cero, cuando los bordes tienden a infinito, entre la tercera y cuarta igualdad. Por lo tanto se logró probar la invarianza de (2.1) bajo el calibre (2.19). ■

Esto indica que existe una cantidad conservada. La presencia de esta simetría en la naturaleza es la que conduce a la conservación de la carga electromagnética, acorde con el teorema de Nöther: por cada simetría continua de un sistema lagrangiano, se conserva una cantidad.

El Campo de Calibre Libre sobre la Pared

La acción cinco-dimensional para un campo de calibre sin fuente $J^\mu = 0$, sobre la pared de dominio, viene dada por la acción tipo Maxwell libre

$$S_M = \int d^5x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} \widehat{F}_{ab} \widehat{F}^{ab} \right] \quad (3.1)$$

sujeta a la transformación de calibre

$$A_b(x) \longrightarrow A'_b(x) = A_b(x) + \partial_b \Lambda(x), \quad (3.2)$$

y tensor métrico cinco-dimensional

$$g_{ab} = e^{2a(z)} (\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu + dz_a dz_b), \quad (3.3)$$

con simetría plano paralela, siendo \mathbb{M}_4 la geometría sobre la pared, y por lo tanto, tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$.

Bajo la redefinición para el campo

$$\widehat{A}_b(x, z) = e^{-a(z)/2} A_b(x, z), \quad (3.4)$$

y el parámetro de calibre

$$\widehat{\Lambda}_b(x, z) = e^{-a(z)/2} \Lambda_b(x, z). \quad (3.5)$$

Esto es una justificación de lo que se esta haciendo, dado que en la acción (3.1), la \sqrt{g} da un factor de $e^{5a(z)}$, para no llevar este factor se redefine el campo y el parámetro de calibre como (3.4) y (3.5), para que se valla pareciendo a la acción de Maxwell en el espacio plano cuatro-dimensional dado por (2.1).

Dicho esto, la acción (3.1) se puede reescribir de otra forma, tal como prueba a continuación

Partiendo de

$$\widehat{F}_{ab} \widehat{F}^{ab} = g^{ac} g^{bd} \widehat{F}_{ab} \widehat{F}_{cd}, \quad (3.6)$$

desarrollando $\widehat{F}_{ab}\widehat{F}_{cd}$

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_{ab}\widehat{F}_{cd} &= [\partial_a(e^{-a(z)/2}A_b) - \partial_b(e^{-a(z)/2}A_a)][\partial_c(e^{-a(z)/2}A_d) - \partial_d(e^{-a(z)/2}A_c)] \\
 &= \left[\left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_b\partial_a a + e^{-a(z)/2}\partial_a A_b \right) \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_d\partial_c a + e^{-a(z)/2}\partial_c A_d \right) \right. \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_b\partial_a a + e^{-a(z)/2}\partial_a A_b \right) \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_c\partial_d a + e^{-a(z)/2}\partial_d A_c \right) \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_a\partial_b a + e^{-a(z)/2}\partial_b A_a \right) \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_d\partial_c a + e^{-a(z)/2}\partial_c A_d \right) \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_a\partial_b a + e^{-a(z)/2}\partial_b A_a \right) \left(-\frac{1}{2}e^{-a(z)/2}A_c\partial_d a + e^{-a(z)/2}\partial_d A_c \right) \right] \\
 \\
 \widehat{F}_{ab}\widehat{F}_{cd} &= e^{-a(z)} \left[\left(\frac{1}{4}A_b\partial_a a A_d\partial_c a - \frac{1}{2}A_b\partial_a a\partial_c A_d - \frac{1}{2}\partial_a A_b A_d\partial_c a + \partial_a A_b\partial_c A_d \right) \right. \\
 &\quad - \left(\frac{1}{4}A_b\partial_a a A_c\partial_d a - \frac{1}{2}A_b\partial_a a\partial_d A_c - \frac{1}{2}\partial_a A_b A_c\partial_d a + \partial_a A_b\partial_d A_c \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{4}A_a\partial_b a A_d\partial_c a - \frac{1}{2}A_a\partial_b a\partial_c A_d - \frac{1}{2}\partial_b A_a A_d\partial_c a + \partial_b A_a\partial_c A_d \right) \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{4}A_a\partial_b a A_c\partial_d a - \frac{1}{2}A_a\partial_b a\partial_d A_c - \frac{1}{2}\partial_b A_a A_c\partial_d a + \partial_b A_a\partial_d A_c \right) \right]. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Sumando de la siguiente forma, primeros, segundos y terceros, y cuartos término dentro de cada paréntesis, se obtiene que

$$\widehat{F}_{ab}\widehat{F}^{ab} = e^{-5a(z)}\eta^{ac}\eta^{bd}[F_{ab}F_{cd} + 2A_c\partial_d a(z)F_{ab} + A_{[a}\partial_{b]}a(z)A_a[\partial_{d]}a(z)]. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, bajo la redefinición (3.4), la acción (3.1) se reescribe como

$$S_M = \int d^5x \left[-\frac{1}{4}\eta^{ac}\eta^{bd}F_{ab}F_{cd} - \frac{1}{2}\eta^{ac}\eta^{bd}A_c\partial_d a(z)F_{ab} - \frac{1}{4}\eta^{ac}\eta^{bd}A_{[a}\partial_{b]}a(z)A_{[c}\partial_{d]}a(z) \right] \quad (3.9)$$

sujeta a la transformación de calibre

$$A_b(x) \longrightarrow A'_b(x) = A_b(x) + \partial_b\Lambda - \frac{1}{2}\partial_b a(z)\Lambda. \quad (3.10)$$

3.1. Reducción Dimensional para el Campo de Calibre Libre sobre la Pared

Dentro de este marco, considérese el desarrollo de las componentes del campo vectorial cinco-dimensional A_b , en la base ψ_n, ϕ_n del espacio de Hilbert, dado por

$$A_\mu(x, z) = a_\mu(x)\psi_0(z) + \sum_{n \neq 0} a_\mu^n(x)\psi_n(z) \quad (3.11)$$

$$A_z(x, z) = \sum_{p \neq 0} a_z^p(x) \Phi_p(z), \quad (3.12)$$

con parámetro de calibre

$$\Lambda(x, z) = \Lambda_0(x) \Psi_0(z) + \sum_{n \neq 0} \Lambda_n(x) \Psi_n(z), \quad (3.13)$$

donde

- A_μ tiene un campo asociado al modo cero (fotón), por medio de la base Ψ_0 .
- A_z no tiene campo a bajas energías [14].

En este orden, se define los operadores

$$\mathbf{Q} = \partial_z + \frac{1}{2} \partial_z a(z), \quad \mathbf{Q}^+ = -\partial_z + \frac{1}{2} \partial_z a(z). \quad (3.14)$$

De ahí pues, que Ψ_n es un conjunto de estado que satisface el siguiente problema de autovalores [15]

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+\Psi_n = m_n^2 \Psi_n, \quad \mathbf{Q}^+\Psi_n|_{\pm\infty} = 0, \quad (3.15)$$

y dado que los operadores diferenciables son factorizables, la función de autovalores $m_n^2 \geq 0$, entonces se cumple¹

$$\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}\Phi_n = m_n^2 \Phi_n \quad (3.16)$$

donde $\Phi_n = \mathbf{Q}^+\Psi_n/m_n$, para todo $m_n \neq 0$. Cabe considerar que en el espacio de Hilbert las bases Ψ_n, Φ_n , cumplen con la condición de ortonormalidad

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \Psi_n(z) \Psi_p(z) dz = \delta_{np}, \quad \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \Phi_n(z) \Phi_p(z) dz = \delta_{np}. \quad (3.17)$$

Por consiguiente se plantea el reducir dimensionalmente la acción (3.1), con el fin de estudiar la teoría efectiva cuatro-dimensional. Dicha reducción se hace a partir de la acción (3.9), luego se expande conforme a (3.11) y (3.12), en cada uno de los términos obteniéndose

- Primer término

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4} \eta^{ac} \eta^{bd} F_{ab} F_{cd} = -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \left[f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu} \Psi_0 \Psi_0 + \sum_{n \neq 0} f_{\alpha\beta}^n \sum_{k \neq 0} f_{\mu\nu}^k \Psi_n \Psi_k \right. \\ & + f_{\alpha\beta} \sum_{k \neq 0} f_{\mu\nu}^k \Psi_0 \Psi_k + f_{\mu\nu} \sum_{n \neq 0} f_{\alpha\beta}^n \Psi_0 \Psi_n \left. \right] - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \left[\sum_{p \neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \sum_{q \neq 0} \partial_\mu a_z^q \Phi_q \right. \\ & + \sum_{n \neq 0} a_\alpha^n \partial_z \Psi_n \sum_{m \neq 0} a_\mu^m \partial_z \Psi_m + a_\alpha \partial_z \Psi_0 a_\mu \partial_z \Psi_0 - 2 \sum_{p \neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \sum_{m \neq 0} a_\mu^m \partial_z \Psi_m \\ & \left. + 2a_\mu \partial_z \Psi_0 \sum_{n \neq 0} a_\alpha^n \partial_z \Psi_n - 2a_\mu \partial_z \Psi_0 \sum_{p \neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \right]. \quad (3.18) \end{aligned}$$

¹Sustituyendo $\Phi_n = \mathbf{Q}^+\Psi_n/m_n$ en (3.16)

$$\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^+\Psi_n/m_n) = m_n^2(\mathbf{Q}^+\Psi_n/m_n)$$

y como (3.15) es solución de (3.16), se tiene la igualdad.

- Segundo término

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} A_c \partial_d a F_{ab} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left[a_\beta \Psi_0 \partial_z a \left(\sum_{p \neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p - \sum_{m \neq 0} a_\alpha^m \partial_z \Psi_m - a_\alpha \partial_z \Psi_0 \right) \right. \\
 & \left. + \partial_z a \left(\sum_{n \neq 0} a_\beta^n \Psi_n \sum_{p \neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p - \sum_{n \neq 0} a_\beta^n \Psi_n \sum_{m \neq 0} a_\alpha^m \partial_z \Psi_m - a_\alpha \partial_z \Psi_0 \sum_{n \neq 0} a_\beta^n \Psi_n \right) \right]. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

- Tercer término

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \eta^{ac} \eta^{bd} A_{[a} \partial_b] a A_{[c} \partial_d] a = \\
 & - \frac{1}{8} \eta^{\alpha\mu} \left[(a_\mu a_\mu \Psi_0 \Psi_0 + 2a_\alpha \sum_{k \neq 0} a_\mu^k \Psi_k \Psi_0 \sum_{n \neq 0} a_\alpha^n \Psi_n \sum_{k \neq 0} a_\mu^k \Psi_k) (\partial_z a)^2 \right]. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Sumando (3.18), (3.19), (3.20), y luego aplicando la ecuación de movimiento y la condición de borde (3.15), se llega a

$$\begin{aligned}
 S_M & = \int d^5 x \left[-\frac{1}{4} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \left(f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu} \Psi_0 \Psi_0 + \sum_{n, k \neq 0} f_{\alpha\beta}^n f_{\mu\nu}^k \Psi_n \Psi_k + \sum_{k \neq 0} f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}^k \Psi_0 \Psi_k \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{n \neq 0} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta}^n \Psi_0 \Psi_n \right) - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \sum_{n, q \neq 0} \partial_\alpha a_z^n \partial_\mu a_z^q \Phi_n \Phi_p - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \sum_{n, m \neq 0} m_n^2 a_\alpha^n a_\mu^m \Psi_n \Psi_m \right. \\
 & \left. - \eta^{\alpha\mu} \sum_{n \neq 0} m_n^2 a_\alpha a_\mu^n \Psi_n \Psi_0 - \eta^{\alpha\mu} \sum_{n, p \neq 0} m_n a_\mu^n \partial_\alpha a_z^p \Phi_n \Phi_p \right], \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

integrado esta última expresión sobre la dimension adicional z ,

$$\begin{aligned}
 S_M & = \int d^4 x \left[-\frac{1}{4} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \left(\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu} \Psi_0 \Psi_0 + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n, k \neq 0} f_{\alpha\beta}^n f_{\mu\nu}^k \Psi_n \Psi_k \right. \right. \\
 & \left. \left. + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{k \neq 0} f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}^k \Psi_0 \Psi_k + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n \neq 0} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta}^n \Psi_0 \Psi_n \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \left(\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n, m \neq 0} m_n^2 a_\alpha^n a_\mu^m \Psi_n \Psi_m + 2 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n, p \neq 0} m_n a_\mu^n \partial_\alpha a_z^p \Phi_n \Phi_p \right. \right. \\
 & \left. \left. + \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n, q \neq 0} \partial_\alpha a_z^n \partial_\mu a_z^q \Phi_n \Phi_p \right) \right]. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

De acá, analizando en (3.22) cada uno de los términos, primer término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu} \Psi_0 \Psi_0. \quad (3.23)$$

Para $m_0 = 0$, el estado base viene dado por

$$\Psi_0 = N e^{\alpha a(z)}, \quad (3.24)$$

con N la constante de normalización y α una constante real.

Sustituyendo (3.24) en (3.15),

$$\begin{aligned}
 \left(\partial_z + \frac{1}{2}\partial_z a(z)\right)\left(-\partial_z + \frac{1}{2}\partial_z a(z)\right)Ne^{\alpha a(z)} &= 0 \\
 -\left(\alpha^2(\partial_z a)^2 + \alpha\partial_z^2 a\right)e^{\alpha a(z)} + \left(\frac{1}{2}\partial_z^2 a + \frac{1}{4}(\partial_z a)^2\right)e^{\alpha a(z)} &= 0 \\
 \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)(\partial_z a)^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(\partial_z^2 a) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

cuya solución para la ecuación diferencial es, $\alpha = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\psi_0 = Ne^{a(z)/2}. \tag{3.26}$$

Reemplazando ψ_0 , en la condición de ortonormalidad (3.17),

$$\begin{aligned}
 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \psi_0(z)\psi_0(z)dz &= \lim_{z_r \rightarrow \infty} N^2 \int_{-z_r}^{z_r} e^{a(z)} dz \\
 &= N^2 \lim_{y_r \rightarrow \infty} \int_{-y_r}^{y_r} dy \quad (\text{Coordenada Longitud Propia}) \\
 &= N^2 \left(\lim_{y_r \rightarrow \infty} y \Big|_{-y_r}^{y_r} \right) \longrightarrow N^2 \infty
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

lo que implica que $N = 0$. Por lo tanto $\psi_0 = 0$, en otras palabras, ψ_0 no es normalizable y por ende no es parte de la base.

Ahora bien, continuando con el análisis de los términos de (3.22), al aplicarle (3.17), al segundo término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n,k \neq 0} f_{\alpha\beta}^n f_{\mu\nu}^k \psi_n \psi_k = \sum_{n \neq 0} f_{\alpha\beta}^n f_{\mu\nu}^n, \tag{3.28}$$

tercer término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{k \neq 0} f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}^k \psi_0 \psi_k = 0, \tag{3.29}$$

cuarto término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n \neq 0} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta}^n \psi_0 \psi_n = 0, \tag{3.30}$$

quinto término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n,m \neq 0} m_n^2 a_\alpha^n a_\mu^m \psi_n \psi_m = \sum_{n \neq 0} m_n^2 a_\alpha^n a_\mu^n, \tag{3.31}$$

sexto término

$$2 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n,p \neq 0} m_n a_\mu^n \partial_\alpha a_z^p \psi_n \psi_p = 2 \sum_{n \neq 0} m_n a_\mu^n \partial_\alpha a_z^n, \tag{3.32}$$

y séptimo término

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \sum_{n,q \neq 0} \partial_\alpha a_z^n \partial_\mu a_z^q \psi_n \psi_p = \sum_{n \neq 0} \partial_\alpha a_z^n \partial_\mu a_z^n. \tag{3.33}$$

Así, sumando todos los términos de (3.22) y factorizando, se obtiene que la representación de la acción sobre el cuatri-espacio se reduce a

$$S_M = \int d^4x \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4} (f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2} (m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right], \quad (3.34)$$

la cual esta sujeta a invarianza de calibre

$$a_\alpha^n \longrightarrow a_\alpha^{n'} = a_\alpha^n + \partial_\alpha \Lambda_n, \quad a_z^n \longrightarrow a_z^{n'} = a_z^n - m_n \Lambda_n, \quad (3.35)$$

que se verifica partiendo de la acción (3.34), como sigue

$$S'_M = \int d^4x \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4} (f_{\alpha\beta}^{n'})^2 - \frac{1}{2} (m_n a_\mu^{n'} + \partial_\mu a_z^{n'})^2 \right], \quad (3.36)$$

nótese que

$$\begin{aligned} (f_{\alpha\beta}^{n'})^2 &= \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} f_{\alpha\beta}^{n'} f_{\mu\nu}^{n'} \\ &= \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} (\partial_\alpha a_\beta^{n'} - \partial_\beta a_\alpha^{n'}) (\partial_\mu a_\nu^{n'} - \partial_\nu a_\mu^{n'}) \\ &= \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} (\partial_\alpha a_\beta^n - \partial_\beta a_\alpha^n) (\partial_\mu a_\nu^n - \partial_\nu a_\mu^n) \\ &= \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} f_{\alpha\beta}^n f_{\mu\nu}^n \\ &= (f_{\alpha\beta}^n)^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

y

$$\begin{aligned} m_n a_\mu^{n'} + \partial_\mu a_z^{n'} &= m_n (a_\mu^n + \partial_\mu \Lambda_n) + \partial_\mu (a_z^n - m_n \Lambda_n) \\ &= m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n, \end{aligned} \quad (3.38)$$

así sustituyendo (3.37) y (3.38), en (3.36), se tiene que

$$S'_M = S_M. \quad (3.39)$$

Visto de esta forma en (3.34) no esta presente el modo cero, o sea que no esta presente el Campo de Maxwell (fotón) [10], ya que ψ_0 no es parte de la base. Solo queda una torre masiva de campos de calibre que corresponden a los Campos de Stueckelberg [5, 6]. Estos campos no representan al fotón, y su contribución solo se percibe a altas energías, a nivel del potencial electrostático como correcciones al potencial de Coulomb. En concreto, un modelo del universo dependerá fuertemente de que tan grande sean estas correcciones, lo cual no sera objeto de estudio en este trabajo, para detalles al respecto véase [3, 4].

Como se observa, la teoría de Maxwell cinco-dimensional no reproduce la teoría de Maxwell en cuatro-dimensiones. Esto sugiere que existe una estructura mas compleja de la acción cinco-dimensional que permite localizar el fotón en cuatro-dimensiones, esto se analizara en el siguiente capítulo.

Campo Vectorial Acoplado a la Pared

Para identificar una teoría efectiva cuatro-dimensional, que conciernan al fotón sobre la brana RS, desde la acción cinco-dimensional tipo Maxwell, se considera incorporar términos de interacción no convencionales entre el campo vectorial A_b y la brana en la acción (3.1). En tal sentido, considérese el mecanismo de Ghoroku y Nakamura [1].

4.1. Mecanismo de Ghoroku-Nakamura

Este mecanismo propone que la dinámica de un campo vectorial cinco-dimensional, que se propaga en el escenario RS, esta dado como

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(m_5^2 - \eta\delta(z))A_aA^a \quad (4.1)$$

donde A_b es el boson vectorial cinco-dimensional, con una masa m_5 y acoplado a la brana en $z = 0$, vía el parámetro de acoplamiento η .

La solución a la no-normalizabilidad del modo cero en la acción tipo Maxwell, se determina a través de (4.1) esto se hace reduciendo dimensionalmente \mathcal{L}_{GN} . Para ello considérese el cambio $A_b \rightarrow e^{-a/2}A_b$ en (4.1) y la expansión a orden cero de los campos vectoriales (3.11), dado que el fotón esta asociado por medio de la base Ψ_0 , así bajo la factorización¹

$$A_\mu(x, z) \sim a_\mu(x)\Psi_0(z), \quad (4.2)$$

la acción queda como

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \int dz \Psi_0^2 \int d^4x f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \int d^5x (\partial_\mu A_5 \partial_\alpha A_5 - 2a_\alpha \partial_\mu A_5 \partial_z \Psi_0 + a_\alpha \partial_z a \partial_\mu A_5 \Psi_0) \\ &- \frac{1}{2} \int d^5x e^{2a(z)} (m_5^2 - \eta\delta(z)) A_5^2 \\ &- \frac{1}{2} \int dz \left[(\partial_z \Psi_0)^2 - \partial_z a \Psi_0 \partial_z \Psi_0 + \frac{1}{4} (\partial_z a)^2 + (m_5^2 - \eta\delta(z)) e^{2a(z)} \Psi_0^2 \right] \int d^4x \eta^{\mu\alpha} a_\mu a_\alpha, \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Esto se hace similar a Borut Bajac and Gregory Gabadadze en [9], solo que no se impone calibre axial nulo, $A_5 \neq 0$, dado que (4.1) no es invariante de calibre.

integrando por partes, solo en la última línea de (4.3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{4} \int dz \Psi_0^2 \int d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \\
 &- \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \int d^5x (\partial_\mu A_5 \partial_\alpha A_5 - 2a_\alpha \partial_\mu A_5 \partial_z \Psi_0 + a_\alpha \partial_z a \partial_\mu A_5 \Psi_0) \\
 &- \frac{1}{2} \int d^5x e^{2a(z)} (m_5^2 - \eta \delta(z)) A_5^2 \\
 &- \frac{1}{2} \int dz \left[\partial_z (\Psi_0 \partial_z \Psi_0) \right] \int d^4x \eta^{\mu\alpha} a_\mu a_\alpha + \frac{1}{2} \int dz \left[\partial_z \left(\frac{\partial_z a \Psi_0^2}{2} \right) \right] \int d^4x \eta^{\mu\alpha} a_\mu a_\alpha \\
 &- \frac{1}{2} \int dz \left[\left(-\partial_z^2 \Psi_0 + \left(\frac{\partial_z^2 a}{2} + \frac{(\partial_z a)^2}{4} + (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a(z)} \right) \Psi_0 \right) \Psi_0 \right] \int d^4x \eta^{\mu\alpha} a_\mu a_\alpha
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

los términos de la penúltima línea dan cero, mientras que en la última línea de (4.4) se aprecia un término masivo dado por la interacción entre a_μ y a_α . Para no obtener campos masivos (dado que el fotón es un campo sin masa), se pide que

$$-\partial_z^2 \Psi_0 + \left(\frac{\partial_z^2 a}{2} + \frac{(\partial_z a)^2}{4} + (m_5^2 - \eta \delta(z)) e^{2a(z)} \right) \Psi_0 = 0. \tag{4.5}$$

Esta última admite como solución

$$\Psi_0 = N e^{\kappa a(z)}, \tag{4.6}$$

con N la constante de normalización y κ una constante real, con la condición de que

$$m_5^2 = \alpha^2 \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \left(\kappa + \frac{3}{2} \right), \quad \eta = 2\alpha \left(\kappa - \frac{1}{2} \right), \tag{4.7}$$

y relacionados como

$$\eta = 2\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{m_5}{\alpha} \right)^2} - 1 \right). \tag{4.8}$$

Además en (4.3), se tiene que cumplir que

$$\int dz \Psi_0^2 = 1, \tag{4.9}$$

ya que este término está asociado a la acción de Maxwell en el cuadri-espacio. Así sustituyendo (4.6) en (4.9)

$$\begin{aligned}
 \int dz \Psi_0^2 &= N^2 \int (e^{a(z)} dz) e^{2(\kappa-1/2)a(z)} \\
 &= N^2 \int dy e^{2(\kappa-1/2)a(y)}, \quad (\text{Coordenada Longitud Propia})
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

la integral en (4.10), converge para $\kappa > 1/2$, y diverge para $\kappa \leq 1/2$. Por lo que Ψ_0 es normalizable solo para aquellos valores de $\kappa > 1/2$.

En cambio se observa que para el caso $\kappa = 1/2$, tanto m_5 como η son cero y la teoría (4.1) se reduce a Maxwell cinco-dimensional. De esta manera el mecanismo de Ghoroku-Nakamura consigue proporcionar la cinemática correspondiente a un campo vectorial no masivo sobre la brana, en contraste con la acción tipo Maxwell, pero a costa de que sacrifica la simetría de calibre por el acoplamiento tipo A^2 con la pared. Nótese que la teoría cinco-dimensional (4.1), no es invariante bajo la transformación de calibre, dado que el término cuadrático en el campo rompe la simetría. Al no ser la teoría invariante de calibre, se tiene que el modo vectorial no-masivo a_μ no representa un campo de Maxwell (fotón).

4.2. Acoplamiento $V(\kappa, z)A^2$

Una generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura para obtener fotones sobre la pared de dominio [3, 4], es aquella en la que se define un término de acoplamiento no-conventional, entre el campo vectorial A_b y el espaciotiempo pared de dominio. En esta se propone para el campo A_b la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{gn} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{2}{3}V(\kappa, z)A_aA^a, \quad (4.11)$$

donde

$$V(\kappa, z) = -\frac{3}{4}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \left[\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)a'^2 + a''\right] e^{-2a}, \quad \kappa \geq 1/2 \quad (4.12)$$

en la que a' y a'' se refieren $\partial_z a$ y $\partial_z^2 a$, respectivamente. Y cuyo tensor métrico es dado por (3.3).

Al igual que el mecanismo de Ghoroku-Nakamura, se sigue manteniendo que esta teoría no es invariante de calibre por que se rompe la simetría de calibre, dado que el término de acoplamiento es cuadrático para el campo vectorial.

Para la lagrangiana sobre la pared de dominio (4.11), se demuestra en el caso particular en que la solución corresponde a la brana RS

$$a(z) = -\ln(1 + \alpha|z|), \quad (4.13)$$

su dinámica es descrita por

$$\mathcal{L}_{gn} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2} \left[\alpha^2 \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \left(\kappa + \frac{3}{2}\right) - 2\alpha \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \delta(z) \right] A_aA^a, \quad (4.14)$$

lo cual se muestra a continuación.

Para determinar (4.11) en el límite de pared delgada, ósea en el caso de la brana RS (4.13). Basta determinar en (4.12), $[a'(z)]^2$ y $a''(z)$.

Para $[a'(z)]^2$

$$\begin{aligned} a'(z) &= \frac{-1}{1 + \alpha|z|} \alpha \frac{d|z|}{dz} \\ &= \frac{-\alpha}{1 + \alpha|z|} (\theta(z) - \theta(-z)) \implies [a'(z)]^2 = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha|z|)^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde $\theta(z)$ representa la función Heaviside.

Y para $a''(z)$

$$\begin{aligned}
 a''(z) &= -\alpha \left[\frac{2\delta(z)(1 + \alpha|z|) - (\theta(z) - \theta(-z))(1 + \alpha|z|)'}{(1 + \alpha|z|)^2} \right] \\
 &= -\alpha \left[\frac{2\delta(z) + 2\alpha\delta(z)|z| - (-1)(\alpha(\theta(z) - \theta(-z)))}{(1 + \alpha|z|)^2} \right] \\
 &= -\alpha \left[\frac{2\delta(z) + 2\alpha(z\delta(z)\theta(z) - z\delta(z)\theta(-z)) - \alpha}{(1 + \alpha|z|)^2} \right] \\
 &= \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha|z|)^2} - \frac{2\alpha\delta(z)}{(1 + \alpha|z|)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.15) y (4.16), en (4.11), se cumple que

$$\mathcal{L}_{gn} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(m_5^2 - \eta\delta(z))A_aA^a, \tag{4.17}$$

con m_5 y η dados por (4.7) respectivamente.

De este modo se percibe que (4.11) es una generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura, dado que sobre la brana RS coincide con el mecanismo Ghoroku-Nakamura. En consecuencia, se conserva la consistencia de la teoría.

4.3. Reducción Dimensional

Justo como en el Capítulo 3, es de interés ver como luce (4.11) cuando se reduce a cuatro-dimensiones, esto con la finalidad de reconocer el modo no-masivo a_μ asociado a la teoría cuatro-dimensional.

Antes que nada se separa en dos términos la lagrangiana (4.11), quedando como

$$S_t = S_M + S_A, \tag{4.18}$$

donde

$$S_M = \int d^5x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} \right], \quad S_A = \int d^5x \sqrt{g} \left[\frac{2}{3}V(\kappa, z)A_aA^a \right]. \tag{4.19}$$

Realizando el cambio $A_b \rightarrow e^{-a/2}A_b$ en (4.19) para S_M y desarrollando A_b acorde a (3.11) y (3.12), se tiene

$$\begin{aligned}
 S_M = & \int d^5x \left[-\frac{1}{4}\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} \left(f_{\alpha\beta}f_{\mu\nu}\Psi_0\Psi_0 + \sum_{n\neq 0} f_{\alpha\beta}^n \sum_{k\neq 0} f_{\mu\nu}^k \Psi_n\Psi_k + f_{\alpha\beta} \sum_{k\neq 0} f_{\mu\nu}^k \Psi_0\Psi_k \right. \right. \\
 & + f_{\mu\nu} \sum_{n\neq 0} f_{\alpha\beta}^n \Psi_0\Psi_n \left. \right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} \left(\sum_{p\neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \sum_{q\neq 0} \partial_\mu a_z^q \Phi_q + \sum_{n\neq 0} a_\alpha^n \partial_z \Psi_n \sum_{m\neq 0} a_\mu^m \partial_z \Psi_m \right. \\
 & + a_\alpha \partial_z \Psi_0 a_\mu \partial_z \Psi_0 - 2 \sum_{p\neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \sum_{m\neq 0} a_\mu^m \partial_z \Psi_m + 2a_\mu \partial_z \Psi_0 \sum_{n\neq 0} a_\alpha^n \partial_z \Psi_n \\
 & - 2a_\mu \partial_z \Psi_0 \sum_{p\neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p \left. \right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \left(a_\beta \Psi_0 \partial_z a \left(\sum_{p\neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p - \sum_{m\neq 0} a_\alpha^m \partial_z \Psi_m - a_\alpha \partial_z \Psi_0 \right) \right. \\
 & + \partial_z a \left(\sum_{n\neq 0} a_\beta^n \Psi_n \sum_{p\neq 0} \partial_\alpha a_z^p \Phi_p - \sum_{n\neq 0} a_\beta^n \Psi_n \sum_{m\neq 0} a_\alpha^m \partial_z \Psi_m - a_\alpha \partial_z \Psi_0 \sum_{n\neq 0} a_\beta^n \Psi_n \right) \left. \right) \\
 & - \frac{1}{8}\eta^{\alpha\mu} \left((a_\mu a_\mu \Psi_0 \Psi_0 + 2a_\alpha \sum_{k\neq 0} a_\mu^k \Psi_k \Psi_0 \sum_{n\neq 0} a_\alpha^n \Psi_n \sum_{k\neq 0} a_\mu^k \Psi_k) (\partial_z a)^2 \right) \left. \right]. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Agrupando términos en (4.20) y luego aplicando la ecuación de movimiento y la condición de borde (4.24), e integrando sobre la dimension adicional z (solo el primer término entre paréntesis), se llega a

$$\begin{aligned}
 S_M = & \int d^4x \left[-\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n\neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right] \right] \\
 & + \int d^5x \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} a_\alpha a_\mu \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_0 \Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_0 \Psi_0 \right] \right. \\
 & + \sum_{n,m\neq 0} \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} a_\alpha^n a_\mu^m \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_n \Psi_m + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_n \Psi_m \right] \\
 & + \sum_{n\neq 0} \eta^{\alpha\mu} a_\alpha a_\mu^n \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_n \Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_n \Psi_0 \right] \\
 & \left. + \sum_{n,p\neq 0} \eta^{\alpha\mu} a_\mu^n \partial_\alpha a_z^p \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z a \Psi_n \Phi_p + \sum_{p\neq 0} \eta^{\alpha\nu} a_\mu \partial_\alpha a_z^p \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z a \Psi_0 \Phi_p \right]. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Del mismo modo, realizando el cambio $A_b \rightarrow e^{-a/2} A_b$ en (4.19) para S_A y expandiendo A_b conforme a (3.11) y (3.12), se obtiene

$$\begin{aligned}
 S_A = & \int d^5x \left[-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} a_\alpha a_\mu \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_0 \Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_0 \Psi_0 \right] \right. \\
 & - \sum_{n,p\neq 0} \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} a_\alpha^n a_\mu^p \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_n \Psi_p + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_n \Psi_p \right] \\
 & - \sum_{p\neq 0} \eta^{\alpha\mu} a_\alpha a_\mu^p \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \partial_z^2 a \Psi_p \Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) (\partial_z a)^2 \Psi_p \Psi_0 \right] \\
 & \left. + \frac{2}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \sum_{n,p\neq 0} a_5^n a_5^p \Phi_n \Phi_p \right]. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Sumando (4.21) y (4.22), se identifica que la representación de la lagrangiana sobre el cuadri-espacio es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{gn}^{(4)} &= -\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right] \\
 &+ \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \sum_{\substack{n \\ p \neq 0}} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \partial_z a \Psi_n \left(\mathbf{Q} + \frac{\Psi_p}{m_p} \right) \right] \partial^\mu a_5^n a_5^p \\
 &+ \frac{2}{3} \sum_{n,p \neq 0} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{2a} V(\kappa, z) \Phi_n \Phi_p \right] a_5^n a_5^p, \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

en la cual los estados satisfacen (3.15),

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ \Psi_n = m_n^2 \Psi_n, \tag{4.24}$$

pero con \mathbf{Q} y \mathbf{Q}^+ dados por

$$\mathbf{Q} = \partial_z + \kappa a', \quad \mathbf{Q}^+ = -\partial_z + \kappa a'. \tag{4.25}$$

Por lo que para $m_0 = 0$, el estado base viene dado por

$$\Psi_0 = N e^{\kappa a(z)}, \tag{4.26}$$

con N la constante de normalización y κ una constante real.

Sustituyendo Ψ_0 en la condición de ortonormalidad (3.17),

$$\begin{aligned}
 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \Psi_0(z) \Psi_0(z) dz &= \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} N^2 e^{2\kappa a(z)} dz \\
 &= N^2 \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} (e^{a(z)} dz) e^{2(\kappa-1/2)a(z)} \\
 &= N^2 \lim_{y_r \rightarrow \infty} \int_{-y_r}^{y_r} dy e^{2(\kappa-1/2)a(y)}, \quad (\text{Coordenada Longitud Propia})
 \end{aligned}$$

de acá que

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \Psi_0(z) \Psi_0(z) dz = N^2 \lim_{y_r \rightarrow \infty} \int_{-y_r}^{y_r} dy e^{2(\kappa-1/2)a(y)}, \tag{4.27}$$

esta última integral converge para aquellos valores de $\kappa > 1/2$, y diverge para $\kappa \leq 1/2$. Por lo tanto Ψ_0 es normalizable para $\kappa > 1/2$.

Cabe considerar que en (4.23) los dos primeros términos gozan de ser invariantes de calibre, mientras que el tercer y cuarto no poseen dicha invarianza. A continuación se tiene

1. Término de Maxwell para el campo a_μ , dado por

$$f_{\alpha\beta}^2.$$

2. Acción de Stueckelberg para los bosones a_μ de masa m_n , dado por

$$-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2.$$

3. Término de interacción entre a_5^n y a_5^p via la dinámica de los modos escalares masivos $\partial^\mu a_5^p$, a través de

$$\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{n \\ p \neq 0}} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \partial_z a \Psi_n \left(\mathbf{Q} + \frac{\Psi_p}{m_p} \right) \right] \partial^\mu a_5^n a_5^p.$$

4. Término masivo para el campo a_5 dada la interacción directa entre los a_5^n y a_5^p , a través de

$$\frac{2}{3} \sum_{n,p \neq 0} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{2a} V(\kappa, z) \phi_n \phi_p \right] a_5^n a_5^p.$$

Al no ser la teoría invariante de calibre, se tiene que el modo vectorial no-masivo a_μ , no representa un campo de Maxwell (fotón). Desde esta perspectiva, la teoría no es fenomenológicamente importante, no obstante, es una buena aproximación a una teoría de calibre que pretenda generalizar el mecanismo de localización de Ghoroku-Nakamura [1].

Campo de Calibre Acoplado a la Pared

En el Capítulo 3, se estudio la acción cinco-dimensional tipo Maxwell, la cual es una teoría invariante de calibre, pero que al reducir dimensionalmente no logra localizar al fotón [10]. En contraste, en el Capítulo 4 se propone una generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura [3, 4], con la que se logra localizar el modo no-masivo a_μ , pero este no corresponde al fotón, ya que dicho mecanismo no es invariante bajo transformación de calibre.

Una propuesta que incorpora la simetría de calibre es la siguiente

$$\tilde{\mathcal{L}}_c = \mathcal{L}_{gn} + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' A^z \partial^c A_c + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) (a'' + a'^2) - \frac{2}{3} V(\kappa, z) e^{2a} \right] (A^z)^2, \quad (5.1)$$

la cual es invariante bajo la transformación de calibre

$$A_b \longrightarrow A'_b = A_b + \partial_b \Lambda - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' \Lambda \delta_b^z. \quad (5.2)$$

Es de resaltar que bajo el calibre axial $A_z = 0$, la teoría (5.1) se reduce a la generalización del mecanismo de Ghoroku-Nakamura, esto es $\tilde{\mathcal{L}}_c = \mathcal{L}_{gn}$, por lo que la localización del fotón esta garantizada.

Antes de probar la invarianza de calibre de (5.1), se comprobara que esta tiene una lagrangiana equivalente, dada por

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) g^{a[c} g^{d]b} a' \delta_c^z [2\partial_a A_b - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' \delta_a^z A_b] A_d. \quad (5.3)$$

Se dice que dos lagrangianas $\tilde{\mathcal{L}}_c$ y \mathcal{L}_c son equivalentes, si se cumple

$$\sqrt{g} \mathcal{L}_c[\partial A, A] = \sqrt{g} \tilde{\mathcal{L}}_c[\partial A, A] + \partial_a f^a[\partial A, A]. \quad (5.4)$$

Cambiando $A_b \rightarrow e^{-a/2} A_b$ y desarrollando

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \mathcal{L}_c &= -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} e^{5a(z)} + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' e^{a(z)} (\partial_z A_a) A_a \\ &+ \frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 a'^2 e^{a(z)} A_z A_z - \frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 a'^2 e^{a(z)} A_a A_a \\ &- \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) a' e^{a(z)} (\partial_c A_z) A_c, \end{aligned} \quad (5.5)$$

y

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}\tilde{\mathcal{L}}_c &= -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}e^{5a(z)} + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'e^{a(z)}(\partial_z A_a)A_a \\
&+ \frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 a'^2 e^{a(z)}A_z A_z - \frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 a'^2 e^{a(z)}A_a A_a \\
&- \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'e^{a(z)}(\partial_c A_z)A_c - \frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z(a'e^{a(z)}A_a A_a) \\
&+ \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_c(a'e^{a(z)}A_c A_z), \tag{5.6}
\end{aligned}$$

comparando (5.5) con (5.6), se tiene

$$\sqrt{g}\mathcal{L}_c = \sqrt{g}\tilde{\mathcal{L}}_c + \partial_c \left[\frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'e^{a(z)}\left(2A_c A_z - A_a A_a \delta_c^z\right) \right]. \tag{5.7}$$

Por lo tanto \mathcal{L}_c y $\tilde{\mathcal{L}}_c$ son equivalentes. ■

Ahora bien, dada la correspondencia entre \mathcal{L}_c y $\tilde{\mathcal{L}}_c$, se prueba que \mathcal{L}_c es invariante bajo el calibre (5.2). Esto se muestra expandiendo en los tres términos de (5.3) como sigue

- Primer término

$$-\frac{1}{4}F'_{ab}F'^{ab} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + 2\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)g^{a[c}g^{d]b}a'\delta_d^z\partial_a A_b\partial_c \Lambda. \tag{5.8}$$

- Segundo término

$$\begin{aligned}
\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)g^{a[c}g^{d]b}a'\delta_c^z 2\partial_a A'_b A'_d &= 2\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)g^{a[c}g^{d]b}a'\delta_c^z[\partial_a A_b A_d \\
&+ \partial A_b\partial_d \Lambda - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'\delta_b^z A_d\partial_a \Lambda]. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

- Tercer término

$$\begin{aligned}
-\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 g^{a[c}g^{d]b}a'^2\delta_c^z\delta_a^z A'_b A'_d &= -\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 g^{a[c}g^{d]b}a'^2\delta_c^z\delta_a^z A_b A_d \\
&+ 2\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 g^{a[c}g^{d]b}a'^2\delta_c^z\delta_b^z A_d\partial_a \Lambda. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Así pues agrupando (5.8), (5.9) y (5.10), se obtiene

$$\mathcal{L}'_c = \mathcal{L}_c. \tag{5.11}$$

Por lo tanto (5.3) es invariante bajo el calibre (5.2). ■

5.1. Reducción Dimensional

Con el objetivo principal de identificar a nivel de la lagrangeana cuatro-dimensional el modo no-masivo asociado a la teoría, es de interés estudiar (5.1) cuando se le aplica reducción dimensional, para hacer dicha reducción se utiliza la lagrangiana equivalente \mathcal{L}_c , dada la equivalencia (5.7).

Realizando el cambio $A_b \rightarrow e^{-a/2}A_b$ en (5.3), y expandiendo A_b conforme a

$$A_\mu(x, z) = a_\mu(x)\Psi_0(z) + \sum_{n \neq 0} a_\mu^n(x)\Psi_n(z), \quad A_z(x, z) = \sum_{p \neq 0} a_z^p(x)\Phi_p(z), \quad (5.12)$$

se obtiene para cada uno de los términos

- Primer término

$$\begin{aligned} \int d^5x \left[-\frac{1}{4}\widehat{F}_{ab}\widehat{F}^{ab} \right] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right] \right] \\ &+ \int d^5x \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}a_\alpha a_\mu \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_0\Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_0\Psi_0 \right] \right. \\ &+ \sum_{n, m \neq 0} \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}a_\alpha^n a_\mu^m \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_n\Psi_m + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_n\Psi_m \right] \\ &+ \sum_{n \neq 0} \eta^{\alpha\mu}a_\alpha a_\mu^n \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_n\Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_n\Psi_0 \right] \\ &\left. + \sum_{n, p \neq 0} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \left(\eta^{\alpha\mu}a_\mu^n \partial_\alpha a_z^p \partial_z a\Psi_n\Phi_p + \eta^{\alpha\nu}a_\mu \partial_\alpha a_z^p \partial_z a\Psi_0\Phi_p \right) \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

es obtenido equivalentemente como en la Sección 4.3.

- Segundo y Tercer término

$$\begin{aligned} &\int d^5x \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)g^{a[c}g^{d]b}a'\delta_c^z [2\partial_a\widehat{A}_b - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'\delta_a^z\widehat{A}_b]\widehat{A}_d \right] \\ &= \int d^5x \left[e^{-5a} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)a'\eta^{\alpha\beta}(\partial_z A_\beta A_\alpha - \frac{1}{2}a'A_\beta A_\alpha - \partial_z A_z A_\beta) - \frac{1}{2}e^{-5a} \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 \eta^{\alpha\beta}a'^2 A_\alpha A_\beta \right] \\ &= \int d^5x \left[-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}a_\alpha a_\mu \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_0\Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_0\Psi_0 \right] \right. \\ &- \sum_{n, p \neq 0} \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}a_\alpha^n a_\mu^p \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_n\Psi_p + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_n\Psi_p \right] \\ &- \sum_{p \neq 0} \eta^{\alpha\mu}a_\alpha a_\mu^p \left[\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\partial_z^2 a\Psi_p\Psi_0 + \left(\kappa^2 - \frac{1}{4}\right)(\partial_z a)^2\Psi_p\Psi_0 \right] \\ &\left. + \frac{2}{3}V(\kappa, z)e^{2a} \sum_{n, p \neq 0} a_5^n a_5^p \Phi_n \Phi_p \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De acá, agrupando (5.13) y (5.14) se reconoce que la representación de la acción sobre el cuadri-espacio es

$$\mathcal{L}_c^{(4)} = -\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right], \quad (5.15)$$

la cual esta sujeta a invarianza de calibre

$$\begin{aligned} a_\alpha &\longrightarrow a_\alpha' = a_\alpha + \partial_\alpha \Lambda_0, & a_\alpha^n &\longrightarrow a_\alpha^{n'} = a_\alpha^n + \partial_\alpha \Lambda_n, \\ a_z^n &\longrightarrow a_z^{n'} = a_z^n - m_n \Lambda_n. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Se ha logrado una teoría cuatro-dimensional en la que se ha localizado el modo cero para $\kappa > \frac{1}{2}$. Además, la teoría (5.15) da cuenta de los campos de Maxwell, asociados al fotón, dado que esta es invariante bajo transformación de calibre, así como también de una torre de campos de calibre correspondiente a los campos de Stueckelberg [5, 6].

Contrariamente de que con \mathcal{L}_c se ha conseguido una teoría de calibre de \mathcal{L}_{gn} sin perder sus privilegios, la teoría sufre de un problema. El origen de los términos de acoplamiento no están correctamente comprobados más allá de que claramente aseguren que la teoría sea invariante de calibre, sin embargo esto no es un tema de estudio en este trabajo y se obvia.

Conclusiones

Sin duda el estudio de los campos de calibre en las paredes de dominio es fundamental, ya que a través de estos se logra reconocer dentro de la estructura cuatro-dimensional la teoría respectiva a Maxwell. Sin embargo, se realizó la reducción dimensional de la acción cinco-dimensional tipo Maxwell,

$$S_M = \int d^5x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right]. \quad (5.17)$$

Para ello, el campo A_b se desarrollo en la componente cuatro y cinco dimensional como

$$A_\mu(x, z) = a_\mu(x) \psi_0(z) + \sum_{n \neq 0} a_\mu^n(x) \psi_n(z), \quad A_z(x, z) = \sum_{p \neq 0} a_z^p(x) \phi_p(z), \quad (5.18)$$

donde ψ_n y ϕ_n , satisfacen

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ \psi_n = m_n^2 \psi_n, \quad \mathbf{Q}^+ \psi_n |_{\pm\infty} = 0, \quad (5.19)$$

y

$$\mathbf{Q}^+ \mathbf{Q} \phi_n = m_n^2 \phi_n, \quad \phi_n = \frac{\mathbf{Q}^+ \psi_n}{m_n} \quad (5.20)$$

con \mathbf{Q} y \mathbf{Q}^+ dados por

$$\mathbf{Q} = \partial_z + \frac{1}{2} \partial_z a(z), \quad \mathbf{Q}^+ = -\partial_z + \frac{1}{2} \partial_z a(z). \quad (5.21)$$

Bajo la condición de ortonormalidad

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \psi_n(z) \psi_p(z) dz = \delta_{np}, \quad \lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} \phi_n(z) \phi_p(z) dz = \delta_{np}, \quad (5.22)$$

y modo cero encontrado a través de (5.19), dado por

$$\psi_0 = N e^{a(z)/2}, \quad (5.23)$$

el cual no es normalizable y por ende no es parte de la base. Obteniéndose al reducir dimensionalmente sobre la pared

$$S_M = \int d^4x \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4} (f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2} (m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right], \quad (5.24)$$

donde se verifico, que no es posible identificar el término de Maxwell relacionado con el fotón [10]. Además se obtuvo una torre masiva de campos de calibre que corresponden a los Campos de Stueckelberg [5, 6].

Para localizar el modo cero asociado al fotón, se propuso una generalización a paredes de dominio del mecanismo de Ghoroku-Nakamura [3, 4],

$$\mathcal{L}_{gn} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{2}{3}V(\kappa, z)A_a A^a, \quad (5.25)$$

acoplado con un potencial $V(\kappa, z)$ al campo vectorial $A_a A^a$ con la pared de dominio. Al reducir dimensionalmente, considerando la expansion (5.18) para los campos A_b , y la condición (5.22) se obtuvo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gn}^{(4)} &= -\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right] \\ &+ \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \sum_{\substack{n \\ p \neq 0}} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz \partial_z a \psi_n \left(\mathbf{Q} + \frac{\Psi_p}{m_p} \right) \right] \partial^\mu a_5^n a_5^p \\ &+ \frac{2}{3} \sum_{n, p \neq 0} \left[\lim_{z_r \rightarrow \infty} \int_{-z_r}^{z_r} dz e^{2a} V(\kappa, z) \phi_n \phi_p \right] a_5^n a_5^p, \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde los estados ψ_n cumplen con (5.19),

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ \psi_n = m_n^2 \psi_n, \quad (5.27)$$

pero con \mathbf{Q} y \mathbf{Q}^+ dados por

$$\mathbf{Q} = \partial_z + \kappa a', \quad \mathbf{Q}^+ = -\partial_z + \kappa a', \quad (5.28)$$

en la que se verifica la aparición de dicho modo cero, $\psi_0 = N e^{\kappa a(z)}$, para $\kappa > 1/2$. En consecuencia en (5.26) esta presente la acción de Maxwell, pero no la asociada al fotón, ya que esta generalización (5.25) rompe la simetría de calibre, dado que el término de acoplamiento es cuadrático para el campo vectorial.

Finalmente, se incorporo la simetría de calibre introduciendo términos de acoplamiento no convencionales en la generalización (5.25) del Mecanismo Ghoroku-Nakamura [3, 4], dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}_c = \mathcal{L}_{gn} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) a' A^z \partial^c A_c + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) (a'' + a'^2) - \frac{2}{3} V(\kappa, z) e^{2a} \right] (A^z)^2, \quad (5.29)$$

donde bajo el calibre axial $A_5 = 0$, se recupera \mathcal{L}_{gn} y se garantiza la localización del modo cero, concerniente al fotón. Así bajo reducción dimensional la lagrangiana queda como

$$\mathcal{L}_c^{(4)} = -\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}^2 + \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{4}(f_{\alpha\beta}^n)^2 - \frac{1}{2}(m_n a_\mu^n + \partial_\mu a_z^n)^2 \right]. \quad (5.30)$$

donde es posible identificar el campo de calibre no masivo dado por el campo de Maxwell, el cual se encuentra desacoplado del resto del espectro, mientras que los estados masivos generan una torre de campos de Stueckelberg [5, 6].

Bibliografía

- [1] Kazuo Ghoroku and Akihiro Nakamura. *Massive vector trapping as a gauge boson on a brane*. Phys.Rev., D65:084017, 2002.
- [2] L. Randall y R. Sundrum, *An alternative to compactification*. Phys. Rev. Lett., 83:4690-4693, 1999. hep-th/9906064.
- [3] Rommel Guerrero and R. Omar Rodriguez. *Including gauge symmetry in the localization mechanism of massive vector fields*. arXiv:1310.7653 [het-th], 2013.
- [4] Rafael O. Rodriguez. *Campos de Calibre, Resonancias Gravitacionales y Mundos Brana*. Trabajo de Doctorado, Facultad de Ciencias, ULA, 2014.
- [5] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba. *The Stueckelberg field*. Int.J.Mod.Phys., A19:3265–3348, 2004.
- [6] Boris Kors and Pran Nath. *Aspects of the Stueckelberg extension*. JHEP, 0507:069, 2005.
- [7] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov *Do We Live Inside a Domain Wall?* Phys. Lett., B125:136–138, 1983.
- [8] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *"The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,"* Physics Letters B 429, 263 1998.
- [9] A. Melfo, N. Pantoja and A. Skirzewski. *Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry*. Phys. Rev., D67:105003, 2003. gr-qc/0211081.
- [10] Borut Bajac and Gregory Gabadadze. *Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de Sitter space*. Phys.Lett., B474:282-291, 2000.
- [11] M. Gremm. *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*. Phys. Lett., B478:434-438, 2000. hep-th/9912060.
- [12] A. H. Taub, Annals Math. 53, 472 (1953).
- [13] Jackson, J. D., y Fox, R. F. (1999). *Classical electrodynamics*. American Journal of Physics, 67(9), 841-842.

- [14] Brian Batell and Tony Gherghetta. *Yang-Mills Localization in Warped Space*. Phys.Rev., D75:025022, 2007.
- [15] C. V. Sukumar. *Supersymmetric quantum mechanics and its applications*. AIP Conf. Proc., 04:166–235, 2005.