UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Desigualdades de tipo Jensen y Hermite-Hadamard para funciones GA-convexas generalizadas

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Carlos Aular

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis.

Tutor: Dr. Miguel Vivas
Cotutor: M.Sc. Jesús Medina

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2017

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

DESIGUALDADES DE TIPO JENSEN Y HERMITE-HADAMARD PARA FUNCIONES GA-CONVEXAS GENERALIZADAS

presentado por el ciudadano BR. CARLOS AULAR titular de la Cédula de Identidad No. 19.799.377, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ______________________ de ___________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a mis padres por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la una excelente edución en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida.

A mis hermanos por ser parte importante en mi vida, y ejemplos de desarrollo profecional a seguir, y por apoyarme en los momentos que mas necesite.

Erianny Mendoza, por ser una parte importante en mi vida, por haberme apoyado en las buenas y en las malas, sobre todo por su paciencia y amor incodicional.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a los profesores: Jesús Medina, Miguel Vivas, Jurancy Ereu entre otros, por haber compartido conocimientos.

A mis amigos por haber confiado en mí y haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias muy importante.

Resumen

La convexidad es una noción básica de la geometría, pero también se usa en otras áreas de la matemáticas. El uso de las técnicas de convexidad aparece en muchas ramas de la matemáticas, tales como: la teoría de la optimización, teoría de las desigualdades, teoría del análisis funcional, teoría de números y teoría de números entre otras, y su interrelación con estas ramas se muestra cada vez más profunda y fructífera. La noción de las funciones GA-convexas se puede utilizar para derivar muchas funciones convexas familiares. En el presente trabajo estudiaremos unas generalizaciones de las funciones GA-convexas, las cuales son las funciones (h_1, h_2)-GA-convexas y (h_1, h_2, m)-GA-convexas, para ello se realizará un desarrollo detallado de los propiedades, teoremas, corolarios y observaciones del artículo ([4]), como también las desigualdades más relevantes como lo son Jensen y Hemite-Hadamard ([4]).

Índice

Introducción

La convexidad es una noción básica de la geometría, pero también se usa ampliamente en otras áreas de las matemáticas.

Es difícil decir quien fue el primero en considerar la noción de convexidad. Por ejemplo, los triángulos ya aparecían en el antiguo Egipto y Babilonia, en particular, el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, se conocían unos mil años antes de Pitágoras (569 - 475 A.C.). Sin embargo, fue Arquímedes (287 - 212 A.C.) el primero en dar una noción de lo que se entendía por una curva o superficie convexa.

La definición más moderna de convexidad nos dice que un conjunto S es convexo en $\mathbb{R}^n$ si para cualquier par de puntos p y q pertenecientes a S, el segmento de recta que une a los puntos p y q está totalmente contenida en S ([11]). Una parte importante del tema general de la convexidad es la teoría de funciones convexas. El concepto de función convexa se remonta del siglo XIX, señalando que en 1883 el matemático francés Charles Hermite obtiene unas desigualdades entre integrales de funciones para las cuales su gráfico cumple cierta propiedad de convexidad (ver [11]). En 1889, el matemático alemán, Otto Hölder considero este concepto ligado con las funciones reales que tiene segunda derivada no-negativa, obteniendo una forma discreta de lo se conoce hoy como la desigualdad de Jensen (ver [11]). En 1893 el austríaco Otto Stolz demuestra que si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y verifica la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1}$$

para cada $x, y \in [a, b]$, entonces tiene derivadas laterales finitas.

También en 1893, el matemático francés Jacques Hadamard muestra que si f tiene derivada creciente, entonces para $a < x_1 < x_2 < b$ tenemos que (ver [11])

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{2}$$

Sin embargo, el concepto de función convexa se le atribuye al danés Johan L. W. V. Jensen, quien en 1905 hace un estudio detallado de las funciones del tipo (1), demostrando varias desigualdades que se derivan de la desigualdad de Jensen (ver [11]).

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto convexo y $f : I \to \mathbb{R}$ un función, entonces se dice que f es convexa si y sólo si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para cualquier $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$ (Ver [11]).

El estudio de las funciones convexas ha generado el interés de muchos matemáticos en determinar algunas desigualdades para esta nueva clase de funciones y sus generalizaciones. A continuación se detallan algunas de estas desigualdades clásicas:

Desigualdad de Jensen (ver [17])

Caso discreto

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i), \tag{3}$$

con $\alpha_i \geq 0$, $x_i \in I$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Caso continuo

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa y $\phi : [c,d] \longrightarrow (a,b)$ integrable. Si $\alpha : [c,d] \longrightarrow [0, +\infty)$ y verifica que $\int_a^b \alpha(t)dt = 1$, entonces

$$f\left(\int_c^d \alpha(t)\phi(t)dt\right) \leq \int_c^d \alpha(t) f(\phi(t))dt. \tag{4}$$

Desigualdad de Hermite-Hadamard (ver [11]). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa y sean $a, b \in I$ con $a < b$, entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{5}$$

A lo largo del tiempo han aparecido varios problemas que han obligado a generalizar el concepto de convexidad. Una generalización de esta noción es la de la función h-convexa, la cual cual fue introducida en el año 2007 por S Varosanec (ver[15]), de la siguiente forma

Definición 0.1. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es h-convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + (1-t)f(y) \tag{6}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in (0,1)$. Donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ es una función.

Esta noción generaliza las clases de funciones convexas, s-convexas, Gadunova-Levin y las P-funciones, que se odtienen al usar en ([15]). las funciones $h(t) = t$,$h(t) = t^s$,$h(t) = \frac{1}{t}$ y $h(t) = 1$, respectivamente.

Las funciones h-convexas mantienen algunas propiedades, caracterizaciones y desigualdades de las funciones convexas, por ser una generalización de éstas, entre las desigualdades importante que las funciones h-convexas satisfacen, tenemos: la desigualdad del tipo Jensen y la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard (ver[15]).

Por otro lado, otro de los conceptos que derivan de la convexidad, es el de las funciones Geométrica-Aritmética-convexa (ver[10]), el cual nos el enfoque de la realción entre la media geometrica,la media aritmetica y la convexidad, el cual se denife de la siguiente forma:

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, si

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

cumple para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, entonces f es llamada Geométrica-Aritmética -convexa o, simplemente podemos llamarla GA-convexa (ver[10]).

Este tipo de funciones también preserva desigualdades importantes de las funciones convexas, una de ellas es la de Hermite-Hadamard y Jensen, la cual pueden encontrar con detalles en ([10]).

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la generalización de las funciones GA-convexas, como lo son: (h_1, h_2)-GA-convexas y (h_1, h_2, m)-GA-convexas, estudiar sus definiciones, propiedades y desigualdades que satisfacen dicha clase: Jensen y Hermite-Hadamard, así como el cumplimiento de teoremas de relevancia que conduscan a ciertas aplicaciones. Esto se realizará con el desarrollo del artículo (ver[4]).

Capítulo 1
PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos el concepto básico de convexidad, como también la de algunas de sus generalizaciones como lo son: las funciones s-convexas, h-convexas, m-convexas, GA-convexas y (h, m)-convexas, y también algunas de sus desigualdades más relevantes, tales como las de tipo Jensen y Hermite-Hadamard.

1.1. Convexidad

El estudio de las funciones convexas como una clase de función es atribuido al danés J. Jensen por sus primeros trabajos entre los años 1905 y 1906 (ver[6]), sin embargo el no fue el primero en trabajar en las funciones convexas. Esta clase de funciones aparecen de forma natural en diversos problemas prácticos. De hecho Jensen decía que la noción de la función convexa es tan importante como la de la función positiva o función creciente, el cual debería encontrar un lugar en los textos de teoría de números reales. Iniciaremos esta sección con el concepto básico de función convexa para funciones reales definidas en un intervalo I.

Definición 1.1. (ver[11]). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \to \mathbb{R}$, es convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1.1}$$

para $x, y \in I$ y $t \in (0, 1)$.

Usando el principio de inducción matemática, podemos generalizar a más de dos elementos del intervalo I de la desigualdad (1.1), y es lo que se conoce como la desigualdad de tipo Jensen.

Proposición 1.1. *(ver[11]). (Desigualdad del tipo Jensen). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i), \tag{1.2}$$

con $x_i \in I$, $t_i > 0$, $i = 1, .., n$, tales que $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

La desigualdad de Hermite-Hadamard son clásicas en el estudio de funciones convexas y juegan un papel muy importante en el desarrollo del mismo, debido a sus aplicaciones y propiedades.

Proposición 1.2. *(ver[11]). (Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea f una función convexa, entonces*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

para todo $x, y \in I$, con $x < y$.

Definición 1.2. (ver[16]). Sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, y $b > 0$ y $m \in (0, 1]$, si

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

es valido para todo $x, y \in [0, b]$ y $t \in [0, 1]$, entonces f es una función m-convexa en $[0, b]$.

Teorema 1.1. *(ver[16]). (Desigualdad derecha de Hermite-Hadamard). Sea $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ una función m-convexa y $m \in (0, 1]$, si $f \in L([a, b])$, para $0 \leq a < b < \infty$, entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq min\left\{\frac{f(a)+mf(b/m)}{2}, \frac{mf(a/m)+f(b)}{2}\right\}.$$

Teorema 1.2. *(ver[16]).(Desigualdad de Hermite-Hadamard). Sea $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ una función m-convexa con $m \in (0, 1]$, si $f \in L([a, b])$, para $0 \leq a < b < \infty$, entonces*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(x/m)}{2}dx \\ &\leq \frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + m\frac{f(a/m)+f(b/m)}{2}\right]. \end{aligned}$$

En el año 1994 H. Hudzik y L. Maligranda exponen un conjunto de propiedades de las funciones s-convexas definidas en primera instancia por W. Orlicz en 1961(ver[12]), y en una segunda versión por W.W. Breckner en el año 1978 (ver[2]).

Definición 1.3. (ver[9]). Sea $0 < s \leq 1$. Una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es s-convexas en el segundo sentido si

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

para todo $x, y \in [0, \infty)$, y $t \in (0, 1)$.

Observación 1.1. De la definición 1.3, si $s = 1$, diremos que f es una función convexa.

En ([13]) M.R. Pinheiro demuestra que la desigualdad de tipo Jensen generalizada (desigualdad (1.2)) es cierta para funciones convexas en segundo sentido.

Teorema 1.3. *([13]).(Desigualdad tipo Jensen). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función s-convexa con $s \in (0, 1]$, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq (t_i)^s f(x_i)$$

para todo $x_i \in I$, y $t_i \in (0, 1)$.

Teorema 1.4. *(ver[4]). Si f es s-convexa en el segundo sentido y no-negativa sobre I y si $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ para $n \geq 3$ y algún $s \in (0, 1]$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{2^{s-1}(n^s - 1)}{n} \sum_{i<k} f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right).$$

Algunos resultados nuevos relacionados con la Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para la clase de funciones s-convexas en el segundo sentido, propuestas por Muhamet E. y Cetin. Y. En (ver[9]).

Teorema 1.5. *(ver[9]). (Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard). Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función s-convexa en el segundo sentido, donde $s \in [0, 1]$, y sea $a, b \in [0, +\infty)$ con $a < b$. Si $f \in L([a, b])$, entonces*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}.$$

Definición 1.4. (ver[4]). Para algún $s \in [-1, 1]$, una función $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ es llamada s-convexa extendida si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in (0, 1)$.

En años recientes, como la generalización y la extensión de la clásica noción de funciones convexas han derivado, nuevas definiciones y entre ellas tenemos.

Definición 1.5. (ver[4]). Para algún $(s, m) \in (0, 1]$ y $b > 0$, una función $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ es llamada (s, m)-convexa si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + m(1-\lambda)^s f(y)$$

cumple para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in (0, 1)$.

Observación 1.2. De la definición 1.5

1. si $s = 1$, diremos que f es una función m-convexa.
2. Si $m = 1$, diremos que f es una función s-convexa.
3. Si $s = 1$ y $m = 1$, diremos que f es una función convexa.

Recientemente N. Eftekhari, estableció varias desigualdades para funciones cuya primera derivada en modulo son funciones (s, m)-convexa, entre ellas podemos destacar la desigualdad izquierda de tipo Hermite-Hadamard para funciones (s, m)-convexa en segundo sentido (ver[3]).

Teorema 1.6. *(ver[8]). (Desigualdad izquierda de tipo Hermite-Hadamard). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_0$, una función diferenciable en (a, b), tal que, $f' \in L_1([a, b])$. Si el $|f'|$ es (s, m)-convexo en el segundo sentido en $[a, b]$, para $(s, m) \in (0, 1]^2$, entonces*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq\ &\frac{b-a}{4(s+2)}\left[\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{1}{(s+1)}\left(\left| f'\left(\frac{a}{m}\right)\right| + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right)\right], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2^{(s+2)}(s+2)}[|f'(a)|+|f'(b)|]\frac{m2^{s+2}-s+3}{s+1}\left(\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right)\bigg].\end{aligned}$$

La propiedad de convexidad de una función, es uno de los más poderosos herramientas para establecer una amplia gama de desigualdades analíticas. Dependiendo de cual tipo de media aritmética (A) o geométrica (G) consideramos, respectivamente, en el dominio y el Co-dominio de definición de la función podemos distinguen cuatro clases de funciones convexas. Estas son AA-convexas, AG-convexas, GG-convexas y la que sera de nuestro interés GA-convexas.

Definición 1.6. (ver[10]). Una función $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, si

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

cumple para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, entonces f es llamada Geométrica-Aritmética -convexa o, simplemente podemos llamarla GA-convexa.

C.P. Niculescu discutió la clase de desigualdades que surgen de la GG-convexas, claramente, en una misma linea investigación fue seguida por Rasvan, A. (ver[14]), para analizar la clase de desigualdades que surgen al considerar el resto de los tipos de convexidad (GA, AG, AA), entre ellas destacaremos las siguientes desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones GA-convexas (ver[10]).

Teorema 1.7. *(ver[10]). (Desigualdad derecha de tipo Hermite-Hadamard). Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^0 y $a, b \in I^0$, con $a < b$ y $f' \in L([a,b])$. Si $|f'|^q$ es GA-convexa en $[a,b]$, para $q \geq 1$, entonces*

$$\begin{aligned}\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \frac{[(b-a)A(a,b)^{1-\frac{1}{q}}]}{2^{\frac{1}{q}}} \\ &\times \{[L(a^2,b^2)-a^2]|f'|^q+[b^2-L(a^2,b^2)]|f'|^q]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

donde $L(a,b)$ representa la media logarítmica y $A(a,b)$ la media aritmética.

Teorema 1.8. *(ver[10]). (Desigualdad izquierda de tipo Hermite-Hadamard). Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^0 y $a, b \in I^0$, con $a < b$ y $f' \in L([a,b])$. Si $|f'|^q$ es GA-convexa en $[a,b]$, para $q > 1$, entonces*

$$\begin{aligned}&\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \quad & (\ln b - \ln a)\left[L\left(a^{2q/(q-1)}, b^{2q/(q-1)}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[A\left(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right)\right].\end{aligned}$$

Imdat, I. (ver[5]) Generaliza la definición de funciones GA-convexas introduciendo el nuevo concepto de funciones s-GA-convexas que presentaremos a continuación.

Definición 1.7. (ver[5]). Sea $s \in (0,1]$, sea una función $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $s \in (0,1]$. Entonces f es llamada s-GA-convexa si

$$f(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0,1]$.

Observación 1.3. De la definición 1.7. Si $s = 1$, entonces f es una función GA-convexa.

En 2013 Imdat, I. (ver[5]). Desarrollo na serie de desigualdades para las funciones s-GA-convexas, y entre ellas presentaremos una de las mas importantes.

Teorema 1.9. *(ver[5]). (Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard). Sea $0 < s \leq 1$. Supongamos que $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$, es una función s-GA-convexa en el segundo sentido y $a, b \in I$, con $a < b$. Si $f \in L([a,b])$, entonces*

$$2^{s-1} f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln a - \ln b}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Una manera natural de Breckner-convexidad (ver[11]), fue propuesta por la matemática croata S. Varosenec, en el año 2005. En el cual propuso la siguiente definición.

Definición 1.8. (ver[15]). Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos, $(0,1) \subseteq J$, y $h : J \to \mathbb{R}$ es una función no-negativa, tal que, $h \not\equiv 0$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es llamada h-convexa, o se dice que $f \in SX(h, I)$, si es no-negativa y

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{1.3}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in (0,1)$.

Observación 1.4. De la definición 1.8

1. Si $h(t) = t$ para todo $t \in J$, entonces f es una función convexa.

2. Si $h(t) = t^s$ para todo $t \in J$ y $s \in (0, 1]$, entonces f es una función $s-convexa$.

Definición 1.9. (ver[7]). Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, una función $h : J \to \mathbb{R}$ es llamada súper-multiplicativa si

$$h(xy) \geq h(x)h(y)$$

para todo $x, y \in J$.

Las funciones h-convexas por ser generalización de las funciones convexas mantienen algunas desigualdades, entre las cuales presentaremos a continuación dos de las mas importantes.

Teorema 1.10. *(ver[15]).(Desigualdad del tipo Jensen). Sean $w_1, ..., w_n$ números reales positivos ($n \geq 2$). Si h es una función no negativa súper-multiplicativa y si $f \in SX(h, I)$, con $x_1, ..., x_n \in I$, entonces*

$$f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right) \leq \sum_{i_1}^{n} h\left(\frac{w_i}{W_n}\right) f(x_i),$$

donde $W_n = \sum_{i_1}^{n} w_i$.

Teorema 1.11. *(ver[15]).(Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard) Sea $f \in SX(h, I)$, y si $f \in L([a, b])$, entonces*

$$\frac{1}{2h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq (f(a) + f(b))\int_0^1 h(t)dt,$$

para todo $a, b \in I$, con $a < b$.

Para concluir este capítulo, presentaremos otra de las generalizaciones a estudiar de la convexidad, la cual se define como función (h, m)-convexa, la cual satisface desigualdades importantes, entre las cuales destacaremos la de tipo Jensen.

Definición 1.10. (ver[1]). Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $(0,1) \subseteq J$ y $b > 0$, $h : J \to \mathbb{R}$ es una función no-negativa, tal que, $h \not\equiv 0$. si $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ es $(h,m)-convexa$, o , $f \in SMX((h,m),[0,b])$, si f es no-negativa y

$$f(tx + m(1-t)y) \leq h(t)f(x) + mh(1-t)f(y) \tag{1.4}$$

para todo $x, y \in [0,b]$ y $\lambda \in [0,1]$ y $m \in (0,1]$.

Teorema 1.12. *(ver[1]).(Desigualdad del tipo Jensen). Sea* $h : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ *una función súper-multiplicativa y* $m \in (0,1]$*. Si* $f \in SMX((h,m),[0,b])$*, entonces para todo* $x_i \in [0,b]$ *y* $w_i \geq 0$*, con* $i = 1,...,n$ *y* $n \geq 2$*, se tiene*

$$f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^{n} m^{i-1}x_iw_i\right) \leq \sum_{i_1}^{n} m^{i-1}h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)f(x_i),$$

donde $W_n = \sum_{i_1}^{n} w_i$*.*

En matemáticas, se conoce como desigualdad entre media geométrica y media aritmética , o MA-MG, aquella desigualdad que establece que la media aritmética de un conjunto de números reales positivos es mayor o igual que la media geométrica del conjunto, cumpliéndose la igualdad solo cuando todos los elementos del conjunto son iguales, y se enuncia de la siguiente forma.

Proposición 1.3. *(ver[11]). (Media Geométrica-Media Aritmética). Sean* $\{x_i\}_{i=1}^{n}$,$\{t_i\}_{i=1}^{n}$ *números reales, tales que* $x_i \geq 0$ *y* $t_i > 0$*, para* $i = 1,...,n$ *y* $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$*, entonces*

$$x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + x_nt_n. \tag{1.5}$$

Capítulo 2

Funciones (h_1, h_2)-GA-convexas y (h_1, h_2, m)-GA-convexas

En este capítulo presentamos las definiciones de lo que es las generalizaciones de las funciones GA-convexas, como lo son las funciones $(h_1, h_2)-GA-convexa$ y $(h_1, h_2, m)-GA-convexa$, como también ulgunas propiedades y desigualdad importantes, tales como las de tipo Jensen y Hermite-Hadamard (ver[4]).

2.1. Funciones (h_1, h_2)-GA-convexas y (h_1, h_2, m)-GA-convexas

Definición 2.1. (ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ tal que $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1, 2$ y $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$. Si

$$f(x^t y^{1-t}) \leq h_1(t)f(x) + h_2(1-t)f(y)$$

para $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, entonces f es llamada (h_1, h_2)-GA-convexa.

Observación 2.1. Si f es decreciente y (h_1, h_2)-GA-convexa en $\mathbb{R}_+$ y $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ para $t \in [0,1]$, diremos que f es una función h-convexa en $\mathbb{R}_+$.

Demostración. Como f es una función decreciente y usando la definición 2.1 , para $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, por la proposición 1.3, se tiene

$$\begin{array}{rcl} tx + (1-t)y & \geq & x^t y^{1-t} \\ f(tx + (1-t)y) & \leq & f(x^t y^{1-t}) \\ & \leq & h_1(t)f(x) + h_2(1-t)f(y) \\ & = & h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \end{array}$$

■

Observación 2.2. 1. De la definición 2.1. Si $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$, diremos que f es una función h-GA-convexa.

2. Cuando $h(t) = t^s$ para $t \in (0,1)$ y $s \in [-1,1]$, la función h-GA-convexa se reduce a s-GA-convexa extendida.

   Demostración. Usando la definición 2.1, para $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x^t y^{1-t}) &\leq h_1(t)f(x) + h_2(1-t)f(y) \\ &= t^s f(x) + (1-t)^s f(y). \end{aligned}$$

   ■

3. Cuando $h(t) = t$ para $t \in [0,1]$, una función h-GA-convexa es GA-convexa.

   Demostración. Usando la definición 2.1, para $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x^t y^{1-t}) &\leq h_1(t)f(x) + h_2(1-t)f(y) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

   ■

Definición 2.2. (ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ y $m : [0,1] \to (0,1]$ tal que $h_i \neq 0$ para $i = 1, 2$. Una función $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$ es llamada (h_1, h_2, m)-GA-convexa, si

$$f(x^t y^{m(t)(1-t)}) \leq h_1(t)f(x) + m(t)h_2(1-t)f(y)$$

para todo $x, y \in (0,b]$ y $t \in [0,1]$.

Observación 2.3. De la definición 2.2.

1. Si $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ para todo $t \in [0,1]$, diremos que $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$ es una función (h,m)-GA-convexa.

2. Sea $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$ una función (h,m)-GA-convexa y $m \in (0,1]$. Cuando $h(t) = t$ para $t \in [0,1]$ la función f es llamada m-GA-convexa. Si la desigualdad es invertida diremos que f es una función m-GA-cóncava.

Demostración. Sea f como en la definición 2.2, para $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq f(x^t y^{1-t}) \\ &\leq h(t)f(x) + m(t)h(1-t)f(y) \\ &= tf(x) + m(t)(1-t)f(y). \end{aligned}$$

■

3. Si $f : (0, b] \to \mathbb{R}_0$ es una función (h,m)-GA-convexa, $h(t) = t^s$ para $t \in (0, 1)$ y $s \in [-1, 1]$, y $m \in (0, 1]$, diremos que f es una función (s, m)-GA-convexa extendida.

4. Si $f : (0, b] \to \mathbb{R}_0$ es una función $(h, 1)$-GA-convexa, entonces f es h-GA-convexa en $(0, b]$.

Demostración. Usando la definición 2.2, para $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq f(x^t y^{1-t}) \\ &\leq h_1(t)f(x) + (1)h_2(1-t)f(y) \\ &= h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1. Sea $f(x) = |\ln x|$ para $x \in (0, 1]$ y una función $m : [0, 1] \to (0, 1]$,para $t \in (0, 1)$ y algún $\ell_0 \in \mathbb{R}$.

1. Sea $h_1(t) = t^{\ell_1}$ y $h_2(t) = t^{\ell_2}$ para $t \in (0, 1)$ y $\ell_1, \ell_2 \leq 1$, entonces f es (h_1, h_2, m)-GA-convexa en $(0, 1]$;

$$\begin{aligned} f(x^t y^{m(t)(1-t)}) &= |\ln(x^t y^{m(t)(1-t)})| \\ &= |\ln x^t + \ln y^{m(t)(1-t)}| \\ &= |t \ln x + m(t)(1-t) \ln y| \\ &\leq |t \ln x| + |m(t)(1-t) \ln y| \\ &= t|\ln x| + m(t)(1-t)|\ln y| \\ &\leq t^{\ell_1}|\ln x| + m(t)(1-t)^{\ell_2}|\ln y| \\ &= h_1(t)|\ln x| + m(t)h_2(t)|\ln y| \\ &= h_1(t)f(x) + m(t)h_2(t)f(x). \end{aligned}$$

2. En la definición 1.10, escribiendo $m = 0{,}6$, $h(t) = t$ para todo $t \in [0,1]$, $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}9$, y $t_0 = \frac{1}{2}$

$$f(t_0x_0 + m(1-t_0)y_0) - h(t_0)f(x_0) - mh(1-t)f(y_0) > 0$$

Esto implica que $f(x) = |\ln x|$ no es $(h,m)-convexa$ sobre $(0,1]$

2.2. Propiedades

Ahora presentamos algunas propiedades de las funciones (h_1,h_2)-GA-convexas y (h_1,h_2,m)-GA-convexa.

Teorema 2.1. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, tal que, $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1,2$, y sea $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Si $f : I \to \mathbb{R}_+$, es una función (h_1,h_2)-GA-convexa en I, entonces $h_1(t) + h_2(1-t) \geq 1$ para $t \in [0,1]$;*

Demostración. Usando la (h_1,h_2)-GA-convexidad de la función f en I, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x^t x^{1-t}) &\leq h_1(t)f(x) + h_2(1-t)f(x) \\ &= [h_1(t) + h_2(1-t)]f(x) \end{aligned}$$

Así se obtiene

$$1 \leq h_1(t) + h_2(1-t)$$

para todo $x \in I$ y $t \in [0,1]$. ■

Teorema 2.2. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ para $i = 1,2,3,4$, sea $f : (0,b] \to \mathbb{R}_+$ y $m : [0,1] \to (0,1]$.*

Si f es una función (h_1,h_2,m)-GA-convexa en $(0,b]$, $h_1(t) \leq h_3(t)$, y $h_2(t) \leq h_4(t)$, para $t \in [0,1]$, entonces f es una función (h_3,h_4,m)-GA-convexa en $(0,b]$.

Demostración. Como f una función $(h_1,h_2,m)-GA-convexa$ sobre $(0,b]$, $h_1(t) \leq h_3(t)$ y $h_2(t) \leq h_4(t)$, para todo $t \in [0,1]$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x^t y^{(1-t)m(t)}) &\leq h_1(t)f(x) + m(t)h_2(1-t)f(y) \\ &\leq h_3(t)f(x) + m(t)h_4(1-t)f(y) \end{aligned}$$

para cualquier $x \in (0,b]$ y $t \in [0,1]$. ■

Teorema 2.3. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$, tal que, $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1,2$, sea $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$, y $g : (0,d] \to g((0,d]) \subseteq (0.b]$, y $m \in (0,1]$.*

Si f es una función decreciente y $(h_1,h_2,m) - GA - convexa$ en $(0,b]$,y si $u = g(x)$ es una función m-geométricamente cóncava en $(0,d]$, entonces $f \circ g$ es una función (h_1,h_2,m)-GA-convexa en $(0,b]$.

Demostración. Supongamos que f es una función decreciente y (h_1,h_2,m)-GA-convexa en $(0,b]$

Si $u = g(x)$ es m-geométricamente cóncava sobre $(0,d]$, entonces

$$g(x^t y^{m(1-t)}) \geq [g(x)]^t [g(y)]^{m(1-t)}$$

para todo $x \in (0,d]$.

Luego, como f es decreciente y $(h_1,h_2,m) - GA - convexa$ en $(0,b]$ entonces

$$\begin{aligned} f(g(x^t y^{m(1-t)})) &\leq f([g(x)]^t [g(y)]^{m(1-t)}) \\ &\leq h_1(t) f(g(x)) + m h_2(1-t) f(g(y)) \end{aligned}$$

para todo $x,y \in (0,d]$ y $t \in [0,1]$. ■

2.3. Desigualdades del tipo Jensen

Ahora estableceremos las desigualdades de tipo Jensen para funciones (h_1,h_2,m)-GA-convexa, y algunas consecuencias de la misma.

Teorema 2.4. *(ver[4]). Sean $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ funciones, tales que, $h_i \not\equiv 0$, para $i = 1,2$, sea $h_1(t_1)h_2(t_2) \leq h_2(t_1 t_2)$, para todo $t_1,t_2 \in [0,1]$, sea h_2 una función super-multiplicativa y $m : [0,1] \to$ (0,1]. Si $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$ es una función (h_1,h_2,m)-GA-convexa en $(0,b]$, entonces*

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) \leq h_1(w_1) f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right) h_2(w_i) f(x_i) \qquad (2.1)$$

para todo $x_i \in (0,b]$, para $w_i > 0$, tal que, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $m(w_0) = 1$

Demostración. Aplicando el método de Inducción matemática

Para $n = 2$, tomando $t = w_1$ y $1 - t = w_2$, se tiene

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{2} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) &= f(x_1^t x_2^{m(t)(1-t)}) \\ &\leq h_1(t) f(x_1) + m(t) h_2(1-t) f(x_2). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, esto es

$$f\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) \leq h_1(w_1) f(x_1) + \sum_{i=2}^{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right) h_2(w_i) f(x_i). \tag{2.2}$$

Ahora probemos que se cumple para $n = k+1$, consideremos $\Delta_k = \sum_{i=2}^{k+1} w_i$, aplicando la definición 2.2 , se tiene

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) &= f\left(x_1^{w_1}\left(\prod_{i=2}^{k+1} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right)\right) \\ &= f\left(x_1^{w_1}\left(\prod_{i=2}^{k+1} X_i^{w_i/\Delta_k \prod_{j=0, j\neq 1}^{i-1} m(w_j)}\right)^{m(w_1)\Delta_k}\right) \\ &\leq h_1(w_1) f(x_1) + m(w_1) h_2(\Delta_k) f\left(\prod_{i=2}^{k+1} x_i^{w_i/\Delta_k \prod_{j=2}^{i-1} m(w_j)}\right). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad (2.2), considerando que $h_1(t_1)h_2(t_2) \leq h_2(t_1 t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$ y que h_2 es una función super-multiplicativa,

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) &\leq h_1(w_1) f(x_1) + m(w_1) h_2(\Delta_k)\left[h_1\left(\frac{w_2}{\Delta_k}\right) f(x_2)\right. \\ &+ \left.\sum_{i=3}^{k+1}\left(\prod_{j=2}^{i-1} m(w_j)\right) h_2\left(\frac{w_i}{\Delta_k}\right) f(x_i)\right] \\ &= h_1(w_1) f(x_1) + m(w_1) h_2(\Delta_k) h_1\left(\frac{w_2}{\Delta_k}\right) f(x_2) \\ &+ m(w_1) h_2(\Delta_k)\left[\sum_{i=3}^{k+1}\left(\prod_{j=2}^{i-1} m(w_j)\right) h_2\left(\frac{w_i}{\Delta_k}\right) f(x_i)\right] \\ &\leq h_1(w_1) f(x_1) + m(w_1) h_2(w_2) f(x_2) \\ &+ \sum_{i=3}^{k+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right) h_2(w_i) f(x_i) \\ &= h_1(w_1) f(x_1) + \sum_{i=2}^{k+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right) h_2(w_i) f(x_i). \end{aligned}$$

∎

Los siguientes resultados son consecuencia inmediata del teorema 2.4.

Corolario 2.1. *(ver[4]). Bajo las condiciones del teorema 2.4, si f es una función decreciente sobre $(0,b]$ y $m(t)=1$ para $t\in[0,1]$, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \leq f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right) \leq h_1(w_1)f(x_1)+\sum_{i=2}^{n} h_2(w_i)f(x_i)$$

cumple para todo $x_i\in(0,b]$ y $w_i>0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$.

Demostración. Por la proposición 1.3, y ya que f es decreciente, se cumple

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i &\geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\\ \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) &\leq f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right).\end{aligned}$$

Aplicando el teorema (2.4), con $m(t)=1$ para todo $t\in[0,1]$ se cumple

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \leq f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right) \leq h_1(w_1)f(x_1)+\sum_{i=2}^{n} h_2(w_i)f(x_i).$$

∎

Corolario 2.2. *(ver[4]). Bajo las condiciones del teorema 2.4 , si $w_1=\cdots=w_n=\frac{1}{n}$, entonces*

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}[m(\frac{1}{n})]^{i-1}}\right) \leq h_1\left(\frac{1}{n}\right)f(x_1)+h_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=2}^{n}\left[m\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{i-1} f(x_i). \tag{2.3}$$

cumple para todo $x_i\in(0,b]$ para $i=1,2,..,n$.

Demostración. (ver[4]). Por el teorema 2.4, se tiene

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i\prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) \leq h_1(w_1)f(x_1)+\sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right)h_2(w_i)f(x_i)$$

Ahora sustituimos los $w_1=\cdots=w_n=\frac{1}{n}$, y nos queda

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}[m(\frac{1}{n})]^{i-1}}\right) \leq h_1\left(\frac{1}{n}\right)f(x_1)+h_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=2}^{n}\left[m\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{i-1} f(x_i).$$

∎

Corolario 2.3. *(ver[4]). Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}_0$ una función que cumple $h_2(t_1t_2) \geq h_2(t_1)h_2(t_2)$, tal que, $hh_i \not\equiv 0$, $m \in (0,1]$, y si $f : (0,b] \to \mathbb{R}_0$ es una función (h,m)-GA-convexa en $(0,b]$. Entonces*

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m^{i-1}w_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m^{i-1}h(w_i)f(x_i). \tag{2.4}$$

Demostración. Aplicando el teorema 2.4, se tiene

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i \prod_{j=0}^{i-1} m(w_j)}\right) \leq h_1(w_1)f(x_1) + \sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right)h_2(w_i)f(x_i).$$

Ahora haciendo, $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ y $m(t) = m$, para todo $t \in [0,1]$ y $m \in (0,1]$, nos queda

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m^{i-1}w_i}\right) &\leq h(w_1)f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} m^{i-1}h(w_i)f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^{i-1}h(w_i)f(x_i). \end{aligned}$$

■

Corolario 2.4. *(ver[4]). Sea $h(t) = t^s$ con $t \in (0,1)$ y $s \in [-1,1]$, $f : [0,b] \to \mathbb{R}_0$ y $m \in (0,1]$. Entonces f es una función $(s,m) - GA -$ convexa si y solo si*

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m^{i-1}w_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m^{i-1}w_i^s f(x_i).$$

para todo $x_i \in (0,b]$ y $w_i > 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Aplicando el teorema 2.4, haciendo $h(t) = t^s$ y $m(t) = m$, para todo $t \in [0,1]$ y $s \in [-1,1]$, obtenemos

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m^{i-1}w_i}\right) &\leq h(w_1)f(x_1) + \sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} m(w_j)\right)h(w_i)f(x_i) \\ &= w_1^s f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} m^{i-1}w_i^s f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^{i-1}w_i^s f(x_i). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Para $n = 2$, tomando $w_1 = t$ y $w_2 = 1 - t$, tiene

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{2} x_i^{m^{i-1}w_i}\right) &\leq \sum_{i=1}^{2} m^{i-1} w_i^s f(x_i) \\ &= w_1^s f(x_1) + m w_2^s f(x_2) \\ &= t^s f(x_1) + m(1-t)^s f(x_2). \end{aligned}$$

■

2.4. Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard

Ahora estamos en condiciones de establecer nuevas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones $(h_1, h_2, m)-GA-convexas$, junto con algunas consecuencias y teoremas de relevancia.

Teorema 2.5. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$, $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1, 2$, $m : [0,1] \to (0,1]$. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ es una función (h_1, h_2, m)-GA-convexas en $\mathbb{R}_+$, tal que ,$f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ y $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$, para $a, b \in \mathbb{R}_+$, con $a < b$. Entonces*

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{h_1(1/2)}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx + \frac{m(1/2) h_2(1/2)}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x^{1/m(1/2)})}{x} dx. \tag{2.5}$$

Demostración. Sea $\sqrt{ab} = (a^t b^{1-t})^{1/2} (a^{1-t} b^t)^{1/2}$, para $t \in [0,1]$, de la (h_1, h_2, m)-GA-convexidad de la función f sobre $\mathbb{R}_+$, y multiplicando por $1 = m(1/2)/m(1/2)$ en el segundo exponente, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &= f((a^t b^{1-t})^{1/2} (a^{1-t} b^t)^{1/2}) \qquad (2.6) \\ &= f\left([(a^t b^{1-t})]^{1/2} [(a^{1-t} b^t)^{1/m(1/2)}]^{m(1/2)1/2} \right) \\ &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right) f(a^t b^{1-t}) + m\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) f\left((a^{1-t} b^t)^{1/m(1/2)} \right). \end{aligned}$$

Si reemplazamos $a^{1-t} b^t$ y $a^t b^{1-t}$ por x, para $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_0^1 f(a^{1-t} b^t) dt = \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx. \tag{2.7}$$

En efecto

Consideremos el cambio $x = a^{1-t}b^t$, y se tiene que

$$\begin{aligned} x &= a^{1-t}b^t \\ \ln x &= \ln(a^{1-t}b^t) \\ &= \ln a^{1-t} + \ln b^t \\ &= (1-t)\ln a + t\ln b \\ \Rightarrow \frac{1}{x}dx &= (-\ln a + \ln b)dt \\ dt &= \frac{1}{(\ln b - \ln a)x}dx. \end{aligned}$$

Luego cuando $t = 0$ se tiene $x = a$ y cuando $t = 1$ obtenemos $x = b$. Por otro lado

$$\int_0^1 f\left([a^{1-t}b^t]^{1/m(1/2)}\right)dt = \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f\frac{(x^{1/m(1/2)})}{x}dx. \tag{2.8}$$

Haciendo $x = a^t b^{1-t}$, Luego integrando la desigualdad (2.6) sobre $[0,1]$ y aplicando las igualdades (2.7) y (2.8), se obtiene

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &= \int_0^1 f(\sqrt{ab})dt \\ &= \int_0^1 f((a^t b^{1-t})^{1/2}(a^{1-t}b^t)^{1/2})dt \\ &= \int_0^1 f\left([(a^t b^{1-t})]^{1/2}[(a^{1-t}b^t)^{1/m(1/2)}]^{m(1/2)1/2}\right)dt \\ &\leq \int_0^1 \left(h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^t b^{1-t})dt + m\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left((a^{1-t}b^t)^{1/m(1/2)}\right)\right)dt \\ &= h_1\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(a^t b^{1-t})dt + m\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f\left((a^{1-t}b^t)^{1/m(1/2)}\right)dt \\ &= \frac{h_1(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx + \frac{m(1/2)h_2(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x^{1/m(1/2)})}{x}dx. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.6. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$, $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1,2$, $m \in (0,1]$. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ una función (h_1,h_2,m)-GA-convexas en $\mathbb{R}_+$, tal que, $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ y*

$h_1, h_2 \in L_1([0,1])$ para $a, b \in \mathbb{R}_+$, con $a < b$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \;&\leq\; min\Big\{ f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt, \\ &\quad f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt \Big\}.\end{aligned}$$

Demostración. Tomando $x = a^{1-t}b^t$, luego por la (h_1, h_2, m)-GA-convexidad de la función f, y usando la igualdad (2.7), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx &= \int_0^1 f(a^{1-t}b^t)dt \\ &= \int_0^1 f(a^{1-t}[b^{1/m}]^{mt})dt \\ &\leq \int_0^1 \Big(h_1(1-t)f(a) + mh_2(t)f(b^{1/m}) \Big) dt \\ &= f(a)\int_0^1 h_1(1-t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt.\end{aligned}$$

Por otro lado veamos que, si hacemos $t_1 = 1 - t$, se tiene

$$\int_0^1 h_1(1-t)dt = \int_0^1 h_1(t_1)dt_1 \tag{2.9}$$

En efecto

Si $t_1 = 1 - t$, entonces $dt_1 = -dt$, luego cuando $t = 0$ se tiene que $t_1 = 1$ y cuando $t = 1$ se tiene $t_1 = 0$. Asi

$$\int_0^1 h_1(1-t)dt = \int_1^0 h_1(t_1)(-dt_1) = \int_0^1 h_1(t_1)dt_1.$$

Aplicando la igualdad (2.9), y por la desigualdad anterior tenemos que

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt. \tag{2.10}$$

Por otro lado, tomando $x = a^{1-t}b^t$, luego por la $(h_1, h_2, m) - GA - convexidad$ de la función f, y usando la igualdad (2.7), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx &= \int_0^1 f(a^{1-t}b^t)dt \\
&= \int_0^1 f(b^t[a^{1/m}]^{m(1-t)})dt \\
&\leq \int_0^1 \Big(h_1(t)f(b) + mh_2(1-t)f(a^{1/m})\Big)dt \\
&= f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(1-t)dt \\
&= f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt.
\end{aligned}$$

Asi, obtenemos que

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt. \tag{2.11}$$

Luego de las desigualdades (2.10) y (2.11), se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq\ & min\Big\{f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt, \\
& f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt.\Big\}.
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.5. *(ver[4]). Bajo las condiciones del teorema 2.6. Si $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ para $t \in [0,1]$, se tiene*

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq min\Big\{f(a) + mf(b^{1/m}), f(b) + mf(a^{1/m})\Big\}\int_0^1 h(t)dt.$$

Demostración. Por el teorema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx &\leq min\Big\{f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt, \\
&\qquad f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t)dt\Big\} \\
&= min\Big\{f(a)\int_0^1 h(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h(t)dt, \\
&\qquad f(b)\int_0^1 h(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h(t)dt\Big\} \\
&\leq min\Big\{f(a) + mf(b^{1/m}), f(b) + mf(a^{1/m})\Big\}\int_0^1 h(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.6. *(ver[4]). Bajo las condiciones del teorema 2.6. Sea* $h_1(t) = t^{s_1}$ *y* $h_2(t) = t^{s_2}$*, para todo* $t \in (0,1)$*,* $s_1, s_2 \in (-1,1]$ *y* $m \in (0,1]$*. Si* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ *es una función* (h_1,h_2,m)*-GA-convexa en* $\mathbb{R}_+$*, tal que,* $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *y* $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$*, para todo* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *con* $a < b$*. Entonces*

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \;\leq\; min\left\{\frac{f(a)}{s_1+1} + \frac{mf(b^{1/m})}{s_2+1}, \frac{f(b)}{s_1+1} + \frac{mf(a^{1/m})}{s_2+1}\right\}.$$

Demostración. Por el teorema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \;&\leq\; min\Big\{f(a)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(t_1)dt_1, \\
&\qquad f(b)\int_0^1 h_1(t)dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(t_1)dt_1\Big\} \\
&= min\Big\{f(a)\int_0^1 t^{s_1}dt + mf(b^{1/m})\int_0^1 t^{s_2}dt, \\
&\qquad f(b)\int_0^1 t^{s_1}dt + mf(a^{1/m})\int_0^1 t^{s_2}dt\Big\} \\
&= min\left\{\frac{f(a)t^{s_1+1}}{s_1+1}\bigg|_0^1 + \frac{mf(b^{1/m})t^{s_2+1}}{s_2+1}\bigg|_0^1, \frac{f(b)t^{s_1}}{s_1+1}\bigg|_0^1 + \frac{mf(a^{1/m})t^{s_2+1}}{s_2+1}\bigg|_0^1\right\} \\
&= min\left\{\frac{f(a)}{s_1+1} + \frac{mf(b^{1/m})}{s_2+1}, \frac{f(b)}{s_1+1} + \frac{mf(a^{1/m})}{s_2+1}\right\}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.7. *(ver[4]). Sea* $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$*,* $h_i \not\equiv 0$ *para* $i = 1,2$*,* $m \in (0,1]$*. Si* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$ *es una función* (h_1,h_2,m)*-GA-convexas en* $\mathbb{R}_+$*, tal que,* $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *y* $h_1, h_2 \in L_1([0,1])$*, para todo* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *con* $a < b$*. Entonces*

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) \;&\leq\; \frac{h_1(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx + \frac{mh_2(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x^{1/m})}{x}dx \\
&\leq\; min\left\{\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m})\right]\int_0^1 h_1(t)dt\right. \\
&+\; m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m}) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m^2})\right]\int_0^1 h_2(t)dt, \\
&\qquad \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m})\right]\int_0^1 h_1(t)dt \\
&+\; \left. m\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m}) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m^2})\right]\int_0^1 h_2(t)dt\right\}.
\end{aligned}$$

Demostración. De la (h_1, h_2, m)-GA-convexidad de la función f en $\mathbb{R}_+$, se obtiene

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &= f((a^t b^{1-t})^{1/2}(a^{1-t}b^t)^{1/2}) \\
&= f\left([(a^t b^{1-t})]^{1/2}[(a^{1-t}b^t)^{1/m}]^{m1/2}\right) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^t b^{1-t}) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left((a^{1-t}b^t)^{1/m}\right) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(a) + mh_2(1-t)f(b^{1/m})\right] \\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(a^{1/m}) + mh_2(t)f(b^{1/m^2})\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(a) + mh_2(1-t)f(b^{1/m})\right] \\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(a^{1/m}) + mh_2(t)f(b^{1/m^2})\right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por otro lado, también ocurre que

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &= f((a^{1-t}b^t)^{1/2}(a^t b^{1-t})^{1/2}) \\
&= f\left([(a^{1-t}b^t)]^{1/2}[(a^t b^{1-t})^{1/m}]^{m1/2}\right) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1-t}b^t) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left((a^t b^{1-t})^{1/m}\right) \\
&= h_1\left(\frac{1}{2}\right)f([a^{1/m}]^{m(1-t)}b^t) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(([a^{1/m^2}]^{mt}[b^{1/m}]^{1-t})\right) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(b) + mh_2(1-t)f(a^{1/m})\right] \\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(b^{1/m}) + mh_2(t)f(a^{1/m^2})\right].
\end{aligned}$$

Y obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(b) + mh_2(1-t)f(a^{1/m})\right] \\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(b^{1/m}) + mh_2(t)f(a^{1/m^2})\right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Así, de las desigualdades (2.13) y (2.12), se tiene

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1-t}b^t)+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left((a^tb^{1-t})^{1/m}\right)\\
&\leq min\left\{h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(a)+mh_2(1-t)f(b^{1/m})\right]\right.\\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(a^{1/m})+mh_2(t)f(b^{1/m^2})\right],\\
&\quad h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(b)+mh_2(1-t)f(a^{1/m})\right]\\
&\quad \left. mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(b^{1/m})+mh_2(t)f(a^{1/m^2})\right]\right..
\end{aligned}
$$

Ahora integrando en $[0,1]$, ambos lados de las desigualdades (2.12) y (2.13) con respecto a t , Sustituyendo a^tb^{1-t} y a^tb^{1-t} para $t\in[0,1]$ por x, se obtiene

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{h_1(1/2)}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+\frac{mh_2(1/2)}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x^{1/m})}{x}dx\\
&\leq min\left\{h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(a)\int_0^1 h_1(t)dt+mf(b^{1/m})\int_0^1 h_2(1-t)dt\right]\right.\\
&+ mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(a^{1/m})\int_0^1 h_1(1-t)dt+mf(b^{1/m^2})\int_0^1 h_2(t)dt\right],\\
&\quad h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(b)\int_0^1 h_1(t)dt+mf(a^{1/m})\int_0^1 h_2(1-t)dt\right]\\
&+ \left. mh_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(b^{1/m})\int_0^1 h_1(1-t)dt+mf(a^{1/m^2})\int_0^1 h_2(t)dt\right]\right\}\\
&\leq min\left\{\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a)+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m})\right]\int_0^1 h_1(t)dt\right.\\
&+ \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m})+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m^2})\right]\int_0^1 h_2(t)dt,\\
&\quad \left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(b)+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(b^{1/m})\right]\int_0^1 h_1(t)dt\\
&+ \left.\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m})+mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f(a^{1/m^2})\right]\int_0^1 h_2(t)dt\right\}.
\end{aligned}
$$

■

Corolario 2.7. *(ver[4]). Sea $h:[0,1]\to\mathbb{R}_0$, $h\not\equiv 0$, $m\in(0,1]$. Si $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_0$ es una función (h,m)-GA-convexas en $\mathbb{R}_+$, tal que, $f\in L_1(\mathbb{R}_+)$ y $h\in L_1([0,1])$, para todo*

$a, b \in \mathbb{R}_+$, con $a < b$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{f(\sqrt{ab})}{h(1/2)} &\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\Big[f(x) + mf(x^{1/m})\Big]dx \\
&\leq min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\
&\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}\int_0^1 h(t)dt.
\end{aligned}$$

Demostración. Tomando $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$, para todo $t \in [0,1]$, y aplicando el teorema 2.7 se obtiene

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{h_1(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx + \frac{mh_2(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x^{1/m})}{x}dx \\
&\leq min\Big\{\Big[h_1\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a) + mh_2\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m})\Big]\int_0^1 h_1(t)dt \\
&+ m\Big[h_1\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m}) + mh_2\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m^2})\Big]\int_0^1 h_2(t)dt, \\
&\quad \Big[h_1\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b) + mh_2\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m})\Big]\int_0^1 h_1(t)dt \\
&+ m\Big[h_1\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m}) + mh_2\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m^2})\Big]\int_0^1 h_2(t)dt\Big\} \\
&= min\Big\{\Big[h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m})\Big]\int_0^1 h(t)dt \\
&+ m\Big[h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m}) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m^2})\Big]\int_0^1 h(t)dt, \\
&\quad \Big[h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f(b^{1/m})\Big]\int_0^1 h(t)dt \\
&+ m\Big[h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m}) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a^{1/m^2})\Big]\int_0^1 h(t)dt\Big\} \\
&= h\Big(\frac{1}{2}\Big)min\Big\{\Big[f(a) + mf(a^{1/m})\Big] + m\Big[f(b^{1/m}) + mf(b^{1/m^2})\Big], \\
&\quad \Big[f(b) + mf(b^{1/m})\Big] + m\Big[f(a^{1/m}) + mf(a^{1/m^2})\Big]\Big\}\int_0^1 h(t)dt \\
&= h\Big(\frac{1}{2}\Big)min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\
&\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}\int_0^1 h(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.8. *(ver[4]). Bajo las condiciones del corolario 2.7, si $h(t) = t^s$ para $t \in (0,1)$ y $s \in (-1,1]$, entonces*

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{h(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\Big[f(x) + mf(x^{1/m})\Big]dx \\ &\leq \frac{1}{s+1}min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\ &\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}. \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando el corolario 2.7 y tomando $h(t) = t^s$, para todo $t \in [0,1]$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{h(1/2)}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\Big[f(x) + mf(x^{1/m})\Big]dx \\ &\leq min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\ &\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}\int_0^1 h(t)dt \\ &= min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\ &\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}\int_0^1 t^s dt \\ &= min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\ &\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}\frac{t^{s+1}}{s+1}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{s+1}min\Big\{f(a) + mf(a^{1/m}) + mf(b^{1/m}) + m^2 f(b^{1/m^2}), \\ &\quad mf(a^{1/m}) + m^2 f(a^{1/m^2}) + f(b) + mf(b^{1/m})\Big\}. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.8. *(ver[4]). Sea $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}_0$, $h_i \not\equiv 0$ para $i = 1,2$, $m_1, m_2 \in (0,1]$, y $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_0$. Si f es una función (h_1, h_2, m_1)-GA-convexa en $\mathbb{R}_+$, y g es una función (h_1, h_2, m_2)-GA-convexa en $\mathbb{R}_+$, sean $f, g \in L_1([a,b])$ y $h_1^2, h_2^2 \in L_1([0,1])$, tales* *que para todo* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *con* $a < b$. *Entonces*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx \\ \leq \; & f(a)g(a)\int_0^1 h_1^2(t)dt + m_1 m_2 f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\int_0^1 h_2^2(1-t)dt \\ + \; & \left[m_2 f(a)g(b^{1/m_2}) + m_1 f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

Demostración. Sea $x = a^t b^{1-t}$ para $t \in [0,1]$. Por la (h_1, h_2, m)-GA-convexidad de las funciones f y g, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x}dx &= \int_0^1 f(a^t b^{1-t})g(a^t b^{1-t})dt \\ &= \int_0^1 f(a^t [b^{1/m_1}]^{m_1(1-t)})g(a^t [b^{1/m_2}]^{m_2(1-t)})dt \\ &\leq \int_0^1 \left\{\left[h_1(t)f(a) + m_1 h_2(1-t)f(b^{1/m_1})\right]\right. \\ &\times \left.\left[h_1(t)g(a) + m_2 h_2(1-t)g(b^{1/m_2})\right]\right\}dt \\ &= f(a)g(a)\int_0^1 h_1^2(t)dt + m_1 m_2 f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\int_0^1 h_2^2(1-t)dt \\ &+ \left[m_2 f(a)g(b^{1/m_2}) + m_1 f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt. \end{aligned}$$

■

Corolario 2.9. *(ver[4]). Bajo las condiciones del teorema 2.8, si* $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$ *para todo* $t \in [0,1]$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x}dx &\leq \left[f(a)g(a) + m_1 m_2 f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\right]\int_0^1 h^2(t)dt \\ &+ \left[m_2 f(a)g(b^{1/m_2}) + m_1 f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 h(t)h(1-t)dt. \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando el teorema 2.8 y considerar el hecho que $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx\\
\leq\ & f(a)g(a)\int_0^1 h_1^2(t)dt+m_1m_2f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\int_0^1 h_2^2(1-t)dt\\
+\ & \left[m_2f(a)g(b^{1/m_2})+m_1f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt\\
=\ & \left[f(a)g(a)+m_1m_2f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\right]\int_0^1 h^2(t)dt\\
+\ & \left[m_2f(a)g(b^{1/m_2})+m_1f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 h(t)h(1-t)dt.
\end{aligned}$$

■

Observación 2.4. En particular si $h(t)=t^s$ para $t\in(0,1)$, $s\in(\frac{-1}{2},1)$ y $m_1=m_2=m$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx\ &\leq\ \frac{1}{2s+1}\left[f(a)g(a)+m^2f(b^{1/m})g(b^{1/m})\right]\\
&+\ m\beta(s+1,s+1)\left[mf(a)g(b^{1/m})+mf(b^{1/m})g(a)\right].
\end{aligned}$$

Donde β es denotada como la función BETA.

Demostración. Aplicando el corolario 2.9, y realizando la sustitución de $h(t)=t^s$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx\ &\leq\ \left[f(a)g(a)+m_1m_2f(b^{1/m_1})g(b^{1/m_2})\right]\int_0^1 (t^s)^2dt\\
&+\ \left[m_2f(a)g\left(b^{1/m_2}\right)+m_1f(b^{1/m_1})g(a)\right]\int_0^1 t^s(1-t)^sdt\\
&=\ \frac{1}{2s+1}\left[f(a)g(a)+m^2f(b^{1/m})g(b^{1/m})\right]\\
&+\ m\beta(s+1,s+1)\left[mf(a)g(b^{1/m})+mf(b^{1/m})g(a)\right].
\end{aligned}$$

■

Referencias Bibliográficas

[1] X. Bo-Yan and W. Shu-Hong. Some inequalities for (h, m)-convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 1(12):5–6, 2014.

[2] W.WS. Breckner. Stetigkeitsaussagen fur eine klasse verallgemkterter konverxer funktionen. *Publs. Inst. Math.*, 1(23):13–20, 1978.

[3] N. Eftekhari. Some remarks on (s,m)-convexity in the second sense. *Journal of mathematical inequalities*, 8(3):489–495, 2014.

[4] Qi. Feng and Xi. Bo-Yan. Properties and inequalities for the $(h1, h2)$ and (h_1, h_2, m)-ga-convex functions. *Cogent Mathematics*, 1(20):(1)–(18), 2016.

[5] I. Indat. Hermite-hadamard type inequalities for ga-s-convex functions. *MATH. C.A.*, 2:1306–1960, 2013.

[6] Jensen. J. Om konvese funktioner og uligheder imellen middervaerdier. *Nyt Ticsskr*, 16B(11):49–69, 1905.

[7] Sandor. Jozsef. Inequalities for multiplicative arithmetic functions. *Babes-Bolyai University*, 1(9):1–2, 2011.

[8] V. Miguel and B. Mireya. Hermite-hadamard-fejér inequalities for strongly (s, m)-convex functions modulo c, and second sense. *Apolied Matematics and Informtion Sciences*, 10(6):2045–2053, 2016.

[9] E. Muhamet and Y. Celtin. On some inequalities to s-convex functions and applications. *Journal Inequalities and Applications*, 1(11):5–6, 2013.

[10] A. Latif. Muhamma. Hermite-hadamard tipe inequality to ga-convex functions on the co-ordinates with applications. *Pakistan Academy of Sciences*, 1(13):2–3, 2015.

[11] Rivas A. Nelson J, Merentes D. y Sergio T. *El Desarrollo Del Concepto de Función Convexa*. IVIC, Merida, 1^{nd} edition, 2013.

[12] W. Orlicz. A note an modular spaces. *Sci. Math. Astronom*, 9:157–162, 1961.

[13] I.R.M. Pinheiro. Jensen's inequality in detail and s-convex functions. *Int. Journal of Math. Analysis*, 3(2):95–98, 2009.

[14] A. RAZVAN. Improved gaconvexity inequalities. *DEPARTMENT OF MATHEMATICS*, 3(5):82, 2002.

[15] Ana M. Moros S. Funciones h-fuertemente convexas. *SERBIULA*, 1(1):32–39, 2012.

[16] S Dragomir. S. On some new inequalities of hermite-hadamard tipe for m-convex functions. *TAMKANG JOURNAL OF MATHEMATICS*, 33(11):1–2, 2002.

[17] D. Silvestru. Inequalities of jensen tipe for h-convex on linear spaces. *MATHEMATIC MORAVICA*, 19-1(15):107–121, 2015.