UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Relación entre dos constantes de suma ponderada cero"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Génesis Cárdenas

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Álgebra y Combinatoria.
Tutor: Dra. Luz Elimar Marchan

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2017

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Relación entre dos constantes de suma ponderada cero"

presentado por el ciudadano Br. Génesis Cárdenas titular de la Cédula de Identidad No. 19887056, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A mis padres Constanza y José Euripides.

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios por permitirme llegar hasta este momento, a pesar de las dificultades. A mis padres Constanza Oropeza y José Euripides Cárdenas por estar siempre para mí , apoyándome sin importar cuanto tiempo tardara en lograrlo.
A mis hermanos y mis hermanas, por estar de una u otra manera , especialmente José Ángel Cárdenas, por apoyarme incondicionalmente.
A mi novio Drahcir Blanco por ser mi compañero en este camino que compartimos, apoyándome en todo momento.
Y por supuesto a mi Tutora Dra. Luz Elimar Marchan. Por darme la oportunidad de realizar este trabajo con ella y brindarme su apoyo y colaboración.
A cada uno de mis amigos de estudio que han estado conmigo.

Índice

Agradecimientos **i**

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Nociones básicas de grupos 3

1.2. Constantes de suma cero 6

1.3. Constantes de suma ponderada cero 9

2. La $\eta_{\pm}$-invariante y la constante de Erdös-Ginzburg-Ziv $\pm$-ponderada **13**

2.1. Cálculo para algunos grupos elementales 13

2.2. Cálculo para algunos grupos de rango 2 15

2.3. Cálculo para grupos de orden a lo más 32 21

Conclusiones **35**

Referencias Bibliográficas **37**

Introducción

Al estudiar los problemas de suma cero, el objeto principal de estudio son las secuencias finitas $S = g_1 g_2 \cdots g_l$ de elementos que pertenecen a un grupo abeliano finito G. Uno de los primeros resultados obtenidos en relación a tales problemas es, el denominado por Erdös [5] "Lema prehistórico", el cual garantiza que toda secuencia de elementos de un grupo abeliano finito, de longitud el orden del grupo, posee una subsecuencia de suma cero. En 1961, Erdös, Ginzburg y Ziv [4] probaron uno de los resultados más básicos, en el cual se le exige una longitud prestablecida a la secuencia de suma cero, ellos establecieron lo siguiente:

> En un grupo abeliano finito G de orden n, toda secuencia de elementos de G, de longitud al menos $2n-1$, contiene una subsecuencia, de longitud n, de suma cero.

Inspirado en éste resultado, Harborth [10] introduce una constante para grupos abelianos finitos, frecuentemente llamada constante de Erdös-Ginzburg-Ziv (constante de EGZ), denotada por $\mathsf{s}(G)$ y definida como el menor entero positivo t tal que toda secuencia S de elementos de G con longitud t, contiene una subsecuencia, de longitud el exponente de G, de suma cero.

Otra constante que también tiene una larga tradición en teoría combinatoria de números, es la η-invariante, su popularidad se debe, en parte, a que puede ser usada para hallar otras constantes de suma cero cuando se procede por métodos inductivos sobre el orden del grupo, y a su relación con geometría finita y teoría de factorización no única. La η- invariante de G, denotada por $\eta(G)$, se define como el menor entero positivo t tal que toda secuencia de elementos de G con longitud t, contiene una subsecuencia de longitud menor o igual que $\exp(G)$ de suma cero.

Existen trabajos dedicados a calcular o a estimar la constante de EGZ y la η-invariante en forma independiente, sin embargo, en 2003 Gao [7] conjeturó que dichos problemas son equivalentes, al mostrar que:

Para todo grupo abeliano finito G, se cumple:

$$\mathsf{s}(G) = \eta(G) + \exp(G) - 1.$$

Gao demostró su conjetura para los grupos abelianos finitos con exponente menor o igual que 4, además, se ha verificado para todos los grupos G para los cuales los valores de $\mathsf{s}(G)$ y de $\eta(G)$ han sido determinados, sin embargo, aún permanece abierta, en general.

Existen diversas maneras de generalizar, o variar, un problema de suma cero introduciendo pesos. En este trabajo usamos una variación particularmente conocida, introducida por Adhikari y sus colaboradores en [1]. Los problemas en este caso se reducen a encontrar condiciones para que una secuencia posea una subsecuencia de suma ponderada cero con pesos en determinado conjunto de enteros A. Con esta variación la conjetura de Gao quedaría expresada de la siguiente manera:

Para todo grupo abeliano finito G y todo conjunto finito A de números enteros, se cumple:

$$\mathsf{s}_A(G) = \eta_A(G) + \exp(G) - 1. \tag{1}$$

En el caso particular $A = \{-1, 1\}$ se ha verificado que la relación (2.2) se cumple para 2-grupos elementales y, recientemente, se ha verificado que se cumple para $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ con $n \geq 3$ [12] y para grupos de orden 8 y 16 [14]. En este trabajo estudiaremos la relación (2.2) para grupos de la forma $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^r}$ y para cualquier grupo de orden 32.

Este trabajo consta de dos capítulos. En el primer capítulo presentamos definiciones básicas, notación y algunos resultados que sirven como herramientas para abordar el objetivo principal. En el segundo capítulo mostramos los resultados principales del trabajo, el cual está fundamentado en [3].

Capítulo 1
Preliminares

A continuación presentamos algunas definiciones y resultados básicos que usaremos con frecuencia, los detalles y las demostraciones que no se dan pueden ser encontrados en la bibliografía referenciada.

Comenzamos con algunas notaciones relacionadas con los números enteros y conjuntos.

Por $\mathbb{N}$ denotamos al conjunto de los enteros positivos.

Para los números reales a, b con $a \leq b$, denotamos por $[a, b]$ al siguiente conjunto:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{Z} : \ a \leq x \leq b\}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, llamamos *piso de* x y lo denotamos por $\lfloor x \rfloor$, al mayor entero menor o igual que x. Análogamente, llamamos *techo de* x y lo denotamos por $\lceil x \rceil$, al menor entero mayor o igual que x.

Si A es un conjunto, denotamos por $\mathsf{card}(A)$ al número cardinal del conjunto A.

1.1. Nociones básicas de grupos

En esta sección listamos algunas definiciones y notaciones relacionadas con los grupos.

Definición 1.1. Un **monoide** es una estructura algebraica compuesta por un conjunto no vacío G dotado de una operación binaria, la cual satisface:

a) Para todo $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$ (propiedad asociativa)

b) Para todo $a \in G$, existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ (elemento neutro)

Si además, para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$ (elemento inverso), entonces G es llamado **grupo**.

Si $*$ es conmutativa, es decir, para todo $a, b \in G$ se cumple $a * b = b * a$, entonces G es **monide abeliano** (o **grupo abeliano**, si G es un grupo).

En un grupo G el inverso de $g \in G$ lo denotamos por g^{-1}. En general, el simbolo $*$ es omitido y escribimos ab, en lugar de $a * b$. Cuando la operación binaria del grupo es con notación aditiva, el elemento neutro e del grupo lo denotaremos por 0 y el elemento inverso de $g \in G$, lo denotaremos por $-g$.

Definición 1.2. Sean M un monoide y $a, b \in M$. Decimos que a divide a b, y escribimos $a \mid b$, si existe un elemento $c \in M$ tal que $b = ac$.

Definición 1.3. Sea B un subconjunto no vacío de $\mathcal{F}(B)$, diremos que $\mathcal{F}(B)$ es un monoide abeliano libre con base B, si cada $a \in \mathcal{F}(B)$ tiene una representación única de la forma

$$a = \prod_{g \in G} g^{v_g(a)}$$

con $v_g(a) \in \mathbb{N}$ y $v_g(a) = 0$ para casi todo $g \in G$, siendo la operación binaria de $\mathcal{F}(B)$ conmutativa y entendiendo g^0 como el elemento neutro de $\mathcal{F}(B)$.

Ejemplo 1.1. La suma directa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, es un monoide abeliano libre con base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, ya que cualquier elemento de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ puede escribirse en forma única como suma de múltiplos enteros de elementos de B, en este caso la notación del monoide es aditiva.

Notemos que cuando definimos los elementos de un monoide libre sobre un conjunto B, la operación binaria en $\mathcal{F}(B)$ no tienen que ser alguna operación binaria existente para el conjunto B, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea $(G, +)$ un grupo abeliano finito, entonces $\mathcal{F}(G) = \{\prod_{g \in G} g^{v_g(a)} : v_g(a) \in \mathbb{N}\}$ es un monoide abeliano libre sobre G, aquí la operación binaria de $\mathcal{F}(G)$ es la concatenación de los elementos, por ejemplo $g^n = \underbrace{gg \dots g}_{n \text{ veces}}$. Observar qué la operación binaria de G no es la operación binaria de $\mathcal{F}(G)$.

Recordemos que el *orden de un grupo* G es cardinal de G, el cual denotamos por $|G|$. El *orden de un elemento* g *de* G es el menor entero positivo n tal que $g^n = e$, y lo denotamos por $\mathrm{ord}(g)$. Es conocido que para $g \in G$, se cumple que $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(g^{-1})$. Observemos que si $g \in G$ y $kg = 0$ para algún entero k, no necesariamente tendremos que $\mathrm{ord}(g) = k$, la siguiente proposición nos dice que conclusión podemos tener este caso.

Proposición 1.1. *[11] Sea G un grupo y $g \in G$. Si $\mathrm{ord}(g) = n$, entonces $kg = 0$ si y solo si $n \mid k$.*

Además, el siguiente resultado establece una relación entre el orden de un elemento de un grupo, y el orden del grupo.

Teorema 1.1. *[11] Si g es un elemento de un grupo G entonces, $\mathrm{ord}(g)$ divide a $|G|$.*

En adelante C_n denotará el grupo cíclico de orden n. El siguiente teorema muestra que todo grupo abeliano finito no trivial se escribe como suma directa de grupos cíclicos.

Teorema 1.2. *(Teorema fundamental para grupos abelianos finitos)[11] Si G es un grupo abeliano finito, no trivial, existen enteros únicos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ tales que*

$$G = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \ldots \oplus C_{n_r},$$

con $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.

Cuando $n_i = n$ para todo $i \in [1, r]$, escribimos $G = C_n^r$, en lugar de $G = \underbrace{C_n \oplus C_n \oplus \ldots \oplus C_n}_{r \text{ veces}}$.

Si G es un grupo abeliano finito, de la forma descrita en el Teorema 1.2, n_r es el *exponente de* G y lo denotamos por $\exp(G) = n_r$, y r es el *rango de* G, denotado por $\mathsf{r}(G)$. Observemos también que $|G| = n_1 n_2 \ldots n_r$. Para cada $i \in [1, r]$, denotaremos por π_i la proyección canónica de G sobre C_{n_i}.

Definición 1.4. Un **subconjunto** $G_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de elementos no nulos de un grupo abeliano G es **independiente**, si para cualquier r-upla $(n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{r} n_i e_i = 0 \Rightarrow n_i e_i = 0, \forall i \in [1, r].$$

En este caso también se dice que $e_1, e_2, \ldots, e_r$ son independientes. Por otra parte,un subconjunto G_0 de un grupo abeliano G es una **base de** G si G_0 es independiente y $G = \langle G_0 \rangle$, donde $\langle G_0 \rangle$ denota el subgrupo generado por el conjunto G_0.

Notemos que si $G = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_r \rangle$ entonces $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ forma una base de G.

Definición 1.5. Sea G un grupo abeliano finito y p un número primo, decimos que G es un p**-grupo**, si $|G| = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular, si G es isomorfo a $\mathbb{Z}_p^r$ para algún $r \in \mathbb{N}$, decimos que G es un p**-grupo elemental.**

Observemos que si G es un p-grupo (p: primo) entonces, por el Teorema 1.1, para todo $g \in G$, $\text{ord}(g) = p^k$ con $k \in \mathbb{N}$, es decir, todo elemento de G tiene orden una potencia de p.

1.2. Constantes de suma cero

Al estudiar las constantes de suma cero el objeto principal de estudio son las secuencias finitas $S = s_1, \ldots, s_n$ tales que sus elementos pertenezcan a un grupo abeliano finito G. Comenzaremos esta sección definiendo formalmente las secuencias sobre un grupo y denotando los elementos relativos a éstas.

En adelante, G denotará un grupo abeliano finito con notación aditiva.

Una *secuencia* S sobre G es una lista de elementos de G, digamos $S = s_1, \ldots, x_n$, donde puede ocurrir que para $i \neq j$ tengamos $s_i = s_j$, además, el orden de los elementos no tiene importancia.

Para denotar una secuencia S podemos hacerlo como un producto formal $S = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n = \prod_{i=1}^n s_i$ o, como $S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$, donde $v_g(S) \geq 0$ es la multiplicidad de g en S (Cantidad de veces que el elemento se repite en la secuencia S).

Si el conjunto de todas las secuencias sobre G es denotado por $\mathcal{F}(G)$ y $S \in \mathcal{F}(G)$ entonces, existen únicos $v_g(S) \geq 0$ tales que $S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{F}(G)$ es un monoide abeliano libre con base G, cuyo elemento identidad es la secuencia trivial $\emptyset = \prod_{g \in G} g^0$, es decir, la secuencia vacía.

Para una secuencia S en $\mathcal{F}(G)$ tal que

$$S = s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_l = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$$

definimos la *longitud de* S como

$$|S| = l = \sum_{g \in G} v_g(G).$$

Si $S, T \in \mathcal{F}(G)$, entonces decimos que T es una *subsecuencia de* S si $T \mid S$ o, equivalentemente, si $v_g(T) \leq v_g(S)$ para cada $g \in G$. Notemos que si $v_g(S) \geq 1$, entonces $g \mid S$, en este caso decimos que g es un *término* de S.

Si $T \mid S$, ST^{-1} denota la secuencia $L \in \mathcal{F}(G)$ tal que $v_g(L) = v_g(S) - v_g(T)$ para todo $g \in G$.

La *suma de* S la definimos como

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{l} s_i = \sum_{g \in G} v_g(S) g \in G.$$

Dado $k \in \mathbb{N}, k \leq |S|$, el **conjunto suma de subsecuencias de** S de longitud k es

$$\sum_k(S) = \left\{ \sum_{i \in I} g_i \mid I \subset [1, l] \text{ con } |I| = k \right\}.$$

Diremos que

- $S \in \mathcal{F}(G)$ es una *secuencia de suma cero* si $\sigma(S) = 0$.
- $S \in \mathcal{F}(G)$ es una *secuencia libre de suma cero* si $0 \notin \sum(G)$.
- $S \in \mathcal{F}(G)$ es una *secuencia libre de cuadrados* si para todo $g \mid S$, $v_g(S) \leq 1$, es decir, S no posee elementos repetidos.

Para un grupo abeliano finito G, denotado aditivamente, un problema de suma cero puede ser definido como el cálculo del menor entero positivo t tal que cada secuencia de elementos de G de longitud t, tiene una subsecuencia cuya suma da 0, y que posiblemente cumpla con alguna condición adicional (generalmente respecto a la longitud de la subsecuencia).

En 1961 Erdös, Ginzburg y Ziv [4] dan origen a una de las primeras constantes de suma cero que fue estudiada, la cual definimos a continuación.

Definición 1.6. La constante $\mathsf{E}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud mayor o igual que t contiene una subsecuencia de longitud $|G|$ de suma cero.

Algunos trabajos usan la notación $ZS(G)$ en lugar de $\mathsf{E}(G)$ y la llaman *constante de suma cero* (zero-sum).

Erdös, Ginzburg y Ziv [4] probaron que $\mathsf{E}(G) \leq 2|G| - 1$.

Motivado por un problema que surgió en teoría algebraica de números, Rogers [15] en 1962, determina la longitud debe tener una secuencia S sobre ciertos grupos abelianos finitos, para garantizar la existencia de una subsecuencia no trivial de suma cero, posteriormente Davenport, durante una conferencia sobre teoría de grupos y teoría de números populariza la célebre constante $\mathsf{D}(G)$, la cual recibe su nombre y definimos a continuación.

Definición 1.7. La **constante de Davenport** $\mathsf{D}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia en $\mathcal{F}(G)$ de longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia no trivial de suma cero.

El siguiente lema garantiza que la constante de Davenport está acotada superiormente.

Lema 1.1. *(Lema Prehistórico) [4] Para todo grupo abeliano finito G se cumple*

$$D(G) \leq |G|.$$

En 1996 Gao [6] demostró que el problema de encontrar $\mathsf{D}(G)$ es equivalente a encontrar $\mathsf{E}(G)$ al verificar que

$$\mathsf{E}(G) = |G| + \mathsf{D}(G) - 1. \tag{1.1}$$

En 1973, Harborth [10] introduce dos nuevas constantes, una de ellas, la cual llamamos constante de Harborth, tuvo su origen motivado por un problema de geometría finita.

Definición 1.8. La **constante de Erdös-Ginzburg-Ziv** (constante de EGZ) $\mathsf{s}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia de longitud $\exp(G)$ de suma cero.

Definición 1.9. La **constante de Harborth** $\mathsf{g}(G)$, es el menor entero positivo t tal que cada secuencia libre de cuadrados $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia de longitud $\exp(G)$ de suma cero.

Observemos que no existen secuencias libres de cuadrados en $\mathcal{F}(G)$ de longitud $|G|+1$ así, por vacuidad, toda secuencia libre de cuadrados de longitud $|G|+1$ contiene una subsecuencia de suma cero de longitud $\exp(G)$, en consecuencia, $\mathsf{g}(G) \leq |G|+1$.

Otra constante que también tiene una larga tradición en teoría combinatoria de números, es la η-invariante, su popularidad se debe, en parte, a que puede ser usada para hallar otras constantes de suma cero cuando se procede por métodos inductivos sobre el orden del grupo, y a su relación con geometría finita y teoría de factorización no única.

Definición 1.10. La **η-invariante de** G, denotada por $\eta(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia no trivial de longitud menor o igual que $\exp(G)$ de suma cero.

Notemos que, por definición, $\mathsf{D}(G) \leq \eta(G) \leq \mathsf{s}(G)$, así la existencia de $\eta(G)$ siempre está garantizada. Mas aún, para todo grupo abeliano finito G, se sabe que (ver [8])

$$\mathsf{s}(G) \geq \eta(G) + \exp(G) - 1. \tag{1.2}$$

En 2003 Gao [7] conjeturó lo siguiente.

Conjetura 1.1. *Para todo grupo abeliano finito G se tiene que*

$$\mathsf{s}(G) = \eta(G) + \exp(G) - 1.$$

Gao demostró su conjetura para todos los grupos abelianos finitos con exponente menor o igual que 4. Además la conjetura se ha verficado para todos los grupos para los cuales el valor de $\mathsf{s}(G)$ y de $\eta(G)$ ha sido determinado, también se han determinado condiciones bajo las cuales se satisface, sin embargo, aún permanece abierta.

1.3. Constantes de suma ponderada cero

Sea G un grupo abeliano finito. Existen varias generalizaciones o variaciones de los problemas de suma cero introduciendo ponderaciones o pesos. Una variación conocida fue introducida por Adhikari y sus colaboradores en [1]. Esta variación consiste en fijar un cierto conjunto no vacío de pesos $A \subset \mathbb{Z}$ y preguntarse por el menor entero positivo

t tal que toda secuencia $S = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t \in \mathcal{F}(G)$ de longitud t, posea una subsecuencia (posiblemente de alguna longitud indicada), digamos $\prod_{i\in I} s_i \mid S$ tal que $\sum_{i\in I} a_i s_i = 0$, donde $a_i \in A$ para todo $i \in I \subseteq [1, t]$. En este caso los problemas de suma cero (sin ponderaciones) son casos particulares.

Sea A subconjunto no vacío $[1, m-1]$, donde $m = \exp(G)$ y $S = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_l$ una secuencia sobre G.

- Una *suma A-ponderada* de S, es un elemento de la forma $\sum_{i=1}^{l} a_i s_i$ con $a_i \in A$ para todo $i \in [1, l]$.

- Denotaremos por $\sigma_A(S)$ al conjunto de todas las sumas A-ponderadas de subsecuencias de S, esto es
$$\sigma_A(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} a_i s_i : \ a_i \in A \right\}.$$

- S es una *subsecuencia de suma A-ponderada cero*, si existen $a_1, \ldots, a_l \in A$ tales que $\sum_{i=1}^{l} a_i s_i = 0$, esto es, $0 \in \sigma_A(S)$.

- Denotamos al conjunto de las sumas A-ponderadas de subsecuencias de S de longitud k por
$$\sum_{A,k} (S) = \left\{ \sum_{i\in I}^{l} a_i s_i : a_i \in A, I \neq \emptyset; |I| = k \right\}.$$

El conjunto finito A de números enteros es llamado conjunto de pesos o ponderaciones.

Las constantes de suma ponderada cero son constantes análogas a las definidas en la Sección 1.1, solo que se definen considerando su suma afectada por pesos pertenecientes al conjunto de ponderaciones A, tal como lo hacemos a continuación.

Sea G un grupo abeliano finito y A un subconjunto no vacío de enteros.

La *constante ponderada de Davenport* $\mathsf{D}_A(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia en $\mathcal{F}(G)$ de longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia no trivial $s_1 \cdot \ldots \cdot s_l$ de suma A-ponderada cero, esto es, existen $a_1, \ldots, a_l \in A$ tales que $\sum_{i=1}^{l} a_i s_i = 0$.

La constante $\mathsf{E}_A(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud mayor o igual que t contiene una subsecuencia de longitud $|G|$ de suma A-ponderada cero.

La *constante ponderada de Erdös-Ginzburg-Ziv* (constante EGZA) $\mathsf{s}_A(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia de longitud $\exp(G)$ de suma A-ponderada cero.

La *constante ponderada de Harborth* $\mathsf{g}_A(G)$, es el menor entero positivo t tal que cada secuencia libre de cuadrados $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia de longitud $\exp(G)$ de suma A-poderada cero.

La *η-invariante ponderada de* G, denotada por $\eta_A(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con longitud mayor o igual que t, contiene una subsecuencia no trivial de longitud menor o igual que $\exp(G)$ de suma A-ponderada cero.

Las constantes ponderadas generalizan la constante correspondientes al caso de suma cero sin ponderaciones o pesos, las cuales obtenemos tomando el conjunto $A = \{1\}$, en cuyo caso no será necesario colocar en subíndice A.

Nosotros consideramos el conjunto $A = \{1, -1\}$ y usaremos la notación $\pm$, en lugar de A, para referimos al caso $A = \{1, -1\}$. Por ejemplo, en lugar de decir A-ponderada, diremos $\pm$-ponderada. También escribimos $\eta_{\pm}(G)$ para $\eta_{\{1,-1\}}(G)$ y, similarmente, $\mathsf{s}_{\pm}(G)$ para $\mathsf{s}_{\{1,-1\}}(G)$.

Un resultado reciente que será muy útil en nuestro trabajo es el siguiente.

Teorema 1.3. *[13]*

Para $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{g}_{\pm}(\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{2n}) = \begin{cases} 2n+2 & si \quad n \geq 3 \\ 5 & otro\ caso \end{cases}$$

En [9], se probó que para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ se cumple

$$\mathsf{E}_A(G) = |G| + \mathsf{D}_A(G) - 1 \tag{1.3}$$

Observemos que cuando $A = \{1\}$, tenemos la relación 1.1.

Por otro lado, también tenemos una relación análoga a la relación 1.2.

Observación 1.1. Sea A un conjunto de enteros no vacío y G un grupo abeliano finito, entonces

$$\mathsf{s}_A(G) \geq \eta_A(G) + \exp(G) - 1.$$

Demostración. Notemos que, basta mostrar una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = \eta_A(G) + \exp(G) - 2$ la cual no posea subsecuencias de longitud $\exp(G)$ de suma A-ponderada cero. Por la definición de la η-invariante, existe una secuencia $T \in \mathcal{F}(G)$ de longitud $\eta_A(G) - 1$ la cual no posee subsecuencias no triviales de longitud menor o igual a $\exp(G)$ de suma A-ponderada cero. Sea $S = T0^{\exp(G)-1}$, entonces $|S| = \eta_A(G) + \exp(G) - 1$.

Supongamos que existe $R = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{\exp(G)} \mid S$ tal que $\sum_{i=1}^{\exp(G)} a_i s_i = 0$, $a_i \in A$. Como $|R| = \exp(G)$, R posee al menos un término de T, así $R = R_T R_0$, donde $\emptyset \neq R_T \mid T$ y $R_0 \mid 0^{\exp(G)-1}$. Entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{\exp(G)} a_i s_i = \sum_{x \mid R_T} x a_x + \sum_{y \mid R_0} a_y 0 = \sum_{x \mid R_T} a_x x$$

Luego, R_T es una subsecuencia de T de suma A-ponderada cero de longitud menor o igual que $\exp(G)$, pero T no posee subsecuencias no triviales de longitud menor o igual a $\exp(G)$ de suma A-ponderada cero. Por tanto,

$$s_A(G) \geq \eta_A(G) + \exp(G) - 1.$$

■

De modo que es natural preguntarse si se cumple una relación análoga, con pesos, a la conjeturada por Gao (Conjetura 1.1), esto es,

$$\mathsf{s}_A(G) = \eta_A(G) + \exp(G) - 1. \tag{1.4}$$

Esta relación es el objetivo de nuestro estudio, en el caso particular $A = \{-1, 1\}$ y es lo que desarrollamos en el Capítulo 2.

Capítulo 2

La $\eta_{\pm}$-invariante y la constante de Erdös-Ginzburg-Ziv $\pm$-ponderada

En este capítulo damos los resultado principales de nuestro trabajo, recordemos que trabajaremos con grupos abelianos finitos con notación aditiva y el conjunto de pesos $A = \{-1, 1\}$.

2.1. Cálculo para algunos grupos elementales

En esta sección estimamos la constante de Erdös-Ginzburn-Ziv $\pm$-ponderada para el grupo elemental $\mathbb{Z}_n^d$ y calculamos el valor exacto de la $\eta_{\pm}$-invariante y la constante de Erdös-Ginzburg-Ziv $\pm$-ponderada de $\mathbb{Z}_2^d$, en este caso mostramos que se satisface la relación $\mathsf{s}_{\pm}(G) = \eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1$.

Observación 2.1. Si G es un 2-grupo elemental entonces,

$$\mathsf{s}_{\pm}(G) = \mathsf{s}(G) \text{ y } \eta_{\pm}(G) = \eta(G).$$

Demostración. Para cada $g \in G$, sabemos que $ord(g) = 2$, así $g = -g$ (ya que $2g = 0 \Rightarrow g + g = 0 \Rightarrow g = -g$). Luego, para toda secuencia $S = s_1 \cdot \ldots \cdot s_l \in \mathcal{F}(G)$,

$$\sum_{i=1}^{l} s_i = \sum_{i=1}^{l} a_i \cdot s_i$$

para todo $a_i \in \{1, -1\}$.

Mostraremos que $\eta(G) \leq \eta_{\pm}(G)$ y que $\eta_{\pm}(G) \leq \eta(G)$.

Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = \eta_{\pm}(G)$, entonces S contiene una subsecuencia no trivial $S_1 = s_1 \cdot \ldots \cdot s_l$ con $|S_1| \leq \exp(G)$ tal que $0 = \Sigma_{i=1}^{|S_1|} a_i s_i = \sum_{i=1}^{|S_1|} s_{il}$. Así $S_1 \mid S$ es de suma cero, por tanto $\eta(G) \leq \eta_{\pm}(G)$ es de suma cero.

Ahora sea $S \in \mathcal{F}$ con $|S| = \eta(G)$ entonces, existe $S_1 = s_1 \cdot \dots \cdot s_l \mid S$, con $l \leq \exp(G)$ tal que $0 = \sum_{i=1}^{l} s_i = \sum_{i=1}^{l} 1 s_i$. Así S_2 es de suma $\pm$-ponderada cero, lo cual implica que la desigualdad $\eta_{\pm}(G) \leq \eta(G)$ se satisface.

Para el caso de la constantes $\mathsf{s}_{\pm}(G)$ y $\mathsf{s}(G)$ se procede de forma análoga considerando las subsecuencias con longitud igual a $\exp(G)$. ■

Teorema 2.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple :*

$$1 + 2^d(n-1) \leq \mathsf{s}(\mathbb{Z}_n^d) \leq 1 + n^d(n-1)$$

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}_n^d$, $\exp(G) = n$. Probemos que $1 + 2^d(n-1) \leq s(\mathbb{Z}_n^d)$. Queremos construir una secuencia de elementos en G tal que no posea subsecuencias de longitud $\exp(G) = n$ satisfaciendo la condición de ser suma cero. Sea $B = \left\{(g_1, \dots, g_d) \in G : \ g_i = \overline{0} \vee g_i = \overline{1}\right\} \subset G$. Es claro que $\mathsf{card}(B) = 2^d$. Sea $S = \prod_{g \in B} g^{n-1} \in \mathcal{F}(G)$, así $|S| = \mathsf{card}(B) \cdot (n-1) = 2^d \cdot (n-1)$ y $v_g(S) \leq n-1$ para todo $g \in G$. Sea $T \mid S$ con $|T| = n$, podemos escribir T como sigue

$$T = \prod_{i=1}^{n} (g_{i1}, \dots, g_{id}) = (g_{11}, \dots, g_{1d}) \cdot \dots \cdot (g_{n1}, \dots, g_{nd}), \text{ donde cada } g_{ij} \in \{\overline{0}, \overline{1}\} \forall i, j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sigma(T) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (g_{i1}, \dots, g_{id}) = (\overline{0}, \dots, \overline{0}) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} g_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} g_{id} \right) = (\overline{0}, \dots, \overline{0}) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} g_{ij} = \overline{0}, \forall j \in [1, d] \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall j \in [1, d])(g_{ij} = \overline{0}, \forall i \in [1, n] \vee g_{ij} = \overline{1}, \forall i \in [1, n]) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall j \in [1, d])(g_{ij} = g_{1j}, \forall i \in [1, n]) \\
&\Leftrightarrow \quad (g_{i1}, \dots, g_{id}) = (g_{11}, \dots, g_{1d}), \forall i \in [1, n] \\
&\Leftrightarrow \quad T = (g_{11}, \dots, g_{1d})^n \\
&\Rightarrow \quad v_g(T) \leq n, \text{ donde } g = (g_{11}, \dots, g_{1d})
\end{aligned}$$

Como para todo $g \in G$, $v_g(T) \leq v_g(S) = n-1$, entonces S no posee subsecuencias de longitud $n = \exp(G)$ de suma cero. Por tanto, $1 + 2^d(n-1) \leq \mathsf{s}(\mathbb{Z}_n^d)$.

Ahora veamos que $\mathsf{s}(\mathbb{Z}_n^d) \leq 1 + n^d(n-1)$.
Sea $S = \prod_{g\in G} g^{v_g(S)} \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = n^d(n-1)+1$. Si $v_g(S) \leq n-1$ para todo $g \in G$ entonces,

$$n^d(n-1)+1 = |S| = \sum_{g\in G} v_g(G) \leq \sum_{g\in G}(n-1) = |G|(n-1) = n^d(n-1)$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, existe $g \in G$ tal que $v_g(S) \geq n$. Sea $T = g^n \mid S$ entonces $\sigma(T) = ng = 0$. ■

Ejemplo 2.1. Para $n = 2$, de la Observación 2.1 y el Teorema 2.1, tenemos

$$\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}(\mathbb{Z}_2^d) = 1 + 2^d$$

Ejemplo 2.2. $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) = \eta(\mathbb{Z}_2^d) \geq 2^d$

En efecto, sea $S = \prod_{g\in G\setminus 0} g \in \mathcal{F}(G)$, veamos que S no posee subsecuencias de suma $\pm$-ponderada cero de longitud menor o igual que $\exp(G) = 2$. Como S no contiene al 0, no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 1, además, en G todos los elementos son de orden 2, por lo que todo elemento es igual a su inverso, así para todo para de elementos distintos $g_1, g_2 \in G$, $g_1 + g_2 \neq 0$ por lo tanto no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2. La igualdad se sigue de la observación 2.1.

Corolario 2.1.

$$\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) = 1 + 2^d = \eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) + \exp(\mathbb{Z}_2^d) - 1$$

Demostración. Por los Ejemplos 2.1 y 2.2, basta mostrar que $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) \leq 2^d$. Por Observación 1.1, $\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) \geq \eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) + \exp(\mathbb{Z}_2^d) - 1$, es decir, $\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) = 1 + 2^d \geq \eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d) + 2 - 1$ implicando que $2^d \geq \eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^d)$. ■

2.2. Cálculo para algunos grupos de rango 2

En esta sección damos una cota superior para la constante de de Erdös-Ginzburg-Ziv $\pm$-ponderada de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ y, en el caso que n es una potencia de 2, calculamos su valor exacto y demostramos que se satisface la relación $\mathsf{s}_{\pm}(G) = \eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1$. Además, ofrecemos una cota superior para la $\eta_{\pm}$-invariante de los grupos de la forma $\mathbb{Z}_2^r \oplus \mathbb{Z}_{2n}$. Comenzamos mencionando un resultado que es muy útil cuando deseamos encontrar subsecuencias de suma cero de longitud par.

Teorema 2.2. *[2] Sea G un grupo abeliano finito no trivial y $S \in \mathcal{F}(G)$.*

1) *Si $|S| \geq \log_2 |G| + 1$ y G no es un $2-$grupo elemental, entonces S contiene una subsecuencia propia, no trivial, de suma $\pm$-ponderada cero.*

2) *Si $|S| \geq \log_2 |G| + 2$ y G no es 2-grupo elemental de rango par, entonces S contiene una subsecuencia propia, no trivial, de longitud par, de suma $\pm$-ponderada cero.*

3) *Si $|S| > \log_2 |G|$ entonces S contiene una subsecuencia no trivial de suma $\pm$-ponderada cero. Si $|S| > \log_2 |G| + 1$ entonces, además puede encontrarse una subsecuencia de este tipo con longitud par.*

Teorema 2.3. $\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}) \leq 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1$.

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}$, $|G| = 4n$ y $\exp(G) = 2n$. Sea $S \in \mathcal{F}(G)$ una secuencia de longitud $|S| = 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1$. Consideremos T, S Subsecuencias de T tales que $T = \prod_{g \in G, v_g(S) \text{par}} g^{\frac{v_g(S)}{2}} \prod_{g \in G, v_g(S) \text{impar}} g^{\frac{v_g(S)-1}{2}}$ y sea $U = \prod_{g \in G, v_g(S) \text{impar}} g$. U es claramente libre de cuadrados y podemos escribir a S como $S = T^2 U$. Luego $|S| = |T^2 U| = 2|T| + |U|$, es decir, $2|T| + |U| = 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1$, implicando que

$$|U| = 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1 - 2|T|.$$

Supongamos que $2|T| \leq \lceil \log_2 (2n) \rceil - 1$, de aquí resulta que $-2|T| \geq 1 - \lceil \log_2 (2n) \rceil$, y luego $|U| \geq 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1 + 1 - \lceil \log_2 (2n) \rceil = 2n + 2$. Por el Teorema 1.3, $\mathsf{g}_{\pm}(G) = 2n + 2$; así $|U| \geq \mathsf{g}_{\pm}(G)$ por lo que U, y en consecuencia S, posee una subsecuencia S_1 de longitud $2n$ de suma $\pm$-ponderada cero.

Ahora supongamos $2|T| \geq \lceil \log_2 (2n) \rceil$. Podemos escribir a S como $S = V^2 W$, definiendo a V y a W de la siguiente manera: si $\lceil \log_2 (2n) \rceil$ es par, tomamos $V = T$ y $W = U$ (como en el caso anterior). Si $\lceil \log_2 (2n) \rceil$ es impar, como $2|T|$ es par, $2|T| \geq \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1$ (por ser estos valores enteros), tomamos $V|T$ tal que $V^2|T^2$ y $|V^2| = 2|V| = \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1$, y tomamos $W = S(V^2)^{-1}$. Entonces $2|V| = \lceil \log_2 (2n) \rceil + \delta$, donde $\delta = 0$ o 1, dependiendo si $\lceil \log_2 (2n) \rceil$ es par o impar, y

$$|W| = |S| - 2|V| = 2n + \lceil \log_2 (2n) \rceil + 1 - \lceil \log_2 (2n) \rceil - \delta = 2n + 1 - \delta.$$

Por otra parte, sabemos que $\lceil \log_2 (2n) \rceil > \log_2 (2n)$ y, de las propiedades de la función logaritmo, $\log_2 |G| + 2 = \log_2 (2(2n)) + 2 = \log_2 (2n) + 3$. Por el Teorema 2.2 parte

2), existe una subsecuencia $A_1 \mid W$ de longitud par de suma $\pm$-ponderada cero. Si $W(A_1)^{-1} \geq \lceil \log_2(2n) \rceil + 3$, existe una subsecuencia $A_2 \mid W(A_1)^{-1}$ de longitud par de suma $\pm$-ponderada cero. Aplicando de forma recursiva el mismo argumento, tantas veces como sea necesario, obtenemos subsecuencias disjuntas dos a dos $A_1, \ldots, A_l$ de longitud par de suma $\pm$-ponderada cero tales que $|W| - \sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq \lceil \log_2(2n) \rceil + 2$. Pero

$$-\sum_{i=1}^{l} |A_i| < \lceil \log_2(2n) \rceil + 2 - |W| \quad \Rightarrow \quad -2 - \lceil \log_2(2n) \rceil + |W| < \sum_{i=1}^{l} |A_i|$$
$$\Rightarrow \quad 2n - \lceil \log_2(2n) \rceil - 1 - \delta \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i|.$$

Supongamos que $\delta = 0$ ($\lceil \log_2(2n) \rceil$ par) entonces, se obtiene $2n - \lceil \log_2(2n) \rceil - 1 \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i|$, por ser $\lceil \log_2(2n) \rceil$ par, $2n - \lceil \log_2(2n) \rceil - 1$ es impar. Además, para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$, $|A_i|$ es par así, $\sum_{i=1}^{l} |A_i|$ es par, luego

$2n-1-\lceil \log_2(2n) \rceil \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq 2n+1$ implica $2n-\lceil \log_2(2n) \rceil \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq 2n$.

Si $\sum_{i=1}^{l} |A_i| = 2n$ entonces, $A_1 \cdots A_l$ es subsecuencia de S de longitud $2n$ de suma $\pm$-ponderada cero. Si $\sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq 2n$ entonces, existe $k \leq \lceil \log_2(2n) \rceil$ tal que $\sum_{i=1}^{l} |A_i| + 2k = 2n$, seleccionando k términos de V, digamos $v_1, \ldots, v_k$ y, por el hecho de que $|V^2| = 2\lceil \log_2(2n) \rceil$, $(v_1 \ldots v_k)^2$ es subsecuencia de V de suma $\pm$-ponderada cero, así podemos considerar $A_1 \cdots A_l (v_1 \cdots v_k)^2 \mid S$ de longitud $2n$ y suma $\pm$-ponderada cero.

Supongamos ahora $\delta = 1$ ($\lceil \log_2(2n) \rceil$ impar), entonces $2n-2-\lceil \log_2(2n) \rceil$ es impar, así $2n-2-\lceil \log_2(2n) \rceil \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq 2n+2$ implica $2n-\lceil \log_2(2n) \rceil \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i| \leq 2n$.

Obteniendo la misma desigualdad para el caso anterior ($\delta = 0$), de esta manera resultan las mismas posibilidades estudiadas y podemos concluir que W, y en consecuencia S, posee una subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud $2n$.

$\blacksquare$

Corolario 2.2. *Si n es potencia de 2 entonces,*

$$\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}) = 2n + \lceil \log_2(2n) \rceil + 1 = \eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}) + \exp(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}) - 1$$

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}$. Probaremos primero que $\eta_{\pm}(G) \geq \lfloor \log_2(2n) \rfloor + 2$. Como n es potencia de 2, $n = 2^r$, con $r \geq 1$, así $\lfloor \log_2(2n) \rfloor = r + 1$. Queremos ver $\eta_{\pm}(G) \geq r + 3$.

Sea

$$S = (\bar{0}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{2}) \cdot \ldots \cdot (\bar{0}, \bar{2}^{r}) \in \mathcal{F}(G),$$

y sea $T = t_1 \cdot \ldots \cdot t_k \mid S$ con $|T| \leq 2^{r+1}$, supongamos T es de suma $\pm$-ponderada cero. Si $(0,1) \mid T$, $\sum_{i=1}^{l} a_i t_i \neq 0$ para todo $a_i \in \{-1, 1\}$, pues la última componente de la suma resultaría una clase cuyo representante es impar, así $(\bar{0}, \bar{1})$ no es un término de T. Si $(1,0) \mid T$, $\sum_{i=1}^{|T|} a_i t_i \neq 0$ pues la primera componente de la suma resultaría $\bar{1}$ o $-\bar{1}$, así $(1,0)$ no es un término de T. Luego, podemos suponer que $T = (\bar{0}, \bar{2}^{r_1}) \cdot \ldots \cdot (\bar{0}, \bar{2}^{r_k})$, con $r_1 \leq \ldots \leq r_k$. Ahora, para $a_1 \ldots, a_k \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} a_1(\bar{0}, \bar{2}^{r_1}) + \ldots (\bar{0}, \bar{2}^{r_k}) = (\bar{0}, \bar{0}) \quad &\Rightarrow \quad a_1\bar{2}^{r_1} + a_2\bar{2}^{r_2} + \ldots + a_k\bar{2}^{r_k} = \bar{0} \\ &\Rightarrow \quad a_1 2^{r_1} + \ldots + a_k 2^{r_k} = m2^{r+1}, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad 2^{r_1}(a_1 + a_2 2^{r_2 - r_1} + \ldots + a_k 2^{r_k - r_1}) = m2^{r+1} \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 2^{r_2 - r_1} + \ldots + a_k 2^{r_k - r_1} = m2^{r - r_1 + 1}, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, pues $a_1 + a_2 2^{r_2 - r_1} + ... + a_k 2^{r_k - r_1}$ es impar, así S no posee subsecuencias de longitud menor o igual que $\exp(G)$ de suma $\pm$-ponderada cero, por lo que $\eta_{\pm}(G) \geq r + 3 = \lfloor \log_2(2n) \rfloor + 2$ $(\star)$.
Además por teorema 2.3 se tiene que $\mathsf{s}_{\pm}(G) \leq 2n + \lceil \log_2(2n) \rceil + 1$ y por la observación 1.1, $\mathsf{s}_{\pm}(G) \geq \eta_{\pm}(G) + 2n - 1$. De $(\star)$ se cumple que $\eta_{\pm}(G) + 2n - 1 \geq \lfloor \log_2(2n) \rfloor + 2 + 2n - 1$. Luego, $\lfloor \log_2(2n) \rfloor + 2n + 1 \leq \mathsf{s}_{\pm}(G) \leq 2n + \lceil \log_2(2n) \rceil + 1$.

Pero $\log_2(2n) = \log_2(2^{r+1}) = r + 1 \in \mathbb{Z}$ y ocurre $\lfloor \log_2(2n) \rfloor = \lceil \log_2(2n) \rceil$. Resulta $\mathsf{s}_{\pm}(G) = \lceil \log_2(2n) \rceil + 2n + 1$. Además, $\lfloor \log_2(2n) \rfloor + 2 \leq \eta_{\pm}(G) \leq \mathsf{s}_{\pm}(G) = \lceil \log_2(2n) \rceil + 2n + 1$. Por tanto,se obtiene la igualdad deseada

$$\mathsf{s}_{\pm}(G) = \lceil \log_2(2n) \rceil + 2n + 1 = 2n + \eta_{\pm}(G) - 2 + 1 = \eta_{\pm}(G) + 2n - 1$$

■

Lema 2.1. *Para enteros positivos n y r, tenemos*

$$\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^r \oplus \mathbb{Z}_{2n}) \geq \text{máx}\left\{ \lfloor \log_2(2n) \rfloor + r + \left\lfloor \frac{r}{2n-1} \right\rfloor, r + A(r,n) \right\} + 1,$$

donde

$$A(r,n) = \begin{cases} 1 & si \quad r \leq n \\ \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor & si \quad r > n \end{cases}$$

Demostración. Sea $G=\mathbb{Z}_2^r\oplus\mathbb{Z}_{2n}$, $|G|=2^{r+1}n$ y $\exp(G)=2n$.

Para $n=1$, $G=\mathbb{Z}_2^{r+1}$. En la demostración del Corolario 2.1 vimos que $\eta(\mathbb{Z}_2^d)=2^d$ y, por el Ejemplo 2.2, sabemos que $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^{r+1})=\eta(\mathbb{Z}_2^{r+1})=2^{r+1}$. Por otro lado, $A(r,1)=1$ si $r=1$ y $A(r,1)=r$ si $r>1$, además $\lfloor\log_2(2)\rfloor+r+\lfloor r\rfloor=1+2r$ y $r+A(r,n)=r+r=2r$ y como $2^{r+1}\geq \text{máx}\{2+2r,1+2r\}$, tenemos el resultado.

Supongamos $n>1$. Consideremos la secuencia $S=\prod_{i=1}^r e_i\prod_{t=0}^s f_t\prod_{j=1}^k g_j$ donde $s=\lfloor\log_2(2n)\rfloor-1$, $k=\left\lfloor\frac{r}{2n-1}\right\rfloor$ y para cada $i\in[1,r]$, $e_i\in G$ es tal que $\pi_i(e_i)=\overline{1}$ y $\pi_l(e_i)=\overline{0}$ para todo $l\neq i$. $f_t\in G$ es tal que $\pi_i(f_t)=\overline{0}$ para todo $i\in[1,r]$ y $\pi_{r+1}(f_t)=\overline{2}^t$, y para $j\in[0,k-1]$, $g_{j+1}\in G$ es tal que $\pi_i(g_j)=\overline{1}$ para $i=(2n-1)j+1,(2n-1)j+2,\ldots,(2n-1)j+2n-1,r+1$ y $\pi_l(g_{j+1})=\overline{0}$ para todo $l\neq i$.

Por la definición de S podemos ver que $|S|=r+s+1+k=r+\lfloor\log_2(2n)\rfloor+\left\lfloor\frac{r}{2n-1}\right\rfloor$. Sea $T\mid S$ tal que $T\mid\prod_{i=1}^r e_i\prod_{i=1}^s f_j$ y supongamos que $\overline{0}\in\sum_{\pm}(T)$, es decir, $\overline{0}=\sum_{g|T}a_g g$, $a_g\in\{-1,1\}$. Supongamos que $e_i\mid T$ para algún $i\in[1,r]$, como $\pi_i(e_i)=\overline{1}$, $\pi_i(e_l)=\overline{0}$, para todo $l\neq i$ y $\pi_i(f_t)=\overline{0}$ entonces,

$$\pi_i\left(\sum_{g|T}a_g g\right)=\pm\overline{1}.$$

Así $\prod_{i=1}^r e_i$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero. Notemos que

$$\pi_{r+1}\left(\sum_{j=0}^s f_j\right)=\sum_{j=0}^s(\pi_{r+1}(f_j))=\sum_{j=0}^s\overline{2}^j=\overline{\sum_{j=0}^s 2^j}$$

Resulta una serie geométrica y

$$0<\sum_{t=0}^s 2^t=\frac{1-2^{s+1}}{1-2}=2^{s+1}-1=2^{\lfloor\log_2(2n)\rfloor-1+1}-1<2^{\log_2(2n)}<2n,$$

de modo que $\prod_{j=0}^s f_j$ no es de suma cero, más aún $\prod_{j=0}^s f_j$ no posee subsecuencias de suma cero. Como $T\mid\prod_{j=0}^s f_j$ es de suma $\pm$-ponderada cero entonces, podemos suponer que

$$\begin{aligned}\overline{0}&=\pi_{r+1}\left(\sum_{g|T}\alpha_g g\right)\\&=2^{\overline{t}_1}+\ldots+2^{\overline{t}_m}-2^{\overline{t}_{m+1}}-\ldots-2^{\overline{t}_l}\text{ con }t_i\leq t_{i+1},i\in[1,m]\text{ y }t_j\leq t_{j+1},j\in[m+1,l]\\&=\overline{\sum_{l=1}^m 2^{t_l}-\sum_{l=m+1}^s 2^{t_l}}\end{aligned}$$

Supongamos $\sum_{l=1}^{m} 2^{t_l} - \sum_{l=m+1}^{s} 2^{t_l} > 0$ (en otro caso el procedimiento es análogo) entonces,

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{l=1}^{m} 2^{t_l} - \sum_{l=m+1}^{s} 2^{t_l} &< \sum_{l=1}^{m} 2^{t_l} \\ &< 2^{t_s} - 1 \\ &< 2^{\lceil \log_2 (2n) \rceil - 1} - 1 \\ &< 2n \end{aligned}$$

así, la subsecuencia no es de suma $\pm$-ponderada cero, por lo que $\prod_{j=0}^{s} f_j$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero. Luego, $\prod^{r} e_i \prod^{s} f_j$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero. Entonces cualquier subsecuencia suma cero de S debe contener al menos un g_i, y por la definición de los g_i's, al contener uno de éstos debe tener al menos $2n-1$ términos de los e_i's y un término de los f_j's, así la longitud de T debe ser por lo menos $2n$ para que se cumpla $0 \in \sum_{\pm}(S)$. Por la definición de $\eta_{\pm}(G)$ entonces podemos decir que

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}(G) &> r + s + 1 + k \\ &> r + \lfloor \log_2 (2n) \rfloor - 1 + 1 + \left\lfloor \frac{r}{2n-1} \right\rfloor \\ &\geq r + \lfloor \log_2 (2n) \rfloor + \left\lfloor \frac{r}{2n-1} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $\eta_{\pm}(G) \geq r + A(r,n) + 1$.

Si $r \leq n$, $A(r,n) = 1$, consideramos $T = f_1 \prod_{i=1}^{r} e_i \mid S$ con $|T| = r + 1$, la cual sabemos, no posee subsecuencias de suma $\pm$-ponderada cero.

Si $r > n$ consideramos $S = \prod_{i=1}^{r} e_i \prod_{j=1}^{u} h_j$ con $u = \lfloor \frac{r}{n} \rfloor$ y $h_j + 1$ tal que $\pi_i(h_{j+1}) = \overline{1}$ para $i = nj+1, nj+2, \ldots, nj+n, r+1$ y $\pi_l(h_{j+1}) = 0$ para $l \in [0, u-1]$ y $l \neq i$.

Por lo obtenido al inicio de la prueba, sabemos que $\prod^{r} e_i$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero. Si $T \mid S$ es de suma $\pm$-ponderada cero, T debería contener al menos dos de los h_j's, considerando la última posición. Por lo tanto, cualquier subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero sera de longitud al menos 2n+2. Así S de longitud $|S| = r + u = r + \lfloor \frac{r}{n} \rfloor = r + A(r,n)$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero, y por la definición de la constate η-invariante entonces obtenemos que se cumple la desigualdad deseada

$$\eta(G) > r + A(r,n) \geq r + A(r,n) + 1.$$

Podemos concluir que se cumple

$$\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^r \oplus \mathbb{Z}_{2n}) \geq \text{máx}\left\{\lfloor \log_2(2n) \rfloor + r + \left\lfloor \frac{r}{2n-1} \right\rfloor, r + A(r,n)\right\} + 1$$

■

2.3. Cálculo para grupos de orden a lo más 32

En esta sección mostramos que se satisface la relación $\mathsf{s}_{\pm}(G) = \eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1$ cuando G es un grupo de orden a lo más 32. Comenzamos dando algunas observaciones que nos ayudarán con los cálculos.

Observación 2.2. Sea G un grupo abeliano finito y $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in \mathcal{F}(G)$. Sea $D_S = \{a_i + a_j : 1 \leq i < j \leq n\}$, notemos que $\binom{n}{2} \geq \mathsf{card}(D_s)$ y que $D_s \subset \sum_2(S)$. Supongamos que $\binom{n}{2} > \mathsf{card}(D_s)$.

Si S es libre de cuadrados, existen distintos $i,j,k,l \in [1,n]$ tales que $a_i + a_j = a_k + a_l$ implicando que $a_i + a_j - a_k - a_l = 0$, obteniéndose una subsecuencia de S de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero.

Si S no es libre de cuadrados, existen $i,j,k,l \in [1,n]$ con $i \neq j$, $k \neq l$ y $\{i,j\} \neq \{k,l\}$ tales que $a_i + a_j = a_k + a_l$. Si un sumando del lado izquierdo coincide con un sumando del lado derecho, obtenemos una subsecuencia de S de longitud 2 de suma $\pm$-ponderada cero. Si i,j,k,l son distintos entre si, obtenemos una subsecuencia de S de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero.

Observación 2.3. Sea G un grupo abeliano finito y $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in \mathcal{F}(G)$, con $n \geq 4$ y $a_1 = a_2$, entonces ${a_1}^2 \mid S$ es de suma $\pm$-ponderada cero. Sea $T = a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$. Si S no posee subsecuencias de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero, entonces T debe ser libre de cuadrados.

Observación 2.4. Sea $G = \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4$, $|G| = 32$ y $\exp(G) = 4$. La suma de dos elementos de G de orden menor o igual que 2, es de orden menor o igual que 2, y la suma de dos elementos de G de orden 4, es de orden menor o igual que 2.

Demostración. Sean $e_1, e_2, e_3, e_4 \in G$ tales que $\pi_i(e_i) = \bar{1}$ para $i \in [1,4]$ y $\pi_j(e_i) = \bar{0}$ para $j \neq i$.

Sean $x, y \in G$ con $\mathrm{ord}(x) \leq 2$ y $\mathrm{ord}(y) \leq 2$ entonces, $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$ y $y = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i$ con $\alpha_i, \beta_i \in [0,1]$ para $i = 1,2,3$ y $\alpha_4, \beta_4 \in \{0,2\}$, luego $x + y = \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i + \beta_i) e_i$ con $\alpha_i + \beta_i \in [0,2]$ para $i = 1,2,3$ y $\alpha_4 + \beta_4 \in \{0,4\}$, así $2(\alpha_i + \beta_i)e_i = \bar{0}$ para $i \in [1,3]$ y $2(\alpha_4 + \beta_4)e_4 = \bar{0}$, de aquí $2(x+y) = 2\sum_{i=1}^{4} (\alpha_i + \beta_i)e_i = \bar{0}$, en consecuencia, $x + y$ es orden a lo más 2.

Sean $x, y \in G$ con $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(y) = 4$, entonces $x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$ y $y = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i$ con $\alpha_i, \beta_i \in [0,1]$ para $i = 1,2,3$ y $\alpha_4, \beta_4 \in \{1,3\}$, como $x + y = \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i + \beta_i) e_i$, en este caso, $\alpha_4 + \beta_4 = [0,5]$ y resulta $2(\alpha_4 + \beta_4)e_i = \bar{0}_2$ para $i \in [1,3]$ y $2(\alpha_i + \beta_i) = \bar{0}$. Luego, $2(\bar{x} + \bar{y}) = 2\sum_{i=1}^{4} (\alpha_i + \beta_i)e_i = \bar{0}_2$. Así, $x + y$ es de orden a lo más 2. ■

Observación 2.5. Sea G grupo abeliano finito con $\exp(G) = 4$, sea $G_2 = \{g \in G : \mathrm{ord}(g) \leq 2\}$. Para $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in \mathcal{F}(G)$ definimos, $S_2 = \prod_{g|S, \mathrm{ord}(g)=2} g \mid S$, $S_4 = \prod_{g|S, \mathrm{ord}(g)=4} g \mid S$, $D_2 = \{a_i \pm a_j : 1 \leq i < j \leq n, \mathrm{ord}(a_i) = \mathrm{ord}(a_j) = 2\}$ y $D_4 = \{a_i \pm a_j : 1 \leq i < j \leq n, \mathrm{ord}(a_i) = \mathrm{ord}(a_j) = 4\}$. Por Observación 2.4, $D_2 \subseteq G_2$ y $D_4 \subseteq G_2$. Luego, si $\binom{|S_2|}{2} > \mathsf{card}(G_2)$, entonces existe un par de elementos en D_2 que son iguales y por tanto S posee una subsecuencia de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero. Análogamente, si $\binom{|S_4|}{2} > \mathsf{card}(G_2)$, entonces existe un par de elementos en D_4 que son iguales y por tanto S posee una subsecuencia de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero.

Observación 2.6. Sea G grupo abeliano finito con $\exp(G) = 4$, sea $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in \mathcal{F}(G)$, y sea $D_4 = \{a_i \pm a_j : 1 \leq i < j \leq n, \mathrm{ord}(a_i) = \mathrm{ord}(a_j) = 4\}$. Si $a_i + \epsilon a_j, a_k + \delta_2 a_l \in D_4$, con $\epsilon, \delta \in \{-1,1\}$, $\{i,j\} \neq \{k,l\}$, son tales que $a_i + \lambda_1 a_j = a_k + \lambda_2 a_l$ entonces, S posee subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4 o 2.

Demostración. Como $\mathrm{ord}(a_j) = 4$, $a_i + a_j \neq a_i - a_j$ ya que $a_i + a_j = a_i - a_j$ implicara que $2a_j = 0$, lo cual contradice la hipótesis de $\mathrm{ord}(a_j) = 4$.
Si i, j, k, l son distintos entre sí, $a_i a_j a_k a_l \mid S$, como $a_i + \lambda_1 a_j = a_k + \lambda_2 a_l$, entonces $a_i + \lambda_1 a_j - a_k - \lambda_2 a_l = 0$ y S posee una subsecuencia de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero. Supongamos que $|\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1$. Para $i < j$; $k < l$ y $\epsilon \neq \delta$ tenemos

$$a_i + \epsilon a_j = a_k + \delta a_l \text{ con } \epsilon, \delta \in \{-1,1\} \tag{2.1}$$

Si $i = k$, obtenemos $\epsilon a_j - \delta a_l = 0$. Luego $a_j a_l \mid S$ suma $\pm$-ponderada cero, de longitud 2.
Si $i = l$ y $\delta = 1$ tenemos $\epsilon a_j - a_k = 0$; entonces $a_j a_k \mid S$ suma $\pm$-ponderada cero, de longitud 2. (Si $j = k$ y $\epsilon = 1$, resulta similar al caso anterior).
Para $i = l$ y $\delta = -1$, $a_k - \epsilon a_j = 2a_i$. (Para $j = k$ y $\epsilon = -1$ es caso similar al anterior).
Si $j = l$, ya que $i \neq k$,$a_i \neq a_k$ por la hipótesis,

$$a_i + \epsilon a_j = a_k + \delta a_j \Rightarrow a_i - a_k = (\delta - \epsilon) a_j = \pm 2a_j.$$

Ahora, haciendo $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \{u, v, s\}$ y $\lambda \in \{-1, 1\}$ tenemos

$$a_u + \lambda a_v = 2a_s \Rightarrow a_u + \lambda a_v + 2a_v \quad = \quad 2(a_s + a_v) = 0$$

pues por observación 2.4 $\mathrm{ord}(a_s + a_v) = 2$, luego $a_u + (\lambda + 2)a_v = 0$ y como $\lambda \in \{-1, 1\}$, entonces $\lambda + 2 \in \{1, 3\}$. Si $\lambda + 2 = 1$, entonces $a_u + (\lambda + 2)a_v = a_u + a_v = 0$ en consecuencia, $a_u a_v \mid S$ de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2.
Si $\lambda + 2 = 3$ entonces, $a_u + 3a_v = a_u - a_v = 0$. Esto porque $\mathrm{ord}(a_v) = 4$ implica $3a_v = -a_v$. De modo que $a_u + \lambda a_v = 0$, con $\lambda = -1$. Así, $a_u a_v \mid S$ de suma $\pm$-ponderada cero, de longitud 2.

Hemos mostrado que si dos sumas del conjunto D_4 coinciden entonces S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderadas cero de longitud 4 o 2.

■

Lema 2.2. $\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4) = 10$ *y* $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4) = 7$

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4$ y $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{10} \in \mathcal{F}(G)$ una secuencia. Queremos probar que S contiene subsecuencias de longitud $\exp(G) = 4$ de suma $\pm$-ponderada cero.

Supongamos que S es libre de cuadrados. Notando que $\binom{10}{2} = 45 > 32 = |G| > |\sum_2(S)|$, por la Observación 2.2 se puede obtener una subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud $4 = \exp(G)$.

Supongamos S no libre de cuadrados, con $a_1 = a_2$ y $T = a_3 \cdot \ldots \cdot a_{10}$. Si T no es libre de cuadrados, podemos suponer que $a_3 = a_4$ y $a_1 a_2 a_3 a_4 \mid S$ de suma $\pm$-ponderada cero. Supongamos que T es libre de cuadrados. Notemos además que G tiene 16 elementos de orden a lo más 2.

Si T tiene a lo sumo un único elemento de orden 4, digamos a_{10} , y 7 elementos de orden menor o igual que 2, notemos que $\binom{7}{2} = 21 > 15$, aplicando la Observación 2.5 tenemos que T posee una subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Supongamos que T posee al menos 2 elementos de orden 4. Sea c el número de términos de T de orden 4 y d el número de términos de T de orden 2 entonces, $c+d = 8$, $2 \leq c \leq 8$ y $2 \leq d \leq 6$. Sean $D_1 = \{a_i \pm a_j : 3 \leq i < j \leq 10, \mathrm{ord}(a_i) = \mathrm{ord}(a_j) = 4,\, a_i a_j \mid T\}$, $D_2 = \{a_r + a_s : 3 \leq i < j \leq 10, \mathrm{ord}(a_r) \leq 2, \mathrm{ord}(a_s) \leq 2, a_r a_s \mid T\}$ y $D = D_1 \cup D_2 \subseteq \{g \in G : \mathrm{ord}(g) \leq 2\}$. Notemos que $\mathsf{card}(D) \leq 2\binom{c}{2} + \binom{d}{2}$ y $\mathsf{card}(D) \leq 16$. Ahora,supongamos

$$\begin{aligned}
2\binom{c}{2} + \binom{d}{2} \leq 16 \quad &\Leftrightarrow \quad c(c-1) + \frac{d(d-1)}{2} \leq 16 \\
&\Leftrightarrow \quad 2c(c-1) + d(d-1) \leq 32 \\
&\Leftrightarrow \quad 2c^2 - 2c + d^2 - d - 32 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2c^2 - 2c + (8-c)^2 - (8-c) - 32 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3c^2 - 17c + 24 \leq 0
\end{aligned}$$

Como $c > 0$, entonces tenemos que $2\binom{c}{2} + \binom{d}{2} > 16$ y deben existir dos sumas ponderadas en D iguales. Tenemos los siguientes casos.

a) Existen $a_i + a_j \in D_1$ y $a_r + a_s \in D_2$ tales que $a_i + a_j = a_r + a_s$ entonces, todos los subíndices deben ser distintos y $a_i a_j a_r a_s \mid S$ con suma $\pm$-ponderada cero.

b) Existen $a_i - a_j \in D_1$ y $a_r + a_s \in D_2$ tales que $a_i - a_j = a_r + a_s$, entonces todos los subíndices deben ser distintos y $a_i a_j a_r a_s \mid S$ con suma $\pm$-ponderada cero.

c) Existen dos términos en D_1 que coinciden, entonces por la Observación 2.6, T posee una subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero, de longitud 2 o 4. Si tiene longitud 2, al adjuntarla con $a_1 a_2$, obtenemos una subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

d) Existen $a_i + a_j \in D_2$ y $a_r + a_s \in D_2$ con $\{i, j\} \neq \{r, s\}$ tales que $a_i + a_j = a_r + a_s$, entonces todos los subíndices deben ser distintos y $a_i a_j a_r a_s \mid S$ con suma $\pm$-ponderada cero.

Por otra parte, por el Lema 2.1 con $r = 3, n = 2$

$$\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4) \geq \lfloor \log_2(4) \rfloor + 3 + \left\lfloor \frac{3}{4-1} \right\rfloor + 1$$

$$\eta_{\pm}(G) \geq 2+3+1+1 = 7$$

$$\eta_{\pm}(G) \geq 7$$

Ahora, para $\mathsf{s}_{\pm}(G) \geq 10$, usando la Observación 1.1, $\mathsf{s}_{\pm}(G) \geq \eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1$.

$$10 \geq \mathsf{s}_{\pm}(G) \geq \eta_{\pm}(G) + 4 - 1 \geq \eta_{\pm}(G) + 3 \geq 7 + 3$$

$$10 \geq \mathsf{s}_{\pm}(G) \geq 10 \Rightarrow S_{\pm}(G) = 10$$

Ahora,

$$10 \geq \eta_{\pm}(G) + 3 \geq 10 \Rightarrow 7 \geq \eta_{\pm}(G) \geq 7$$

$$\eta_{\pm}(G) = 7$$

■

Observación 2.7. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y sean $e_1, e_2, e_3 \in G$ tales que $\pi_i(e_i) = \overline{1}$ para $i \in [1,3]$ y $\pi_j(e_i) = \overline{0}$ para $i \neq j$.

1) G posee 24 elementos de orden 4, los cuales podemos clasificar de la siguiente forma:

   Tipo 1. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ con $\alpha_1 \in \{0,1\}, \alpha_2 \in \{1,3\}, \alpha_3 \in \{0,2\}$.

   Tipo 2. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ con $\alpha_1 \in \{0,1\}, \alpha_2 \in \{0,2\}, \alpha_3 \in \{1,3\}$.

   Tipo 3. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ con $\alpha_1 \in \{0,1\}, \alpha_2 \in \{1,3\}, \alpha_3 \in \{1,3\}$.

   Como la suma de dos elementos de orden 4 en $\mathbb{Z}_4$ es de orden menor o igual que 2, podemos deducir que la suma de dos elementos de orden 4 en G del mismo tipo es de orden 2 y la suma de dos elementos de orden 4 de diferente tipo es orden 4.

2) Si $a_1, a_2, a_3 \in G$ son elementos de orden 4 de distintos tipos entonces, los 4 elementos que se escriben de la forma $a_1 \pm a_2 \pm a_3$ son distintos entre sí y tienen orden 2.

Demostración. veamos que se cumple 2), para $i = 1, 3$, tomemos $\beta_i, \alpha_i \in \{1, -1\}$ con $\alpha_2 \neq \beta_2; \alpha_3 \neq \beta_3$. Supongamos que $a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = a_1 + \beta_3 a_2 + \beta_3 a_3$ entonces tendremos $(\alpha_2 - \beta_2)a_2 - (\beta_3 - \alpha_3)a_3 = 0$. Por la definición de los escalares $\alpha_2 - \beta_2, \beta_3 - \alpha_3 \in \{2, -2\}$

a) Si $\alpha_2-\beta_2=2$ y $\beta_3-\alpha_3=-2$. Resulta $2a_2+2a_3=0$ lo que implica que $\mathrm{ord}(a_2+a_3)\leq 2$. Pero a_2 y a_3 son de diferente tipo, contradice 1) (de forma análoga si $\alpha_2-\beta_2=-2$ y $\beta_3-\alpha_3=2$)

b) Si $\alpha_2-\beta_2=2=\beta_3-\alpha_3$. Resulta $2a_2-2a_3=0$ nuevamente implica que $\mathrm{ord}(a_2-a_3)\leq 2$. Pero a_2 y a_3 son de diferente tipo, contradice 1)

Así, no puede ocurrir que existan elementos $a_1\pm a_2\pm a_3$ iguales. Por lo tanto, los elementos $a_1\pm a_2\pm a_3$ son distintos entre sí. Por otra parte, al suponer a_1 y a_2 elementos de tipo distinto, digamos tipo 1 y tipo 2 respectivamente, entonces $a_1\pm a_2$ es elemento tipo 3, en consecuencia $a_1\pm a_2\pm a_3$ resulta un elemento de orden a lo más 2, ya que la suma de dos elementos de orden 4 en G tiene orden a lo más 2. ■

Lema 2.3. $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4)\geq 6$

Demostración. Sea $G=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$. Sea $S=e_1e_2e_3(2e_2)(2e_3)\in\mathcal{F}(G)$, una secuencia, donde $e_1=(\overline{1},\overline{0},\overline{0}), e_2=(\overline{0},\overline{1},\overline{0}), e_3=(\overline{0},\overline{0},\overline{1})$. Es claro que S no posee $\pm$-subsecuencia suma cero de longitud 1. Supongamos que S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2. Sean $\alpha_1,\alpha_2\in\{1,-1\}$, obtenemos los posibles casos:

1) $\alpha_1e_i+\alpha_2e_j=0$ con $i\neq j$, implicando que $\alpha_1e_i=\alpha_2e_j=0$

2) $\alpha_1e_1+2\alpha_2e_j=0$ con $j=2,3$, implicando que $\alpha_1e_1=2\alpha_2e_j=0$

3) $\alpha_1e_i+2\alpha_2e_i=0$ con $i=2,3$ luego $\alpha_1=-2\alpha_2$

4) $\alpha_1e_i+2\alpha_2e_j=0$ con $i,j\in\{2,3\}$, implicando que $\alpha_1e_i=2\alpha_2e_j=0$

En cada caso, $\alpha_ie_j=0$ contradice la independencia lineal de los $e_i's$ y las igualdades entre los $\alpha's$ la definición de $\alpha_i\in\{1,-1\}$. Podemos concluir que S no posee subsecuencias de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2. Supongamos que S posee subsecuencia de longitud 3 de suma $\pm$-ponderada cero. Sean $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\{1,-1\}$. Obtenemos los posibles casos:

1) $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3=0$ implicando que $\alpha_1e_1=\alpha_2e_2=\alpha_3=0$

2) $\alpha_1e_1+\alpha_2e_i+2\alpha_3e_i=0$ con $i=2,3$, implicando que $\alpha_2=-2\alpha_3$

3) $\alpha_1e_1+\alpha_2e_i+2\alpha_3e_j=0$ con $i\neq j$ y $i,j\in\{2,3\}$ obteniendo que $\alpha_1e_1=\alpha_2e_i=2\alpha_3e_j=0$

4) $\alpha_1 e_i + 2\alpha_2 e_i + 2\alpha_3 e_j = 0$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{2, 3\}$ implicando $\alpha_1 = -2\alpha_2$

5) $\alpha_1 e_i + \alpha_2 e_j + 2\alpha_3 e_j = 0$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{2, 3\}$ obteniendo que $\alpha_2 = -2\alpha_3$

En cada caso se contradice la independencia de los $e_i's$ y la definición de los $\alpha_i's$.Por lo tanto, S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 3.
Supongamos ahora que S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{1, -1\}$, tendremos:

1) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + 2\alpha_4 e_i = 0$ con $i = 2, 3$

2) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + 2\alpha_3 e_2 + 2\alpha_4 e_3 = 0$

3) $\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + 2\alpha_3 e_2 + 2\alpha_4 e_3 = 0$

Análogamente a lo que sucede con las subsecuencias de longitud 2 y 3 se contradicen la independencia de los $e_i's$ y la definición de los α_i, así S no posee subsecuencia de longitud 4.Y por la definición de los elementos de S es fácil notar que no es subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero, por tanto, S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 5.

Así, hemos probado que $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) \geq 6$. ∎

Lema 2.4. $\mathsf{s}_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) = 9$ *y* $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) = 6$.

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ con $\exp(G) = 4$, G esta compuesto por el elemento identidad , 7 elementos de orden 2 y 24 elementos de orden 4. Sea $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_9 \in \mathcal{F}(G)$. Queremos probar que S contiene una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud $\exp(G) = 4$. Si S es libre de cuadrados, basta notar que $\binom{9}{2} = 36 > 32 = |G| > |\sum_2(S)|$ y como consecuencia de la observación 2.2 tenemos que S posee una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Supongamos que S no es libre de cuadrados, con $a_1 = a_2$ y sea $T = a_3 \cdot \ldots \cdot a_9$, por la observación 2.3 podemos suponer que T es libre de cuadrados. Observemos que si encontramos una subsecuencia de T de longitud 4 o 2 con suma $\pm$-ponderada sea cero, entonces tendríamos lo deseado. Sea c el número de términos de T de orden 4 y d el número de términos de T de orden a lo más 2.

Caso 1 $c \leq 2$ y $1 \leq d \leq 5$. T tiene a lo más 2 elementos de orden 4 y al menos 5 de orden 2, digamos a_3, a_4, a_5, a_6 y a_7. Como T es libre de cuadrados y $\binom{7}{2} = 10 > 7$, entonces por Observación 2.5, S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Caso2 $c = 3$ y $d = 4$. Digamos a_7, a_8, a_9 de orden 4 y a_3, a_4, a_5, a_6 de orden a lo más 2. Notemos que como $\binom{4}{2} = 6$ entonces hay 6 subsecuencias de longitud 2 sobre T, $a_i a_j$ con $3 \leq i < j \leq 6$, y por cada subsecuencia se tiene un elemento de orden 2, $a_i + a_j$. Si al menos dos de los elementos a_7, a_8, a_9 son del mismo tipo, digamos a_7, a_8, consideramos $a_7 \pm a_8$. Como $\operatorname{ord}(a_8) = 4$, $a_7 + a_8 \neq a_7 - a_8$ y $a_7 + a_8$, $a_7 - a_8$, $a_i + a_j$ con $i, j \in [3, 6]$ serían 8 elementos de orden 2. Pero G tiene 7 elementos de orden a lo más 2, entonces tenemos:

a) $a_i + a_j = 0$ para algún i, j.

b) $a_7 + \lambda a_8 = 0$ para $\lambda \in \{1, -1\}$.

c) $a_i + a_j = a_{i_1} + a_{j_1}$ para $i_1, j_1 \in \{3, 4, 5, 6\}$.

d) $a_i + a_j = a_7 + \lambda a_8$.

En cualquiera de los casos resulta una subsecuencia de T de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4 o 2.

Ahora, si a_7, a_8, a_9 son de tres tipos distintos, tendríamos cuatro elementos $a_7 \pm a_8 \pm a_9$ distintos, por observación 2.7 parte (2) , los cuales pertenecen al subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2^3$, además, sabemos son elementos de orden 2 en G. Así, tenemos los elementos $a_7 \pm a_8 \pm a_9$, más a_3, a_4, a_5, a_6, son 8 elementos de orden 2 en G.
Si $a_i = a_7 \pm a_8 \pm a_9$ con $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ entonces obtenemos una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.
En otro caso, a_3, a_4, a_5, a_6, $a_7 \pm a_8 \pm a_9$ son todos distintos y serán todos los elementos del subgrupo $\mathbb{Z}_2^3$, ya que para $k > 1$ la suma de todos los elementos de $\mathbb{Z}_2^k$ es cero obtenemos $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + (a_7 + a_8 + a_9) + (a_7 - a_8 - a_9) + (a_7 - a_8 + a_9) + (a_7 + a_8 - a_9) = 0$ implicando $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$, pues $\operatorname{ord}(a_7) = 4$. Así, $a_3 a_4 a_5 a_6$ es subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4 de T, por lo tanto de S.

Caso 3 $c = 4$ y $d = 3$, digamos $\operatorname{ord}(a_6) = \operatorname{ord}(a_7) = \operatorname{ord}(a_8) = \operatorname{ord}(a_9) = 4$ y a_3, a_4, a_5 de orden a lo más 2. Si entre a_6, a_7, a_8, a_9 al menos 3 son del mismo tipo, digamos a_6, a_7, a_8 al considerar: $a_6 \pm a_7$, $a_6 \pm a_8$, $a_7 \pm a_8$ tenemos 6 elementos de orden 2, junto con $a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_5$ tenemos 9 elementos de orden 2. Entonces debe haber un par de tales elementos que coinciden. Como $a_i + a_j$ con $i, j \in \{3, 4, 5\}$ son todos distintos, por ser T libre de cuadrados, entonces, se debe estar repitiendo una de las sumas entre a_6, a_7, a_8 , y como son sumas de elementos de orden 4, de la Observación 2.6 tenemos que T posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Si de los elementos de orden 4 son dos de un tipo, digamos a_6, a_7 y a_8, a_9 de otro tipo, consideramos los elementos: $a_6 \pm a_7, a_8 \pm a_9, a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_5$. Obteniendo 7 elementos de orden 2. Si dos de estos son iguales se obtiene una subsecuencia de longitud 4. Si alguno de los elementos es cero, se obtiene una subsecuencia de longitud 2. Si todos los elementos de orden 2 son distintos, como sabemos que su suma sera igual a cero obtenemos $(a_6+a_7)+(a_6-a_7)+(a_8+a_9)+(a_8-a_9)+(a_3+a_4)+(a_3+a_5)+(a_4+a_5) = 0$, implicando $2a_6 + 2a_8 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 = 2(a_6 + a_8) = 0$, lo cual no es posible, pues $\mathrm{ord}(a_6 + a_8) = 4$. Entonces no se da el caso de que todos los elementos sean distintos.

Finalmente, si dos elementos a_6, a_7 son de un tipo particular y a_8 un tipo distinto a a_9, diferentes a el tipo de a_6, a_7, consideremos la colección: $a_5 + a_6 \pm a_8 \pm a_9$, $a_6 + a_7$, $a_6 + a_7 + a_3 + a_5$, $a_6 + a_7 + a_4 + a_5$ todos de orden 2. Si dos de ellos son iguales, por ejemplo: $a_6 + a_7 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_8 + a_9$ lo que implica que $a_7 + a_4 - a_8 - a_9 = 0$. Se obtiene subsecuencia de T de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Si todos los elementos son distintos, sabemos que la suma de ellos es cero y de allí: $(a_5+a_6+a_8+a_9)+(a_5+a_6-a_8+a_9)+(a_5+a_6+a_8-a_9)+(a_5+a_6-a_8-a_9)+(a_6+a_7)+(a_6+a_7+a_3+a_5)+(a_6+a_7+a_4+a_5) = 0$ implicando que $6a_5+7a_6+3a_7+a_3+a_4 = 0$, de aquí como $\mathrm{ord}(a_5) = 2.$, ocurre que $-a_6 - a_7 + a_3 + a_4 = 0$. Así obtenemos una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Caso 4 $c = 6$ y $d = 1$. Sean $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ de orden 4, y a_3 de orden a lo más 2.

Si de los elementos de orden 4, son del mismo tipo, digamos a_4, a_5, a_6, a_7 , consideramos $a_4 \pm a_j$ con $j \in \{5, 6, 7\}$ y $a_5 \pm a_6$ y tenemos 8 elementos de orden a lo más 2. Si todos son distintos , uno de ellos debe ser cero y resulta una subsecuencia de longitud 2 de suma $\pm$-ponderada cero. Si dos de los elementos son iguales , por Observación 2.6, obtenemos una subsecuencia de longitud 4 o 2 de T, de suma $\pm$-ponderada cero. Si no hay más de 3 elementos de un tipo en particular, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

4.1) Hay 3 elementos de un tipo y al menos dos de otro, digamos sin pérdida de generalidad, a_4, a_5, a_6 y a_7, a_8 respectivamente. Considerando:$a_4 \pm a_5, a_4 \pm a_6, a_5 \pm a_6, a_7 \pm a_8$ tendremos 8 elementos de orden 2.Y ocurren los mismos casos,si son distintos o si alguno se repite, se obtienen subsecuencias de longitud 4 o 2 de T de suma $\pm$-ponderada cero. Si hay dos elementos de orden 4 de cada tipo, digamos a_4, a_5 tipo 1, a_6, a_7 tipo 2, y a_8, a_9 tipo 3. De la Observación 2.7 parte 2), sabemos que $a_4 \pm a_6 \pm a_8$ son cuatro elementos distintos, y del mismo modo consideramos $a_4 \pm a_7 \pm a_9$, obteniéndose 8 elementos de orden 2, por la observación 2.2.Si para $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$ $a_4 + \lambda a_7 + \alpha a_8 = a_4 + \beta a_7 + \gamma a_9$ entonces $\lambda a_7 + \alpha a_8 - \beta a_7 - \gamma a_9 = 0$, obteniéndose una subsecuencia de S de longitud 4 de suma $\pm$-ponderada cero.

Si todos los elementos son distintos y $\text{ord}(a_3) \leq 2$, entonces debe haber un elemento igual a a_3, digamos, sin pérdida de generalidad, $a_3 = a_4 + \lambda a_7 + \alpha a_8$ resulta una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4. Si $\text{ord}(a_3) = 4$ entonces, serán 3 elementos de un tipo en particular y 2 de cada tipo restante respectivamente,y procedemos como antes.

Caso 5. $c = 5$ y $d = 2$. Supongamos a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 de orden 4 y a_3, a_4 de orden a lo más 2. Si hay 3 o 4 elementos de un mismo tipo, procedemos como el caso 4.1. Supongamos que hay elementos de los 3 tipos. Tenemos las siguientes posibilidades. Si a_5 es un tipo, a_6, a_7 de otro tipo y a_8, a_9 del tipo restante. Consideramos los elementos $a_5 \pm a_6 \pm a_8, a_5 \pm a_7 \pm a_9$, se obtienen 8 elementos de orden 2.

Si para $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$ $a_5 + \lambda a_6 + \alpha a_8 = a_5 + \beta a_7 + \gamma a_9$ ocurre que $\lambda a_6 + \alpha a_8 - \beta a_7 - \gamma a_9 = 0$ obteniéndose una subsecuencia de T de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Si los ocho elementos son distintos, entonces a_3 es igual a uno de ellos y $a_3 - a_5 - \lambda a_6 - \alpha a_8 = 0$, con $\lambda, \alpha \in \{-1, 1\}$, obteniendo una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Ahora, si hay 3 elementos de un tipo, digamos a_5, a_6, a_7 y a_8, a_9 cada uno de tipos restantes diferentes respectivamente, consideramos los elementos: $a_5 \pm a_8 \pm a_9, a_5 \pm a_6 + a_3, a_5 \pm a_7 + a_3$, y resultan 8 elementos de orden 2.

Si existen elementos iguales de estos 8, se obtiene una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4. Si son todos los elementos distintos, como a_4 es de orden 2, debe haber un elemento igual a a_4, pero si $a_4 = a_5 + \lambda a_8 + \beta a_9$ entonces $a_4 - a_5 - \lambda a_8 - \beta a_9 = 0$, resultando una subsecuencia de T de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Por Lema 2.3 tenemos que $\eta_{\pm}(G) \geq 6$. Y recordando la Observación 1.1, $\mathsf{s}_{\pm}(G) \geq$

$\eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1$. Tenemos, $9 \geq \mathsf{s}_{\pm}(G) \geq 6 + 4 - 1 = 9$. Entonces, $\mathsf{s}_{\pm}(G) = 9$. Análogamente, $9 \geq \eta_{\pm}(G) + 3 \geq 9$. Luego,

$$\eta_{\pm}(G) = 6.$$

■

Lema 2.5. *Sea G un grupo abeliano de orden 32 y $\exp(G) = 8$ entonces,*

$$\mathsf{s}_{\pm}(G) = 13 \text{ y } \eta_{\pm}(G) = 6$$

Demostración. Sea G un grupo abeliano con $|G| = 32$ y $\exp(G) = 8$. Sea $S = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{13} \in \mathcal{F}(G)$ una secuencia con $|S| = 13$. Queremos demostrar que S posee subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 8.

Caso 1 S es una secuencia libre de cuadrados. Como $\binom{13}{2} = 78 > 32 = |G|$, por Observación 2.2 sabemos que S posee una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4. Luego, considerando $T = SS_1^{-1}$ y notando nuevamente, $\binom{9}{2} = 36 > 32$, obtenemos por Observación 2.2 $S_2 \mid T$ de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4. Así $S_1S_2 \mid S$ es de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 8.

Caso 2) S no es libre de cuadrados. Supongamos $a_1 = a_2$,entonces $T = a_1a_2 = {a_1}^2$ es una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2 de S.

Subcaso 2.1) $L = ST^{-1}$ es libre de cuadrados, observando $\binom{11}{2} > 32$ tenemos que L posee una subsecuencia T_1 de longitud 4. Considerando $L{T_1}^{-1} = ST^{-1}{T_1}^{-1}$ y por las longitudes de cada secuencia tenemos $|T| = 2$, $|ST^{-1}| = 13 - 2 = 11$, $|T_1| = 4$ lo cual implica que $|ST^{-1}{T_1}^{-1}| = 11 - 4 = 7$. Ahora, notando que $|L{T_1}^{-1}| = 7 > \log_2(32) + 1 = 5 + 1 = 6$, entonces, por Teorema 2.2 parte (3), $L{T_1}^{-1}$ posee una subsecuencia T_2 de longitud par de suma $\pm$-ponderada cero. Esto es $|T_2| \in \{2, 4, 6\}$.

Si $|T_2| = 2$ entonces podemos tomar $TT_1T_2 \mid S$ de longitud 8. Si $|T_2| = 4$ considerando T_1T_2 como $|T_1| = 4$, de forma análoga al caso anterior ,obtenemos una subsecuencia longitud 8. Si $|T_2| = 6$ considerando TT_2 ,nuevamente resulta una subsecuencia de longitud 8. Así,en cada caso es posible hallar subsecuencias de S de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 8.

Subcaso 2.2) ST^{-1} no es libre de cuadrados. Sea $a_3 = a_4$ y $U_1 = a_3a_4 = {a_3}^2$ subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 2. Luego $|L| = |ST^{-1}| = 11$ y $|S^*| = |L{U_1}^{-1}| =$

$11-2=9$. Notando que $\binom{9}{2}=36>32$, por la observación 2.2, S^* posee una subsecuencia U_2 de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4 o 2. Si $|U_2|=2$, al considerar $LU_1{}^{-1}U_2{}^{-1}$ con $|LU_1{}^{-1}U_2{}^{-1}|=7>\log_2(32)+1=5+1=6$ por Teorema 2.2, parte (3), $S_b=LU_1{}^{-1}U_2{}^{-1}$ tiene una subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud par U_3. Obteniéndose los mismos casos que en el subcaso 2.1, y así S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 8.

Por otra parte, como $|G|=32$ y $\exp(G)=8$ entonces, G puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_8$ o a $\mathbb{Z}_2^2\oplus\mathbb{Z}_8$.
Supongamos $G=\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_8$. Sea $S=b_1\cdot\ldots\cdot b_5\in\mathcal{F}(G)$, con $b_1=e_1(\overline{1},\overline{0}), b_2=e_2=(\overline{0},\overline{1}), b_3=2e_1, b_4=2e_2, b_5=4e_2$. Veamos que S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero. Es claro que S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 1.

Supongamos que posee subsecuencia de longitud 2 de suma $\pm$-ponderada cero. Tendríamos los siguientes casos: para $\alpha_1,\alpha_2\in\{1,-1\}$

1) $\alpha_1 e_i+\alpha_2 e_j=0$ para $i\neq j$

2) $\alpha_1 e_2+\alpha_2 k e_2=0$ para $k\in\{2,4\}$

3) $\alpha_1 e_1+\alpha_2 2e_1=0$

4) $\alpha_1 2e_1+\alpha_2 k e_2=0$

Por el mismo argumento utilizado en la demostración del lema 2.3, en cada caso se contradice la independencia lineal de los e_i's. Por lo tanto, S no posee subsecuencia de longitud 2.

Para la existencia de subsecuencias de longitud 3, tendríamos los siguientes casos: para $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\{1,-1\}$.

1) $\alpha_1 e_2+\alpha_2 2e_2+\alpha_3 4e_2=0$

2) $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 k e_2=0$ con $k\in\{2,4\}$

3) $\alpha_1 e_1+2\alpha_2 e_1+k\alpha_3 e_2=0$ con $k\in\{1,2,4\}$

En cualquiera de los casos se contradice la independencia de los e_i's y la definición de los $\alpha_i\in\{1,-1\}$. Así S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud

3.

Para subsecuencias de longitud $4,$ con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{1, -1\}$ tenemos los posibles casos:

1) $\alpha_1 e_2 + 2\alpha_2 e_2 + \alpha_3 4e_2 + k\alpha_4 e_1 = 0$ con $k \in \{1, 2\}$.

2) $\alpha_1 e_1 + 2\alpha_2 e_1 + k_1\alpha_3 e_2 + k_2\alpha_4 e_2 = 0$ con $k_1 \neq k_2; k_1, k_2 \in \{1, 2, 4\}$.

Por el mismo argumento utilizado anteriormente para subsecuencias de longitud 2 y $3, S$ no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Para el caso de subsecuencia de longitud $5,$ es claro que S no es suma $\pm$-ponderada cero, por tanto no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 5.De aquí, podemos concluir que $\eta_{\pm}(G) \geq 6$.

Si $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ considerando la secuencia $S = c_1 \cdot \ldots \cdot c_5 \in \mathcal{F}(G)$, donde $c_1 = e_1, c_2 = e_2, c_3 = e_3, c_4 = 2e_3, c_5 = 4e_3,$ recordando que $e_1 = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), e_2 = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), e_3 = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$.

Es claro que no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 1.

Supongamos que S posee subsecuencia suma cero de longitud 2. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1, -1\}$, se dan los siguientes casos:

1) $\alpha_1 e_3 + \alpha_2 k e_3 = 0$ con $k \in \{2, 4\}$

2) $k\alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_i = 0$ con $k \in \{1, 2, 4\}$ y $i = 1, 2$

3) $\alpha_1 e_i + \alpha_2 e_j = 0$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2\}$

Nuevamente, haciendo uso del mismo argumento para la demostración del lema 2.3 en cualquiera de los casos se contradice la independencia de los e_i's y la definición de los $\alpha_i,$ así que S no posee subsecuencia de longitud 2. Ahora, supongamos que S posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 3. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1, -1\}$

1) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + k\alpha_3 e_3 = 0$ con $k \in \{1, 2, 4\}$

2) $\alpha_1 e_3 + \alpha_2 2e_3 + \alpha_3 4e_3 = 0$

3) $\alpha_1 e_i + \alpha_2 k_1 e_3 + \alpha_3 k_2 e_3 = 0$ con $k_1 \neq k_2$ y $k_1, k_2 \in \{1, 2, 4\}$

En cada caso se contradice la independencia de los e_i's y la definición de los α_i. Así S no posee subsecuencia de suma $\pm$-ponderada cero de longitud 3.

Para subsecuencias de longitud 4, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{1, -1\}$

1) $\alpha_1 e_3 + 2\alpha_2 e_3 + 4\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_i = 0$ para $i = 1, 2$

2) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 k_1 e_3 + \alpha_4 k_2 e_3 = 0$ con $k_1 \neq k_2$ y $k_1, k_2 \in \{1, -1\}$

Nuevamente se contradice la independencia de los e_i's y, en consecuencia, S no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 4.

Por la definición de S, se puede notar que no es suma $\pm$-ponderada cero, y por tanto no posee subsecuencia suma $\pm$-ponderada cero de longitud 5.

Por tanto, podemos concluir que $\eta_\pm(G) \geq 6$.

Recordando la Observación 1.1, $\mathsf{s}_\pm(G) \geq \eta_\pm(G) + \exp(G) - 1$ y $\mathsf{s}_\pm(G) \leq 13$

$$13 \geq \mathsf{s}_\pm(G) \geq \eta_\pm(G) + 8 - 1 \geq 6 + 7 \geq 13$$

Esto muestra el lema. ∎

Teorema 2.4. *Si G es un grupo abeliano de orden 32 entonces,*

$$\mathsf{s}_\pm(G) = \eta_\pm(G) + \exp(G) - 1.$$

Demostración. Sea G un grupo abeliano finito con $|G| = 32$. Como $|G| = 32$ entonces, los posibles valores para el exponente de G son $\exp(G) = 2, 4, 8, 16, 32$.

Supongamos que $\exp(G) = 32$, entonces G es cíclico . En este caso $\mathsf{E}_\pm(G) = \mathsf{s}_\pm(G)$ y por el Lema pre-histórico (Lema 1.1), $\mathsf{D}_\pm(G) \leq \mathsf{D}(G) \leq |G|$ entonces se cumple $\mathsf{D}_\pm(G) = \eta_\pm(G)$ y por la relación 1.3

$$\mathsf{s}_\pm(G) = E_\pm(G) = |G| + \mathsf{D}_\pm(G) - 1 = \eta_\pm(G) + |G| - 1 = \eta_\pm(G) + \exp(G) - 1.$$

Si $\exp(G) = 16$, en este caso $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ entonces, por el Corolario 2.2, se cumple la igualdad.

Si $\exp(G) = 8$, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ o $G \simeq \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_8$, por Lema 2.5 se da la igualdad del teorema.

Si $\exp(G) = 4$, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4$ o $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y por Lema 2.2 y Lema 2.4 respectivamente, se cumple la igualdad.

Por ultimo, si $\exp(G) = 2$, por el corolario 2.1, se satisface la igualdad. ∎

Conclusiones

Una generalización de una conjetura de Gao (Conjetura 1.1) es la siguiente relación

$$\mathsf{s}_{\pm}(G) = \eta_{\pm}(G) + \exp(G) - 1, \tag{2.2}$$

donde G es un grupo abeliano finito. En este trabajo se calcularon las constantes $\eta_{\pm}(G)$ y $\mathsf{s}_{\pm}(G)$ cuando G es un 2-grupo elemental, o G es la forma $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ (con n potencia de 2), o G tiene orden a lo más 32. En dichos casos se verificó que se satisface la relación 2.2. Además se estimó el valor de $\eta_{\pm}(\mathbb{Z}_2^r \oplus \mathbb{Z}_{2n})$.

Consideramos que las técnicas usadas para los cálculos de las constantes en este trabajo pueden ser usadas para calcular o estimar los valores de las constante de Harborth y su análoga $\pm$-ponderada.

En general, la relación 1.1 permanece abierta, y se ha logrado verificar únicamente para cuando los valores de $\mathsf{s}_{\pm}(G)$ y $\eta_{\pm}(G)$ han sido calculados.

Referencias Bibliográficas

[1] S. Adhikari, Y. Chen, J. Friedlander, S. Konyagin and F. Pappalardi. Contributions to zero-sum problems. *Discrete Math.*,**Vol. 306** (2006), 1-10.

[2] S. Adhikari, D. Grynkiewicz and Z. Sun. On weighted zero-sum sequences. *Adv. in Appl. Math.*, **Vol 48** (2012), 506-527.

[3] S. Adhikari, E. Masundar, B. Moriya. Relation between two weighted zero-sum constants *Integer*, **Vol. 16, ♯ A No. 20** (2016) 1-13.

[4] P. Erdös, A. Ginzburg and A. Ziv. A theorem in additive number theory. *Bull. Res. Council Israel*, **Vol. 10F** (1961), 41-43.

[5] P. Erdös and R. Graham. Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory. *L Enseignement Mathematique, Universitè Genève*, (1980).

[6] W. Gao. A combinatorial problem on finite abelian groups. *J. Number Theory*, **Vol. 58** (1996), 100-103.

[7] W. Gao. On zero sum subsequences of restricted size II. *Discrete Math.* **Vol. 271**, (2003) 51-559.

[8] A. Geroldinger and F. Halter-Koch. Non-unique factorizations. *Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory, Pure and Applied Mathematics*, **vol. 278**, Chapman and Hall/CRC, (2006).

[9] D. Grynkiewicz, L. Marchan and O. Ordaz. A weighted generalization of two theorems of Gao. *Ramanujan J.*, **vol. 28** (2012), 323-340.

[10] H. Harborth. Ein extremalproblem für gitterpunkte. *J. Reine angew math.* **Vol. 262/263**, (1973) 356-360.

[11] T. Hungerford. Algebra. Springer-Verlag, New York (1974).

[12] L. Marchan, O. Ordaz, D. Ramos, W. Schmid. Inverse results for weighted Harborth constants. *International Journal of Number Theory.* **Vol. 12, No. 7** (2016) 1845-1861.

[13] L. Marchan, O. Ordaz, D. Ramos and W. Schmid, Some exact values of the Harborth constant and its plus-minus weighted analogue, *Arch. Math.* **Vol. 101** (2013), 501-512.

[14] B. K. Moriya, On weighted zero sum subsequences of short length. *Integers* **Vol. 14, A21**, (2014).

[15] K. Rogers. A combinatorial problem in Abelian groups. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **Vol. 59** (1963), 559-562.