



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
POSTGRADO EN FISICA MATEMATICA
BARQUISIMETO-VENEZUELA



**Postgrado en Física Matemática
Area Electrodinámica Clásica y
Efectos Cuánticos**

**Nuevos Efectos Cuánticos del Tipo Aharonov-Bohm
y
La Masa del Fotón**

Trabajo Especial de Grado Presentado ante la ilustre
Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Como Requisito Parcial Para Optar al Título de
Magister Scientiarum en Ciencias Mención Física Matemática

Presentado Por:
Lic. Jesús Quintero

Tutor: **Dr. Gianfranco Spavieri**

Barquisimeto, Enero del 2015





Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Coordinación de Postgrado

ACTA VEREDICTO TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

Nosotros, Miembros del Jurado Examinador del Trabajo de Grado titulado "NUEVOS EFECTOS CUÁNTICOS DEL TIPO AHARONOV – BOHM Y LA MASA DEL FOTÓN", presentado por el Lcdo. JESÚS ALEXIS QUINTERO MORENO, titular de la Cédula de Identidad N° 11.716.344, como requisito para optar al grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM MENCIÓN FÍSICA-MATEMÁTICA**, ofrecido por el programa de Maestría en Ciencias del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", hacemos constar que hoy, veintidós de Enero de dos mil quince (22-01-2015) a las tres de la tarde (3:00 p.m.) se realizó el examen público de Defensa de Trabajo de Grado, de acuerdo a lo establecido en la Normativa sobre Trabajos de Grado de la UCLA. Una vez rendido el examen, este Jurado emite el siguiente veredicto:

El Trabajo de Grado fue:

***** **APROBADO** *****

Dando fe de ello, levantamos la presente acta en la ciudad de Barquisimeto a los veintidós días del mes de Enero del año dos mil quince.

Jesús Erazo

Prof. Jesús Erazo
 Presidente de Jurado
 C.I. N° 13.558.762

Joel Lamazares

Prof. Joel Lamazares
 Jurado Principal
 C.I. N° 7.419.053

Rafael Torrealba

Prof. Rafael Torrealba
 Jurado Suplente
 C.I. N° 5.890.855



LISANDRO ALVARADO

Una voz del pensamiento

Coordinación de Postgrado, Decanato de Ciencias y Tecnología, Núcleo Obelisco
 Avenida Las Industrias, Módulos C y D, Barquisimeto, Estado Lara
 Teléfonos (0251) 2591712-2591618 Fax: 2591718 <http://postgrado.ucla.edu.ve/ciencias/>

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a "**DIOS TODOPODEROSO**" a la virgen y a Jesús de Nazaret por permitirme alcanzar y lograr unas de mis metas y objetivos planteados por mí y darme la fuerza y voluntad para superar y vencer las dificultades que se me presentaron en el camino.

A mi Padre José Luis y a la memoria de mi Madre Florencia del C, Moreno de Quintero, quién junto a mi Padre, formaron e hicieron de mí un hombre de bien. Se ha ido, mi mejor amiga, mi confidente, la luz que alumbraba mi camino, mi Mamá, con quién compartí muchas cosas a su lado. El presente trabajo especial de grado de maestría, está dedicado a la memoria de mi Madre, Florencia de Quintero. *Gracias Mamá por todo lo que me distes y por la paciencia que me tuviste. "Nunca pensé que me dejarías tan pronto".*

A mis Hermanos, por su apoyo, ayuda, colaboración y por estar siempre presentes.

A mi Tia Francis, Ghelly y Ghendry por estar siempre cerca de mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A la Doctora Carla Liscano, a la Señora Erika, a la Señora Pastora, a la Señora Carmen Padilla y su Familia, a la Señora Elba, al Señor Enrique Caruci, al Señor Ramón Liscano, por la amistad, apoyo y atenciones hacia mi mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A Gregorio León y su Familia, por su amistad y sus atenciones hacia mi Mamá y por permitirnos ser parte de su Familia. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A la Señora Lilian, por brindarnos y brindarle su apoyo y amistad a mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS la bendiga siempre.

A todas aquellas Personas e Instituciones (públicas y privadas) que de alguna manera y/o forma y con mucha sensibilidad humana y ética Profesional y humana, le apoyaron y le brindaron su ayuda y amistad a mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

Al Profesor Rafael Torrealba, por abrirme las puertas de la Institución y del Postgrado en Física Matemática del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" (Barquisimeto-Venezuela), y a la vez por su ayuda y colaboración en el presente Trabajo Especial de Grado.

A mi amigo, hermanazo y compadre Jesús Erazo y su Familia, por su amista y apoyo incondicional, muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

Al Profesor Ramón Vivas, por su amista y sabios consejos. (Unexpo-Barquisimeto).

A todos mis compañeros y amigos del Centro de Física Fundamental (CFF) de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes. (Mérida-Venezuela).

A todos mis compañeros y amigos del Departamento de Física del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". (Barquisimeto-Venezuela).

A mis amigos de la Maestría en Física Matemática, Eligio y Navas, por su amistad y ayuda durante la escolaridad en la Maestría.

A mi Tutor el Profesor y Doctor Gianfranco Spavieri, por su apoyo, paciencia y confianza al permitirme trabajar y traer estos **"Maravillosos e interesantes temas de los efectos Cuánticos del tipo Aharonov-Bohm (AB) y la masa del Fotón"** a otros escenarios y latitudes (- los cuales, algunas veces, desafían el sentido común -).

Al Profesor y Doctor Nelson Pantoja, **"Por enseñarme todo lo que hoy en día he podido aplicar y enseñar"** (CFF-UCLA-Mérida).

Al jurado evaluador del presente trabajo especial de grado por sus consejos, sugerencias y observaciones hechas a la misma.

Al proyecto de estímulo al investigador e innovador (PEII) convocatoria 2012, por su apoyo y financiamiento al presente trabajo especial de grado, en la Maestría en Física Matemática. **Código RNII número V-11716344-0103-2013.**

Al Centro de Física Fundamental (CFF), Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, 5101-Venezuela.

Al Postgrado en Física Matemática del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" (UCLA-Barquisimeto).

A todas las personas nombradas aquí y las no nombradas, muchas gracias. Y que DIOS los bendiga a todos.

Barquisimeto-Venezuela
Enero 2015

mjesus@ula.ve

jesusquintero30@yahoo.es

spavieri@ula.ve

EL PRESENTE TRABAJO ESPECIAL DE GRADO,
ESTA DEDICADO A LA MEMORIA DE MI MAMA
FLORENCIA DE QUINTERO.

GRACIAS MAMA, POR TODO LO QUE ME DISTES,
POR TODO TU AMOR, TU PACIENCIA, TUS CONSEJOS,
POR ESTAR SIEMPRE ALLI, PRESENTE EN CADA MOMENTO.

“NUNCA PENSE QUE ME DEJARIAS TAN PRONTO...”

(† 08-08-2013)

Nuevos Efectos Cuánticos del Tipo Aharonov-Bohm y la Masa del Fotón

Presentado por : **Lic. Jesús Quintero.**
Tutor: **Dr. Gianfranco Spavieri.**

Trabajo Especial de Grado para optar al Título de
Magister Scientiarum en Ciencias Mención Física Matemática

16 de junio de 2014

Resumen

El presente trabajo especial de grado tiene por finalidad presentar una revisión de los diferentes enfoques clásicos y cuánticos existentes en la literatura, en la búsqueda de un posible valor o límite superior sobre la masa del fotón en reposo (m_γ) y comparar cada uno de los métodos empleados para tal fin. Para ello, ofrecemos una breve reseña de los antecedentes teóricos y motivaciones clásicas y los primeros ensayos de la exactitud y validez de la ley de Coulomb que subyacen a ella. Luego, abordamos escenarios modernos, en los cuales aparecen aproximaciones y enfoques cuánticos. Cabe destacar que, en los últimos años, han surgido aplicaciones interesantes e inesperadas de algunos efectos cuánticos que tienen relevancia en el dominio de la electrodinámica de rango finito. Por ejemplo, siguiendo el enfoque original a la masa del fotón llevado a cabo por Boulware y Deser (BD) explotando el efecto Aharonov-Bohm (AB), vamos a utilizar otros efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm (AB), entre los cuales el efecto Tkachuk (T) y Spavieri (S) para dipolos eléctricos. Por esta razón y como otro objetivo específico del presente trabajo, se quiere determinar si los enfoques cuánticos pueden competir y eventualmente superar los métodos clásicos tradicionales (pruebas directas e indirectas de la ley del inverso al cuadrado de Coulomb) en la búsqueda de un posible valor o límite superior sobre la masa del fotón en reposo (m_γ). Finalmente, vamos a formular tentativamente algunas proyecciones a futuro, como la posibilidad de descubrir nuevos efectos cuánticos o ampliar las aplicaciones para el valor límite de m_γ .

Índice general

1. Introducción	5
2. Electrodinámica masiva y sus implicaciones físicas	9
2.1. Teoría de Maxwell-Proca	10
2.2. Dispersión de la luz	12
2.3. El potencial de Yukawa en campos electrostáticos . .	14
2.4. El potencial de Yukawa en campos magnetostáticos	15
2.5. El fotón longitudinal	16
2.6. Relatividad especial con fotón masivo	18
3. Límites sobre la masa del fotón: enfoques clásicos	19
3.1. Primeras verificaciones experimentales de la masa del fotón	20
3.2. Pruebas nulas de la ley de Coulomb: teoría	23
3.3. Pruebas directas de la ley de Coulomb	26
3.4. Pruebas indirectas de la ley de Coulomb	29
3.4.1. Pruebas astronómicas y geomagnéticas	30
3.4.2. Experimentos Criogénicos	32
3.5. Otras aproximaciones clásicas	35
4. Límites sobre la masa del fotón: enfoques cuánticos	36
4.1. Generalidades de los efectos Aharonov-Bohm (AB) .	36
4.2. Comprobaciones experimentales	41
4.3. Experimentos table-top o bench-top	43
4.4. Efecto Aharonov-Bohm y la aproximación de Boulware- Deser para la masa del fotón	44
4.5. Efecto Aharonov-Casher para dipolos magnéticos . .	46
4.6. Efecto Tkachuk y Spavieri para dipolos eléctricos . .	48

4.7. Efecto Aharonov-Bohm para partículas con cargas opuestas y la masa del fotón	50
5. Conclusiones y Proyecciones a Futuro	53

Agradecimientos

Primeramente a "**DIOS TODOPODEROSO**" a la virgen y a Jesús de Nazaret por permitirme alcanzar y lograr unas de mis metas y objetivos planteados por mí y darme la fuerza y voluntad para superar y vencer las dificultades que se me presentaron en el camino.

A mi Padre José Luis y a la memoria de mi Madre Florencia del C, Moreno de Quintero, quién junto a mi Padre, formaron e hicieron de mí un hombre de bien. Se ha ido, mi mejor amiga, mi confidente, la luz que alumbraba mi camino, mi Mamá, con quién compartí muchas cosas a su lado. El presente trabajo especial de grado de maestría, está dedicado a la memoria de mi Madre, Florencia de Quintero. *Gracias Mamá por todo lo que me distes y por la paciencia que me tuviste. "Nunca pensé que me dejarías tan pronto"*.

A mi Tia Francis, Ghelly y Ghendry por estar siempre cerca de mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A la Doctora Carla Liscano, a la Señora Erika, a la Señora Pastora, a la Señora Carmen Padilla y su Familia, a la Señora Elba, al Señor Enrique Caruci, al Señor Ramón Liscano, por la amistad, apoyo y atenciones hacia mi mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A Gregorio León y su Familia, por su amistad y sus atenciones hacia mi Mamá y por permitirnos ser parte de su Familia. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

A la Señora Lilian, por brindarnos y brindarle su apoyo y amistad a mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS la bendiga siempre.

A todas aquellas Personas e Instituciones (públicas y privadas) que de alguna manera y/o forma y con mucha sensibilidad humana y ética Profesional y humana, le apoyaron y le brindaron su ayuda y amistad a mi Mamá. Muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

Al Profesor Rafael Torrealba, por abrirme las puertas de la Institución y del Postgrado en Física Matemática del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"(Barquisimeto-Venezuela), y a la vez por su ayuda y colaboración en el presente Trabajo Especial de Grado.

A mi amigo, hermanazo y compadre Jesús Erazo y su Familia, por su amista y apoyo incondicional, muchas gracias y que DIOS los bendiga siempre.

Al Profesor Ramón Vivas, por su amista y sabios consejos. (Unexpo-Barquisimeto).

A todos mis compañeros y amigos del Centro de Física Fundamental (CFF) de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes. (Mérida-Venezuela).

A todos mis compañeros y amigos del Departamento de Física del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". (Barquisimeto-Venezuela).

A mis amigos de la Maestría en Física Matemática, Eligio y Navas, por su amista y ayuda durante la escolaridad en la Maestría.

A mi Tutor el Profesor y Doctor Gianfranco Spavieri, por su apoyo, paciencia y confianza al permitirme trabajar y traer estos **"Maravillosos e interesantes temas de los efectos Cuánticos del tipo Aharonov-Bohm (AB) y la masa del Fotón"** a otros escenarios y latitudes (- los cuales, algunas veces, desafían el sentido común -).

Al Profesor y Doctor Nelson Pantoja, **"Por enseñarme todo lo que hoy en día he podido aplicar y enseñar"** (CFF-ULA-Mérida).

Al jurado evaluador del presente trabajo especial de grado por sus consejos, sugerencias y observaciones hechas a la misma.

Al proyecto de estímulo al investigador e innovador (PEII) convocatoria 2012, por su apoyo y financiamiento al presente trabajo especial de grado, en la Maestría en Física Matemática. **Código RNII número V-11716344-0103-2013.**

Al Centro de Física Fundamental (CFF), Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, 5101-Venezuela.

Al Postgrado en Física Matemática del Decanato de Ciencias y Tecnología (DCYT) de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"(UCLA-Barquisimeto).

A todas las personas nombradas aquí y las no nombradas, muchas gracias. Y que DIOS los bendiga a todos.

Capítulo 1

Introducción

En línea con los adelantos de la Electrodinámica Clásica (EC), cabe decir que desde hace varias décadas se han venido mejorando notablemente las técnicas para comprobar y verificar la validez de la ley de Coulomb. Sin que los físicos lo supieran con certeza, la precisión cada vez mejor de la validez de la ley de Coulomb coincide con la precisión cada vez mayor del límite de la masa del fotón (m_γ), que se hace siempre más pequeña. Esta relación, “validez de la ley de Coulomb = masa del fotón tendente a cero”, se establece teóricamente a partir de otro importante adelanto teórico de la EC, “las ecuaciones de Proca”. Como afirman, Tu, Luo y G. Gillies [1] la cuestión central para el origen y bases de las propiedades de las partículas elementales, tales como el neutrino, fotón, gravitón, axión, etc, incluyendo sus masas, cargas y su existencia misma, son algunos de los mayores retos de la física moderna. Es importante que toda teoría sea corroborada experimentalmente ya que adelantos fenomenológicos-experimentales de precisión consolidan la teoría. En consecuencia, estos avances, además de reflejar el interés creciente de los físicos sobre este tema, justifican el plantear como punto central en el presente trabajo especial de grado de Maestría la búsqueda de mejores límites sobre la masa del fotón.

La teoría de Proca conlleva a algunas implicaciones físicas que podrían originarse para un valor no nulo de m_γ , que si fuera finita sería una masa muy pequeña extremadamente difícil de detectar. Entre las implicaciones físicas que han sido estudiadas, se tienen: dispersión de la luz, el potencial de Yukawa en campos magnetostáticos, el fotón longitudinal y relatividad especial con fotón masivo, los cuales serán tratados brevemente en el primer capítulo del presente trabajo, además del desarrollo de la teoría de Proca.

En consecuencia, tales efectos abren la puerta a útiles enfoques para experimentos de laboratorio u observaciones astrofísica y/o cosmológicas con el objetivo de determinar la masa del fotón, o más precisamente, establecer un límite superior sobre la misma.

Entre experimentos realizados y propuestas teóricas, en la literatura actual aparecen aproximadamente cerca de 48 métodos [1], desarrollados para establecer un posible límite superior sobre la masa del fotón por medio de pruebas directas e indirectas. – Cuando se busca probar directamente la ley de Coulomb se dice que es una prueba directa, mientras que cuando se busca probar la masa del fotón se puede hablar de una prueba indirecta de la ley de Coulomb [2] -. Para la búsqueda de la masa del fotón la historia ha favorecido los métodos clásicos [1] basados principalmente en la observación de las desviaciones de la electrodinámica de rango infinito, según lo previsto por las ecuaciones de Maxwell, donde el potencial de Coulomb toma la forma de Yukawa. En caso de que la masa del fotón no sea nula, las ecuaciones de Maxwell quedan modificadas.

La masa del fotón, m_{ph} , se puede expresar como μ_γ cuando se mide en cm^{-1} y como $m_{ph} = m_\gamma$, siendo $\mu_\gamma^{-1} = \frac{\hbar}{m_\gamma c} = \frac{\lambda_C}{2\pi}$, donde m_γ queda expresada en gramos y λ_C es la longitud de onda de Compton. El mejor resultado obtenido hasta ahora en el desarrollo de la técnica original de Cavendish en una prueba directa de la ley de Coulomb sigue siendo la realizada por Williams, Faller y Hill (WFH) [3], quienes utilizaron una sofisticada copa (jaula de Faraday) formada por cinco conductores concéntricos en forma de icosaedros. El resultado nulo de este experimento expresado en términos de la longitud de onda de Compton y la masa del fotón, fue de, $1,95 \times 10^{10} cm$ para μ_γ^{-1} y $m_\gamma < 1,6 \times 10^{-47} g$. Métodos indirectos son proporcionados en pruebas geomagnéticas y astronómicas. Por ejemplo, al estudiar el comportamiento del campo magnético de los planetas, Goldhaber y Nieto [4] fueron capaces de determinar que $\mu_\gamma^{-1} > 5 \times 10^{10} cm$. Otras verificaciones indirectas están relacionadas con experimentos Criogénicos [5], y el método desarrollado por Lakes [6] que utiliza el potencial vector del ambiente cósmico, en donde cada uno de estos métodos experimentales y propuestas teóricas serán clarificadas y desarrolladas en el capítulo dos.

Otro de los escenarios a estudiar y desarrollar en la búsqueda de un posible límite superior sobre la masa del fotón, tiene que ver con los efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm (AB). El efecto Aharonov-Bohm (AB) [7], consiste en un haz coherente de partículas cargadas, que experimentan un corrim-

iento relativo de fase cuando pasan alrededor de un solenoide impenetrable. Adentro del solenoide existe un campo magnético pero afuera y alrededor del solenoide el campo magnético es nulo, $\mathbf{B} = 0$. Además, no hay campo eléctrico, $\mathbf{E} = 0$. No habiendo campos electromagnéticos, no hay fuerzas sobre las partículas cargadas a lo largo de su camino y éstas se mueven libres en presencia o ausencia del solenoide. Sin embargo, en presencia del solenoide, se observa un corrimiento del patrón de interferencias. Considerando que el potencial vectorial \mathbf{A} no es nulo fuera del solenoide, la interpretación física de este fenómeno indica que en mecánica cuántica hay observables relacionadas con el vector potencial. Así, en física cuántica los potenciales asumen un rol predominante, en contraste con su rol secundario y meramente matemático en electrodinámica clásica (EC) donde son fundamentales los campos y las fuerzas electromagnéticas. Además, surge la idea de no localidad en mecánica cuántica, ya que, al no haber fuerzas actuando sobre las partículas este efecto no puede explicarse dentro del marco de la física clásica. Debido a esa característica tan peculiar del efecto AB, como la no localidad, después de la aparición del efecto AB muchos físicos han sido motivados a buscar efectos similares con otras partículas.

En relación con la masa del fotón, y entre las propuestas a considerar en el presente trabajo especial de grado y más específicamente en el capítulo 3, están los experimentos conocidos en la literatura como “table-top” o “bench-top” – los cuales consisten en planteamientos experimentales factibles que, en algunos casos, usan resultados de experimentos ya realizados y comprobados -. Estos experimentos serán empleados en algunos de los efectos cuánticos del tipo AB para la determinación de un posible límite superior sobre la masa del fotón y donde se usará el enfoque de Boulware y Deser (BD) [8], el cual es considerado un experimento table-top. Estos físicos (BD), explotaron el efecto Ahronov-Bohm magnético [7] que ya había sido comprobado experimentalmente por Chambers [9] y Tonomura [10]. Sin embargo, al determinar el límite de la masa del fotón, estos científicos, asumen hipotéticamente la validez del efecto AB en el margen de los errores experimentales y, entre otras cosas, en su experimento table-top hipotizan un haz coherente de electrones con un radio ρ de 10 *cm*, mientras que en los experimentos reales ρ era tan sólo de algunos *mm*. De todas formas, a pesar del costo, la tecnología podría alcanzar un ρ de 10 *cm* así que el límite encontrado por ellos es razonablemente aceptable.

Por último, el capítulo 4 está dedicado a las conclusiones y proyecciones a futuro, obtenidas ó deducidas de lo desarrollado en el presente trabajo.

En vista de lo arriba expuesto, debería quedar claro que el presente trabajo especial de grado, ó revisión, es de tipo fenomenológico-experimental, más que teórico.

Los trabajos de revisión más importantes sobre estos temas son los de Goldhaber y Nieto [4,11], Tu, Luo, y Gillies [1] y G. Spavieri, J. Quintero, G.Gillies y M. Rodríguez [12]. En los tres primeros trabajos se hace énfasis sobre los métodos clásicos. En el último del 2011 [12], se revisan los métodos clásicos pero también se incluyen los enfoques cuánticos, anteriormente no existentes o no tomados en cuenta por ser considerados no competitivos. Para concluir, es bueno destacar que la revisión bibliográfica realizada en el presente trabajo de Maestría, refleja publicaciones en prestigiosas revistas científicas arbitradas e indexadas, donde una de las publicaciones más importantes fue llevada al status de **Colloquia**" por el comité editorial de la revista y lleva por título, *A survey of existing and proposed classical and quantum approaches to the photon mass*", la cual está citada en las referencias como la número [12].

Capítulo 2

Electrodinámica masiva y sus implicaciones físicas

Una de las implicaciones básicas de las ecuaciones de Maxwell es que la radiación electromagnética viaja a la velocidad de la luz, c , sobre un amplio rango de frecuencias. Sin embargo, además de ser descrita como una onda, la luz también se ha concebido como una partícula. Sin revivir el atomismo de Demócrito, quien afirmó que todo es reducible (incluida la luz) a partículas indivisibles, recordemos que Descartes fue quizás el primero en formular la idea de que la luz consistía de partículas que se movían rápidamente. Más tarde, Newton elaboró su teoría corpuscular de la luz la cual dio una explicación exitosa a la polarización.

Los grandes triunfos del electromagnetismo Maxwelliano y la electrodinámica cuántica estuvieron basados en la hipótesis de que el fotón debía ser una partícula con masa en reposo nula. El fotón puede llevar energía y momentum de un lugar a otro y los rayos de luz que se propagan en el vacío a velocidad constante c se mantienen independiente de los sistemas de referencia inerciales, el cual es el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad de Einstein. El hecho de que la luz no pueda estar inmóvil hace la suposición razonable y se dificulta encontrar algún contra ejemplo en la teoría. Sin embargo, los esfuerzos experimentales para establecer límites superiores de la masa del fotón en reposo. - en otras palabras, para desafiar las teorías aceptadas de la época - han continuado desde la época de Cavendish o incluso antes de que el concepto del fotón se introdujera.

2.1. Teoría de Maxwell-Proca

Alexandre Proca [4, 13-16] bajo la influencia de de Broglie, introdujo una consistente modificación a las ecuaciones de Maxwell lo que daría una masa del fotón diferente de cero mientras se preserva la invariancia de la electrodinámica sobre las transformaciones de la relatividad especial. El tema de la invariancia de calibre y la validez de la teoría de Proca ha sido tratado en extenso en los trabajos de revisión de Goldhaber y Nieto [4] y de Tu, Luo, y Gillies [1]. La conclusión que arrojan es que no hay razones teóricas para desechar dicha teoría y la posibilidad de un fotón con masa no nula.

Los fenómenos electromagnéticos en el espacio libre, es decir, en el vacío, se caracterizan por dos campos vectoriales, el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, estos campos pueden ser considerados como límites clásicos de una descripción cuántica en términos de fotones. En la teoría de Proca del campo electromagnético de Maxwell, un término relacionado con la masa del fotón es adicionado a los campos electromagnéticos de la densidad Lagrangiana [13]

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}J_{\mu}A^{\mu} + \frac{\mu_{\gamma}^2}{8\pi}A_{\mu}A^{\mu} \quad (2.1)$$

donde μ_{γ}^{-1} es una longitud característica relacionada con la masa del fotón en reposo, A_{μ} y J_{μ} corresponden al cuadrivector potencial $(\mathbf{A}, i\phi/c)$ y al cuadricorriente $(\mathbf{j}, i c\rho)$, donde ϕ es el potencial escalar y \mathbf{A} el potencial vector, y ρ y \mathbf{J} son la densidad de carga y corriente, respectivamente. Y el tensor de campo electromagnético antisimétrico $F_{\mu\nu}$, el cual esta relacionado con el potencial vector de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}. \quad (2.2)$$

La variación de la densidad Lagrangiana (2.1) con respecto a A_{μ} dan origen a las ecuaciones de Proca:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} + \mu_{\gamma}^2 A_{\mu} = \frac{4\pi}{c} J_{\mu} \quad (2.3)$$

al sustituir (2.2) en (2.3), se obtiene la ecuación de ondas de Proca del campo A_{μ} :

$$(\square - \mu_\gamma^2)A_\mu = -\frac{4\pi}{c}J_\mu \quad (2.4)$$

donde el simbolo \square es el operador d'Alambertiano y asi abreviamos $\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}$. En el espacio libre de fuentes, la ecuación (2.4) se reduce a:

$$(\square - \mu_\gamma^2)A_\mu = 0, \quad (2.5)$$

la cual es esencialmente la ecuación de Klein-Gordon para el fotón. El parámetro μ_γ está relacionado con la masa del fotón en reposo, m_γ , por medio de la siguiente expresión:

$$m_\gamma = \frac{\mu_\gamma \hbar}{c}. \quad (2.6)$$

En la expresión anterior se interpreta, como la longitud característica, μ_γ^{-1} , que coincide con la longitud de onda de Compton para el fotón. Con lo cual, se introduce un rango de efectividad en las interacciones electromagnéticas. En consecuencia, si el fotón tiene masa, los campos electrostáticos y magnetostáticos experimentan una atenuación que viene gobernada por el término $\exp(-\mu_\gamma^{-1}r)$.

La masa finita del fotón puede ser acomodada de una manera única cambiando las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell por las de Proca en presencia de fuentes ρ y \mathbf{J} y expresadas en el sistema de unidades C.G.S de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - \mu_\gamma^2\phi, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_\gamma^2\mathbf{A}, \quad (2.10)$$

junto con

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

y la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.13)$$

Así, las ecuaciones de Proca proporcionan una completa y auto-consistente descripción de los fenómenos electromagnéticos. La conservación de la carga puede ser obtenida de las ecuaciones (2.7) y (2.10), y de la condición de Lorentz (2.13),

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

igualmente, de las ecuaciones (2.9), (2.10), (2.12) y (2.13), se puede obtener la expresión para la conservación de la energía

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (2.15)$$

donde \mathbf{S} es el vector de Poynting el cual está asociado con la densidad de flujo de energía,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mu_\gamma^2 \phi \mathbf{A}) \quad (2.16)$$

y la densidad de energía para los campos electromagnéticos w viene dada como:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + \mu_\gamma^2 \phi^2 + \mu_\gamma^2 \mathbf{A}^2). \quad (2.17)$$

En los campos de Procas, incluso los potenciales tienen significado físico, y no sólo sus derivadas. De hecho, el potencial escalar ϕ y el potencial vector \mathbf{A} descritos por las ecuaciones de Proca llegan a ser observables debido a que ellos adquieren densidades de energía $\mu_\gamma^2 \phi^2 / 8\pi$ y $\mu_\gamma^2 \mathbf{A}^2 / 8\pi$, respectivamente.

2.2. Dispersión de la luz

Una de las consecuencias más directas de tener una masa para el fotón finita (no nula) es una dependencia de la frecuencia en la velocidad de las ondas electromagnéticas que se propagan en el espacio libre. Según las ecuaciones de Proca, los campos eléctricos y magnéticos en el espacio libre se deducen de:

$$A_\nu \sim \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.18)$$

donde el vector de onda \mathbf{k} , la frecuencia angular ω y la masa en reposo μ_γ (en adelante μ_γ y m_γ indistintamente serán referidas como la masa del fotón por simplicidad, y a partir de la ecuación (2.6) se obtiene la relación $1\text{cm}^{-1} \equiv 3,5 \times 10^{-38}g \equiv 2,0 \times 10^{-5} \text{ eV}$) satisfacen la ecuación de Klein-Gordon

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \mu_\gamma^2 c^2. \quad (2.19)$$

La velocidad de fase y la velocidad de grupo (la velocidad de flujo de energía) de una onda masiva libre podría entonces tomar la forma,

$$u = \frac{\omega}{k} = c \left(1 - \frac{\mu_\gamma^2 c^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \approx c \left(1 + \frac{\mu_\gamma^2 c^2}{2\omega^2} \right) \quad (2.20)$$

y

$$v_g = \frac{d\omega}{d\kappa} = c \left(1 - \frac{\mu_\gamma^2 c^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \approx c \left(1 - \frac{\mu_\gamma^2 c^2}{2\omega^2} \right), \quad (2.21)$$

en donde $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}| = 2\pi\lambda^{-1}$ con λ como la longitud de ondas. Debido a que la masa del fotón es no nula, la dispersión produce una dependencia en la frecuencia, en consecuencia, la velocidad de grupo será diferente de la velocidad de fase. En las ecuaciones de Proca, c es el límite de la velocidad de la luz a medida que la frecuencia se aproxima a cero.

Para dos paquetes de ondas con diferentes frecuencias de propagación (denotadas por ω_1 y ω_2 , y asumiendo que $\omega_1 > \omega_2 \gg \omega_\gamma c$), las diferencias de velocidades entre ellas dos está dada por

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{v_{g1} - v_{g2}}{c} = \frac{\mu_\gamma^2 c^2}{2} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) + o \left[\left(\frac{\mu_\gamma^2 c^2}{\omega_1^2} \right)^4 \right] = \frac{\mu_\gamma^2}{8\pi^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + o [(\mu_\gamma \lambda_1)^4]. \quad (2.22)$$

Si las dos ondas viajan a la misma distancia L , entonces la diferencia en el tiempo de llegada es:

$$\Delta t \equiv \frac{L}{v_{g1}} - \frac{L}{v_{g2}} \approx \frac{L}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \mu_\gamma^2, \quad (2.23)$$

en donde los términos de orden superior a $(\mu_\gamma \lambda_1)^4$ han sido despreciados. Y las ecuaciones (2.21)-(2.23) son el punto de partida para detectar algún efecto de dispersión debido a la masa en reposo, tanto en los experimentos con aproximación o enfoque terrestres como extraterrestres.

2.3. El potencial de Yukawa en campos electrostáticos

A continuación, discutiremos como los efectos del fotón masivo se originan en los campos electrostáticos. Para el caso de un campo eléctrico estático, $\partial E/\partial t = 0$, la ecuación de ondas en este caso vendrá dada de la siguiente manera:

$$(\nabla^2 - \mu_\gamma^2)\phi = -4\pi\rho. \quad (2.24)$$

Para una carga puntual, tenemos que, $\rho(r) = Q\delta(r)$, donde la solución a la ecuación (2.24) vendrá dada por:

$$\phi(r) = \frac{Q}{r} \exp(-\mu_\gamma r), \quad (2.25)$$

cuyo campo eléctrico da,

$$\mathbf{E}(r) = Q\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu_\gamma}{r}\right) \exp(-\mu_\gamma r). \quad (2.26)$$

Observando con detenimiento las ecuaciones (2.25) y (2.26) se puede demostrar que si $r \ll \mu_\gamma^{-1}$, el inverso al cuadrado de la ley de Coulomb es, de hecho, una muy buena aproximación, pero si $r \gg \mu_\gamma^{-1}$, entonces la ley se aleja drásticamente de las predicciones derivadas por las ecuaciones de Maxwell. Esta última aproximación, es útil en escenarios astronómicos, astrofísicos o geomagnéticos donde las escalas de longitudes involucradas son mayores o del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de Compton para el fotón.

2.4. El potencial de Yukawa en campos magnetostáticos

Consideremos una densidad de corriente estacionaria \mathbf{J} distribuida sobre una pequeña región V , la cual genera un campo magnético constante. La ecuación de onda masiva viene dada de la siguiente manera:

$$(\nabla^2 - \mu_\gamma^2)\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad (2.27)$$

una solución estándar a la ecuación (2.27), viene dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (2.28)$$

donde G es la conocida función de Green con la forma del potencial de Yukawa

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{c} \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.29)$$

Sustituyendo la expansión multipolar de la función de Green en un área mucho mayor que las dimensiones del área V en la ecuación (2.28), se encuentra que el potencial dipolar magnético es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \nabla \times \left(\mathbf{m} \frac{e^{-\mu_\gamma r}}{r} \right), \quad (2.30)$$

en donde \mathbf{m} se define como el momento dipolar magnético,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'. \quad (2.31)$$

Para un campo magnetostático, el campo de un dipolo está dado por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \left(\mathbf{m} \frac{e^{-\mu_\gamma r}}{r} \right) \quad (2.32)$$

por lo tanto, tenemos que,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}^{(1)} = \frac{1}{c} \left(\frac{e^{-\mu_\gamma r}}{r^3} \right) \left\{ \left(1 + \mu_\gamma r + \frac{1}{3} \mu_\gamma^2 r^2 \right) (3\mathbf{m} \cdot \widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}) - \frac{2}{3} \mu_\gamma^2 r^2 \mathbf{m} \right\}. \quad (2.33)$$

Ahora, consideremos que el dipolo (\mathbf{m}) apunta en la dirección del eje z , es decir, $\mathbf{m} = m\hat{z}$ y $\hat{z} = \mathbf{z}/z$. Y así, las componentes de \mathbf{H} pueden ser descompuestas para producir

$$H_z = \frac{1}{c} \left[\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right) m' - \frac{2\mu_\gamma^2 m}{3r} e^{-\mu_\gamma r} \right] \quad (2.34)$$

y

$$H_x = \frac{1}{c} \left(\frac{3zx}{r^5} \right) m', \quad (2.35)$$

en donde $m' = (1 + \mu_\gamma r + \frac{1}{3}\mu_\gamma^2 r^2)m$. Lo cual indica que el campo dipolar esta compuesto por dos partes, es decir, un campo magnético dipolar ordinario, como en la teoría de Maxwell ($\mu_\gamma = 0$) con intensidad dipolar

$$\mathbf{H}_D = \frac{1}{c} \frac{m'}{3r} (3\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - z) \quad (2.36)$$

y un nuevo campo en la dirección z

$$\mathbf{H}_{ext} = -\frac{1}{c} \left(\frac{2\mu_\gamma^2}{3r} \right) e^{-\mu_\gamma r} m, \quad (2.37)$$

con un signo negativo que refuerza el campo ecuatorial y debilita el campo polar del dipolo. Este nuevo campo, uniformemente distribuido sobre la superficie de la tierra, es antiparalelo a la dirección del momento dipolar magnético \mathbf{m} . En el próximo capítulo, se mostrará cómo estos resultados pueden ser usados para estimar un posible valor o límite superior sobre la masa del fotón a partir de estudios geomagnéticos.

2.5. El fotón longitudinal

Las ecuaciones de Maxwell implican que un fotón puede ser polarizado en dos direcciones las cuales son ortogonales a la dirección del movimiento del fotón. Una masa en reposo para el fotón diferente de cero podría devenir en un tercer estado de polarización, en el cual el vector del campo eléctrico apunta a lo largo de la línea de movimiento, y en consecuencia la partícula es llamada fotón longitudinal [13]. La descomposición del campo eléctrico en su parte transversal y longitudinal, es decir, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T + \mathbf{E}^L$ con $\nabla \cdot \mathbf{E}^T = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E}^L = 0$, y una descomposición similar para \mathbf{A} , muestra que el

término adicional (2.16) relacionado con la masa del fotón describe solamente radiación longitudinal, mientras que el término $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ describe únicamente radiación transversal, siendo $(\mathbf{E}^L \times \mathbf{B})$ paralelo a la superficie de una gran esfera alrededor de la fuente [14]. Sin embargo, si el fotón tiene una masa, esta debe ser excesivamente pequeña, ya que el efecto del fotón longitudinal ha sido tan pequeña como para ser detectada hasta la fecha [4,15].

Una interrogante natural relacionada con el fotón longitudinal es la radiación de cuerpo negro. Esto se debe a que una consecuencia inmediata que se deriva de este escenario es un aumento de 50 % de la energía almacenada en un sistema de fotones en equilibrio termodinámico con un reservorio de temperatura T . Por supuesto, este efecto no está presente ya que la ley de radiación de Planck se conoce con bastante precisión. Entonces, ¿podemos concluir que la masa del fotón debe ser nula? La respuesta a esta pregunta fue energicamente dada por Bass y Schrödinger [16,17] quienes concluyeron que la aproximación al equilibrio de los fotones longitudinales en una cavidad es muy lenta, teniendo una escala de tiempo comparable a la edad del universo. Ellos consideraron una cavidad cerrada en forma de caja con paredes perfectamente conductoras, y se preguntaron cuánto tiempo podría tomar para que la energía almacenada en las ondas transversales se particionara igualmente entre los tres estados de polarización. Aunque ellos obtuvieron un tiempo muy grande para cualquier contenedor razonablemente grande, las bases de sus cálculos son una cuestión abierta, ya que aún el mejor conductor conocido no es suficientemente bueno como para reflejar ondas longitudinales. El concepto clave aquí es la profundidad de penetración del conductor. Es sencillo mostrar que la profundidad de penetración para ondas longitudinales de frecuencia angular ω está dada por [18]

$$\delta_T \geq (\omega/\mu_\gamma c)\delta_L, \quad (2.38)$$

donde δ_T es la profundidad de penetración para ondas transversales. La igualdad estricta es válida sólo para conductividad baja, de hecho, δ_L es infinito en el límite de conductividad infinita. Considérense fotones de frecuencia típica de un sistema a una temperatura de $10^{-3} \text{ }^\circ K$. Esto significaría que $\omega > 10^8 \text{ Hz}$ con una profundidad de penetración δ_T mayor que 10^{-5} cm , por lo tanto, $\delta_L \geq 10^{10} \text{ cm}$ lo cual es una distancia comparable con el radio del sol. En consecuencia, se puede decir que cualquier cavidad es transparente para los fotones longitudinales lo cual hace que su detección sea muy difícil.

2.6. Relatividad especial con fotón masivo

Es bien conocido que c es una constante fundamental del campo electromagnético de Maxwell y representa la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, y que la relatividad especial fue desarrollada en parte como una consecuencia de asumir que la velocidad de la luz es constante. Sin embargo, una de las predicciones de la teoría electromagnética masiva es que habrá dispersión de la velocidad de un fotón masivo en el vacío. La solución de onda plana para las ecuaciones de Proca sin corrientes es $A^\nu \sim \exp(ik^\mu x_\mu)$, donde el vector de onda $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ satisface la relación (2.19). De la ecuación (2.21) se puede observar que $v_g = 0$ para $\omega = \mu_\gamma c$, es decir la onda masiva no se propaga. Cuando $\omega < \mu_\gamma c$, k es una cantidad imaginaria y la amplitud de una onda masiva podría, por tanto, ser atenuada exponencialmente. Sólo cuando $\omega > \mu_\gamma c$, las ondas pueden propagarse en el vacío sin experimentar atenuación. En el límite $\omega \rightarrow \infty$, la velocidad de grupo se aproximará a c para todos los fenómenos. Por lo tanto, un nuevo postulado debe ser introducido con el fin de restaurar las características de la teoría especial de la relatividad para fotones con masa diferente de cero. El postulado es el siguiente [4], dados dos marcos de referencia inerciales cualesquiera, el primero moviéndose a velocidad v con respecto al segundo, existe una frecuencia ω_0 , dependiente de $|v|$ y una exactitud ε deseada, tal que cualquier onda de luz con frecuencia mayor que ω_0 tendrá una velocidad entre c y $c - \varepsilon$ en ambos marcos.

Un fotón masivo implica que la velocidad de la luz no es una constante única sino que es una función de la frecuencia. De hecho, la suposición de una velocidad constante para la luz no es necesaria para la validez de la relatividad especial, es decir, la relatividad especial puede por el contrario ser basada sobre la existencia de un único límite de velocidad c hacia el cual las velocidades de todos los cuerpos tienden cuando su energía es mucho mayor que sus masas [4,19]. Entonces, la velocidad que entra en las transformaciones de Lorentz podría ser simplemente esta velocidad límite y no la velocidad de la luz.

Capítulo 3

Límites sobre la masa del fotón: enfoques clásicos

La famosa ley del inverso al cuadrado de la electrostática, publicada por primera vez en 1785 por Charles Augustin de Coulomb, la cual se conoce como la ley fundamental de la electrostática y la primera ley cuantitativa en la historia de la electricidad, ha desempeñado un papel crucial y ha contribuido grandemente al desarrollo de la electricidad y el magnetismo, y otros campos relacionados. La ley de Coulomb, junto con el principio de superposición, proporcionaron la ley de Gauss y la conservación de la carga, que se pueden generalizar con las transformaciones de Lorentz para obtener las ecuaciones de Maxwell. Aún así, la validez de la ley de Coulomb ha sido probada de forma continua durante los últimos siglos, basada en el ingenioso esquema clásico ideado por el honorable Henry Cavendish. Los experimentos modernos por lo general, no sólo dan el resultado de una posible desviación en la ley del inverso al cuadrado de Coulomb, sino también un posible límite a la masa del fotón en reposo.

El fotón, considerado como la partícula fundamental de las interacciones electromagnéticas, generalmente se asume o se estima sin masa. Esta hipótesis se basa en el hecho de que un fotón no puede permanecer en reposo permanentemente. Teniendo en cuenta el principio de incertidumbre, el valor mínimo de la masa del fotón, que pudiera ser detectado experimentalmente, podría estimarse utilizando la relación $m_\gamma c^2(\Delta t) \approx \hbar$ para obtener un valor cercano a $m_\gamma \approx 10^{-66}g$, asumiendo que la edad del universo es de aproximadamente unos 10^{10} años. Éste sería el último límite superior que podría ser establecido para la masa del fotón. Los resultados experimentales obtenidos

hasta ahora, sólo sirven para establecer un límite superior de la masa del fotón y la desviación de la ley del inverso al cuadrado para valores de $m_\gamma > 10^{-66}g$

El objetivo principal del presente capítulo es presentar una revisión de las principales ideas y algunos resultados de las investigaciones desarrolladas para probar la ley de Coulomb y por ende establecer un posible límite superior a la masa del fotón en reposo.

3.1. Primeras verificaciones experimentales de la masa del fotón

En 1785 fue publicado por Charles Augustin Coulomb [20] la ley fundamental que rige las interacciones electrostáticas, la ley del inverso del cuadrado de la distancia. Como el primer principio cuantitativo desarrollado dentro de la ciencia eléctrica, la ley de Coulomb ha sido el fundamento para muchas contribuciones al desarrollo de la electricidad, magnetismo y campos relacionados. La validez de la ley de Coulomb ha sido probada en los últimos dos siglos, particularmente en lo que respecta a la naturaleza del inverso del cuadrado. Basándose en el ingenioso y clásico esquema divisado por Henry Cavendish [21], los modernos experimentos usualmente no sólo producen el resultado de la posible desviación del comportamiento del inverso del cuadrado, sino que como veremos más adelante, también son útiles para establecer un límite sobre la masa del fotón en reposo.

El primer experimento llevado a cabo sobre la verificación de la ley del inverso al cuadrado de Coulomb fue realizado en 1769 por John Robison [21,22]. El pudo medir la fuerza de repulsión entre dos masas cargadas, las cuales estaban equilibradas por la fuerza de gravedad que actuaban sobre ellas. Al conocer sus pesos, y repitiendo las medidas a diferentes distancias, fue posible calcular la magnitud de la fuerza eléctrica, evaluando su dependencia con la distancia, y así, verificar la exactitud y validez de la ley del inverso al cuadrado $1/r^2$. A partir de sus observaciones, Robison deduce que la ley debe presentar la siguiente forma funcional

$$F \propto \frac{1}{r^{2\pm\varepsilon}}, \quad (3.1)$$

donde F es la magnitud de la fuerza, r es la distancia de separación entre los cuerpos cargados y ε representa una medida de la precisión con la que

se verifica el comportamiento de $1/r^2$. Robison también encontró un límite superior de 0.06 para ε y así pudo establecer una fuerza de repulsión eléctrica entre las masas que varía como $r^{-2,06}$. Desafortunadamente, Robison no publicó sus resultados experimentales hasta el año de 1801, y para entonces Coulomb [20], ya había publicado sus trabajos. Aunque, el trabajo de Robison fue esencial en las primeras teorías del electromagnetismo, alcanzando su mayor auge en el trabajo de su colega James Clerk Maxwell [23]. Pero no fue sino hasta el siglo 20 que el resultado del experimento de Robison fue interpretado como una evidencia de la masa del fotón. En función de esta interpretación, el experimento de Robison proporcionó un límite para la masa del fotón del orden de $4 \times 10^{-40}g$.

Otro predecesor de Coulomb en esta área fue Henry Cavendish [21], quién en 1773 empleó esferas concéntricas para estudiar indirectamente la interacción entre cargas. El montaje experimental utilizado por él se ilustra en la figura 3.1, y su funcionamiento se describe a continuación. El globo interno primero es conectado a los hemisferios por medio de un alambre conductor, luego se cierran los hemisferios para formar una esfera externa. Entonces, la esfera externa es eléctricamente cargada hasta que el alambre conector es desprendido por medio de un hilo de seda. Finalmente, la esfera externa es abierta, retirada y descargada completamente. Un electrómetro de esferas de médula fue entonces empleado para detectar la carga sobre el globo interno. El resultado experimental obtenido por Cavendish fue que las esferas del electrómetro no se separaban, indicando con esto la ausencia de carga sobre el globo interno.

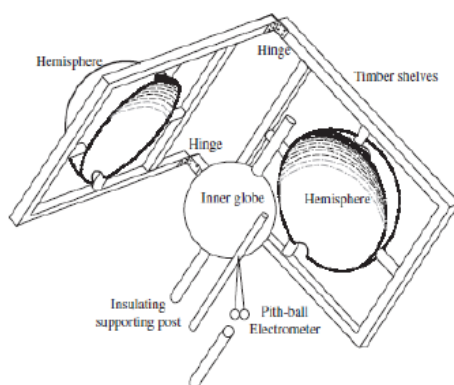


Figura 3.1. Montaje experimental utilizado por Cavendish para establecer la ley del inverso al cuadrado de la distancia de la electrostática.

En la explicación de sus resultados Cavendish sugirió que, en analogía con la fuerza gravitacional entre cuerpos, la fuerza eléctrica entre las cargas obedece también una ley del inverso al cuadrado, pero con la única diferencia de que la fuerza eléctrica entre cargas iguales era repulsiva mientras que entre cargas opuestas era atractiva. Cavendish igualmente interpreto sus resultados en términos de una posible desviación de la ley del inverso al cuadrado, y concluyó que la desviación ε en el exponente de r no puede ser mayor que 0,02. En las interpretaciones modernas el resultado de Cavendish está asociado con una masa en reposo para el fotón poco menos de $1 \times 10^{-40}g$. Al igual que Robinson, Cavendish no publicó su descubrimiento, y no fue sino hasta 100 años después que estos fueron mencionados por Maxwell en su libro "*The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish*".

Una versión revisada del experimento de Cavendish fue llevada a cabo por Maxwell en 1873 en el "*Cavendish Laboratory*" de la universidad de Cambridge. La principal modificación usada para mejorar la replica del experimento consistió en conectar a tierra la esfera externa durante la segunda parte del experimento en lugar de ser retirada, proporcionando así un perfecto blindaje por si existiera alguna perturbación externa, pero a expensas de determinar el potencial de la esfera interna con mayor dificultad. El resultado de esta configuración experimental es análoga a un condensador formado por dos cascarones esféricos aislados, en este caso el cascarón exterior tiene un pequeño orificio a través del cual es introducido un electrodo (electrómetro de Thomson) para medir el potencial en el cascarón interno. Este orificio fue cubierto con una tapa que tenía una punta de prueba que conectaba simultáneamente a los dos cascarones. Fue necesario que la superficie del cascarón externo estuviera cerrada durante la primera parte del experimento. Una vez que el cascarón externo era cerrado, entonces se procedía a cargarlo a un alto potencial y luego se retiraba la tapa por medio de un hilo de seda, esto desconectaba los dos cascarones. Finalmente, Maxwell observó el mismo fenómeno experimental que Cavendish y concluyó que la desviación en ε era menor que 5×10^{-5} , el cual ahora es interpretado como un límite superior sobre la masa del fotón de $5 \times 10^{-42}g$. Finalmente, hay que mencionar que el mismo Coulomb determinó, por medio de su balanza de torsión (ver figura 3.2), que $\varepsilon \leq 0,01$, equivalente a una masa para el fotón de $2 \times 10^{-41}g$ lo cual sobrepasa los resultados encontrados previamente por Robison y Cavendish.

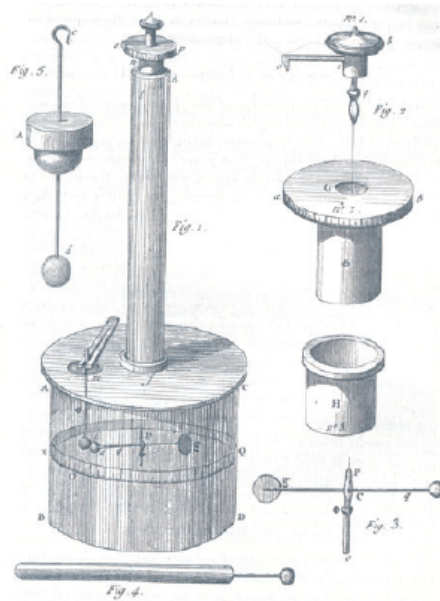


Figura 3.2. Balanza de torsión utilizada por Coulomb, para medir la dependencia de la ley del inverso al cuadrado de la distancia ($1/r^2$) de la fuerza de repulsión electrostática.

1

3.2. Pruebas nulas de la ley de Coulomb: teoría

La técnica empleada por Henry Cavendish ha sido utilizada en la mayoría de los trabajos experimentales desde entonces, la cual resulta ser una de las configuraciones potencialmente más sensitiva. En el sentido de que se trata de comprobar con gran exactitud la ausencia de cargas en las esferas internas, en lugar de tener que medir con menos precisión una cantidad física no nula. En lo que sigue, haremos una breve deducción del potencial electrostático de una lámina esférica cargada uniformemente.

Supongamos que, el exponente en la ley de Coulomb no es -2 pero sí $-(2 + \varepsilon)$, a primer orden en ε el potencial eléctrico a un punto r de la densidad de carga $\rho(r')$ viene dado por

¹ Ilustración sacada de la siguiente referencia: C. A. Coulomb, Collection de Mémoires Relatifs á la Physique. Vol 1. Paris: Société Francaise de Physique, 1784.

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{1+\varepsilon}}. \quad (3.2)$$

Ahora, supongamos que la carga esta distribuida uniformemente sobre una lámina esférica de radio $a > r$, y que $\rho(r', \theta', \varphi') = \sigma\delta(r - a)$, escogiendo arbitrariamente a r y haciendo que coincida con el eje z . La expresión (3.2) se escribe como

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta')^{(1+\varepsilon)/2}} \quad (3.3)$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos\theta')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta')^{(1+\varepsilon)/2}} \quad (3.4)$$

$$= \frac{f(r+a) - f(r-a)}{2ar}. \quad (3.5)$$

En el caso, en que la ley de Coulomb sea perfectamente válida, $\varepsilon = 0$ y

$$V(r) = 2\pi\rho \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos\theta')}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta')^{1/2}} = \frac{1}{a} = \text{const}, \quad (3.6)$$

de modo que si, $V(r) - V(a) = 0$ el campo eléctrico en el interior de una lámina esférica cargada es nula. Por lo tanto, para las pruebas de la ley de Coulomb, estamos interesados en encontrar el potencial inducido de una esfera de radio r debido a una distribución uniforme de carga sobre una esfera concéntrica de radio $a > r$, es decir,

$$\frac{V(r) - V(a)}{V(a)} = \left(\frac{a}{r}\right) \left[\frac{f(a+r) - f(a-r)}{f(2a)} \right] - 1. \quad (3.7)$$

A primer orden en ε , la ecuación (3.7) da

$$\frac{V(r) - V(a)}{V(a)} = \varepsilon M(a, r), \quad (3.8)$$

donde,

$$M(a, r) = \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{a}{r} \ln\left(\frac{a+r}{a-r}\right) - \ln\left(\frac{4a^2}{a^2 - r^2}\right) \right]. \quad (3.9)$$

Puesto que, $M(a, r)$ resulta ser de orden uno, entonces ε es esencialmente el cociente $[V(r) - V(a)]/V(a)$ de la diferencia de potencial medido, $V(r) - V(a)$, y el voltaje aplicado, $V(a)$.

Como una variante a las ecuaciones (3.8) y (3.9), de Broglie [24] consideró una simple generalización a las ecuaciones de Maxwell implicando una pequeña masa en reposo no nula para el fotón ($\mu_\gamma \neq 0$). En este caso, dos cargas se repelan una de la otra debido a una fuerza tipo Yukawa derivado del siguiente potencial

$$U(r) = \frac{e^{-\mu_\gamma r}}{r}, \quad (3.10)$$

donde $\mu_\gamma = m_\gamma c/\hbar = \lambda_C^{-1}$ es el inverso de la longitud de onda de Compton del fotón. En el límite $\mu_\gamma a \ll 1$, $U(r) = 1/r - \mu_\gamma + \frac{1}{2}\mu_\gamma^2 r$ y la ecuación (3.7) nos queda,

$$\frac{V(r) - V(a)}{V(a)} = -\frac{1}{6}\mu_\gamma^2(a^2 - r^2). \quad (3.11)$$

Por lo tanto, si la diferencia de potencial es $V(r) - V(a) \neq 0$ entonces la ley de Coulomb no se cumple. Y de acuerdo a la teoría de Proca, si la masa del fotón en reposo es no nula la ley es invalida y el potencial de Coulomb es dado por el potencial de Yukawa (3.10). Sin embargo, una relación matemática puede ser establecida entre ε y μ_γ . Por ejemplo, igualando (3.8) con (3.11). Así, para pruebas directas de la ley de Coulomb que consisten en medir la diferencia de potencial de cargas estáticas de láminas concéntricas cargadas, se puede utilizar una de las siguientes ecuaciones, la (3.8) o la (3.11), buscando ε o μ_γ . Para el caso, de probar la ley de Coulomb, podemos utilizar el potencial de Yukawa (3.10) y así determinar el valor de μ_γ con facilidad con algunos métodos indirectos que dependen de las posibles variaciones, debido a la presencia del potencial de Yukawa (3.10), relacionados con los campos de la electrodinámica estándar de alcance infinito. Como serían, por ejemplo, las mediciones del campo magnético de la tierra realizadas a grandes distancias o durante un período largo tiempo, donde el porcentaje del efecto sería mucho más alto. En este sentido podemos citar, (a) la comprobación por satélite del campo magnético de la tierra el cual decae como $1/r^3$ a una distancia a la cual el viento solar es apreciable [25,26], (b) observación de la propagación de ondas hidromagnéticas a través de magneto esféricas [27] ó (c) aplicación del método de los campos externos de Schrödinger [4,28]. De igual forma, estos tres métodos deben dar aproximadamente el mismo límite, $\mu \leq 10^{-11} \text{ cm}^{-1}$.

Para pruebas (directas) nulas de la ley de Coulomb de alta frecuencia, las cuales serán descritas más adelante, es conveniente partir de una generalización lineal relativista invariante de las ecuaciones de Maxwell, a saber, las ecuaciones de Proca [29]. Las ecuaciones de Proca para una partícula de espín 1 y masa m_γ es [11]

$$(\square + \mu_\gamma^2)A_\mu = \frac{4\pi}{c}J_\mu \quad (3.12)$$

y la ley de Gauss se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - \mu_\gamma^2\varphi. \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) se puede aplicar a dos conductores concéntricos, láminas esféricas de radio r y a ($a > r$) con un inductor transversal (es decir, en paralelo con éste) y condensadores esféricos. Si un potencial de la forma $V_0e^{i\omega t}$ se aplica al conductor exterior, el campo eléctrico resultante es [2],

$$\mathbf{E}(r) = (qr^{-2} - \frac{1}{3}\mu_\gamma^2V_0e^{i\omega t}r)\hat{r}, \quad (3.14)$$

donde q es la carga total en la lámina interior. El voltaje a través del inductor de capacitancia C viene dado entonces por

$$V(r) - V(a) = \int_r^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{C} - \mu_\gamma^2 \frac{V_0 e^{i\omega t}}{6} (a^2 - r^2) \quad (3.15)$$

excepto por el término estándar q/C , que es igual a cero cuando no existen cargas en las láminas internas. Es decir,

$$V(r) - V(a) = -\mu_\gamma^2 \frac{V_0 e^{i\omega t}}{6} (a^2 - r^2), \quad (3.16)$$

el término dependiente en μ_γ de la ecuación (3.16) es equivalente al de la ecuación (3.11).

3.3. Pruebas directas de la ley de Coulomb

En lo que sigue, consideraremos la derivación llevada a cabo por Maxwell (Ec. (3.8)) en su aplicación al caso simple de una esfera conductora que contiene en su interior una pequeña esfera concéntrica, en donde el potencial

de la esfera exterior fue elevado a un determinado valor V y la diferencia de potencial entre ellas fue medido. La forma geométrica presentada por estos arreglos experimentales debe ser irrelevante, debido a que el campo eléctrico dentro de una cavidad o lámina esférica es nula a menos que la ley de Coulomb no se cumpla. Así, Cochran y Franken [30] utilizaron conductores concéntricos en forma de cajas rectangulares, con ello establecieron un límite de $\varepsilon \leq 9,2 \times 10^{-12}$ para un valor de $m_\gamma \leq 3 \times 10^{-45} g$ para la masa del fotón. Después, del desarrollo de los detectores "phase-sensitive", más y nuevos experimentos de alta precisión para verificar la ley de Coulomb como los llevados a cabo por Cochran y Franken [30] fueron desarrollados también por Bartlett y Phillips [31].

Una de las primeras pruebas experimentales dinámicas o directas sobre la ley de Coulomb fue realizada por Plimpton y Lawton [3,32] en 1936. En este caso, el experimento electrostático de esferas concéntricas desarrollado por Cavendish y Maxwell fue reemplazado por un método cuasiestático, en el cual el problema debido a la ionización espontánea y potencial de contacto son eliminados mediante la colocación de un detector dentro de la esfera interior y conectando esta permanentemente con la esfera exterior con el fin de detectar cualquier cambio en el potencial de la esfera interior con respecto a la exterior, como se indica en la figura 3.3. La sustitución de los parámetros experimentales en las ecuaciones (3.8) y (3.11) dan un límite sobre la medida de la desviación de la ley del inverso al cuadrado de Coulomb de $\varepsilon \simeq 2 \times 10^{-9}$ y un límite correspondiente sobre la masa del fotón en reposo de $m_\gamma < 3,4 \times 10^{-44} g$.

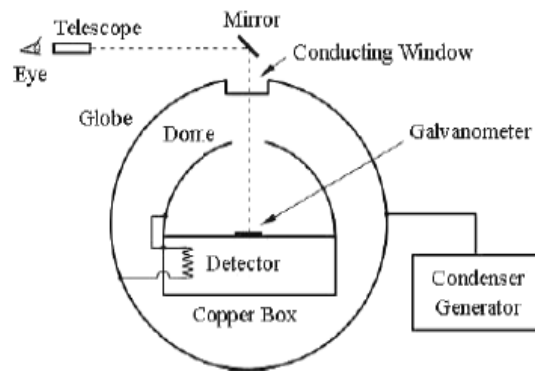


Figura 3.3. Arreglo experimental usado por Plimpton y Lawton en 1936 para probar la ley del inverso al cuadrado de la fuerza entre cargas.

Otro de los experimentos clásicos nulos que prueban la validez de la ley del inverso al cuadrado de la fuerza entre cargas y como una mejora al arreglo experimental de Plimpton y Lawton [3,32] fue llevada a cabo por Bartlett y Phillips [31] en 1970. En su experimento, la lámina externa de un capacitor esférico fue elevada a un potencial V el cual fue conectado a tierra y la diferencia de potencial $V(r) - V(a)$ inducido entre las láminas internas y externas fue determinado mediante las ecuaciones (3.8) y (3.11). Así, en lugar de usar dos láminas esféricas concéntricas, se utilizaron cinco láminas esféricas concéntricas con el fin de mejorar la sensibilidad y ayudar a eliminar los errores introducidos por las cargas inducidas. Una diferencia de potencial de 40 kV a 2500 Hz de frecuencia fue aplicado entre las dos esferas externas y mediante un detector de fase "lock-in" con una sensibilidad cercana a 0,2 nV se pudo medir la diferencia de potencial entre las dos esferas más internas. Cualquier desviación en la ley de Coulomb debe llevar a un resultado no nulo de $V(r) - V(a)$ proporcional a ε como lo indica la ecuación (3.8) llevando a un valor de $\varepsilon \leq 1,3 \times 10^{-13}$ para establecer un posible límite superior sobre la masa del fotón en reposo de $m_\gamma \leq 3 \times 10^{-46} g$. Un resultado similar se encontró incluso cuando la frecuencia se redujo a 250 Hz y el detector fue sincronizado con la corriente de carga en lugar de la carga misma.

El mejor resultado obtenido hasta ahora a través de la técnica original de Cavendish sigue siendo la llevada a cabo por Williams, Faller y Hill (WFH) [3] en 1971, quienes perfeccionaron un arreglo experimental ya realizado [33]. Ellos emplearon, cinco conductores concéntricos en forma de icosaedros (como se muestra en la figura 3.4) en lugar de esferas, esto, con el fin de reducir los efectos debido a cargas inducidas. Un alto voltaje y una señal de frecuencia fue aplicada al conductor exterior y un detector muy sensible verificaba cualquier indicio de alguna señal relacionada con cargas inducidas en los conductores internos, el cual funcionaba amplificando la señal en los conductores internos y era comparada con una señal idéntica de referencia, la cual estaba progresivamente fuera de fase a un ritmo de 360° por cada media hora. Con el fin de evitar la introducción de campos no relacionados (externos) y algún incumplimiento en la ley de Coulomb, la señal de referencia y la señal del detector de salida era transmitida por medio de una fibra óptica. Los dos conductores más externos, con un diámetro de aproximadamente 1,5 metros, fueron cargados a una tensión de 10 kV a 4 Mhz de frecuencia, concéntrica en el interior de éste conductor cargado existe un pequeño conductor. Cualquier desviación de la ley de Coulomb se halla evaluando la integral de línea del campo eléctrico entre los dos conductores más internos con una sensibilidad

de detección de aproximadamente 10^{-12} Voltios.

El resultado nulo de este experimento expresado en términos de la masa del fotón en reposo al cuadrado (Ecs. (3.11) o Ecs. (3.16)) es $\mu_\gamma^2 = (1,04 \pm 1,2) \times 10^{-19} \text{ cm}^{-2}$ y sobrentendido como una desviación de la ley de Coulomb en forma de la ecuación (3.8), el resultado da $\varepsilon = (2,7 \pm 3,1) \times 10^{-16}$, que se extendió a la validez de la ley de Coulomb por dos órdenes de magnitud con respecto a los resultados encontrados por Bartlett, Goldhagen y Phillips. En términos de la longitud de onda de Compton y la masa del fotón, los resultados son $1,95 \times 10^{10} \text{ cm}$ para μ_γ^{-1} y

$$m_\gamma < 1,6 \times 10^{-47} \text{ g.} \quad (3.17)$$

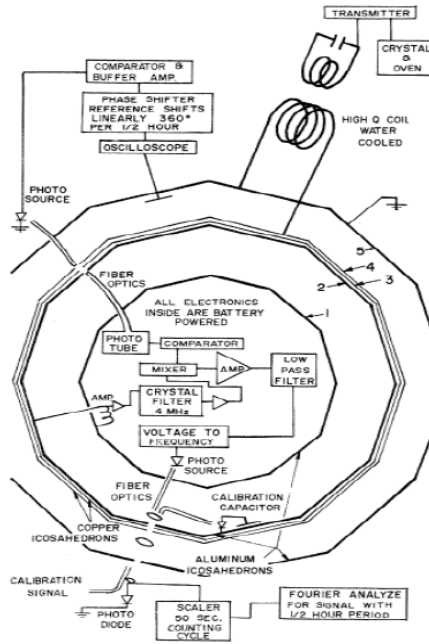


Figura 3.4. Arreglo experimental (tipo Cavendish) usado por Williams, Faller y Hill [3] en 1971.

3.4. Pruebas indirectas de la ley de Coulomb

Además de las pruebas y arreglos experimentales presentadas en las secciones previas, han existido también una serie de comprobaciones experimentales indirectas de la ley de Coulomb, las cuales serán discutidas brevemente a continuación.

3.4.1. Pruebas astronómicas y geomagnéticas

Una de las consecuencias de la ley de Coulomb es que el campo magnético producido por un dipolo varía como $1/r^3$ medido a una distancia de su centro, donde la aproximación dipolar es válida. En el caso, del campo magnético de un planeta, esta distancia es equivalente al menos a dos radios planetarios. Si la masa en reposo del fotón no es nula, lo que equivaldría a un incumplimiento en la ley de Coulomb, un factor de Yukawa de la forma e^{-r/λ_C} se introduce en los términos $1/r$ para los potenciales electrostáticos y magnetostáticos, en este caso, el campo magnético producido por un dipolo ya no se comporta como $1/r^3$ debido a que existen correcciones relacionadas con la longitud de onda de Compton $\lambda_C = 2\pi\mu_\gamma^{-1} = h/m_\gamma c$ donde m_γ es la masa del fotón. El valor estándar del momento dipolar magnético \mathbf{m} , se convierte así en

$$m' \rightarrow m(1 + \mu_\gamma r + \frac{1}{3}\mu_\gamma^2 r^2), \quad (3.18)$$

y la expresión para el campo magnético el cual contiene un factor adicional

$$\mathbf{H}_{ext} = -\frac{1}{c} \frac{2}{3r} \mu_\gamma^2 m e^{-\mu_\gamma r} \quad (3.19)$$

cuando, $\mu_\gamma \neq 0$.

Dentro de la categoría de límites extraterrestres podemos citar el método del campo externo de Schrödinger [34]. En este escenario un dipolo magnético puntual adquiere una atenuación tipo Yukawa, del mismo tipo que experimenta la carga puntual mencionada anteriormente. En consecuencia, el campo dipolar magnético H_D de la tierra exhibe una componente adicional H_{ext} . Las expresiones de estos campos son las siguientes,

$$\mathbf{H}_D = \frac{1}{c} \frac{m'}{r^3} (3\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \hat{z}), \quad (3.20)$$

donde, $m' \rightarrow m(1 + \mu_\gamma r + \frac{1}{3}\mu_\gamma^2 r^2)$ y

$$\mathbf{H}_{ext} = -\frac{1}{c} \frac{2}{3r} \mu_\gamma^2 m e^{-\mu_\gamma r}. \quad (3.21)$$

Si se toma la razón de estos dos campos magnéticos proyectados en el ecuador ($\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$), se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{H_{ext}}{H_D} = \frac{\frac{2}{3}\mu_\gamma^2 r^2}{1 + \mu_\gamma r + \frac{1}{3}\mu_\gamma^2 r^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{H_{ext}}{H_D} = \frac{539}{31089} \quad (3.23)$$

lo cual da,

$$\mu_\gamma r = 0,176 \quad (3.24)$$

sustituyendo el radio de la tierra en r , se obtuvo un límite para la masa del fotón de $m_\gamma \leq 1,0 \times 10^{-47} g$. Bass y Schrödinger [16], sugirieron que multiplicar este resultado por un factor de 2, (por razones de seguridad), daría un límite superior a la masa del fotón de $m_\gamma \leq 2,0 \times 10^{-47} g$ más confiable.

La expresión (3.22) es útil para establecer un límite superior sobre μ_γ si se obtienen por otros métodos los valores de H_{ext} y H_D para un valor específico de r . Siguiendo este método, Goldhaber y Nieto [11] en 1968, analizaron las mejores mediciones por satélite del campo magnético terrestre, encontrándose los límites de $5,5 \times 10^{10} \text{ cm}$ para λ_C y $4 \times 10^{-48} g$ para m_γ , esta última correspondiente a un valor equivalente a $\varepsilon \leq 3,37 \times 10^{-17}$. Un resultado del mismo orden fue obtenido por Fischbach *et. al.* [35] a partir del análisis de mediciones satelitales más recientes del campo magnético de la tierra. El mejor resultado establecido hasta ahora, por este medio, es el de Davis *et. al.* [36] en 1975, quienes verificaron el comportamiento ($1/r^3$) del campo magnético de Jupiter (mucho más intenso que el de la Tierra) de observaciones realizadas por la sonda Pioneer 10, y fueron capaces de mejorar la precisión de la validez de la ley de Coulomb, llegando a los límites de $\lambda_C \geq 3,14 \times 10^{11}$ es decir, $\mu_\gamma \leq 2 \times 10^{-11} \text{ cm}$ ó

$$m_\gamma = 8 \times 10^{-49} g. \quad (3.25)$$

Un trabajo adicional sobre la determinación del campo magnético planetario para la masa del fotón fue llevada a cabo por Bicknell [37] en 1977. El cual extendió la expresión de Schrödinger para un campo dipolar [36] en un análisis completo de los armónicos esféricos de un campo planetario estático. Las componentes adicionales del campo magnético fueron identificadas como debidas a la masa del fotón, en donde, no se encontró mejora alguna al límite fijado en λ_C debido a que los términos más relevantes evaluados para el campo geomagnético eran aparentemente del mismo orden del campo externo de Schrödinger.

Recientemente, ha sido establecido un mejor límite a partir de observaciones astrofísicas. Por medio de un conjunto de ecuaciones hidromagnéticas

Ryutov [38] analizó (asumiendo masa finita para el fotón) las propiedades del viento solar en la órbita de Plutón. El análisis produjo un límite de $m_\gamma \leq 1,5 \times 10^{-51}g$, el cual, como se puede observar, es del mismo orden de magnitud que el obtenido por Luo *et. al.* [39].

3.4.2. Experimentos Criogénicos

Las teorías modernas que apelan al concepto de rupturas de simetría espontánea asumen que las partículas sin masa, por arriba de cierta temperatura crítica T_c , adquieren cierta masa por abajo de esta temperatura. Dentro de este criterio, es natural suponer que el fotón con masa nula por encima de cierta temperatura crítica, puede adquirir una masa en reposo por debajo de esta.

Siguiendo este enfoque, un experimento criogénico con el fin de detectar la masa del fotón fue realizado por Ryan *et. al.* [5] en 1985 como se muestra esquemáticamente en la figura 3.5, que consistía esencialmente en un experimento nulo con contenedores concéntricos (superficies cerradas), similares a las anteriores pruebas directas de la ley de Coulomb tal como la de Williams *et. al.* [3]. Sin embargo, a diferencia del experimento estándar de la ley de Coulomb, este método mide la corriente que fluye entre dos superficies cerradas en respuesta a una diferencia de voltaje impuesto, no la diferencia de voltaje en sí. El aparato se sumergió en un tanque de helio líquido, el resultado del experimento indica que la masa del fotón es $m_\gamma \leq (1,5 \pm 1,38) \times 10^{-42}g$ a $1,36^\circ K$, aunque la precisión no es tan alta como en algunos de los estudios anteriores. Sin embargo, es muy importante debido a que la validez de la ley de Coulomb se extiende desde la temperatura ambiente normal en la tierra a temperaturas típicas de un espacio interestelar lejano o el medio ambiente galáctico.

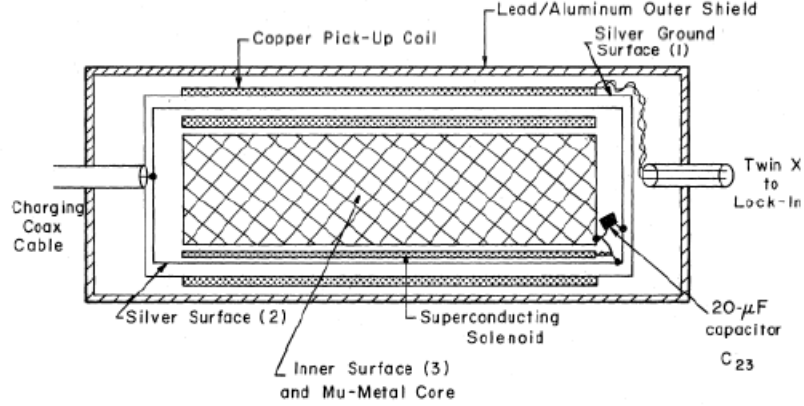


Figura. 3.5. Diagrama esquemático del experimento criogénico para la masa del fotón de Ryan et. al. [5].

La masa del fotón y el potencial vector magnético cósmico

Otro modelo experimental novedoso para la medición de la masa del fotón m_γ se basó en la balanza toroidal de Cavendish que se utilizó para evaluar el producto $\mu_\gamma^2 \mathbf{A}$ de la masa del fotón al cuadrado ($\mu_\gamma^{-1} = \hbar/m_\gamma c$) y el potencial vector del ambiente cósmico \mathbf{A} . Este modelo experimental, desarrollado por Lakes [6], se basa en el hecho de que las ecuaciones de Maxwell-Proca modifican las ecuaciones estándar para el rotor de \mathbf{B} de la siguiente manera,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_\gamma^2 \mathbf{A}. \quad (3.26)$$

La invariancia de calibre se pierde si $\mu_\gamma \neq 0$, ya que en estas ecuaciones los potenciales mismos tienen significado físico, no así los campos usuales. Si un toroide lleva una corriente eléctrica - o está permanentemente magnetizado con un campo \mathbf{B} confinado dentro de él - el correspondiente potencial vector magnético puede ser representado por un campo dipolar \mathbf{A}_d y si $\mu_\gamma \neq 0$ este campo dipolar interactúa con el potencial vector del ambiente cósmico \mathbf{A} para producir un torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}_d \times \mathbf{A} \mu_\gamma^2$ a través de la densidad de energía del potencial vector. Así, el método se basa en la densidad de energía de \mathbf{A} en presencia de m_γ , y no en la medición del campo magnético. El experimento no da un límite directo para μ_γ , pero sí para $\mathbf{A} \mu_\gamma^2$. La balanza de Cavendish modificada utilizada para determinar el producto $\mathbf{A} \mu_\gamma^2$ consistía en un toroide agujereado de acero con alambre enrollado, el cual conducía una corriente,

y se apoyaba en la superficie del agua [40] como se indica en la figura 3.6, el resultado experimental fue $\mathbf{A}\mu_\gamma^2 < 2 \times 10^{-9} \text{ Tm/m}^2$. Si el potencial vector magnético del ambiente es $\mathbf{A} \approx 10^{12} \text{ Tm}$ debido al nivel de los campos de las fuentes, tenemos que, $\mu_\gamma^{-1} > 2 \times 10^{10} \text{ m}$. Incluso, con valores más prácticos de \mathbf{A} , el límite establecido por este experimento mejora la precisión alcanzada con la técnica del campo magnético de Júpiter.

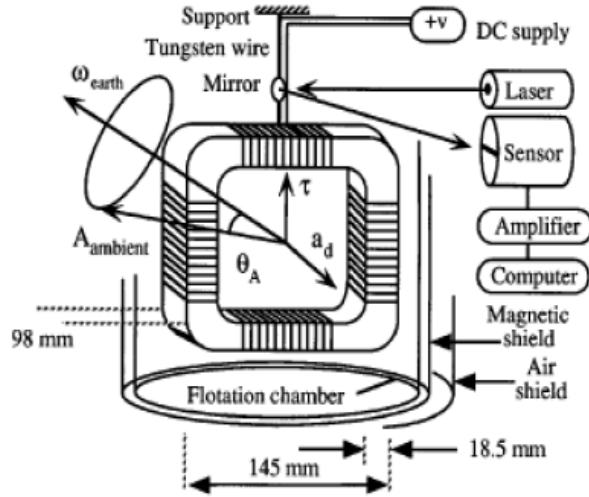


Figura 3.6. Diagrama de la balanza de Cavendish modificada utilizada por Lakes [6] para evaluar el producto de la masa del fotón al cuadrado y el potencial vector del ambiente cósmico.

El arreglo experimental usado por Lakes [6], es tal que, el torque en la balanza de torsión varía con la rotación de la tierra, permitiendo experimentalmente detectar las variaciones. Sin embargo, si se alineara el potencial vector del ambiente cósmico por casualidad con el eje de rotación de la tierra, entonces esta aproximación no funcionaría. Con la finalidad de evitar esta eventualidad, Luo *et. al.* [39] llevaron a cabo un modelo mejorado del experimento, en el que la balanza de torsión se hiciera girar para asegurar la efectividad de localización para todas las orientaciones posibles del potencial vector, y a la vez, sería capaz de eliminar las influencias de las perturbaciones ambientales siderales en virtud de un método de modulación. El resultado experimental dio $\mathbf{A}\mu_\gamma < 1,1 \times 10^{-11} \text{ Tm/m}^2$, si el potencial vector magnético del ambiente cósmico se toma como $\mathbf{A} \approx 10^{12} \text{ Tm}$, que produce el nuevo límite superior $\mu_\gamma^{-1} > 1,66 \times 10^{11} \text{ m}$ y un valor para la masa del fotón de

$$m_\gamma < 1,2 \times 10^{-51} g. \quad (3.27)$$

Después que estos resultados se publicaron, Goldhaber y Nieto [11] señalaron que el valor del potencial vector magnético cósmico podría ser cero, o al menos muy pequeño, en una región particular del universo si la tierra se encuentra en una región tal que la magnitud de \mathbf{A} sería lo suficientemente pequeña para impedir la determinación de un límite en m_γ . Debido a un conocimiento incompleto de los campos magnéticos galácticos y extragalácticos, los cuales introducen las posibilidades de la no homogeneidades de densidades de campos y de plasmas, y considerando que el método de la balanza de torsión impone un límite en $\mu_\gamma^2 \mathbf{A}$, el problema del conocimiento incompleto de \mathbf{A} puede llevar a un límite impreciso de μ_γ .

3.5. Otras aproximaciones clásicas

Otras aproximaciones clásicas interesantes para la medición de la masa del fotón son, estudios de la dependencia con la altitud de campos geomagnéticos [11], dispersión de ondas hidromagnéticas en la magnetósfera de la Tierra [27], disipación de campos magnéticos a grandes escalas en la galaxia [41], estabilidad de plasmas en la galaxia [4], densidad media de la masa del disco galáctico [42], análisis de la estabilidad mecánica de gas magnetizado [43], investigación del comportamiento espectral de la radiación dipolar anisotrópica de la radiación de fondo [44] y análisis de los campos magnéticos del viento solar [45]. El interés de esta cantidad tan fundamental, m_γ , claramente, ha motivado a muchos enfoques diferentes y novedosos a su determinación en los últimos años.

Capítulo 4

Límites sobre la masa del fotón: enfoques cuánticos

En el capítulo anterior se ha mostrado como el límite de la masa del fotón puede ser obtenido por medio de muchos escenarios de diferentes orígenes físicos. En estos escenarios hay una constante común, todos son de naturaleza clásica. En el presente capítulo, vamos a mostrar que un límite sobre m_γ puede ser obtenido por medio de escenarios de naturaleza cuántica. En específico, se emplearán los efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm (AB). El interés en emplear este tipo de efectos se debe a la alta precisión que se ha alcanzado en los últimos tiempos en las pruebas experimentales de estos efectos. Otras de las motivaciones fundamentales es la utilización de experimentos "table-top." "bench-top", junto con el enfoque llevado a cabo por Boulware y Deser (BD) y puesto a prueba en los escenarios cuánticos en la búsqueda de un posible valor ó límite en la masa del fotón (m_γ).

4.1. Generalidades de los efectos Aharonov-Bohm (AB)

En el efecto AB magnético [7], las partículas son electrones y la singularidad electromagnética (em) es el flujo magnético de un delgado o fino solenoide como se ilustra en la figura 4.1, caracterizado por el potencial vector \mathbf{A} , el cual interactúa con las partículas cargadas, y el campo magnético ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) que es no nulo solamente en el interior del solenoide. El potencial vector \mathbf{A} actúa como un vórtice magnético que tiene el efecto de modificar la fase de las funciones de ondas de las partículas, las cuales pasan

a lados opuestos del vórtice o singularidad electromagnética dando como resultando un cambio de fase. Por ejemplo, la interpretación usual del efecto AB consiste en que dos haces coherentes de partículas cargadas encierran un flujo de campo magnético Φ (formado por un solenoide muy largo).

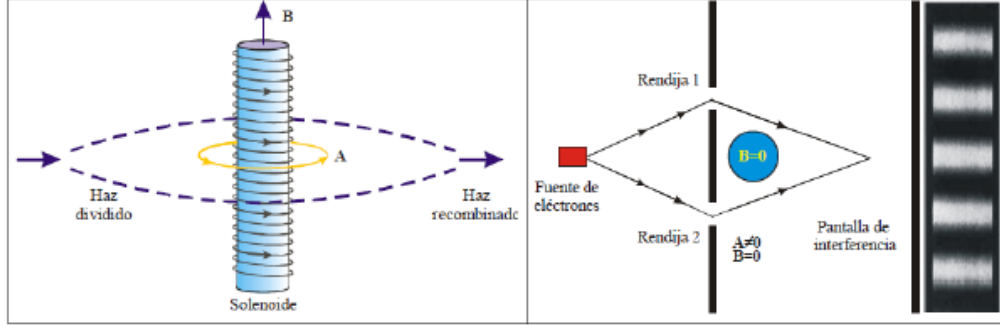


Figura 4.1. Ilustración del efecto Aharonov-Bohm (AB) [7]. Dos haces coherentes de electrones bordean un solenoide infinito que mantiene confinado un campo magnético.

La expresión para la diferencia de fase para este efecto es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{2e\bar{\mu}}{\hbar c} \oint d\theta \\ &= \frac{e}{\hbar c} \oint B \cdot dS = \frac{e\Phi}{\hbar c} \delta n,\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde, $\Phi = BS = \frac{4\pi}{c}\bar{\mu}$ es el flujo del solenoide y $\bar{\mu}$ es su magnetización la cual es constante.

En la ecuación (4.1), la variación observable $\Delta\phi$ indica que el efecto es proporcional a la integral cerrada $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$, y el correspondiente corrimiento del patrón de interferencias depende de la cantidad integral, o no local, ($\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$) que se puede expresar en términos de Φ , el flujo del campo magnético del solenoide encerrado por los haces de electrones. Esta interpretación en términos de Φ permite evidenciar la propiedad topológica y no local del efecto pero no reconoce el significado físico de la cantidad $\mathbf{Q} = e\mathbf{A}/c$, ni el de la cantidad constante $L = e\Phi/2\pi c$ que veremos a continuación y da la razón de cambio del corrimiento de fase $d(\Delta\phi_{AB})/d\theta = L/\hbar$ en unidades de \hbar .

Ahora bien, el efecto Aharonov-Bohm (AB) [7] no es la única configuración de partículas y singularidad EM que satisface las características

genéricas de un efecto AB. De hecho, en el efecto Aharonov-Casher (AC) [46] los dipolos magnéticos encierran un hilo cargado infinito mientras que, para el efecto efecto Spavieri (S) [47,48] y Tkachuk (T) [49] para dipolos eléctricos estos encierran, en el primer caso, el borde de una lámina sem-infinita de dipolos magnéticos y, en el segundo caso, un campo magnético radial. Una característica común es que en todos los efectos (mencionados anteriormente) existe una singularidad EM. Como se puede observar en la figura 4.2 de izquierda a derecha, efecto AB, efecto S, efecto AC y por último el efecto T.

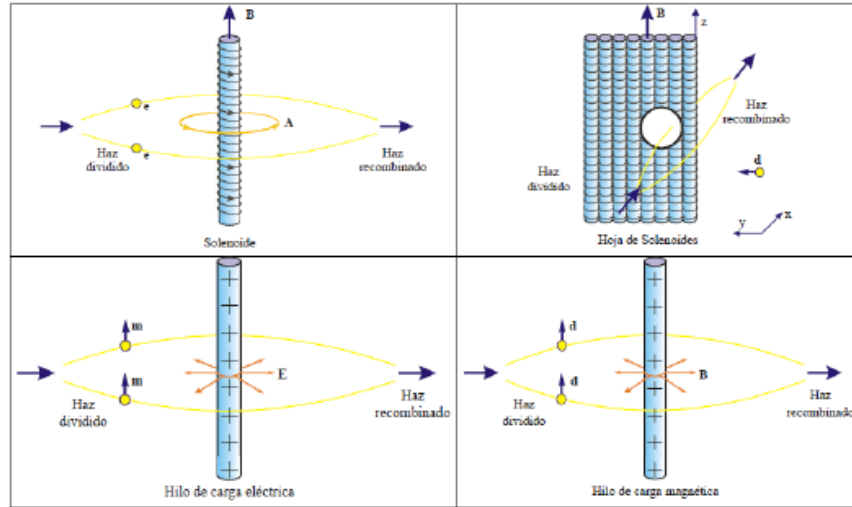


Figura 4.2. Ilustración de las diferentes configuraciones de campos y partículas que cumplen con los requerimientos genéricos de un efecto del tipo Aharonov-Bohm (AB).

Un avance importante en la comprensión del origen físico de la interacción electromagnética que producen dichos efectos ha sido aportado por Spavieri [48]. En este avance se demuestra que la cantidad responsable del corrimiento de fase está relacionada con el momento EM \mathbf{P}_e del sistema. Con el fin de elucidar el origen físico en todos los efectos cuánticos del tipo AB y ver el significado físico de las cantidades \mathbf{Q} y L , se introduce el momento lineal clásico electromagnético \mathbf{P}_e y el correspondiente momento angular \mathbf{L}_e

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x' \quad (4.2)$$

y

$$\mathbf{L}_e = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{x}' \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] d^3x', \quad (4.3)$$

aquí \mathbf{x}' es un vector polar con origen en la posición de la partícula.

Estas cantidades, sorprendentemente, proporcionan una visión unitaria de todos los efectos del tipo AB. Se puede demostrar que para cada efecto el momento lineal clásico electromagnético \mathbf{P}_e y su correspondiente momento angular \mathbf{L}_e coinciden con las cantidades \mathbf{Q} y L , es decir,

$$\mathbf{Q} = \pm \mathbf{P}_e \quad (4.4)$$

y

$$\mathbf{L} = \pm \mathbf{L}_e, \quad (4.5)$$

donde el signo menos se aplica al efecto AC.

Además, las propiedades topológicas de la fase quedan determinadas por las siguientes relaciones geométricas entre \mathbf{Q} y \mathbf{L} que se cumplen para cada efecto

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}L = \text{const}, \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \frac{\delta(r)}{r}. \quad (4.8)$$

Puesto que, $\nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = L(-x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/r^2$, el momento EM puede ser expresado en todos los efectos, como el gradiente de una función multivaluada θ , es decir, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = L\nabla\theta$, para $r \neq 0$.

En la terminología de la dinámica de fluidos (o fase de Berry [50]), podemos identificar la singularidad $\nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\delta(r)/r$ como la vorticidad (o curvatura) del momento (o conexión) \mathbf{Q} y su flujo a través de una superficie S , $\oint (\nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S} = 2\pi L$ como la intensidad del vórtice (o curvatura). Estas propiedades geométricas de \mathbf{Q} y \mathbf{L} son las que determinan la topología de la fase, por lo tanto para cada efecto se cumplirá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{|\mathbf{L}|}{\hbar} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\hbar} \oint (\nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{L}|}{\hbar} \oint d\theta = 2\pi n \frac{L}{\hbar}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En (4.9) se observa que la razón de cambio angular del corrimiento de fase es igual al momento angular clásico electromagnético $|\mathbf{L}|$ medido en unidades del momento angular cuántico \hbar , y el corrimiento de fase como la intensidad del vórtice $2\pi L$ de la singularidad medido en unidades de \hbar . Un efecto cuántico caracterizado por el corrimiento de fase (4.9) es topológico en el sentido de que sólo depende de la geometría del vórtice EM encerrado por el camino de las partículas.

En la tabla 1, se muestran las configuraciones de campos y las partículas involucradas en cada uno de los efectos, así como las correspondientes expresiones de \mathbf{Q} y \mathbf{L} . Donde se ha tomado por simplicidad $c = 1$ y $\bar{\mu}$ en el efecto Tkachuk (T) es tratado como una densidad lineal de magnetización. Además, m es el momento magnético por unidad de volumen de la hoja de dipolos del efecto S, τ el ancho de la hoja y d el momento dipolar eléctrico de las partículas neutras tanto en el efecto S como en el efecto Tkachuk (T). Para el efecto AC, μ es el momento dipolar magnético de las partículas neutras y λ es la densidad lineal de carga eléctrica de un hilo infinito. Es importante acotar un caso especial que ocurre con el efecto AC, en este efecto el momento canónico coincide con el llamado momento escondido [51] del dipolo magnético $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_h = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}/c = -\mathbf{P}_e(\mathbf{Q}_h = \mathbf{P}_h)$ esto se debe a la conservación del momento total $\mathbf{Q}_h + \mathbf{P}_e = 0$.

Tabla 1. Visión unitaria de los efectos cuánticos del tipo AB.

Efectos	Campo Externo	Partícula	\mathbf{Q}	\mathbf{L}
AB	$\mathbf{B} = 2\bar{\mu} \frac{\delta(r)}{r} \hat{\mathbf{k}}$	e	$e\mathbf{A}$	$2e\bar{\mu}$
AC	$\mathbf{E} = 2\lambda \frac{\mathbf{r}}{r^2}$	μ	$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}$	$2\mu\lambda$
S	$\mathbf{B} = 4\pi m \hat{\mathbf{k}}$	d	$(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{A}$	$2dm\tau$
T	$\mathbf{B} = 2q \frac{\mathbf{r}}{r}$	d	$\mathbf{B} \times \mathbf{d}$	$4\pi d\bar{\mu}$

En conclusión, en la visión unitaria que se ha mostrado, el corrimiento de fase en las ondas de materia se produce cuando éstas interactúan (no localmente) con un vórtice electromagnético. Podría decirse que las partículas viajan en un fluido de origen electromagnético y que la fase está relacionada con un vórtice de la misma naturaleza.

4.2. Comprobaciones experimentales

Un hecho relevante en toda teoría física es su comprobación experimental. En este sentido, se menciona que la prueba del efecto Aharonov-Bohm (AB) fue inicialmente realizada por Chambers [9]. Él usó un montaje similar al del efecto AB, su esquema se ilustra en la figura 4.3. Allí se observa un haz de electrones que es dividido por medio de un biprisma de electrones Möllenstedt, el cual está compuesto por un fino filamento central y un electrodo a potencial cero en ambos lados. Cuando un potencial de aproximadamente 10 V se aplica al electrodo central, entonces los electrones son atraídos hacia el centro y se produce el patrón de interferencias en el plano inferior cuyas franjas son paralelas al filamento. Sin embargo, cuando se colocó un fino whisker de aproximadamente $1\ \mu\text{m}$ de diámetro en la sombra del filamento, entonces las franjas se inclinaron en la zona donde el whisker tenía una forma cónica. Debido a que la magnetización dentro del whisker es constante en la dirección axial, entonces el flujo magnético es proporcional al área de la sección transversal.

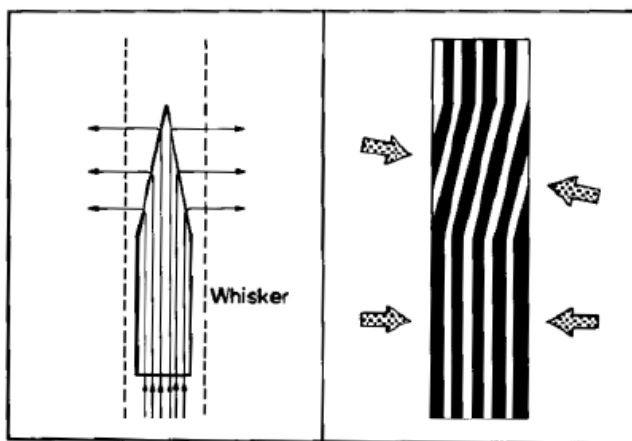


Figura 4.3. Esquema del patrón de interferencias en el montaje experimental de Chambers [9]. Se alegaba que la inclinación del patrón de interferencias era debido al campo magnético externo del whisker.

El patrón de interferencia obtenido podría claramente ser explicado como resultado de un corrimiento relativo de fase proporcional al flujo magnético encerrado - que varía con la altura del whisker -. Aunque desde el punto de vista teórico, este corrimiento de fase no puede ser explicado clásicamente,

este resultado experimental no era una prueba conclusiva de la existencia real del efecto AB debido al campo magnético filtrado.

La prueba decisiva del efecto AB fue dada por Tonomura *et. al.* [10] en 1986. En su montaje experimental Tonomura *et. al.* [10] emplearon un toroide superconductor recubierto con una película de niobo para evitar la fuga del campo magnético. En el proceso se empleó una novedosa técnica conocida como "*holografía de electrones*". El resultado del experimento se observa en la figura 4.4, allí se ve como el patrón de interferencias que atraviesa la sección anular del toroide presenta un corrimiento respecto al patrón exterior.

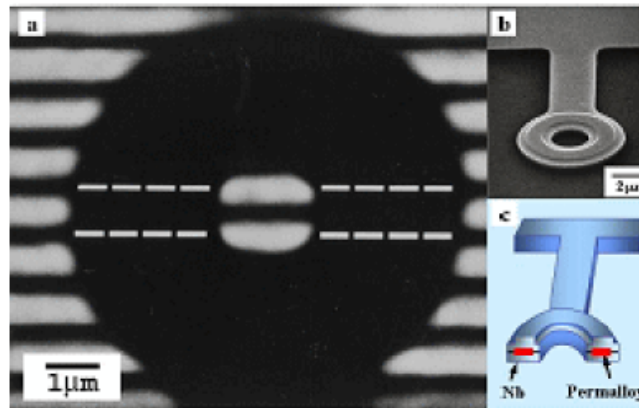


Figura 4.4. Patrón de interferencias de electrones demostrando el efecto AB magnético en un experimento que excluye estrictamente cualquier campo magnético que se filtra del toroide.

En relación con el efecto AC, la observación ha sido realizada primero por Cimmino *et. al.* [52], y posteriormente por Sangster *et. al.* [53]. Otro efecto propuesto por Spavieri [54], es el llamado efecto electrón-positrón (EP), en este se obtiene una fase del tipo AB, empleando haces de partículas cargadas con propiedades EM opuestas. Por ejemplo, electrón-positrón, ión positivo-negativo o par electrón-hueco.

Recientemente, se realizó un experimento que comprueba un efecto del tipo AB para un par electrón-hueco en semiconductores [55]. Aunque sea en forma indirecta, el efecto electrón-hueco es una variedad del efecto propuesto por Spavieri [54]. La mencionada evidencia experimental de un efecto del tipo AB para un par electrón-hueco en semiconductores sustenta empíricamente la factibilidad de un efecto del tipo AB para partículas con cargas opuestas que, como ya se ha mencionado, fue originalmente propuesto por Spavieri

[54] y que se ha denominado en la literatura efecto electrón-positrón (EP). La anterior evidencia experimental es importante señalarla, ya que, debido a que dicho efecto fue comprobado, indica que las pruebas sobre la masa del fotón que vamos a considerar, se basan en experimentos y efectos bien fundamentados.

4.3. Experimentos table-top o bench-top

Es importante enfatizar que los experimentos de la masa del fotón tuvieron su origen en las pruebas de alta precisión de la ley de Coulomb, como se pudo ver en el capítulo anterior, cuando se busca probar directamente la ley de Coulomb se dice que es una prueba directa, mientras que cuando se busca probar la masa del fotón se puede hablar de una prueba indirecta de la ley de Coulomb [2]. En consecuencia, con los experimentos indirectos de Goldhaber y Nieto empezó un cambio de enfoque por lo cual el interés de los físicos se centró más en idear experimentos que llevaran a mejorar el límite de la masa del fotón que en establecer la rigurosa validez de la ley de Coulomb.

A pesar de que no todos los aspectos de estos métodos indirectos son averiguados y confirmados experimentalmente, los nuevos límites encontrados son aceptados siempre que:

a) El método se fundamente ó explote efectos físicos bien comprobados experimentalmente.

b) Las técnicas ó los eventuales aspectos no comprobados experimentalmente, sean razonablemente realizables con la tecnología actual existente.

Por ejemplo, el experimento de Franken y Ampulski [30] en principio tenía que utilizar una cavidad resonante muy larga para detectar longitudes de ondas electromagnéticas igualmente largas. Sin embargo, se dobló varias veces la cavidad para que pudiera ser colocada sobre una mesa (*"table-top experiment"*). Considerando que el usar una cavidad muy larga era tecnológicamente factible, aunque más costoso, se aceptaron los resultados a pesar de las objeciones. También, los enfoques de Lakes [6] y Luo [39], ya mencionados también anteriormente, pueden considerarse experimentos *"table-top"* ó *"bench-top"* ya que, a pesar de haberse medido las desviaciones de la balanza de torsión, se asumió un valor del potencial vector del ambiente cósmico \mathbf{A} obtenido indirectamente, ya que no era comprobable directamente. Otro ejemplo, es el método de Boulware y Deser, del cual estaremos hablando más adelante, quienes explotaron el efecto Aharonov-Bohm magnético modifican-

do los parametros de aquel que ya había sido comprobado experimentalmente por Chamber [9] y Tonomura [10].

En conclusión, con estos enfoques tipo *"table-top"* ó *"bench-top"* se estimula y desafía ahora la ingeniosidad de los físicos en idear nuevos efectos o situaciones experimentales que sean razonablemente realizables tecnológicamente y puedan reducir y acercar el límite de la masa del fotón a su valor final, $10^{-66}g$, previsto por el principio de incertidumbre.

4.4. Efecto Aharonov-Bohm y la aproximación de Boulware-Deser para la masa del fotón

Los primeros en considerar un escenario de naturaleza cuántica para estimar un posible límite sobre la masa del fotón fueron Boulware y Deser (BD) [8] en 1989. Específicamente, ellos emplearon el efecto Aharonov-Bohm (AB) [7], según se puede ver en la figura 4.5.

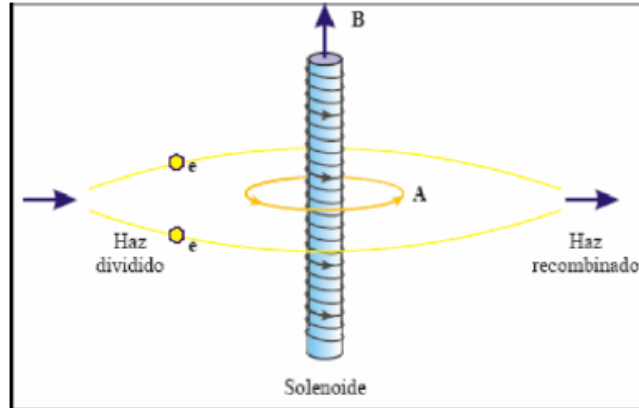


Figura 4.5. Ilustración del efecto cuántico Aharonov-Bohm (AB). Dos haces coherentes de electrones bordean un solenoide infinito que mantiene confinado un campo magnético.

Según el enfoque cuántico de BD [8] se utiliza un experimento table-top para la determinación de un posible límite superior sobre la masa del fotón. Ellos consideraron el acople de la masa del fotón μ_γ , como predicho por las ecuaciones de Proca $\partial_\nu F^{\mu\nu} + \mu_\gamma^2 A^\mu = J^\mu$ [1], aplicadas al efecto AB, en el cual se calcula el campo magnético resultante **B**

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \widehat{\mathbf{k}}\Delta\mathbf{B} \quad (4.10)$$

$$= \mathbf{B}_0 + \widehat{\mathbf{k}}\mu_\gamma^2\Pi(\mu_\gamma\rho), \quad (4.11)$$

donde la expresión anterior Ec. (4.11), puede ser usada en una prueba o experimento table-top del efecto AB. El primer término del lado derecho de la Ec. (4.11), es el campo magnético estándar para la masa del fotón nula - el campo confinado en el interior de un solenoide largo de radio a y que conduce una corriente j - y el segundo término $\Delta\mathbf{B} = \widehat{\mathbf{k}}\mu_\gamma^2\Pi(\mu_\gamma\rho)$ representa la corrección debida a la masa del fotón en reposo no nula μ_γ . Mientras la cantidad $\Pi(\mu_\gamma\rho)$ es una contribución (interna y externa) al campo y puede ser expresada en términos de las funciones de Bessel $I_0(\mu_\gamma\rho)$ y $K_0(\mu_\gamma\rho)$ las cuales son regulares en el origen e infinitas, respectivamente, y vienen dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Pi(\rho) = & j\Theta(a - \rho)[K_0(\mu_\gamma\rho) \int_0^\rho I_0(\mu_\gamma\rho')\rho' d\rho' \\ & + I_0(\mu_\gamma\rho) \int_\rho^a K_0(\mu_\gamma\rho')\rho' d\rho'] \\ & - j\Theta(\rho - a)K_0(\mu_\gamma\rho) \int_0^a I_0(\mu_\gamma\rho')\rho' d\rho'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Así, debido a la expresión $\Delta\phi = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, la masa del fotón puede modificar el cambio de fase $\Delta\phi$ y el correspondiente desplazamiento del patrón de interferencia observable. Tomando en consideración, la precisión del experimento y el efecto del término extra dependiente de la masa, Boulware y Deser compararon las correcciones teóricas para el flujo a través de un círculo de radio $\rho \sim 10 \text{ cm}$, con el flujo para el caso en el cual no estaría presente la masa. De esta manera, pudieron predecir un límite no trivial en el rango del fotón transversal en un experimento table-top, $\mu_\gamma^{-1} > 1,4 \times 10^7 \text{ cm}$, el cual corresponde a un límite de la masa del fotón debido al término extra dependiente de la masa de

$$m_\gamma \simeq 2,5 \times 10^{-45} g. \quad (4.13)$$

Debido a los resultados obtenidos por Boulware y Deser, es útil tener en cuenta la aplicabilidad de su enfoque ó aproximación a otros efectos cuánticos del tipo AB.

4.5. Efecto Aharonov-Casher para dipolos magnéticos

Para comprender mejor el análisis llevado a cabo por Fuchs [56] para la determinación de un posible límite para la masa del fotón es instructivo describir brevemente el efecto Aharonov-Casher (AC). El efecto AC [46], para partículas neutras con momento dipolar magnético, es el dual o recíproco del efecto Aharonov-Bohm [7]. En este caso las partículas son neutrones (clásicamente espiras de corriente) y la singularidad electromagnética que rodean es un hilo infinito cargado. El momento dipolar magnético de las partículas es μ_m y su orientación está a lo largo del hilo, además, se mueven con velocidad \mathbf{v} en el marco de referencia del hilo como se ilustra en la figura 4.6.

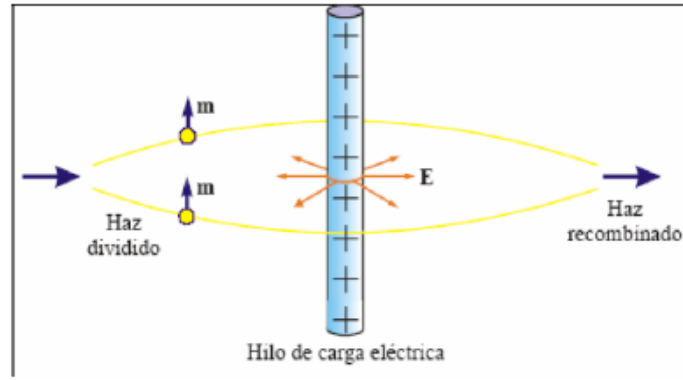


Figura 4.6. Ilustración del efecto Aharonov-Casher (AC). Dos haces coherentes de dipolos magnéticos viajan alrededor de un hilo infinito cargado.

Ahora bien, para establecer la relación entre la configuración de campos del efecto AC y la masa del fotón es necesario conocer el campo eléctrico de Proca de un hilo infinito cargado. Como el momento magnético de los neutrones, en este caso, es un vector constante, entonces el cambio de fase puede escribirse de la siguiente forma

$$\Delta\phi_{AC} = \frac{\mu}{\hbar c} \hat{\mathbf{z}} \cdot \oint \mathbf{E} \times d\mathbf{x} \quad (4.14)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario en la dirección del eje z .

La expresión anterior Ec. (4.14), puede ser calculada notando que $\mathbf{E} \times d\mathbf{x}$ está siempre alineado a lo largo del eje $\hat{\mathbf{z}}$. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal hacia

afuera del camino de integración (es decir, perpendicular a $\widehat{\mathbf{z}}$) y sean θ y β los ángulos entre \mathbf{E} y $d\mathbf{x}$ y entre \mathbf{E} y $\widehat{\mathbf{n}}$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{AC} &= \frac{\mu}{\hbar c} \oint E dx \sin\theta = \frac{\mu}{\hbar c} \oint E dx \cos\beta \\ &= \frac{\mu}{\hbar c} \oint \mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dx = \frac{\mu}{\hbar c} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) da,\end{aligned}\quad (4.15)$$

donde la última integral es tomada sobre un área encerrada por los caminos de los dos haces que encierran el hilo cargado, como se muestra en la figura 4.6. Ahora bien, de la ley de Gauss en su forma de la versión de Proca dada como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - \mu_\gamma^2\phi \quad (4.16)$$

así que, la fase adquiere la siguiente forma

$$\Delta\phi_{AC} = \frac{4\pi\mu\lambda}{\hbar c} - \frac{\mu_\gamma^2\mu}{\hbar c} \int \phi da \quad (4.17)$$

en donde el primer término es la fase estándar del efecto AC y el segundo término está relacionado con la masa del fotón.

En este punto ahora es necesario conocer el potencial escalar de Proca de un hilo infinito. El cual se puede encontrar fácilmente, si se considera que el potencial de una carga puntual q gobernada por las ecuaciones de Proca es simplemente el potencial de Yukawa, $\phi(r) = (q/r)e^{-\mu_\gamma r}$. El potencial de la línea de carga se encuentra integrando todas las contribuciones de Yukawa separadas a lo largo de la línea. El resultado es:

$$\phi(\rho) = 2\lambda K_0(\mu_\gamma\rho), \text{ en coordenada cilíndricas} \quad (4.18)$$

y el campo eléctrico se encuentra por diferenciación,

$$\mathbf{E} = 2\mu_\gamma\lambda K_1(\mu_\gamma\rho)\widehat{\boldsymbol{\rho}} \quad (4.19)$$

donde, $K_0(\mu_\gamma\rho)$ y $K_1(\mu_\gamma\rho)$ son las funciones de Bessel modificadas de segundo orden. Observe que, el potencial y el campo se reducen a las expresiones estándar en el límite $\mu_\gamma \rightarrow 0$.

Con $\phi(\rho)$ y \mathbf{E} calculados el cambio de fase toma la siguiente forma,

$$\Delta\phi_{AC}(R) = \frac{4\pi\mu\lambda}{\hbar c} \mu_\gamma R K_1(\mu_\gamma R) \quad (4.20)$$

para un determinado radio R . Observe que $K_1(x)$ se aproxima a $1/x$ a medida que x se anula, es decir, $\Delta\phi(R)$ se aproxima a $4\pi\mu\lambda/\hbar c$ a medida que $\mu_\gamma \rightarrow 0$ (independientemente de R). Este es el valor estándar de la fase y coincide con el primer término de la expresión (4.17). El hecho de que este límite sea independiente de R demuestra que el efecto se reduce suavemente al efecto estándar cuando μ_γ se anula. En el límite $R \rightarrow \infty$, $\Delta\phi(R)$ se anula. Esto es de esperarse, ya que la masa del fotón causa que el campo eléctrico sea de rango finito.

La expresión (4.20), permite establecer la conexión entre el efecto AC [46] con la masa del fotón por medio de un experimento table-top. Con \mathbf{E} dado por (4.19) y $\Delta\phi_{AC}$ por (4.14) Fuchs [56] estimó el valor de μ_γ usando los parámetros de un experimento interferométrico para neutrones realizado por Cimmino et al. [52]. Sus resultados demostraron que la longitud de onda de Compton cerca de $10 m$ o menos podía ser detectable mientras el valor estimado para la masa del fotón es del orden de

$$m_\gamma \sim 3 \times 10^{-41} g. \quad (4.21)$$

Aunque es un método independiente, esto sugiere que el efecto AC no es efectivo como el efecto AB para estimar un posible valor para μ_γ . El cuál puede ser comparado con el obtenido por BD $m_\gamma \simeq 2,5 \times 10^{-45} g$ por medio del efecto AB estándar.

4.6. Efecto Tkachuk y Spavieri para dipolos eléctricos

Un posible límite para la masa del fotón obtenido de los efectos cuánticos del tipo Aharonov-Bohm para dipolos eléctricos ha sido propuesto por Spavieri y Rodríguez (SR) [12,57,58,59]. SR consideraron que el término de interacción de todos los efectos para dipolos eléctricos presenta la misma relevancia [47-49,57] de modo que, con el propósito utilizar un experimento table-top para obtener el correspondiente límite para la masa del fotón, es suficiente con analizar cualquiera de estos efectos. Ellos consideraron el efecto Tkachuk (T) [49] debido a que las ecuaciones que resultan para estimar un posible valor sobre la masa del fotón, poseen una similitud a la de los efectos del tipo AB.

Para el efecto Tkachuk (T) [49] se puede considerar un solenoide largo con densidad de magnetización lineal $\mu_d = \bar{\mu}_d z$ y flujo magnético $\Phi = BS = 4\pi\bar{j}za^2$, donde a es el radio del solenoide y $\bar{j}z$ su densidad de corriente. El potencial vector resultante se expresa de la siguiente forma $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{AB}z$, donde \mathbf{A}_{AB} es el potencial vector para el efecto AB [7] con μ_{dAB} reemplazado por $\bar{\mu}_d$. Así que, el desarrollo para el cálculo de la masa del fotón para el efecto Tkachuk (T) [49] para dipolos eléctricos $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{k}}$ puede ser llevado al enfoque de BD [8] dentro del marco del escenario cuántico del efecto AB.

El campo magnético viene dado como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = z\nabla \times \mathbf{A}_T - \mathbf{A}_T \times \nabla z$. En el plano del movimiento del dipolo, $z = 0$, y el cambio de fase es [49],

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &\propto \oint \mathbf{B} \times \mathbf{d} \cdot d\ell \\ &= d \oint_s \nabla \times \mathbf{A}_T \cdot d\mathbf{S},\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde la última integral es el flujo a través de la superficie como en el efecto AB y según la aproximación hecha por BD [8], escribimos la contribución para la masa del fotón como $\Delta\mathbf{B}(\bar{j}, \mu_\gamma\rho) = \nabla \times \mathbf{A}_{T\mu_\gamma}(\bar{j}, \mu_\gamma\rho) = \hat{\mathbf{k}}\mu_\gamma^2\Pi(\bar{j}, \mu_\gamma\rho)$ y debido a la corrección para la masa en la fase tenemos,

$$\Delta\varphi = 2\pi(d/\hbar c) \oint_a^\rho [(\mu_\gamma^2\Pi(\bar{j}, \mu_\gamma\rho))] \rho d\rho. \quad (4.23)$$

En la región exterior ($\rho > a$), $\Delta\mathbf{B} = \mu_\gamma^2\Pi(\bar{j}, \mu_\gamma\rho) \simeq (\bar{j}/2)(\mu_\gamma a)^2 \ln(2/\mu_\gamma\rho)$ [8]. Con $4\bar{\mu} = \bar{j}a^2$, y la fase Tkachuk $\varphi_0 = 4\pi d\bar{\mu}/\hbar c$, la variación relativa para la fase debido a la masa del fotón calculada por Spavieri y Rodríguez [59] es

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = \frac{\bar{j}a^2}{4\bar{\mu}} \oint_a^\rho \mu_\gamma^2 \ln\left(\frac{2}{\mu_\gamma\rho}\right) \rho d\rho \sim \frac{1}{2}(\mu_\gamma\rho)^2 \ln\left(\frac{2}{\mu_\gamma\rho}\right). \quad (4.24)$$

Siguiendo con la aproximación de BD [8] se estima que $\Delta\varphi \geq 2\pi\varepsilon = 2\pi \times 10^{-3}$, donde ε es la precisión de la medida y escribiendo la ecuación (4.24) como,

$$2\pi\varepsilon/\varphi_0 = (1/2)(\mu_\gamma\rho)^2 \ln(2/\mu_\gamma\rho). \quad (4.25)$$

Este resultado, válido para el efecto Tkachuk (T) [49], puede ser comparado con el derivado por BD [8] para el efecto AB [7],

$$2\pi\varepsilon/\varphi_{0AB} = (1/2)(\mu_{\gamma BD}\rho)^2 \ln(2/\mu_{\gamma BD}\rho), \quad (4.26)$$

donde $\mu_{\gamma BD}$ es el valor de la masa del fotón obtenida por BD y φ_{0AB} es el valor para el cambio de fase AB cuando $\mu_{\gamma} = 0$. En este caso, la contribución debido al término logarítmico no es relevante y puede ser despreciada. Estimando los siguientes valores para, $d = e$, a_0 como el radio de Bohr para el dipolo y $\bar{\mu} = \mu_{AB}/l$ con $l \simeq 1 \text{ cm}$ la longitud real del solenoide en el efecto Tkachuk [49], obteniéndose

$$\mu_{\gamma}^{-1} = \mu_{\gamma BD}^{-1} \left[\frac{\varphi_0}{\varphi_{0AB}} \right]^{1/2} = \mu_{\gamma BD}^{-1} \left[\frac{a_0}{l} \right]^{1/2} \sim 10^{-4} \mu_{\gamma BD}^{-1}, \quad (4.27)$$

y

$$m_{\gamma} \sim 3 \times 10^{-41} g. \quad (4.28)$$

El resultado anterior, representa un rango del límite superior para la masa del fotón 4 órdenes de magnitud más bajo que el encontrado por BD. Como se esperaba, y de acuerdo con los resultados de Fuchs [56] para el efecto AC para dipolos magnéticos no existe mejora alguna para el rango de μ_{γ}^{-1} , utilizando un experimento table-top que involucra dipolos eléctricos. Esto debido a la baja intensidad de las interacciones electromagnéticas (em) para dipolos.

4.7. Efecto Aharonov-Bohm para partículas con cargas opuestas y la masa del fotón

A continuación, consideraremos el efecto AB modificado para una superposición coherente de haces de partículas cargadas con estados de cargas opuestas (\pm) propuesto por Spavieri [54,60], la cual se ilustra en la figura 4.7. En el caso mencionado, el haz de partículas no encierra la singularidad electromagnética (es decir, un solenoide para el efecto AB, y una línea de carga para el efecto AC) por viajar a un lado de ésta. Dependiendo de la técnica interferométrica usada [53,61,62], la longitud del camino interferométrico a lo largo de la cual ocurre la interacción electromagnética, puede ser del orden de unos cuantos centímetro a unos cuantos metros.

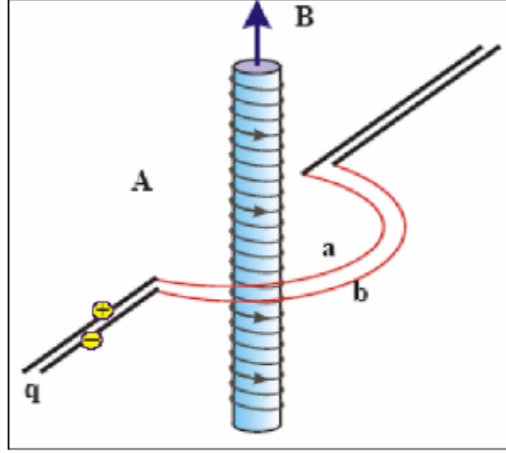


Figura 4.7. Efecto cuántico del tipo Aharonov-Bohm (AB) para un haz de partículas que poseen propiedades electromagnéticas opuestas (\pm).

Como sabemos la cantidad realmente observable en el efecto AB es el cambio de fase

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar c} \int (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot d\ell \quad (4.29)$$

donde la integral puede ser calculada sobre una trayectoria abierta.

Para poder calcular la integral de línea que aparece en la expresión (4.29) Spavieri y Rodríguez [59] derivaron una expresión analítica para $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. El resultado encontrado fue el siguiente

$$A_\varphi = j \left(\frac{a^2}{2} \right) \frac{1}{\rho} + \left(\frac{j}{2} \right) (\mu_\gamma a)^2 \frac{\rho}{2} \ln \left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2} \right), \quad (4.30)$$

donde a es el radio del solenoide y j la densidad de corriente. Para poder evaluar el cambio de fase imaginemos en la figura 4.7, el siguiente sistema de coordenadas xyz donde el eje x está en la dirección de la trayectoria de las partículas, el eje z coincide con el eje del solenoide y la cantidad y representa la distancia mínima de la trayectoria desde el centro del solenoide. Según la aproximación de BD [8] despreciamos las pequeñas correcciones debido a la contribución del término logarítmico. En los cálculos asumiremos que las partículas recorren una trayectoria de longitud $2x$ con $x \gg y$ de esta forma se obtiene $\varphi_0 = \int_C \mathbf{A}_{m_\gamma=0} \cdot d\ell \simeq -(\pi/2)a^2j$ y la contribución debido a m_γ nos da $\int_C A \cdot d\ell = (\frac{j}{2})(\mu_\gamma a)^2 yx$ para una misma trayectoria de longitud $2x$.

Consecuente, con la expresión (4.29) y Ref. [59], la variación del cambio de fase observable es $\Delta\varphi = 2j(\mu_\gamma a)^2 yx$ entonces,

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = \left(-\frac{4}{\pi}\mu_\gamma^2\right)xy. \quad (4.31)$$

Según la aproximación hecha por BD [8] fijamos $\Delta\varphi \geq 2\pi\varepsilon = 2\pi \times 10^{-3}$ donde ε es la precisión en la medida. El valor de μ_γ en el cual el efecto es justamente observable es determinado por la relación $\left(\frac{4}{\pi}\mu_\gamma^2\right)xy = \frac{2\pi\varepsilon}{\varphi_0}$ la cual puede ser comparada con el reportado por BD [8].

La pregunta a continuación es, ¿cual debe ser la dimensión necesaria de un solenoide para alcanzar un posible límite para la masa del fotón del orden estimado por las mejores aproximaciones clásicas, como las hechas por Luo et al. [1] y Ryutov [38]?

Vamos ahora a estimar μ_γ con respecto a $\mu_{\gamma BD}$ para un experimento table-top ideal que, aparte de consideraciones de costo, sea realizable con la tecnología actual. Para un potencial vector creado por un imán grande de un ciclotrón -tipo solenoide (de radio $a = 5 \text{ m}$ y longitud o altura D varias veces el radio)- estimamos que, $\frac{\varphi_0}{\varphi_{0BD}} \simeq \frac{a^2}{(a_{BD})^2} = \frac{5^2}{(10^{-3})^2}$. Para una trayectoria de $x = 6a = 300\rho$ a una distancia de $y = 80\rho$, se obtiene [59]

$$\mu_\gamma^{-1} = \mu_\gamma^{-1} \left[\frac{8}{\pi} \frac{\varphi_0}{\varphi_{0BD}} \frac{xy}{\rho^2} \right]^{1/2} \simeq 10^6 \mu_{\gamma BD}^{-1} \simeq 2 \times 10^{13} \text{ cm}, \quad (4.32)$$

el cual es 6 ordenes de magnitud mejor que el obtenido por BD [8] basado en técnicas estándar. Con su experimento table-top, BD obtuvo un valor de $\mu_{\gamma BD}^{-1} = 140 \text{ Km}$, equivalente a $m_\gamma \simeq 2,5 \times 10^{-45} \text{ g}$. Sin embargo, el nuevo límite para la masa del fotón, que puede ser obtenido con los nuevos enfoques cuánticos ya mencionados es,

$$m_\gamma \simeq 2 \times 10^{-51} \text{ g} \quad (4.33)$$

el cual es del mismo orden de magnitud que el encontrado por Luo et al. [1] y Ryutov [38].

Capítulo 5

Conclusiones y Proyecciones a Futuro

En el presente trabajo, se dieron a conocer los últimos avances en cuanto a la búsqueda de un valor ó límite superior sobre la masa del fotón en reposo (m_γ), considerando para ello los diferentes enfoques clásicos y cuánticos existentes en la literatura.

Las pruebas directas e indirectas sobre la ley de Coulomb presentadas aquí, se dieron dentro del marco de la electrodinámica clásica (EC). Además, puede verse en retrospectiva, como las primeras pruebas, sobre la desviación de la ley del inverso al cuadrado de Coulomb, pueden ser interpretadas hoy en día como una prueba del límite de la masa del fotón. Una de las pruebas directas clásicas más confiables y rigurosas hasta la fecha es la de Williams, Faller y Hill (WFH) [3] quienes con su experimento llegaron a un valor ó límite para la masa del fotón de $m_\gamma < 1,6 \times 10^{-47}g$ y de las pruebas indirectas podemos señalar la realizada por Lou et. al. [39] quienes llegaron a un valor ó límite de $m_\gamma < 1,2 \times 10^{-51}g$ para la masa del fotón. Tales estudios han proporcionado una base muy firme para posteriores trabajos en este campo, estimulando de cierta manera investigaciones aún cada vez más interesantes.

De acuerdo con el tema central del presente trabajo, nos salimos del dominio clásico para considerar las aproximaciones ó enfoques cuánticos en la búsqueda de un posible valor ó límite de la masa del fotón en reposo. Después de revisar el alcance de experimentos tipo table-top y la aproximación de Boulware y Deser (BD) [8] para la masa del fotón, se verificó su aplicabilidad a otros efectos del tipo AB, como fueron el efecto AC, Tkachuk (T) y Spavieri (S) para dipolos eléctricos y finalmente el efecto AB para partículas con

cargas opuestas (\pm). En estos casos se explotan los efectos cuánticos por medio de enfoques, o experimentos table-top, aptos para evaluar el límite de m_γ . El mejor resultado corresponde al de un experimento table-top, que explota el efecto AB para partículas con cargas opuestas (\pm) propuesto por Spavieri y Rodríguez [59], que arroja un límite de $m_\gamma < 1,2 \times 10^{-51}g$.

Otro aspecto interesante planteado en la referencia [12], siempre con el fin de poder establecer mejores valores ó límites en la masa del fotón (m_γ), nos lleva al escenario de la electrodinámica cuántica (QED). Aquí podemos explotar un arreglo experimental de alta precisión que toma en consideración el momento magnético del electrón del espectro del "geonium" llevada a cabo por Van Dyck *et. al.* (VSD) [63] quienes midieron *el factor g del electrón*, dado por:

$$g = 2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right) = 2\left(\frac{\mu_s}{\mu_B}\right), \quad (5.1)$$

donde μ_s es el momento magnético del spín y μ_B el magneton de Bohr. Es bien conocido que los experimentos de la QED son extremadamente precisos. Así que de los datos proporcionados por el experimento de VSD [63], para un experimento table-top, los autores [12] pudieron proyectar un límite a la masa del fotón de:

$$m_\gamma \simeq 0,5 \times 10^{-48}g, \quad (5.2)$$

correspondiente a un rango de, $\mu_\gamma^{-1} \simeq 0,7 \times 10^4 Km$.

Comparando este resultado con lo obtenido por Boulware y Deser (BD) [8] con su enfoque basado en el efecto AB, vemos que el valor ó límite establecido por la expresión (5.2) constituiría una mejora de alrededor de 3 a 4 órdenes de magnitud con respecto al obtenido por BD [8]. Esto implica que un enfoque basado en la QED puede mejorar los resultados obtenidos con un enfoque basado en la mecánica cuántica.

Sin embargo, como una proyección a futuro [12] y considerando las técnicas explotadas en el efecto AB para partículas con cargas opuestas (\pm) ya mencionado, creemos que los mejores resultados podrían obtenerse por medio de una tecnología interferométrica de alta precisión para haces coherentes de partículas con propiedades electromagnéticas opuestas. Junto con las mejoras anteriormente señaladas y un experimento table-top, estimamos que se podría lograr un límite tan bajo como $m_\gamma \simeq 10^{-54}g$. Este sería una mejora significativa en los límites obtenidos recientemente con los enfoques clásicos

y cuánticos ya descritos, pero explotando al máximo los recursos tecnológicos modernos.

Para cerrar, opinamos que los diferentes avances relacionados con los efectos cuánticos del tipo AB [7] evidencian algo novedoso, o sea, que los enfoques cuánticos pueden competir con los anteriores métodos clásicos tradicionales en la determinación y búsqueda de un límite a la masa del fotón. Podemos apreciar mejor esto en la figura 5.1, que muestra la tendencia de los resultados experimentales acercándose al último límite de $10^{-66}g$ debido a la indeterminación cuántica. Sin embargo, esto no es sólo una cuestión del mejoramiento del límite, sino la extensión del escenario donde pruebas de la masa del fotón pueden ser realizables, como el experimento criogénico realizado por Ryan *et al.* [5] donde la validez de los resultados son extendidos desde temperaturas estándar terrestres a aquellas del medio ambiente galáctico. Cada análisis es importante en sí mismo al extender indirectamente el rango de validez de la ley de Coulomb y del rango de μ_γ^{-1} como función de las condiciones físicas de medida.

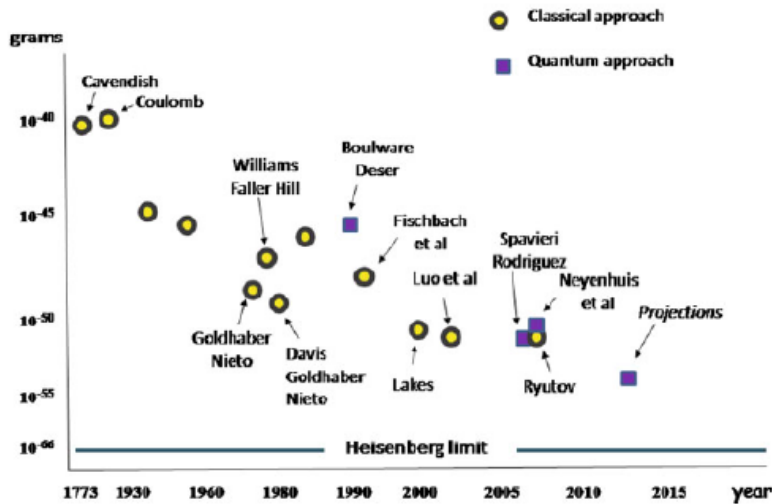


Figura 5.1. Tendencia de los enfoques clásicos y cuánticos para establecer un límite superior sobre la masa del fotón (m_γ).

La figura 5.1 ilustra la tendencia de los enfoques clásicos y cuánticos para establecer un límite superior sobre la masa del fotón (m_γ). Por el creciente número de experimentos realizados en las últimas décadas se desprende el creciente interés de los físicos en esta área. Según el principio de incertidumbre

el límite final que podría alcanzarse es del orden de $10^{-66}g$ empleando para ello la edad del universo.

Apéndice A. Campo magnético de Proca de un solenoide infinito

Según el trabajo de Boulware y Deser (BD) [8] la ecuación relevante que describe el efecto Aharonov-Bohm (AB) [7] en el contexto de la electrodinámica finita o del fotón masivo es:

$$(-\nabla^2 + \mu_\gamma)\mathbf{A}_{AB} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{AB} \quad (1A)$$

la cual no es más que la parte magnética de las ecuaciones de Proca, donde μ_γ es la masa del fotón.

En la configuración de campos propuesta en el efecto AB, se considera que el solenoide tiene una magnetización constante dirigida a lo largo del hilo, es decir, $\mathbf{M}_{AB}(z) = \bar{\mu}\hat{\mathbf{z}}$. Lo cual da origen a una corriente superficial $\mathbf{K} = \bar{\mu}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Por lo tanto, la ecuación (1A) toma la siguiente forma:

$$(-\nabla^2 + \mu_\gamma^2)\mathbf{A}_{AB} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{4\pi}{c}\right)\delta(\rho - a) = \nabla \times (\mathbf{B}_0\hat{\mathbf{z}}\Theta(a - \rho)) \quad (2A)$$

donde $B_0 = \frac{4\pi}{c}\bar{\mu}$ es el campo magnético estándar interno de un solenoide infinito en unidades CGS, a es el radio del Solenoide, $(\boldsymbol{\rho}, \hat{\mathbf{z}})$ son vectores unitarios, Θ es la función Heaviside o escalón y ρ es el radio en el plano xy .

A continuación, procederemos a calcular el campo magnético de Proca de un solenoide infinito.

Sol: Según el trabajo de BD [8] el potencial vector se puede escribir de la siguiente manera, $\mathbf{A}_{AB} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Pi(\rho)$. Así, la ecuación (2A) toma la siguiente forma:

$$(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho - \mu_\gamma^2)\Pi(\rho) = B_0\Theta(a - \rho) \quad (3A)$$

ahora demostraremos la Ec. (3A) partiendo de la Ec. (2A). Así, tenemos:

Según la siguiente fórmula vectorial, $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$, podemos escribir el primer término del lado izquierdo de (2A) de la siguiente forma:

$$-\nabla^2\mathbf{A}_{AB} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_{AB}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_{AB}) \quad (4A)$$

donde, según el calibre de Coulomb [64] [65] $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, así tenemos:

$$-\nabla^2\mathbf{A}_{AB} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_{AB}) \quad (5A)$$

el segundo término del lado izquierdo de (2A) lo podemos escribir como:

$$\mu_\gamma^2 \mathbf{A}_{AB} = \mu_\gamma^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Pi(\rho) = \mu_\gamma^2 \Pi(\rho) (\nabla \times \hat{\mathbf{z}}) - \mu_\gamma^2 \nabla \times (\Pi(\rho) \hat{\mathbf{z}}) \quad (6A)$$

donde, $(\nabla \times \hat{\mathbf{z}}) = 0$. Por lo tanto, tenemos:

$$\mu_\gamma^2 \mathbf{A}_{AB} = -\mu_\gamma^2 \nabla \times (\Pi(\rho) \hat{\mathbf{z}}) \quad (7A)$$

ahora, sustituimos (5A) y (6A) en (2A), para obtener:

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_{AB} + \mu_\gamma^2 \mathbf{A}_{AB} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_{AB}) - \nabla \times (\mu_\gamma^2 \Pi(\rho) \hat{\mathbf{z}}) = \nabla \times (B_0 \hat{\mathbf{z}} \Theta(a - \rho)) \quad (8A)$$

como,

$$\nabla \times \mathbf{A}_{AB} = \nabla \times [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Pi(\rho)] \quad (9A)$$

de la siguiente identidad vectorial,

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (10A)$$

con, $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B} = \nabla \Pi(\rho)$ nos queda,

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Pi(\rho)) = (\nabla \Pi(\rho) \cdot \nabla) \hat{\mathbf{z}} - (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla) \nabla \Pi(\rho) + \hat{\mathbf{z}} (\nabla \cdot \nabla \Pi(\rho)) - \nabla \Pi(\rho) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{z}}) \quad (11A)$$

donde el único término del lado derecho de (11A) que sobrevive es el tercero.

Así, tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{A}_{AB} = \nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Pi(\rho)) = \hat{\mathbf{z}} (\nabla \cdot \nabla \Pi(\rho)) = \hat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Pi(\rho) \quad (12A)$$

sustituyendo (12A) en (8A) nos queda,

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Pi(\rho) - \mu_\gamma^2 \Pi(\rho)) = \nabla \times (B_0 \hat{\mathbf{z}} \Theta(a - \rho)) \quad (13A)$$

igualando a cero la expresión anterior Ec. (13A), nos queda:

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Pi(\rho) - \mu_\gamma^2 \Pi(\rho) \hat{\mathbf{z}} - B_0 \hat{\mathbf{z}} \Theta(a - \rho)) = 0 \quad (14A)$$

lo cual implica que:

$$\nabla^2 \Pi(\rho) - \mu_\gamma^2 \Pi(\rho) = B_0 \Theta(a - \rho). \quad (15A)$$

Escribiendo la Ec. (15A) en coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Pi(\rho)}{\partial \rho} \right) - \mu_\gamma^2 \Pi(\rho) = B_0 \Theta(a - \rho) \quad (16A)$$

desarrollando (16A) obtenemos la ecuación (3A). La solución a la ecuación diferencial homogénea son las funciones de Bessel modificadas $I_0(\mu_\gamma \rho)$ y $K_0(\mu_\gamma \rho)$, las cuales son regulares en el origen y en el infinito, respectivamente [64] [66].

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 : I_0(x) &\sim 1 + \frac{x^2}{4}, \quad K_0(x) \sim -Ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ x \rightarrow \infty : I_0(x) &\sim (2\pi x)^{-1/2} e^x, \quad K_0(x) \sim -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x}. \end{aligned} \quad (17A)$$

En donde la función de Green [64] [67] vendrá dada de la siguiente manera:

$$G(\rho, \rho') = I_0(\mu_\gamma \rho_{<}) K_0(\mu_\gamma \rho_{>}) \quad \text{para } \rho \neq \rho' \quad (18A)$$

con $\Pi(\rho)$ dado por:

$$\begin{aligned} \Pi(\rho) &= B_0 \Theta(a - \rho) \left[K_0(\mu_\gamma \rho) \int_0^\rho I_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho' \right. \\ &\quad \left. + I_0(\mu_\gamma \rho) \int_\rho^a K_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho' \right] \\ &\quad - B_0 \Theta(\rho - a) K_0(\mu_\gamma \rho) \int_0^a I_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho'. \end{aligned} \quad (19A)$$

Así, tenemos que el campo magnético de Proca para un solenoide infinito es:

$$\mathbf{B}_{AB} = \nabla \times \mathbf{A}_{AB} = \widehat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Pi = \widehat{\mathbf{z}} B_0 \Theta(a - \rho) + \widehat{\mathbf{z}} \mu_\gamma^2 \Pi(\rho). \quad (20A)$$

De la expresión (20A), podemos ver que el primer término del lado derecho es, por supuesto, el usual campo magnético \mathbf{B}_0 en la teoría de Maxwell. Es claro de (19A) que el término $\mu_\gamma^2 \Pi(\rho)$ se anula en el límite $\mu_\gamma \rightarrow 0$ ya que

$I_0(\mu_\gamma \rho)$ es regular y $K_0(\mu_\gamma \rho)$ es logarítmico en los argumentos (para ρ fijo). Por lo tanto, se ha establecido continuidad del efecto AB a medida que el rango incrementa (para ρ y a fijos). El campo magnético se reduce a su valor \mathbf{B}_0 de Maxwell en la región $\rho < a$ y a cero en la parte exterior.

Apéndice B. Aproximación y enfoque de Boulware y Deser (BD)

Calculado ya, el campo magnético de Proca para un solenoide infinito en el apéndice A, procederemos a desarrollar la aproximación y enfoque llevada a cabo por BD [8] para encontrar un posible límite superior a la masa del fotón por medio del efecto AB [7].

Sol: Según el trabajo de BD [8], el campo magnético de Proca para un solenoide infinito, viene dado por:

$$\mathbf{B}_{AB} = \nabla \times \mathbf{A}_{AB} = \hat{\mathbf{z}} \nabla^2 \Pi = \hat{\mathbf{z}} B_0 \Theta(a - \rho) + \hat{\mathbf{z}} \mu_\gamma^2 \Pi(\rho) \quad (1B)$$

donde B_0 es el campo magnético estándar interno de un solenoide infinito en unidades CGS, a el radio del solenoide, $\Theta(a - \rho)$ la función Heaviside o escalón, μ_γ la masa del fotón y $\Pi(\rho)$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Pi(\rho) = & B_0 \Theta(a - \rho) [K_0(\mu_\gamma \rho) \int_0^\rho I_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho' \\ & + I_0(\mu_\gamma \rho) \int_\rho^a K_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho'] \\ & - B_0 \Theta(\rho - a) K_0(\mu_\gamma \rho) \int_0^a I_0(\mu_\gamma \rho') \rho' d\rho'. \end{aligned} \quad (2B)$$

La interpretación usual del efecto AB consiste en que dos haces coherentes de partículas cargadas que encierran un flujo de campo magnético Φ (formado por un solenoide muy largo). La expresión de la diferencia de fase para este efecto y según el trabajo de BD [8] es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = & \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ = & \frac{e}{\hbar c} \oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3B)$$

Esto implica que la fase del efecto AB [7], según la expresión (3B), debería cambiar de la siguiente forma:

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4B)$$

$$= \frac{e}{\hbar c} \oint [\widehat{\mathbf{z}}B_0\Theta(a - \rho) + \widehat{\mathbf{z}}\mu_\gamma^2\Pi(\rho)] \cdot d\mathbf{S} \quad (5B)$$

$$= \frac{e\Phi_0}{\hbar c} + \mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \oint [\widehat{\mathbf{z}}\Pi(\rho)] \cdot d\mathbf{S} \quad (6B)$$

$$= \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{\gamma BD} \quad (7B)$$

de la expresión anterior, se puede apreciar de (6B) que la fase del efecto AB en electrodinámica masiva o de rango finito está compuesta de dos partes, la fase estándar del efecto AB, $\Delta\varphi_{AB}$, y una corrección a la fase que incluye la masa del fotón, $\Delta\varphi_{\gamma BD}$. De (6B) se puede ver claramente que si $\mu_\gamma \rightarrow 0$, entonces el efecto se reduce al resultado estándar.

Ahora, resolviendo el segundo término del lado derecho de la expresión (6B), tenemos:

$$\mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \oint [\widehat{\mathbf{z}}\Pi(\rho)] \cdot d\mathbf{S} \quad (8B)$$

donde la expresión (2B) da cuenta de la corrección en (6B) y (7B) aporta no sólo una corrección al flujo interno sino también introduce un campo magnético externo. Lo cual se puede observar mejor si se descompone la expresión (8B) de la siguiente manera:

$$\Delta\varphi_{\gamma BD} = \mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \left(\oint [\widehat{\mathbf{z}}\Pi_{int}(\rho)] \cdot d\mathbf{S} + \oint [\widehat{\mathbf{z}}\Pi_{ext}(\rho)] \cdot d\mathbf{S} \right) \quad (9B)$$

$$= \mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \Phi_{\gamma int} + \mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \Phi_{\gamma ext} \quad (10B)$$

$$= \Delta\varphi_{\gamma BDint} + \Delta\varphi_{\gamma BDext}. \quad (11B)$$

Siendo, $\Pi_{int}(\rho)$ y $\Pi_{ext}(\rho)$ las componentes internas y externas de $\Pi(\rho)$, respectivamente. De igual forma $\Phi_{\gamma int}$ y $\Phi_{\gamma ext}$ son los flujos de campo magnético adicionales. La expresión específica para $\Delta\varphi_{\gamma BDint}$ es como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{\gamma BDext} &= \mu_\gamma^2 \frac{e}{\hbar c} \Phi_{\gamma ext} \\
&= \frac{e}{\hbar c} \oint \Delta\mathbf{B}_{ext} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{e}{\hbar c} \oint [\hat{\mathbf{z}}\mu_\gamma^2 \Pi(\rho)] \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{12B}$$

según el trabajo de BD [8] el rango de interacción que debemos de considerar es $1 \gg \mu_\gamma \rho > \mu_\gamma a$, por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\Delta\mathbf{B}_{ext} = \hat{\mathbf{z}}\mu_\gamma^2 \Pi_{ext}(\rho) \sim \hat{\mathbf{z}}\Theta(\rho - a)C \tag{13B}$$

donde,

$$C = -\left(\frac{B_0}{2}\right)(\mu_\gamma a)^2 \ln\left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2}\right). \tag{14B}$$

Con estas expresiones podemos calcular la corrección al flujo interno, lo cual da como resultado

$$\Phi_{\gamma int} = 2\pi \int_a^\rho C(\rho')\rho' d\rho' \sim -\left(\frac{\pi}{2}\right)B_0 a^2 (\mu_\gamma \rho)^2 \ln\left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2}\right) \tag{15B}$$

por lo tanto, obtenemos:

$$\Delta\varphi_{\gamma BDext} = \frac{\Phi_0}{\Phi} \left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{2}{\mu_\gamma \rho}\right)^2 \tag{16B}$$

donde, el flujo fundamental es $\Phi = \frac{hc}{e}$ y el flujo del solenoide es $\Phi_0 = \pi a^2 B_0$.

De acuerdo a la aproximación y enfoque planteado por BD [8] en su trabajo, para estimar la masa del fotón a partir de la expresión (16B), cualquier manifestación de la masa del fotón debería estar acotada por el error experimental. Esto se debe a que el efecto de la masa del fotón debe ser muy pequeña y su límite debe venir acotado o enmarcado dentro del error experimental. En consecuencia, cualquier corrección debe ser alguna fracción ϵ de 2π , es decir,

$$\Delta\varphi_{\gamma BDext} = 2\pi\epsilon \tag{17B}$$

por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{\Phi_0}{\Phi} \left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2} \right)^2 \ln \left(\frac{2}{\mu_\gamma \rho} \right)^2 = 2\pi\epsilon. \quad (18B)$$

Ahora, la expresión anterior Ec. (18B) se debe evaluar numéricamente pero se puede demostrar que el término logarítmico no introduce resultados significativos. Siendo así esto, se puede asumir que su valor es del orden de la unidad lo cual da como resultado que la expresión (18B) se simplifique de la siguiente manera:

$$\frac{\Phi_0}{\Phi} \left(\frac{\mu_\gamma \rho}{2} \right)^2 = 2\pi\epsilon. \quad (19B)$$

Así, conociendo la resolución del patrón de interferencias, es decir, su precisión la cual está representada por ϵ , lo cual nos permite establecer un límite sobre la masa del fotón. De acuerdo a la aproximación y enfoque de BD [8] en los experimentos del efecto AB [7] $\epsilon \sim 10^{-3}$ y considerando que $a \sim 0,1 \text{ cm}$ y que el campo magnético es de 10 T . Estos datos producen el siguiente rango sobre μ_γ ,

$$\mu_\gamma^{-1} \simeq 14\rho Km, \quad (20B)$$

donde ρ es medido en cm . Para un haz coherente de $\rho \sim 10 \text{ cm}$, el rango observable es del orden de $\mu_\gamma^{-1} \simeq 10^2 \text{ Km}$. Esto equivale a una masa del fotón del orden de:

$$m_\gamma \simeq 2,5 \times 10^{-45} g. \quad (21B)$$

Bibliografía

- [1] L. C. Tu, J. Luo and G. T. Gillies, *Rep. Prog. Phys.* **68**, (1) 77 (2005).
- [2] G. Spavieri, G. T. Gillies and M. Rodríguez, *Metrologia.* **41**, s159 (2004).
- [3] E. R. Williams, J. E. Faller and H. A. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).
- [4] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277 (1971).
- [5] J. J. Ryan *et. al.*, *Phys. Rev. D.* **32**, 802 (1985).
- [6] R. Lakes, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1826 (1998).
- [7] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (3), 485 (1959).
- [8] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **26**, (21) 2319 (1989).
- [9] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5**, (1) 3 (1960).
- [10] A. Tonomura *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **56**, (8) 792 (1986).
- [11] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 567 (1968).
- [12] G. Spavieri, J. Quintero, G. T. Gillies and M. Rodríguez, *Eur. Phys. J. D.* **61**, 531 (2011).
- [13] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer, New York, 1996).
- [14] P. Van Nieuwenhuizen, "Radiation of massive gravitation", *Phys. Rev. D.* **7**, 8, 2300-2308, (1973).

- [15] R. Burman, "A photon rest mass and energy transport in cold plasmas", *J. Phys. A.*, **5**, 11, L128-L130, (1972).
- [16] L. Bass and E. Schrödinger, "Must the Photon Mass be Zero?", *Royal Society of London Proceedings Series A.*, **232**, 1-6, (1955).
- [17] E. C. G. Stueckelberg, "Théorie de la radiation de photons de masse arbitrairement petite", *Helv. Phys. Acta.*, **30**, 209-215, (1957).
- [18] N. M. Kroll, "Theoretical interpretation of a recent experimental investigation of the photon rest mass", *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 22, 1395-1398, (1971).
- [19] L. B. Okun, "Photon: History, Mass, Charge", *Acta Physica Polonica B*, **37**, 565, (2006).
- [20] C. A. Coulomb, *Memoires de l'Academie Royale des Sciences*. Paris: Academie royale des sciences, 1784.
- [21] H. Cavendish, *The Electricity Researches of the honourable Henry Cavendish*, J. C. Maxwell, Ed. London: Cambridge University Press, 1879.
- [22] J. Robison, *Electricity Encyclopaedia Britannica*, 3^{era}, Ed. Edinburgh: Thomson Boner, 1803, Vol. 19.
- [23] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3^{era}. Ed. Oxford: Oxford University Press, 1892, Vol. I.
- [24] de Broglie L 1954 *Théorie générale des Particules á Spin*, 2^{da}. Ed. (Paris: Gauthier-Villars). Pág. 190.
- [25] M. A. Gintsburg, *Astron. Zh.* **40**, 703 (1963).
- [26] M. A. Gintsburg, *Sov. Astron. AJ* **7**, 536 (1964).
- [27] V. L. Patel, *Phys. Lett.* **14**, 105 (1965).
- [28] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad. A* **49**, 135 (1943b).
- [29] A. J. Proca, *Phys.* **8**, 347 (1938). Paris.

- [30] G. D. Cochran and P. A. Franken, *Bull. Am. Phys. Soc.* **13**, 1379 (1968).
P. A. Franken and G. W. Ampulski, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 115 (1971).
- [31] D. F. Bartlett and E. A. Phillips, *Bull. Am. Phys. Soc.* **14**, 17 (1969)
D. F. Bartlett *et. al.*, *Phys. Rev. D.* **2**, 483 (1970).
- [32] S. J. Plimpton and W. E. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).
- [33] E. R. Williams, J. E. Faller and H. A. Hill, *Bull. Am. Phys. Soc.* **15**,
586 (1970).
- [34] E. Schrödinger, *Proc. R. Irish. Acad. A.* **49**, 135 (1943).
- [35] E. Fischbach *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 514 (1994).
- [36] L. Davis, A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1402
(1975).
- [37] G. V. Bicknell, *J. Phys. A.* **10**, 407 (1977).
- [38] D. D. Ryutov, *Plasma Physics and Controlled Fusion.* **49**, B429 (2007).
- [39] J. Luo *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 081801 (2003).
- [40] G. T. Gillies, R. C. Ritter, *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 283 (1993).
- [41] E. Williams, D. Park, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1651 (1971).
- [42] J. C. Byrne, R. R. Burman, *Nature.* **253**, 27 (1975).
- [43] G. V. Chivisov, *Usp. Fiz. Nauk.* **119**, 551 (1976).
- [44] P. de Bernardis *et. al.*, *Astrophys. J.* **284**, L21 (1984).
- [45] D. D. Ryutov, *Plasma Phys. Control. Fusión.* **49**, B429 (2007).
- [46] Y. Aharonov and A. Casher, *Phys. Rev. Lett.* **53**, (4) 319 (1984).
- [47] G. Spavieri, *Phys. Rev. A.* **59**, (5) 3194 (1999).
- [48] G. Spavieri, *Phys. Rev. Lett.* **82**, (20) 3932 (1999).
- [49] V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A.* **62**, (5) 052112 (2000).

- [50] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **392**, (8) 45 (1984).
- [51] Y. Aharonov, P. Pearle and L. Vaidman, *Phys. Rev. A.* **37**, (10) 4052 (1988).
- [52] A. Cimmino *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **63**, (4) 380 (1989).
- [53] K. Sangster *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, (22) 3641 (1993).
K. Sangster *et. al.*, *Phys. Rev. A.* **51**, (3) 1776 (1995).
- [54] G. Spavieri, *Eur. Phys. J. D.* **37**, (3) 327 (2006).
- [55] S. Miyamoto *et. al.*, (On line), Available: arXiv:1002.2393 (2010).
- [56] C. Fuchs, *Phys. Rev. D.* **42**, (8) 2940 (1990).
- [57] Jesús Quintero y Gianfranco Spavieri, *Publicaciones en Ciencias y Tecnología.* **5**, (2) 53 (2011).
- [58] G. Spavieri and G. T. Gillies, *Grav. Cosmol.* **16**, 251 (2010).
- [59] G. Spavieri and M Rodríguez, *Phys. Rev. A.* **75**, (5) 052113 (2007).
- [60] G. Spavieri, *Phys. Lett. A.* **310**, 13 (2003).
- [61] R. C. Casella, *Phys. Rev. Lett.* **51**, (3) 2217 (1990).
- [62] J. P. Dowling *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, (13) 2486 (1999).
- [63] R. S. Van Dyck Jr *et. al.*, *Phys. Rev. D.* **34**, (3) 722 (1986).
- [64] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3^{era} ed. John Willey and Sons, 1999.
- [65] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3^{era} ed. Prentice Hall, 1999.
J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3^{era} ed.1995.
- [66] *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Table.*
Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun.
- [67] Tyn Myint-U and L. Debnath, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 3^{era} ed. North-Holland, 1987.