UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Existencia de Soluciones de un Sistema de Ecuaciones Parabólicas no Autónomas

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Erianny Mendoza

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: Dr. Alexander Carrasco

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2017

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES PARABÓLICAS NO AUTÓNOMAS

presentado por el ciudadano BR. ERIANNY MENDOZA titular de la Cédula de Identidad No. 20.393.707, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A Dios. Por haberme dado la salud, fortaleza y entendimiento para lograr mis objetivos. Además por haber puesto en mi camino a las personas que de una u otra forma contribuyeron a la culminación exitosa de mi carrera profesional.

A mi madre. Por apoyarme en todo momento, por sus concejos, sus valores, por siempre escucharme y levantarme el ánimo en los momentos difíciles de mis estudios. Pero más que nada por su amor infinito.

A mi padre. Por su sacrificio y tiempo en mi formación. Por su ejemplo de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha enseñado. Por siempre creer en mi y más que nada su amor infinito.

A carlos Aular. Una persona muy especial en mi vida. Gracias por compartir conmigo cada momento de mi carrera profesional, por tus enseñanzas, apoyo incondicional, comprensión y amor.

A mi Familia. Por estar siempre presente brindándome su cariño, amor, comprensión y sus concejos oportunos durante todos estos años de estudio.

A mis compañeros de clase y amigos. Los que nos apoyamos mutuamente en nuestra formación académica, los que de una u otra forma me apoyaron durante esta etapa y los que se convirtieron en parte importante de mi vida, teniendo siempre un gesto de comprensión y apoyo.

A mis profesores. Que durante toda mi carrera profesional han aportado un granito de arena a mi formación. En especial a mi tutor Alexander Carrasco; maestro y amigo, ejemplo de trabajo y constancia. Por su orientación y enseñanzas, con las cuales se hizo posible la realización de este trabajo.

A la Universida Centrooccidental Lisandro Alvarado. Por abrir sus puertas a mi formación como profesional y brindarme su apoyo.

RESUMEN

La teoría de semigrupo de operadores no nos permite hacer estudio sobre sistemas no autónomos, debido a que sólo es aplicable a sistemas autónomos. En este sentido, A. Carrasco y H. Leiva en el artículo: A Lemma on Evolution Operators and Applications, ver ([1]) obtienen algunos resultados sobre operadores de evolución y como aplicación encuentran una fórmula para el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales parábolicas no autónomas. Lo que nos motivó a estudiar la familia de operadores de evolución que puede usar la representación de soluciones de una clase general de ecuaciones parciales no autónomas. El objetivo principal de este trabajo es estudiar las ecuaciones diferenciales no autónomas, conocidas como ecuaciones de evolución. Como aplicación estudiaremos la existencia de soluciones en un sistemas de ecuaciones parabólicas no autónomas. Se estudiara la teoría de semigrupos de operadores fuertemente continuos (ver [6]) y de operadores de evolución (ver [1] , [6] y [9]) que es necesaria para el estudio del problema de Cauchy no autónomo definido sobre un espacio de Hilbert Z. Luego se escribirá el sistema de ecuaciones parabólicas no autónomas como una ecuación diferencial ordinaria abstracta en el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega)$. Y haciendo uso de los resultados desarrollados anteriormente se encontrara una solución del sistema de ecuaciones parabólicas no autónomas.

Índice

Introducción

En este trabajo se estudiaran las ecuaciones diferenciales no autónomas, conocidas como ecuaciones de evolución. Como aplicación estudiaremos la existencia de soluciones en un sistemas de ecuaciones parabólicas no autónomas. En primer lugar se exponen las definiciones y resultados importantes que seran de utilidad en el desarrollo de este trabajo. Particularmente se muestran resultados sobre los espacios lineales normados, espacios de Hilbert y semigrupos fuertemente continuos. Seguidamente estudiaremos el problema de Cauchy no autónomo definido sobre un espacio de Hilbert Z,

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \\ z(s) = z_0 \in Z, \end{cases}$$

Donde $z : [0, \infty) \to Z$, $A(t)$ es una familia de operadores lineales acotados en Z cuyo dominio $D(A(t)) = D$, es independiente de t , tal que $A(\cdot)z \in C(\mathbb{R}^+, Z)$ para cada $z \in D$. Para ello, es necesario considerar la teoría de operadores de evolución, ver [1]. Luego se hace uso de los resultados desarrollados anteriores para encontrar una solución del siguiente sistema de ecuaciones parabólicas parciales no autónomos,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,s)}{\partial t} = D\Delta z(t,x) + B(t)z(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \ z \in \mathbb{R}^n, \\ \\ \dfrac{\partial z(t,s)}{\partial \eta} = 0 \quad t > 0, \ x \in \partial\Omega, \\ \\ z(0,x) = z_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N(N \geq 1)$, $\ z_0 \in L^2(\Omega)$, D es una matriz $n \times n$ cuyos valores propios son semisimples con parte real no negativa o estrictamente positivo y $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. Se supone que el operador $B \in L^\infty([0, \infty); \mathcal{L}(Z))$ con $Z = L^2(\Omega)$. pero antes de eso se escribirá el sistema como una ecuación diferencial ordinaria abstracta en el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega)$.

Cabe destacar que la misma técnica funciona para una amplia clase de ecuaciones de reacción-difusión (dependientes del tiempo) no autónomas en un espacio de Hilbert Z de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}z(t) + B(t)z + F(t), \quad t > 0 \\ z(s) = z_0. \end{cases}$$

Donde $\mathcal{A}$ es dado por:

$$\mathcal{A}z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A)$$

$B \in L^\infty([0,\infty); \mathcal{L}(Z))$ y $F : [O,\infty) \to Z$ es una función adecuada.

Capítulo 1
PRELIMINARES

1.1. ESPACIOS LINEALES NORMADOS

Definición 1.1. Un espacio vectorial lineal W sobre el campo escalar $\mathcal{F}$ es un conjunto no vacío W, con una aplicación $\lambda_1 : W \times W \to W$ definida por $\lambda_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ (llamado adición) y una aplicación $\lambda_2 : \mathcal{F} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, definido por $\lambda_2(\alpha, x) = \alpha x$ (llamado multiplicación). Estas aplicaciones satisfacen las siguientes condiciones para todo x, y, z en W y todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

a) $x + y = y + x$ (Propiedad conmutativa);

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa);

c) $\exists!\ 0 \in W / x + 0 = x$ (Existencia del elemento cero);

d) $\forall x \in W, \exists!(-x) \in W / x + (-x) = 0$ (Existencia de una inversa);

e) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

f) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

h) $\exists!\ 1 \in W / 1x = x \quad \forall x \in W$;

Definición 1.2. Si W es un espacio vectorial lineal sobre un campo $\mathcal{F}$, entonces un subconjunto S de W es un subespacio lineal si:

$$x, y \in S \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}.$$

Esto es, S también es un espacio vectorial lineal sobre $\mathcal{F}$.

Definición 1.3. Una norma es una función conjunto no negativa sobre el espacio vectorial lineal W definida por: $\|\cdot\| : W \to \mathbb{R}^+([0,\infty))$ tal que:

a. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;

b. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in W$;

c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in W \quad \forall \alpha \in \mathcal{F}$.

Definición 1.4. Un espacio lineal normado es un espacio vectorial lineal X con la norma $\|\cdot\|_x$ inducida por el espacio y es denotada por $(X, \|\cdot\|_x)$.

Ejemplo 1.1. Sea $p \geq 1$ un numero real fijo. Definamos el siguiente espacio

$$\ell_p = \left\{ (\xi_1, \xi_2, ...); \xi_i \in \mathbb{C} / \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

1) ℓ_p es un espacio vectorial lineal sobre $\mathbb{C}$;

2) ℓ_p es un espacio vectorial normado con la norma $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definición 1.5. Una combinación lineal de vectores $x_1, ..., x_n$ de un espacio vectorial lineal W es una expresión de la forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{F}$.

Definición 1.6. Para cualquier subconjunto no vacío M del espacio vectorial lineal W, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es llamado span de M y es denotado por: $span\{M\}$.

Definición 1.7. Si $x_1, ..., x_n$ son elementos de $(W, \mathcal{F})$ y si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ no todos nulos tal que:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

entonces decimos que $x_1, ..., x_n$ es un conjunto linealmente dependiente.
En caso contrario, se dice que el conjunto es linealmente independiente.

Definición 1.8. Si el espacio vectorial W es el span de un conjunto finito de vectores linealmente independientes $x_1, ..., x_n$, entonces decimos que W tiene dimensión n. En caso contrario W tiene dimensión infinita.

Ejemplo 1.2. Sea $p \geq 1$ un número real fijo y sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Consideremos el conjunto:

$$W_p = \left\{ x(t) \quad \text{medible} \quad \Big/ \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\}$$

Si dotamos de las aplicaciones de adición y multiplicación dadas en la definición (1.1) al conjunto W_p, entonces es un espacio vectorial lineal.

Definición 1.9. Sean $(X, \|\cdot\|_x)$ y $(Y, \|\cdot\|_y)$ dos espacios lineales normados. Entonces X y Y son topológicamente isomorfo si existe un mapeo lineal biyectivo; $T : X \to Y$ y constantes positivas a, b , tal que:

$$a\|x\|_x \leq \|Tx\|_y \leq b\|x\|_x \quad \forall x \in X.$$

Las normas $\|\cdot\|_x$ y $\|\cdot\|_y$ son llamadas normas equivalentes. Los espacios lineales normados son isométricamente isomorfo si existe un mapeo lineal, biyectivo, $T : X \to Y$ tal que:

$$\|Tx\|_y = \|x\|_x.$$

Definición 1.10. Una sucesión $\{x_n\}$ es un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|_x)$ converge a x si,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_x = 0.$$

Igualmente, la serie $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ se dice que converge a x, si la sucesión $\left\{ y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$ converge a x cuando $n \to \infty$.

Definición 1.11. Un conjunto V en un espacio lineal normado X es cerrado si toda sucesión convergente en V tiene su punto límite en V. Un conjunto V es abierto si el complemento es cerrado.

Definición 1.12. El conjunto cerrado más pequeño que contiene a V y todos los puntos límites de sucesiones en V, es llamado clausura de V y denotado por $\overline{V}$.

Definición 1.13. Un conjunto V en un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|_x)$ es acotado si,

$$\sup_{x\in\overline{v}} \|x\|_x < \infty.$$

Un conjunto V en el espacio lineal normado es compacto si toda sucesión en V contiene una subsucesión convergente y cuyos puntos límites están en V. Finalmente, V es relativamente compacto si su clausura es compacta.

Definición 1.14. Un subconjunto V de un espacio lineal normado X, es denso en X, si la clausura V es X. Esto significa que: $\forall x \in X,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists v \in V$ tal que $\|v - x\| < \varepsilon$.

Observación 1.1. Todo espacio lineal normado tiene subconjunto denso, pero no son necesariamente numerables.

Definición 1.15. Un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|_x)$ es separable si contiene un subconjunto denso que es numerable.

Definición 1.16. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos en un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|_x)$ es una sucesión de Cauchy si,

$$\|x_n - x_m\|_x \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Lema 1.1. ***(Lema de fatous)*** *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:*

$$\int \left(\varliminf_{n\to\infty} f_n \right) du \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n du.$$

Proposición 1.1. ***(Desigualdad de Minkowski)*** *Si f y g están en L_p, $p \geq 1$, entonces:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Teorema 1.1. (***Teorema de la convergencia de lebesgue***) *Sea g una función integrable sobre E y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tal que $|f_n| \leq g$ sobre E y para casi todo $x \in E$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Entonces:*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Definición 1.17. Un espacio lineal normado X es completo si toda sucesión de Cauchy converge en X.

Ejemplo 1.3. $(L_p, \|\cdot\|_p)$ $(p \geq 1)$ es un espacio de Banach.
Sabemos que un espacio de Banach es un espacio lineal normado completo; Así que primero probaremos que $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.

Sea $(p \geq 1)$ $L^p(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : f \text{ medible y } \int_x |f|^p du < \infty \right\}$ y $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ definida por $\|f\|_p = \left(\int_x |f|^p du \right)^{\frac{1}{p}}$.

1) $\|x(t)\| = 0$ entonces f es nula en casi todas partes.

2) Sea $x \in L_p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha x(t)\|_p &= \left(\int_a^b |\alpha x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_a^b |\alpha|^p |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\alpha|^p \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \|x(t)\|_p.
\end{aligned}$$

Entonces $\|\alpha x(t)\|_p = |\alpha| \|x(t)\|_p$.

3) Sea $x, y \in L_p$. Usando la proposición (1.1) resulta:

$$\begin{aligned} \|x(t)+y(t)\| &= \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x(t)\| + \|y(t)\|. \end{aligned}$$

entoces $\|x(t)+y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$.

Así de $1), 2)$ y $3)$ obtenemos que $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.

Ahora probemos que $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es completo. Esto es probar que toda sucesión de Cauchy converge en L_p.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en L_p con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = a < \infty$.
Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy se tiene que $\|f_n(x) - f_m(x)\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Así que debemos probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en L_p.

Sea $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $g_n \in L_p$.

$$\begin{aligned} \|g_n(x)\|_p &= \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\right\|_p \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k(x)\|_p \quad por \quad proposicion \quad (1{,}1) \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ Por teorema (1.1).

Luego queremos ver que $f \in L^p$ y que $f_n \to f$ en L^p.

$$\begin{aligned} \int |g(x)|^p du &= \int \lim_{n\to\infty} |g_n(x)|^p du \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int |g_n(x)|^p du \quad por \quad lema \quad (1{,}1) \\ &\leq a^p. \end{aligned}$$

Esto implica que g es finita c.s. Ahora bien, ya que $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)| < \infty$ c.s. existe una función $h(x)$ con $|h(x)|$ finita c.s. y $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = h(x)$.

Por lo tanto;

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - h(x)\right|^p &= \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|^p \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|^p + \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|^p \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|^p + \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|^p \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|\right|^p + \left|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|\right|^p \\
&\leq 2^p(g(x))^p.
\end{aligned}$$

Luego por teorema (1.1) $\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - h(x)\right\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Definición 1.18. El producto de Cauchy de dos series estrictamente formales (aunque no necesariamente convergentes).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Por lo general, de números reales o complejos. Se define mediante una convolución discreta. Siendo el producto de Cauchy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{donde} \quad c_n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 1.2. ***(Teorema del Binomio de Newton)****: Es un algoritmo que permite calcular una potencia cualquiera de un binomio, para ello se emplean los coeficientes binomiales que son mas que una sucesión de números combinatorios. La formula del Binomio de Newton es:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k.$$

1.2. ESPACIO DE HILBERT

Definición 1.19. Un producto interior sobre un espacio vectorial lineal Z definido sobre el campo real o complejo $\mathcal{F}$ es una aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : Z \times Z \to \mathcal{F}.$$

Tal que para todo $x, y \in Z$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ se tiene que:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

2. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$;

3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

- Un espacio lineal con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamado espacio con producto interior.

- Usando el producto interior podemos insertar el espacio producto interior en el espacio lineal normado $(Z, \|\cdot\|_z)$, donde la norma es inducida por:

$$\|z\|_z = \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

- En general, Z no es un espacio de Banach, ya que no es completo.

Definición 1.20. Un espacio de Hilbert es un espacio lineal normado completo con la norma inducida por el producto interior.

Ejemplo 1.4. El espacio $L_2(a, b)$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interior;

$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Definición 1.21. Para $-\infty < a < b < \infty$ definimos el siguiente subespacio de $L_2(a, b)$

$$S_2^m(a, b) = \left\{ U \in L_2(a, b)/U, ..., \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} \text{ es abs. continua sobre } (a, b) \text{ con } \frac{d^m u}{dt^m} \in L_2(a, b) \right\}$$

Este subespacio es un espacio de Hilbert con respecto al producto interior;

$$\langle z_1, z_2\rangle_{S_2^m(a,b)} = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \frac{d^n z_1}{dt^n}, \frac{d^n z_2}{dt^n} \right\rangle L_2.$$

Llamado espacio de Sobolev.

Teorema 1.3. *Sea $K(t,s)$ un elemento de $L^2([a,b]\times[a,b])$. El operador $\widetilde{k} : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ definido por:*

$$(\widetilde{ku})(t) = \int_a^b k(t,s)u(s)ds.$$

Es un operador compacto.

Lema 1.2. *Sea G una función sobre $[a,b]$, dada por*

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Si g es una función integrable entonces G es absolutamente continua.

Corolario 1.1. *Una función absolutamente continua sobre $[a,b]$ es diferenciable c.s. sobre $[a,b]$.*

Teorema 1.4. *Supongamos que X y Y son espacios de Banach y sea T un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$ y rango Y. Si T es invertible con $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ entonces T es un operador lineal cerrado.*

Definición 1.22. Un operador es cerrado si para cada sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ converge a $z \in Z$ y $Az_n \to y \in Z$ cuando $n \to \infty$, entonces se tiene que $z \in D(A)$ y $Az = y$.

Lema 1.3. *Sea A un operador arbitrario densamente definido y sea M un operador lineal acotado definido sobre todo el espacio de Hilbert Z. Se tienen los siguientes resultados:*

a. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$; $D((\alpha A)^*) = D(A^*)$ *si* $\alpha \neq 0$ *y* Z *si* $\alpha = 0$.

b. $(A+M)^* = A^* + M^*$ *con dominio* $D((A+M)^*) = D(A^*)$.

c. Si A tiene inversa acotada, esto es, existe $A^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$ tal que $AA^{-1} = I_z$; $A^{-1}A = I_{D(A)}$, entonces A^* tiene también una inversa acotada y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Definición 1.23. Decimos que un operador A lineal, densamente definido, es simétrico si $\forall x, y \in D(A)$:

$$\langle Ax.y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Un operador simétrico, es autoadjunto si $D(A^*) = D(A)$.

Teorema 1.5. *Sea $z = L^2(0,1)$ y consideremos el siguiente operador sobre Z:*

$$T = \frac{d^2}{dx^2}$$

Con dominio
$D(T) = \left\{ z \in L^2(0,1)/z, \frac{dz}{dx} \text{ son abs. continuas con } \frac{dz}{dx}(0) = \frac{dz}{dx}(1) = 0 \ \text{ y } \ \frac{d^2z}{dx^2} \in L^2(0,1) \right\}$
T con este dominio es cerrado.

Teorema 1.6. *Sea $Z = L^2(0,1)$ y consideremos el operador T del teorema (1.5) con $D(T)$. Probemos que $(I+T)^* = I+T$.*

Proposición 1.2. ***(Formula de Leibniz)*** *Dada la función $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t,x)dt$ podemos calcular su derivada utilizando la siguiente formula:*

$$F'(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t,x)dt\right)' = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + f(h(x),x).h'(x) - f(g(x),x).g(x)'.$$

Teorema 1.7. *Sea A en $D(A)$ un operador cerrado en el espacio de Banach X y $x \in C[[a,b),x]$ con $b\infty$. Supongamos que $x(t) \in D(A)$, $Ax(t)$ es continuo en $(a,b]$ y que la integral impropia $\int_a^b x(t)dt$ y $\int_a^b Ax(t)dt$ existen. Entonces:*

$$\int_a^b x(t)dt \in D(A) \ \text{ y } \ A\int_a^b x(t)dt = \int_a^b Ax(t)dt.$$

1.3. SEMIGRUPOS FUERTEMENTE CONTINUOS

Definición 1.24. Sea Z un espacio de Hilbert. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales y continuos $T(t) : Z \to Z$ se denomina semigrupo fuertemente continuo si ésta verifica las tres condiciones siguientes:

i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t, s \geq 0$;

ii) $T(0) = I$;

iii) Para todo $z_0 \in Z$, $T(t)z_0$ es fuertemente continuo en $t = 0$, es decir:

$$\|T(t)z_0 - z_0\|_z \to 0 \text{ cuando } t \to 0^+ \quad \forall z_0 \in Z.$$

Proposición 1.3. *Para cualquier* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $t \geq 0$ *la serie* $e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ *converge absolutamente; es mas el mapeo* $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto e^{tA} \in M_n(\mathbb{C})$ *es continuo y satisface:*

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} & = & e^{tA}e^{sA} \quad \text{para} \quad t, s \geq 0; \\ e^{0A} & = & I. \end{cases}$$

Demostración. Primero demostraremos que para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \geq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ converge absolutamente.

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \geq 0$. Consideremos las sumas finitas para $n > m$.

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \quad \text{y} \quad T_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}$$

$$\|T_n(t) - T_m(t)\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!}$$

y como $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!}$ es el resto de la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = e^{|t|\|A\|}$; En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n, m > N$ entonces $\|T_n(t) - T_m(t)\| < \varepsilon$. Por lo tanto $\{T_n(t)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $M_n(\mathbb{C})$ y como $M_n(\mathbb{C})$ es un espacio completo la sucesión $\{T_n(t)\}_{n\geq 0}$ converge en $M_n(\mathbb{C})$ a un elemento de $M_n(\mathbb{C})$ que se indica con $e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.

Ahora probemos que:

$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

$$\begin{aligned}
e^{tA}e^{sA} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^nA^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^kA^k}{k!}.\frac{s^{n-k}A^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ks^{n-k}}{(n-k)!}.\frac{A^{n-k+k}}{k!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ks^{n-k}}{(n-k)!}.\frac{A^{n}}{k!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ks^{n-k}}{(n-k)!}.\frac{n!}{n!}.\frac{A^{n}}{k!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ks^{n-k}n!}{(n-k)!k!}\right)\frac{A^{n}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+s)^nA^n}{n!} = e^{(t+s)A}.
\end{aligned}$$

Tomando que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ks^{n-k}n!}{(n-k)!k!} = (t+s)^n$ Por teorema (1,2)

Por lo tanto $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

Luego probemos; $T(0) = I$.
$T(0) = e^{0A} = I$.

Por ultimo probemos que $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{tA} \in M_n(\mathbb{C})$ es continua. Es decir;
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow \|f(t+h) - f(t)\| < \varepsilon$.

En efecto; dado $t \in \mathbb{R}_+$ fijo pero arbitrario, $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\|f(t+h) - f(t)\| &= \|e^{(t+h)A} - e^{tA}\|\\
&= \|e^{tA+hA} - e^{tA}\|\\
&= \|e^{tA}e^{hA} - e^{tA}\|\\
&= \|e^{tA}(e^{hA} - I)\|\\
&\leq \|e^{tA}\|\|e^{hA} - I\|.
\end{aligned}$$

por lo tanto basta mostrar que $\|e^{hA} - I\| \to 0$ cuando $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\|e^{hA} - I\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} - I\right\| \\ &= \left\|I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} - I\right\| \\ &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}\right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!}.\end{aligned}$$

Entonces $\|e^{hA} - I\| \to 0$ cuando $h \to 0$.

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow \|f(t+h) - f(t)\| < \varepsilon$. ■

Lema 1.4. *Sea X un espacio de Banach y f una función definida de un conjunto compacto $k \subset \mathbb{R}$ en $\mathcal{L}(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua para el operador de topología fuerte; es decir las aplicaciones $k \ni t \mapsto f(t)x \in X$ son continuas para cada $x \in X$;

b) f es uniformemente acotado en k y las aplicaciones de $k \ni t \mapsto f(t)x \in X$ son continuas para todos los x en algún subconjunto denso de D en X;

c) f es continua en la topología de convergencia uniforme en subconjunto compactos de X; es decir la aplicación $k \times C \ni (t, x) \mapsto f(t)x \in X$ es uniformemente continua para cada conjunto compacto C en X.

Teorema 1.8. *Un semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z, tiene las siguientes propiedades.*

a) $\|T(t)\|$ es acotado en cada subintervalo finito de $[0, \infty)$;

b) $T(t)$ es fuertemente continuo para todo $t \in [0, \infty)$;

c) Para todo $z \in Z$ tenemos que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)z ds \to z$ cuando $t \to 0^+$;

d) Si $w_0 = \inf\limits_{t>0} \left(\dfrac{1}{t} \log \|T(t)\|\right)$, entonces $w_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{1}{t} \log \|T(t)\|\right) < \infty$;

e) $\forall w > w_0$. *Existe una constante* M_w *tal que* $\forall t \geq 0$. $\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}$.
Esta constante w_0 *se llama limite de crecimiento del semigrupo.*

Para la demostración de este teorema se puede consultar Curtain & Zwart [6]

Definición 1.25. El generador infinitesimal A de un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z definido por:

$$Az = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)z - z}{t}$$

siempre que exista el limite.
Consideremos el subespacio

$$D(A) = \{z \in Z : \lim_{t \to 0^+} A_t z \quad existe\}$$

y definamos $A : D(A) \subset Z \to Z$ Donde $A_t z = \dfrac{T(t)z - z}{t}$.

Ejemplo 1.5. Considere el semigrupo fuertemente continuo $e^{At} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad t \geq 0$ donde $A \in \mathcal{L}(Z)$. Veamos que A es el generador infinitesimal de $\{e^{At} \quad t \geq 0\}$.

Sea $T(t)=e^{At}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}=1+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+...$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)z-z}{t}-Az\right\| &= \left\|\frac{e^{At}z-z}{t}-Az\right\| \\
&= \left\|\frac{e^{At}z-z-tAz}{t}\right\| \\
&= \left\|\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^nz}{n!}-z-tAz}{t}\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(At)^nz}{n!}\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\|A^n\|t^n\|z\|}{n!} \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\|A\|^nt^n\|z\|}{n!} \\
&= \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A\|^nt^n\|z\|}{n!}-\|z\|-\|A\|\|z\|t\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(e^{\|A\|t}\|z\|-\|z\|-\|A\|\|z\|t\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(e^{\|A\|t}-1-\|A\|t\right)\|z\|.
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos el limite del miembro derecho de la Desigualdad.
$\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(e^{\|A\|t}-1-\|A\|t)\|z\|$ tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Apliquemos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{t\to 0^+} D_t\left(\frac{1}{t}(e^{\|A\|t}-1-\|A\|t)\|z\|\right)=\lim_{t\to 0^+} e^{\|A\|t}\|A\|\|z\|-\|A\|\|z\|=0$$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{T(t)z-z}{t}-Az\right\|=0$
Asi A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{e^{At}\ \ t\geq 0\}$.

Ahora bien, el siguiente teorema, el cual se encuentre en Curtain & Zwart [6], nos muestra ciertas propiedades importantes que satisface el generador de un semigrupo fuertemente continuo.

Teorema 1.9. *Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z con generador infinitesimal A. Entonces tiene los siguientes resultados:*

a) *Para* $z \in D(A)$ $\ T(t)z \in D(A)$ $\ \forall t \geq 0$;

b) $\dfrac{d}{dt}(T(t)z) = AT(t)z = T(t)Az$ *para* $z \in D(A)$ $\ t > 0$;

c) $\dfrac{d^n}{dt^n}(T(t)z) = A^nT(t)z = T(t)A^nz$ *para* $z \in D(A^n)$ $\ t > 0$;

d) $T(t)z - z = \displaystyle\int_0^t T(s)Azds$ *para* $z \in D(A)$;

e) $\displaystyle\int_0^t T(s)zds \in D(A)$ *y* $A\displaystyle\int_0^t T(s)zds = T(t)z - z$ $\ \forall z \in Z$ *y* $D(A)$ *es denso en* Z;

f) A *es un operador cerrado.*

Lema 1.5. *Sea Z un espacio de Hilbert separable $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$ una familia de semigrupos fuertemente continuo y $\{P_n\}_{n\geq 1}$ una familia de proyección ortogonal completa en Z tal que:*

$$A_nP_n = P_nA_n, \ \ n \geq 1, 2, ...$$

Donde A_n es el generador infinitesimal de S_n.
Definiendo la siguiente familia de operadores lineales:

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t)P_nz, \ \ t \geq 0.$$

Entonces:

a) *$S(t)$ es un operador lineal y acotado si $\|S_n(t)\| \leq g(t)$, $\ n = 1, 2, ...$ con $g(t) \geq 0$, continua para $t \geq 0$;*

b) *$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert Z cuyo generador infinitesimal A es dado por:*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z \ , \ z \in D(A)$$

con

$$D(A) = \left\{ z \in Z \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} |\|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

Para la demostración de este lema se puede ver [2]

Lema 1.6. *(Ver [6]). Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A y con un crecimiento consolidado ω_0. Si $Re(\lambda) > \omega > \omega_0$. Entonces $\lambda \in \rho(A)$, y para todo $z \in Z$ los siguientes resultados:*

a) $R(\lambda, A)z = (\lambda I - A)^{-1}z = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) z dt$ *y* $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\sigma - \omega}$; $\sigma = Re(\lambda)$;

b) $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha(\alpha I - A)^{-1} z = z$ *para todo* $z \in Z$; *donde* α *es real.*

Teorema 1.10. ***Hille - Yosida*** *(ver [6]). Una condición necesaria y suficiente para que un operador cerrado A con dominio denso $D(A)$ en X, es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo es que existen números reales M y ω tal que $\forall \alpha > \omega$.*

$$\alpha \in \rho(A) \ y \ \|R(\lambda; A)^n\| < \tfrac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad n = 1, 2, ...$$

Donde $R(\alpha, A) = (\alpha I - A)^{-1}$ es el operador resolvente, en este caso $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

Capítulo 2

OPERADORES DE EVOLUCIÓN

2.1. OPERADORES DE EVOLUCIÓN

En esta sección estudiaremos el problema de Cauchy no autónomo definido sobre un espacio de Hilbert Z,

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \\ z(s) = z_0 \in Z, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $z : [0, \infty) \to Z$, $A(t)$ es una familia de operadores lineales acotados en Z cuyo dominio $D(A(t)) = D$, es independiente de t , tal que $A(\cdot)z \in C(\mathbb{R}^+, Z)$ para cada $z \in D$. (ver [9] para una definición similar). Para ello, es necesario considerar la teoría de operadores de evolución, ver [1]. Comenzamos con la definición de la solución fundamental de (2.1).

Definición 2.1. (ver [9]) Una función operador biparamétrica $U(t, s) \in \mathcal{L}(Z)$ que es fuertemente continua en t, s para $0 \leq s \leq t < \infty$, se llama solución fundamental de (2.1) si.

1. Para todo $z \in D$ la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t, s)z$ existe en la topología fuerte de Z y es fuertemente continuo en (t, s) para $0 \leq s \leq t < \infty$.

2. Para todo $z \in D$, $U(t, s)z \in D$.

3. Para todo $z \in D$, $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t, s)z = A(t)U(t, s)z$, $0 \leq s \leq t < \infty$, $U(s, s) = I$ y $U(t, k)U(k, s) = U(t, s)$.

Proposición 2.1. *La función operador biparamétrica $U(t, s)$ dado por la definición anterior satisface las siguientes propiedades:*

$$U(t, s)z_0 = z_0 + \int_s^t A(\tau)U(\tau, s)z_0 \, d\tau \quad \forall z_0 \in D, \tag{2.2}$$

$$\lim_{r\to t^+}\lim_{k\to t^-}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}=\lim_{k\to t^-}\lim_{r\to t^+}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}. \quad (2.3)$$

Demostración. Sea $z_0 \in D$ y definamos la función $f_s : (0,\infty) \to D$ por:

$$f_s(t) = U(t,s)z_0 \quad 0 \le s \le t < \infty$$

Por definición (2.1), f_s es continuamente diferenciable en t , luego por el teorema fundamental del calculo para funciones abstracta $f_s : (0,\infty) \to D$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_s^t \frac{\partial}{\partial u}U(u,s)z_0du &= \int_s^t \frac{d}{du}f_s(u)du\\ &= f(t)-f(s)\\ &= U(t,s)z_0 - U(s,s)z_0\\ &= U(t,s)z_0 - Iz_0\\ &= U(t,s)z_0 - z_0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}U(t,s)z_0 &= z_0 + \int_s^t \frac{\partial}{\partial u}U(u,s)z_0du\\ &= z_0 + \int_s^t A(u)U(u,s)z_0du \quad \text{Por definición } (2,1)\end{aligned}$$

Por lo tanto $U(t,s)z_0 = z_0 + \int_s^t A(\tau)U(\tau,s)z_0\, d\tau$, $\forall z_0 \in D$.

Ahora probemos (2.3) usando (2.2).

$$\begin{aligned}\lim_{r\longrightarrow t^+}\lim_{k\longrightarrow t^-}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k} &= \lim_{r\longrightarrow t^+}\lim_{k\longrightarrow t^-}\frac{1}{r-k}\int_k^r A(\tau)U(\tau,k)U(k,s)z_0d\tau\\ &= \lim_{r\longrightarrow t^+}\lim_{k\longrightarrow t^-}\frac{1}{r-k}\int_k^r A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau\\ &= \lim_{r\longrightarrow t^+}\frac{1}{r-t}\int_t^r A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau\\ &= A(t)U(t,s)z_0.\end{aligned}$$

Por otro lado;

$$\begin{aligned}
\lim_{k\longrightarrow t^-}\lim_{r\longrightarrow t^+}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k} &= \lim_{k\longrightarrow t^-}\lim_{r\longrightarrow t^+}\frac{1}{r-k}\int_k^r A(\tau)U(\tau,k)U(k,s)z_0d\tau \\
&= \lim_{k\longrightarrow t^-}\lim_{r\longrightarrow t^+}\frac{1}{r-k}\int_k^r A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau \\
&= \lim_{k\longrightarrow t^-}\frac{1}{t-k}\int_k^t A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_{t-h}^t A(\tau)U(\tau,s)z_0d\tau \\
&= A(t)U(t,s)z_0.
\end{aligned}$$

Así obtenemos;

$$\lim_{r\to t^+}\lim_{k\to t^-}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}=\lim_{k\to t^-}\lim_{r\to t^+}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}.$$

■

El resultado obtenido motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.2. Una familia biparamétrica de operadores lineales acotados $U(t,s)\in\mathcal{L}(Z)$, $0\leq s\leq t<\infty$ es llamado un operador de evolución si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $U(s,s)=I$ y $U(t,r)U(r,s)=U(t,s)$ para $0\leq s\leq t<\infty$.
2. $(t,s)\to U(t,s)$ es fuertemente continuo para $0\leq s\leq t<\infty$.
3. Existe una función continua de valor real no negativa $g(t,s)$ con $\|U(t,s)\|\leq g(t,s)$ para todo $0\leq s\leq t<\infty$.

Definición 2.3. Definamos el subespacio D que consiste de todos los elementos $z_0\in Z$ tal que los siguientes limites:

$$\lim_{r\to t^+}\lim_{k\to t^-}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}=\lim_{k\to t^-}\lim_{r\to t^+}\frac{U(r,k)U(k,s)z_0-U(k,s)z_0}{r-k}.$$

existen para todo $0\leq s\leq t<\infty$.

Observación 2.1. Para todo $z \in D$ y $t \geq 0$ los siguientes limites existen

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{U(t+h,t)z - z}{h} = \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,t)z - z}{r - t}.$$

Demostración. Dado $z \in D$ tenemos que:
$$\lim_{r \to t^+} \lim_{k \to t^-} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} = \lim_{k \to t^-} \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k}.$$
En consecuencia, si hacemos $s = t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to t^+} \lim_{k \to t^-} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} &= \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,t)U(t,s)z - U(t,s)z}{r-t} \\
&= \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,s)z - U(t,s)z}{r-t} \\
&= \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,t)z - U(t,t)z}{r-t} \\
&= \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,t)z - z}{r-t}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to t^-} \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} &= \lim_{k \to t^-} \frac{U(t,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{t-k} \\
&= \lim_{k \to t^-} \frac{U(t,s)z - U(k,s)z}{t-k} \\
&= \lim_{k \to t^-} \frac{U(t,t)z - U(k,t)z}{t-k} \\
&= \lim_{k \to t^-} \frac{z - U(k,t)z}{t-k} \\
&= \lim_{k \to t^-} \frac{U(k,t)z - z}{k-t} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{U(h+t,t)z - z}{h}.
\end{aligned}$$

Asi obtenemos que $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{U(t+h,t)z - z}{h} = \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,t)z - z}{r-t}$. ■

Definición 2.4. El generador $A(t)$ de un operador de evolución $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ se define como sigue:

$$A(t)z = \lim_{h \to 0^+} \frac{U(t+h,t)z - z}{h} \ , \ \forall z \in D \ , \ 0 \leq t < \infty.$$

Por lo tanto tenemos que $D(A(t)) = D$. Con

$$D = \left\{ z \in Z / \lim_{r \to t^+} \lim_{k \to t^-} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} = \lim_{k \to t^-} \lim_{r \to t^+} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} \right\}.$$

Lema 2.1. *Sea $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ un operador de evolución en Z tal que $U(t,s)z \in D$ para todo $z \in D$. Entonces para todo $z \in D$ tenemos:*

1. $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s)z = A(t)U(t,s)z$, $0 \leq s \leq t < T$.

2. $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)z = -U(t,s)A(s)z$, $0 \leq s \leq t < T$.

Demostración. Dado $z \in D$, por hipótesis $U(t,s)z \in D$ para $0 \leq s \leq t < \infty$. Luego de la definición (2.4); tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{U(t+h,s)z - U(t,s)z}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t+h,t)U(t,s)z - U(t,s)z}{h} \\
&= A(t)U(t,s)z.
\end{aligned}$$

Así; obtenemos que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U(t+h,s)z - U(t,s)z}{h} = A(t)U(t,s)z.$$

Ahora supongamos $t > s$ y $h \geq 0$ lo suficientemente pequeño tal que $t-h \geq s$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{U(t-h,s)z - U(t,s)z}{-h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t,s)z - U(t-h,s)z}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t,t-h)U(t-h,s)z - U(t-h,s)z}{h} \\
&= \lim_{k\to t^-} \frac{U(t,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{t-k} \\
&= \lim_{k\to t^-} \lim_{r\to t^+} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} \\
&= \lim_{r\to t^+} \lim_{k\to t^-} \frac{U(r,k)U(k,s)z - U(k,s)z}{r-k} \\
&= \lim_{r\to t^+} \frac{U(r,t)U(t,s)z - U(t,s)z}{r-t} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(h+t,t)U(t,s)z - U(t,s)z}{h} \\
&= A(t)U(t,s)z.
\end{aligned}$$

Luego las derivadas parciales unilaterales existen y son iguales. Por tanto;

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)z = A(t)U(t,s)z, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

En particular;

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)z\mid_{t=s}=\lim_{h\to 0^+}\frac{U(s+h,s)z}{h}=A(s)z.$$

Para probar la segunda parte; supongamos que $t>s$ y $h\geq 0$ es lo suficientemente pequeño tal que $s+h<t$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{U(t,s+h)z-U(t,s)z}{h}+U(t,s)A(s)z\right\| &= \left\|\frac{U(t,s+h)z-U(t,s+h)U(s+h,s)z}{h}\right.\\
&\quad \left.+\,U(t,s+h)U(s+h,s)A(s)z\right\|\\
&= \left\|-U(t,s+h)\left\{\frac{U(s+h,s)z-z}{h}-U(s+h,s)A(s)z\right\}\right\|\\
&\leq g(t,s+h)\left\|\left\{\frac{U(s+h,s)z-z}{h}-U(s+h,s)A(s)z\right\}\right\|.
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{U(s+h,s)z-z}{h}=A(s)z,$$

se obtiene que

$$\lim_{h\longrightarrow 0+}\frac{U(t,s+h)z-U(t,s)z}{h}=-U(t,s)A(s)z.$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{U(t,s-h)-U(t,s)z}{-h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{U(t,s)U(s,s-h)z-U(t,s)z}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}U(t,s)\left(\frac{U(s,s-h)z-z}{-h}\right)\\
&= -U(t,s)\lim_{h\to 0^+}\frac{U(s,s-h)z-z}{h}\\
&= -U(t,s)A(s)z.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)z=-U(t,s)A(s)z\ \ 0\leq s\leq t<\infty.$

■

Teorema 2.1. *Sea $U(t,s)$, $0\leq s\leq t<\infty$ un operador de evolución sobre Z que satisface la condición del lema (2.1) y $A(t)$ su generador con dominio D. Entonces el problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z'(t) &=& A(t)z(t),\quad t\geq s,\\ \\ z(s) &=& z_0,\quad z_0\in D,\end{array}\right.$$

admite una única solución $z(t) = U(t,s)z_0 \;\; t \geq s$.

Demostración. Del lema (2.1) obtenemos que $z(t) = U(t,s)z_0$ es una solución del problema de Cauchy. Ahora para probar la unicidad, vamos a suponer que $y(t)$ es otra solución del problema. Entonces la diferencia $w(t) = z(t) - y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dt} = z'(t) - y'(t) = A(t)z(t) - A(t)y(t) = A(t)(z(t) - y(t)) = A(t)w(t).$$

Así, $\dfrac{dw}{dt} = A(t)w(t) \;\; t \geq s; \;\; w(s) = 0$. Por lo que necesitamos demostrar que $w(t) = 0$, para ello, definamos $f : (0, +\infty) \to D$ por $f(u) = U(t,u)w(u), \;\; 0 \leq u \leq s < t$. Tenemos que f es una función diferenciable ya que es producto de funciones diferenciables. Más aún,

$$\begin{aligned}
f'(u) &= \frac{\partial}{\partial u}U(t,u)w(u) + U(t,u)\frac{d}{du}w(u) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}U(t,u)(z(u) - y(u)) + U(t,u)\frac{d}{du}(z(u) - y(u)) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}U(t,u)z(u) - \frac{\partial}{\partial u}U(t,u)y(u) + U(t,u)\frac{d}{du}z(u) - U(t,u)\frac{d}{du}y(u) \\
&= -U(t,u)A(u)z(u) + U(t,u)A(u)y(u) + U(t,u)A(u)z(u) - U(t,u)A(u)y(u) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, $f'(u) = 0$, por lo tanto $f(u) = U(t,u)w(u) = c$ (c constante). En particular, si consideramos $u = s$, tenemos que $f(s) = U(t,s)w(s) = 0$.
Ahora como $U(t,s)$ es fuertemente continuo, obtenemos

$$f(t) = \lim_{s \to t^-} f(s) = \lim_{s \to t^-} U(t,s)w(s) = 0.$$

Entonces $f(t) = 0$. Luego, $0 = f(t) = U(t,t)w(t) = Iw(t) = w(t)$. Esto es, $w(t) = 0$. Así $z(t)$ es solución única.

■

Teorema 2.2. *Sea* $U(t,s), \;\; 0 \leq s \leq t < \infty$ *un operador de evolución en* Z *satisfaciendo la condición del lema (2.1) y* $A(t)$ *su generador con dominio* D*. Consideremos el problema de Cauchy no homogéneo*

$$\begin{cases} z'(t) &= A(t)z(t) + f(t), \quad t \geq s, \\ \\ z(s) &= z_0, \quad z_0 \in Z, \quad 0 \leq s \leq t. \end{cases} \tag{2.4}$$

Supongamos que

i) $z_0 \in Z$ *y* $f \in C(\mathbb{R}_+, Z)$ *toma valores de* D *y* $f(\cdot) \in D$.
o

ii) $z_0 \in Z$ *y* $f \in C^1(\mathbb{R}_+, Z)$.

Entonces (2.4) *tiene una única solución* $z \in C^1(\mathbb{R}_+, Z)$ *con valores en* D*, además esta solución* $z(t)$ *es una solución de la siguiente ecuación integral,*

$$z(t) = U(t,s)z_0 + \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha. \tag{2.5}$$

Demostración. Sea $g : \mathbb{R}^+ \to D \subset Z$ una función definida por $g(s) = U(t,s)z(s)$, la cual es una función diferenciable ya que el producto de funciones diferenciables es diferenciable. Más aún,

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}U(t,s)z(s) + U(t,s)\frac{d}{ds}z(s) \\ &= -U(t,s)A(s)z(s) + U(t,s)(A(s)z(s) + f(s)) \\ &= -U(t,s)A(s)z(s) + U(t,s)A(s)z(s) + U(t,s)f(s) \\ &= U(t,s)f(s). \end{aligned}$$

Luego;

$$\begin{aligned} \int_s^t g'(s) &= \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\ g(t) - g(s) &= \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\ g(t) &= g(s) + \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\ g(t) &= U(t,s)z(s) + \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\ g(t) &= U(t,s)z_0 + \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$z(t) = U(t,s)z_0 + \int_s^t U(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha.$$

■

Definición 2.5. Una solución de (2.5) es llamada una solución moderada de (2.4). Esta solución no es necesariamente diferenciable.

Observación 2.2. Un caso particular de un operador de evolución $U(t,s)$ que satisface la condición del lema (2.1) es dada por:

$$U(t,s)z_0 = T(t-s)z_0 + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)z_0 d\alpha, \tag{2.6}$$

Donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach Z y $B(\cdot) \in P_\infty([0,\infty];\mathcal{L}(Z))$, donde $P_\infty([0,\infty];\mathcal{L}(Z))$ es dado por el conjunto:

$$\{B/\langle z_1, B(\cdot)z_2\rangle \ \textit{es medible para cada} \ z_1, z_2 \in Z \ \textit{y} \ (\textit{ess} \sup_{0\leq t<\infty} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} < \infty)\}$$

En este caso, es evidente que el generador de este operador de evolución es:

$$A(t) = A + B(t),$$

con dominio $D(A(t)) = D(A) = D$. ver([6])

Proposición 2.2. *Consideremos el operador de evolución $U(t,s)$ dado por (2.6). Entonces*

1. $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s)z = A(t)U(t,s)z \ \ 0 \leq s \leq t < \infty;$
2. $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)z = -U(t,s)A(s)z \ \ 0 \leq s \leq t < \infty;$
3. *$A(t)$ es cerrado.*

Demostración. En primer lugar, probemos que $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s)z = A(t)U(t,s)z \ \ 0 \leq s \leq t < \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U(t,s)z &= \frac{d}{dt}\left\{T(t-s)z + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha\right\} \\ &= \frac{d}{dt}T(t-s)z + \frac{d}{dt}\int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha \end{aligned}$$

Pero, por teorema (1.9) se tiene:

$$\frac{d}{dt}T(t-s)z = AT(t-s)z$$

y además por proposición (1.2) y teorema (1.7) se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}\int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha = A\int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha + B(t)U(t,s)z$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)z &= A\left(T(t-s)z + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha\right) + B(t)U(t,s)z \\
&= AU(t,s)z + B(t)U(t,s)z \\
&= (A+B(t))U(t,s)z \\
&= A(t)U(t,s)z.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)z = A(t)U(t,s)z \ \ 0 \leq s \leq t < \infty$.

En segundo lugar, para probar que: $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)z = -U(t,s)A(s)z \ \ 0 \leq s \leq t < \infty$, hacemos uso de nuevo del teorema (1.9) parte (b) y la proposición (1.2).En efecto; sea $t-s>0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)z &= \frac{d}{ds}(T(t-s)z + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha) \\
&= \frac{d}{ds}T(t-s)z + \frac{d}{ds}\int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha \\
&= -AT(t-s)z + \int_s^t \frac{d}{ds}T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)zd\alpha - T(t-s)B(s)z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -AT(t-s)z + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)(-U(\alpha,s)A(s)z)d\alpha - T(t-s)B(s)z \\
&= -AT(t-s)z - \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)A(s)zd\alpha - T(t-s)B(s)z \\
&= -T(t-s)(Az + B(s)z) - \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)A(s)zd\alpha \\
&= -T(t-s)(A + B(s))z - \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)A(s)zd\alpha \\
&= -(T(t-s)A(s)z + \int_s^t T(t-\alpha)B(\alpha)U(\alpha,s)A(s)zd\alpha) \\
&= -U(t,s)A(s)z.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)z = -U(t,s)A(s)z \;\; 0 \leq s \leq t < \infty$.

Finalmente, demostremos que $A(t)$ es cerrado. Tenemos que: $A(t) = A + B(t)$, con $A \in \mathcal{L}(Z)$, cerrado y $B(\cdot) \in P_\infty([0,\infty];\mathcal{L}(Z))$ donde $P_\infty([0,\infty];\mathcal{L}(Z))$ es dado por el conjunto:

$$\{B/\langle z_1, B(\cdot)z_2\rangle \;\; \textit{es medible para cada} \;\; z_1, z_2 \in Z \;\; \textit{y} \;\; (\textit{ess} \sup_{0\leq t<\infty} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} < \infty)\}$$

Supongamos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in Z$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A(t)u_n = y$. Debemos probar que $u \in D(A)$ y $A(t)u = y$.

$$
\begin{aligned}
\|A(t)u_n - A(t)u\| &= \|(A + B(t))u_n - (A + B(t))u\| \\
&= \|Au_n + B(t)u_n - Au - B(t)u\| \\
&= \|(Au_n - Au) + (B(t)u_n - B(t)u)\| \\
&\leq \|(Au_n - Au)\| + \|(B(t)u_n - B(t)u)\| \\
&< \varepsilon_1 + \|B(t)\|\|u_n - u\| \\
&< \varepsilon_1 + \|B(t)\|\varepsilon_2.
\end{aligned}
$$

Luego $ess \sup_{0\leq t<\infty} \|A(t)u_n - A(t)u\| < \varepsilon_1 + ess \sup_{0\leq t<\infty} \|B(t)\|\varepsilon_2$.

Basta considerar $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{1}{ess \sup_{0\leq t<\infty} \|B(t)\|}$;

En consecuencia, $ess \sup_{0\leq t<\infty} \|A(t)u_n - A(t)u\| < \varepsilon$.

Así, $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists N > 0 / \|A(t)u_n - A(t)u\| < \varepsilon$.
Luego como $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ y $\lim_{n\to\infty} A(t)u_n = y$, además ya que A cerrado obtenemos que $u \in D(A)$ y $A(t)u = y$.
Por lo tanto, $A(t) = A + B(t)$ es cerrado. ■

Lema 2.2. *Sea Z un espacio de Hilbert $\{U_n(t,s)\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ una familia de operadores de evolución y $P_n(\cdot) : [0,\infty) \to L(Z)$; $n = 1, 2, 3, ...$, una familia de proyecciones ortogonales fuertemente continuo sobre Z, completas y*

$$P_n(t)U_n(t,s) = U_n(t,s)P_n(s) \;;\; n = 1, 2, 3, ..., \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Se define la siguiente familia de operadores lineales

$$U(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z \;,\; 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Entonces:

1. *$\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ una familia de operadores de evolución fuertemente continuo si $\|U_n(t,s)\| \leq g(t,s)$, $n = 1, 2, 3, ...$, con $g(t,s) \geq 0$ continua en $0 \leq s \leq t < \infty$.*

2. *El generador $A(t) : D \to Z$ de $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ viene dado por*

$$A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)P_n(t)z \;,\; z \in D,$$

donde $D \subset W = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)P_n(t)z\|^2 < \infty, \forall t \in [0,\infty) \right\},$

Si $A(t)$ es un operador cerrado entonces $D = W$.

3. *Suponga que $A(t)$ es un operador cerrado. Si $z \in D$, entonces $U(t,s)z \in D$.*

Demostración. Supongamos que $\|U_n(t,s)\| \leq g(t,s), n = 1, 2, ...$ con $g(t) \geq 0$, continua para $t \geq 0$.

Probemos que $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z$ esta bien definida.

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z, \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t,s)P_m(s)z \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle U_n(t,s)P_n(s)z, U_n(t,s)P_n(s)z \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n(t,s)P_n(s)z\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n(t,s)\|^2 \|P_n(s)z\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (g(t,s))^2 \|P_n(s)z\|^2 \\
&= (g(t,s))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(s)z\|^2 \\
&= (g(t,s))^2 \|z\|^2.
\end{aligned}
$$

Así, $\|\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z\| \leq (g(t,s))\|z\|$.

Por lo que obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z$ es convergente. En consecuencia, define un operador lineal y acotado, que denotaremos por: $U(t,s)$, esto es, $U(t,s)z = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z$.

Ahora probemos que $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ para $0 \leq r \leq s \leq t < \infty$.

$$
\begin{aligned}
U(t,r)U(r,s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,r)P_n(r)U(r,s)z \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,r)P_n(r) \sum_{i=1}^{\infty} U_i(r,s)P_i(s)z \\
&= \sum_{n,i=1}^{\infty} U_n(t,r)U_i(r,s)P_n(s)P_i(s)z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z \\
&= U(t,s)z.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $U(t,r)U(r,s)z = U(t,s)z$.

Por otro lado, $U(t,s)$ es fuertemente continuo en $[0,\infty)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|U(t,s)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s)P_n(s)z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)z \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (U_n(t,s) - I)P_n(s)z \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 \\
&\leq \sup_{1<n<N} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|(U_n(t,s) - I)\|^2 \|P_n(s)z\|^2 \\
&\leq \sup_{1<n<N} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 N + K \sum_{n=N+1}^{\infty} \|(P_n(s)z)\|^2,
\end{aligned}
$$

donde

$$
K = \sup_{0\leq s\leq t\leq 1; n\geq 1} \|(U_n(t,s) - I)\|^2 < \infty.
$$

En efecto,

$$
\sup_{0\leq s\leq t\leq 1; n\geq 1} \|(U_n(t,s) - I)\| \leq \sup_{0\leq s\leq t\leq 1; n\geq 1} \|(U_n(t,s)\| + 1 \leq \sup_{0\leq s\leq t\leq 1; n\geq 1} g(t) + 1 < \infty.
$$

Entonces $\|U(t,s)z - z\|^2 \leq \sup_{1<n<N} \|(U_n(t,s) - I)P_n(s)z\|^2 N + K \sum_{n=N+1}^{\infty} \|(P_n(s)z)\|^2$

Como $\{U_n(t,s)\}_{0\leq s\leq t<T}$ $(n = 1, 2, ..)$ es un operador de evolución fuertemente continuo y $\{P_n(s)\}_{n\geq 1}$ es una familia completa de proyectores ortogonales, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario tenemos, por algún numero N y $0 < s < t < 1$ las siguientes desigualdades:

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} \|(P_n(s)z)\|^2 < \frac{\varepsilon}{2K},
$$

y

$$\sup_{1<n<N} \|(U_n(t,s)-I)P_n(s)z\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Luego,

$$\|U(t,s)z-z\|^2 < \frac{\varepsilon}{2N}N + \frac{\varepsilon}{2K}K = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $\|U(t,s)z - z\| \to 0$ cuando $t \to 0^+$, $\forall z \in Z$.

Por lo tanto $U(t,s)$ es un operador de evolución fuertemente continuo en $[0,\infty)$.

Por otro lado, sea $A(t)$ un generador del operador de evolución $\{U(t,s)\}$. Por definición (2.4), para todo $z \in D(A)$, tenemos que;

$$\begin{aligned} A(t)z &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U(t+h,t)z - z}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t+h,t)P_n(t)z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)z}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (U_n(t+h,t)-I)P_n(t)z}{h}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} P_m(t)A(t)z &= P_m(t)\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (U_n(t+h,t)-I)P_n(t)z}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} P_m \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (U_n(t+h,t)-I)P_n(t)z}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U_m(t+h,t)P_m(t)z - P_m(t)z}{h} \\ &= A_m(t)P_m(t)z. \end{aligned}$$

Asi; $A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} P_m(t)A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} A_m(t)P_m(t)z$.

Sea $W = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)P_n(t)z\|^2 < \infty \quad \forall t \in [0,\infty) \right\}$. Por definición

$$D=\left\{z\in Z:\lim_{h\to 0^+}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(t+h,t)P_n(t)z-P_n(t)z}{h}=A(t)z\quad existe\right\}.$$

Si $A(t)$ es cerrado y $z\in D$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n(t)P_n(t)z\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle A_n(t)P_n(t)z,A_n(t)P_n(t)z\rangle\\ &= \left\langle\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)P_n(t)z,\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)P_n(t)z\right\rangle\\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)P_n(t)z\right\|^2\\ &= \|A(t)z\|^2.\end{aligned}$$

Como $A(t)z$ existe; se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n(t)P_n(t)z\|^2<\infty$. Así, $z\in W$.

Por lo tanto $D\subset W$.

Reciprocamente, supongamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n(t)P_n(t)z=y\in Z$. Haciendo $z_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_k(t)z$ obtenemos que:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U(t+h,t)z_n-z_n}{h}=Az_n=\sum_{k=1}^{n}P_k(t)A_k(t)z<\infty.$$

Así, $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{U(t+h,t)z_n-z_n}{h}$ existe. Por lo tanto, $z_n\in D(A)$ y

$$A(t)z_n=\sum_{k=1}^{n}P_k(t)A_k(t)z.$$

Veamos que $\|z_n - z\| \to 0$, cuando $n \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
\|z_n - z\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} P_k(t)z - z \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} P_k(t)z - \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)z \right\| \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P_k(t)z \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Así, $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A(t)z_n = y$.Luego, como el operador A es cerrado, obtenemos que $z \in D$ y $A(t)z = y$. Por tanto, $W \subset D$.

Seguidamente probemos que $U(t,s)z \in D$.

Para todo $z \in D$ consideremos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)P_n(t)z\|^2 < \infty\}$ y $0 \leq t < \infty$ entonces

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)P_n(t)U(t,s)z \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)P_n(t) \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t,s)P_k(s)z \right) \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)U_n(t,s)P_n(s)P_n(s)z \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)U_n(t,s)P_n(s)z \right\|^2 \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)U_n(t,s)P_n(s)z, \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)U_k(t,s)(t)P_k(s)z \right\rangle \\
&= \sum_{k,n=1}^{\infty} \langle A_n(t)U_n(t,s)P_n(s)z, A_k(t)U_k(t,s)P_k(s)z \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)U_n(t,s)P_n(s)z\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)P_n(t)U_n(t,s)z\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (g(t,s))^2 \|A_n(t)P_n(t)z\|^2 \\
&= (g(t,s))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(t)P_n(t)z\|^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $U(t,s)z \in D$ para todo $z \in D$ y $0 \leq s \leq t < \infty$.

■

Capítulo 3

SISTEMA DE ECUACIONES PARABÓLICAS NO AUTÓNOMAS

En este capítulo se hace uso de los resultados desarrollados en los capítulos anteriores para estudiar la solución del siguiente sistema de ecuaciones parabólicas parciales no autónomos,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,s)}{\partial t} = D\Delta z(t,x) + B(t)z(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \ z \in \mathbb{R}^n \\ \\ \dfrac{\partial z(t,s)}{\partial \eta} = 0 \quad t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ \\ z(0,x) = z_0(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, $z_0 \in L^2(\Omega)$, D es una matriz $n \times n$ cuyos valores propios son semisimples con parte real no negativa o estrictamente positivo y $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. Se supone que el operador $B \in L^\infty([0,\infty); \mathcal{L}(Z))$ con $Z = L^2(\Omega)$.

3.1. FORMULACIÓN ABSTRACTA DEL PROBLEMA

En esta sección se elige un espacio de Hilbert, donde el sistema (3.1) se puede escribir como una ecuación diferencial abstracta; Para ello, consideremos el espacio de Hilbert $Z = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ y $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_j \to \infty$ los valores propios de $-\Delta$, cada uno con multiplicidad finita γ_j igual a la dimensión del correspondiente espacio característico. Entonces tenemos las siguientes propiedades bien conocidas. (ver [5]):

i) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_{n,k}\}$ de vectores propios de $-\Delta$.

ii) Para todo $\xi \in D(-\Delta)$ tenemos

$$-\Delta\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle \xi, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n \xi, \quad (4{,}2)$$

donde $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ es el producto interno en Z y $E_n\xi = \displaystyle\sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle \xi, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k}$.

Así que E_n es una familia de proyecciones ortogonales completa en Z y $\xi = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n \xi, \quad \xi \in Z.$

iii) Δ genera un semigrupo analítico $\{T_\Delta(t)\}$ dado por

$$T_\Delta(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n \xi.$$

iv) Existe una constante $M \geq 1$ tal que $\|e^{-\lambda_n D t}\| \leq M, \;\; t \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Se define el siguiente operador $A : D(A) \subset Z \to Z$, $A\psi = -D\Delta\psi$, donde $D(A) = H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, para todo $Z \in D(A)$ obtenemos:

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D P_n z,$$

y

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z, \qquad \|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2, \qquad z \in Z,$$

donde $P_n = diag(E_n, E_n, ..., E_n)$ es una familia de proyección ortogonal completa en Z.

En consecuencia el sistema (3.1) se puede escribir como una ecuación diferencial ordinaria en Z,

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + B(t)z(t) + f^e(t), \;\; t > 0, \\ \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $z_0 \in Z$ y $f^e : [0, \infty) \to Z$ es una función definida de la siguiente manera:

$$f^e(t)(x) = f(t, x), \quad t \geq 0 \;\; x \in \Omega.$$

En caso que $f^e \equiv 0$ el sistema (3.2) es dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + B(t)z(t), \quad t > s, \\ \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

Teorema 3.1. *El operador $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$ en el espacio Z, dado por:*

$$T_A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n D t} P_n z, \qquad z \in Z, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Veamos que $-A$ es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$. Consideremos la siguiente familia de proyecciones ortogonales completas en Z.

$$P_n = diag(E_n, E_n, ..., E_n) = \begin{pmatrix} E_n & . & . & . & 0 \\ 0 & E_n & . & . & 0 \\ . & & . & & . \\ . & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & E_n \end{pmatrix}$$

Sea $A_n = -\lambda_n D$ donde $-\lambda_n$ los autovalores de Δ y D es una matriz $n \times n$ cuyos valores propios son semisimples con parte real no negativa o estrictamente positivo.
Probemos que $A_n P_n = P_n A_n$.

$$\begin{aligned} A_n P_n &= -\lambda_n D P_n \\ &= -\lambda_n P_n D \\ &= P_n(-\lambda_n D) \\ &= P_n A_n. \end{aligned}$$

Sabemos que $\{e^{A_n t}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo, además que $A_n = -\lambda_n D$, por lo que podemos garantizar la existencia de una función continua a valores reales $g(t) \geq 0$ tal que $\|e^{A_n t}\| \leq g(t), \quad t \geq 0$.

Probemos que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad t \geq 0$ con $A_n = -\lambda_n D$, esta bien definido.

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \right\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|e^{A_n t}\| \|P_n z\|)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (g(t) \|P_n z\|)^2 \\ &= (g(t))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 \\ &= (g(t))^2 \|z\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \right\|^2 \leq g(t) \|z\|$.

Esto prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z$ está bien definido. Más aún, define un operador lineal y acotado. El cual denotaremos por $T_A(t)$, esto es: $T_A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z$.

Luego por lema (1.5) se tiene que $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert Z, cuyo generador infinitesimal de $-A$ viene dado por:

$$-Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D P_n z.$$

■

Definición 3.1. (solución Moderada) Note que cualquier solución z del problema de valor inicial (3.3)satisface la ecuación integral:

$$z(t) = T_A(t-s)z_0 + \int_s^t T_A(t-\gamma) B(\gamma) z(\gamma) d\gamma, \quad t \in [s, \infty). \tag{3.4}$$

Pero lo contrario no es necesariamente cierto, ya que la solución de (3.4) no es necesariamente diferenciable. En este caso la solución continua de (3.4) la llamaremos como solución moderada de (3.3).

A continuación se define la siguiente familia en el espacio Z para $t \geq s \geq 0$ por:

$$U(t,s) = T_A(t-s)z_0 + \int_s^t T_A(t-\gamma) B(\gamma) U(t,\gamma) z_0 d\gamma. \tag{3.5}$$

Teorema 3.2. *La familia de operadores* $\{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ *definido por (3.5) es un operador de evolución fuertemente continuo en* Z *tal que,*

$$U(t,s)z=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz, \quad z\in Z \quad t\geq s\geq 0, \tag{3.6}$$

donde $\{\{U_n(t,s)\}_{t\geq s\geq 0},\ n=1,2,3,...\}$ *es una familia de operadores de evolución fuertemente continuo en* $Z^n=P_nZ$ *definido como sigue,*

$$U_n(t,s)z^n=z^n(t,s,z_0^n,)$$

donde $z^n(\cdot)$ *es la única solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt}=-\lambda_n Dz(t)+B_n(t)z(t), \quad t>s, \\ \\ z(s)=z_0^n \end{cases}$$

Demostración. Probemos que $U(t,s)z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz, \quad z\in Z \quad t\geq s\geq 0.$

En efecto;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz &= \sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}z^n(t,s,z^n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n D(t-s)}P_nz+\int_s^t e^{-\lambda_n D(t-\gamma)}B_n(\gamma)z^n(t,\gamma,z^n)d\gamma\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n D(t-s)}P_nz+\sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t e^{-\lambda_n D(t-\gamma)}B_n(\gamma)P_nz(t,\gamma,z)d\gamma \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n D(t-s)}P_nz+\int_s^t\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n D(t-\gamma)}P_nB(\gamma)P_nz(t,\gamma,z)d\gamma \\
&= T_A(t-s)z+\int_s^t\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n D(t-\gamma)}P_nB(\gamma)z(t,\gamma,z)d\gamma \\
&= T_A(t-s)z+\int_s^t T_A(t-\gamma)B(\gamma)U(t,\gamma)zd\gamma \\
&= U(t,s)z.
\end{aligned}$$

Ahora probemos que $\|U(t,s)\|$ es acotado. Por hipótesis, $\{U_n(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ es una familia de operadores de evolución, Así, que existe una función continua a valores reales $g(t,s)\geq 0$ tal que $\|U_n(t,s)\|\leq g(t,s), n=1,2,...;\;\; t,s\geq 0$.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz, \sum_{m=1}^{\infty}U_m(t,s)P_mz\right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle U_n(t,s)P_nz, U_n(t,s)P_nz\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\|U_n(t,s)P_nz\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|U_n(t,s)\|^2\|P_nz\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(g(t,s))^2\|P_nz\|^2 \\
&= (g(t,s))^2\sum_{n=1}^{\infty}\|P_nz\|^2 \\
&= (g(t,s))^2\|z\|^2.
\end{aligned}$$

Entonces $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t,s)P_nz\right\|\leq g(t,s)\|z\|$ lo que prueba que es un operador lineal acotado. Luego, por el lema (2.2) tenemos que la familia $\{U(t,s)\}_{t\geq s>0}$ es un operador de evolución fuertemente continuo en Z.

Por lo tanto, los sistemas (3.3) y (3.2) son equivalentes a los siguientes dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en Z respectivamente:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \Lambda(t)z(t), \;\; t>s, \\ \\ z(s)=z_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \Lambda(t)z(t)+f^e(t), \;\; t>s, \\ \\ z(s)=z_0, \end{cases}$$

donde $\Lambda(t) = -A + B(t)$ es el generador infinitesimal del operador de evolución $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$.

■

3.2. EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN

Teorema 3.3. *El problema de Cauchy abstracto en el espacio de Hilbert Z*

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \Lambda(t)z(t) + f^e(t), \quad t > s, \\ \\ z(s) = z_0, \end{cases}$$

donde $\Lambda(t) = A + B(t)$ es el generador del operador de evolución $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ admite una y solo una solución moderada dada por:

$$z(t) = U(t,s)z_0 + \int_s^t U(t,\gamma)f^e(\gamma)d\gamma, \quad t \geq s.$$

Demostración. Por hipotesis $\Lambda(t)$ es el generador del operador de evolución $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ y $f^e : [0,\infty) \to Z$ es una función definida de la siguiente manera $f^e(t)(x) = f(t,x), \quad t \geq 0$ $x \in \Omega, \quad \Omega$ dominio acotado en $\mathbb{R}^n(n \geq 1)$, f es una función suave, así que $f^e \in C^1(\mathbb{R}_+, Z)$. Luego por teorema (2.2), el problema de Cauchy abstracto tiene una única solución moderada dada por:

$$z(t) = U(t,s)z_0 + \int_s^t U(t,\gamma)f^e(\gamma)d\gamma, \quad t \geq s.$$

■

REFERENCIAS

[1] A. Carrasco and H. Leiva. A Lemma on Evolution Operators and Applications, Advances and Applications in Mathematical Sciences, Vol. 2009. Mili Publications (2009).

[2] A. Carrasco and H. Leiva. Variation of constants formula for functional partial parabolic equations. Electronic Journal of Differential Equations 2007(130) (2007). 1-20.

[3] A. Carrasco and H. Leiva. A negative result on controllability of the damped wave equation with delay, International Mathematical Forum 3(11)(2008),525-537.

[4] A. Carrasco and H. Leiva. Approximate controllability of a system of parabolic equations with delay, J.Math. Anal. Appl. doi:10.1016/j.jmaa.2008.04.068.

[5] R.F. Curtain, A. J. Pritchard, Infinite Dimensional Linear Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 8, Springer & Verlag, Berlin,1978.

[6] R.F. Curtain and H.J. Zwart, An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Tex in Applied Mathematics 21, Springer & Verlag, New York, 1995.

[7] H. Leiva, A Lemma on Co-semigroup and applications PDFs systems, Quaestions Mathematicae 26(2003),247-265.

[8] M. V. Kartashov, General time-dependent bounded perturbation of a strongly continuous semigroup, Ukrainian Mathematical Journal 57(12)(2005).

[9] G.E. Ladas and V. Laskhmikantham, Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York and London, 1972.