

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL  
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología  
Postgrado



OSCILACIONES DE NEUTRINOS  
DE DOS ESPECIES

**Autor:** Graciela Medina  
**Tutor:** Rafael Omar Rodríguez

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Centroccidental  
“Lisandro Alvarado” como requisito para optar al título de Especialista en  
Física para la Enseñanza.

Barquisimeto, Mayo 2016



# Resumen

El propósito de este trabajo es hacer una revisión bibliográfica sobre las probabilidades de transición entre neutrinos de sabor electrónico y muónico y su relación con la masa de los mismos. También se comparan las gráficas obtenidas de data experimental, con las gráficas de las probabilidades de oscilación entre los neutrinos.

# Índice general

<b>Índice de Figuras</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Decaimiento <math>\beta</math></b>	<b>1</b>
1.1. Energía remanente en el decaimiento $\beta^-$	1
1.2. Predicción de la existencia de Neutrino	7
<b>2. Campo Espinorial</b>	<b>9</b>
2.1. Representaciones de Lorentz	9
2.2. Lagrangiano de Dirac	13
2.3. Invariancia de Lorentz en la teoría de Dirac	13
2.4. Invariancia local bajo U(1)	15
<b>3. Base de sabor y base de masa</b>	<b>18</b>
3.1. Matriz de mezcla	18
3.2. Neutrinos de masa	20
<b>4. Probabilidades de Transición</b>	<b>24</b>
4.1. El Escenario	24
4.1.1. Probabilidad de Oscilación $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$	25
4.1.2. Probabilidad de Oscilación $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e)$	27
<b>Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>Apéndices</b>	<b>41</b>
<b>A. Densidad de probabilidad en la ecuación de Dirac</b>	<b>41</b>
<b>B. Campo de Maxwell</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Índice de figuras

1.	Modelo estándar de partículas elementales. Tomado del Particle Data Group.	v
2.	Esquema de radiación de Cherenkov que se genera cuando un neutrino interactúa débilmente con un neutrón.	VI
1.1.	$n \rightarrow p^+ + e^-$	1
1.2.	Decaimiento del Bismuto en Polonio	4
1.3.	Gráfica artesanal donde se muestra la distribución de energética esperada para 20 electrones emitidos en el decaimiento $\beta$ del Bismuto.	6
1.4.	Espectro de energía cinética para 20 electrones emitidos en el decaimiento $\beta$ del Bismuto.	6
2.1.	Evento en sistemas de referencia S y S'	9
3.1.	Coordenadas de un punto P en un espacio plano bidimensional.	19
3.2.	Representación de coordenadas polares	19
3.3.	Representación de los vectores unitarios cartesianos y polares	20
4.1.	Diagrama de un neutrino electrónico que se desplaza desde una fuente de neutrinos hasta un detector que se encuentra a una distancia $L$ .	24
4.2.	Detección de un neutrino electrónico mediante radiación de Cherenkov.	25
4.3.	Oscilación de un neutrino electrónico a uno muónico.	26
4.4.	Detección de un neutrino electrónico	28
4.5.	Gráfica de la probabilidad de oscilación $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ en función de la longitud $L$ medida desde el origen de la fuente de neutrinos al detector.	30
4.6.	Gráfica logarítmica de la probabilidad de oscilación $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$	32
4.7.	Gráfica de resultados experimentales por diversos estudios en reactores. [2], [1]	33
4.8.	Gráfica de la probabilidad de oscilación $P(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ en función de $L$ .	33
4.9.	Gráfica logarítmica de la probabilidad de oscilación $P(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$	35
4.10.	Gráfica logarítmica de las probabilidades de transición $P(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , en amarillo, y $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ , en azul, en función de $L$ .	36
4.11.	Gráfica de las probabilidades de transición $P(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , en amarillo, y $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ , en azul, en función de $L$ .	39

# Introducción

La desintegración  $\beta$  es el proceso mediante el cual un núcleo inestable produce radiación bajo la forma de un flujo de electrones de alta energía [3]. Estos electrones se emiten con una distribución de energía continua, es decir, se emiten con cualquier valor de cero hasta un valor máximo que es característico de cada sustancia. Este hecho resultó un problema en los años 1914 y 1915, debido a que se esperaba que la partícula beta (electrón o positrón) se emitiera con un valor constante de energía cinética, pues toda la energía disponible en el decaimiento se la debía llevar la partícula emitida en forma de movimiento, para cumplir con la ley de la conservación de la energía en este fenómeno.

En particular en el decaimiento  $\beta^-$  un neutrón libre se convierte en un protón, y se genera un electrón. Adicionalmente considerando la conservación del ímpetu y de la energía se concluye que todos los electrones deben emitirse con un valor constante. Sin embargo experimentalmente lo que resulta es un rango de energía para los electrones que se emiten por debajo de este valor constante. En tal sentido esta “sobrando” energía disponible en el decaimiento. Para justificar este remanente, sin cuestionar las leyes de conservación de la energía y de la carga, se propone (Pauli) [3] la existencia de una nueva partícula que sea de carga nula, ya que en este decaimiento, un neutrón emite un protón y un electrón, es decir la carga se encuentra compensada antes y después de la desintegración, por lo que la nueva partícula no debe tener carga para cumplir con la conservación de la carga. También debe tener masa nula y que se lleve la energía sobrante como energía de movimiento. De esta forma la distribución de energía que resulta en el decaimiento es debido a que tanto el electrón como esta nueva partícula comparten la energía de transición de forma que siempre sumen la energía total. A esta partícula se le conoce como neutrino.

Los neutrinos son fermiones y por lo tanto son descritos por la ecuación de Dirac [4]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 ,$$

la cual es la versión relativista de la ecuación de Schrödinger. Esta ecuación es invariante de Lorentz en la representación espinorial, e invariante local bajo U(1) mediante el acoplamiento mínimo que introduce el campo electromagnético  $A_\mu$ . Sin embargo al no ser invariante bajo U(1) la ecuación de Dirac sin el acoplamiento del campo, sugiere que la ecuación describe partículas sin carga, como lo son los neutrinos.

En el modelo estándar de física de partículas se identifican tres tipos de neutrinos que se asocian a cada una de las familias leptónicas Figura 1 [5].

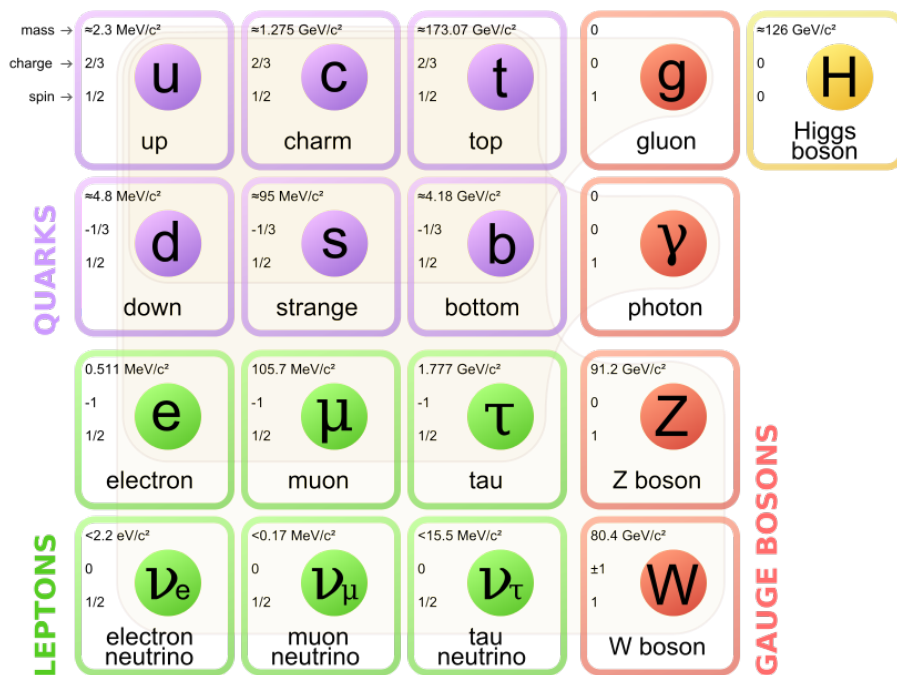


Figura 1: Modelo estándar de partículas elementales. Tomado del Particle Data Group.

Las familias a las que pertenece los neutrinos se diferencian porque en cada una se encuentra un leptón de masa diferente, es decir a la primera familia pertenece el electrón, a la segunda le corresponde el leptón muón que es 200 veces mas masivo que el electrón y a la tercera familia pertenece el leptón tau mucho más masivo que los primeros dos, sin embargo los neutrinos que pertenecen a estas familias se asocian a ellas por las reacciones que existen, es decir, en una reacción asociada al electrón se observan neutrinos electrónicos  $\psi_e$ , en una reacción asociada al muón se observa el neutrino muónico  $\psi_\mu$ , lo propio con el neutrino tauónico  $\psi_\tau$ , y nunca se han observado en las reacciones de cada leptón neutrinos asociados a otra familia leptónica [1].

Los neutrinos observados en la tierra pueden tener varios orígenes. Pueden ser producidos en aceleradores, en reactores nucleares, y también en las reacciones nucleares dentro de las estrellas en particular en la base del sol y en las explosiones de supernovas [1]. Es complejo detectar neutrinos de cualquier origen, debido a que son partículas sin carga eléctrica por lo que son insensibles a interacciones electromagnéticas y en principio su masa es nula. Sin embargo, actualmente se han construido detectores enormes que se encuentran muy por debajo del nivel de la tierra para filtrar otro tipo de partículas y asegurar que lleguen solo neutrinos. Estos interaccionan débilmente con átomos del medio el cual puede ser agua o hielo y producen leptones que se mueven más rápido que la luz en dicho medio, lo que genera un destello de luz llamado radiación de Cherenkov (para mayor información divulgativa ver [6]). Este destello se emite como un anillo de luz, Figura 2, en la dirección del leptón que a su vez es aproximadamente la dirección del neutrino que lo originó, por lo que midiendo el tamaño, la ubicación y la intensidad el anillo de luz es posible reconstruir la dirección en la que el neutrino se movía y su energía.

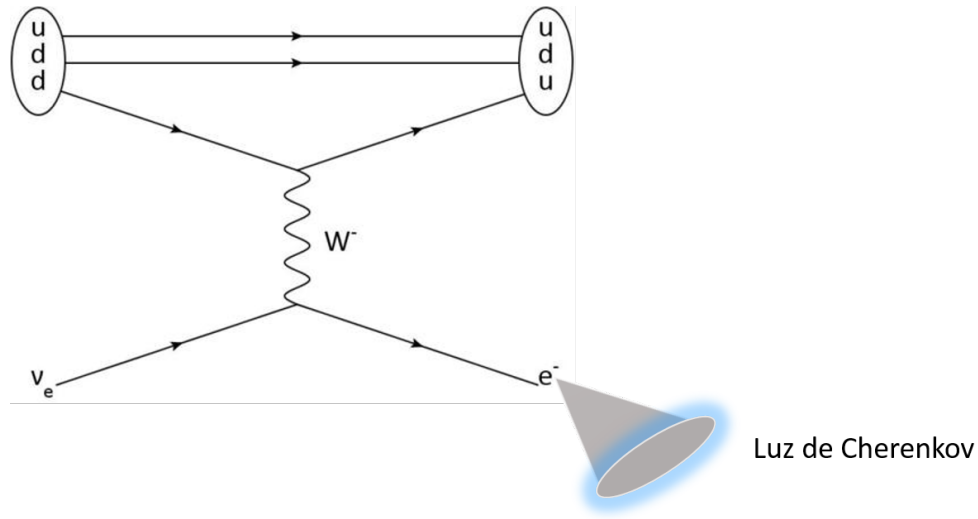


Figura 2: Esquema de radiación de Cherenkov que se genera cuando un neutrino interactúa débilmente con un neutrón.

Entre las características que deben tener los neutrinos según el decaimiento  $\beta$ , es que son de masa nula. Sin embargo, en los detectores creados para atrapar neutrinos se observaron oscilaciones cuánticas entre dichas partículas, este hecho hizo acreedor de premios Nobel a los Físicos Arthur McDonalds y Takaaki Kajita [7], [8]. Este fenómeno es propio de partículas con masa. Lo que ocurre es que los haces de neutrinos de un sabor particular recibidos son menores a los esperados [9], y la explicación a dicho problema es que los neutrinos oscilan. Es decir un neutrino de un sabor al propagarse por cierto tiempo puede transformarse en un neutrino de otro sabor.

Para describir el fenómeno de oscilaciones de neutrinos entre dos especies, en la presente tesis se trata en el Capítulo 1 el decaimiento  $\beta$  y se realizan los cálculos de la energía disponible, para introducir la predicción de la existencia del neutrino a causa de la energía que “sobra” como argumento para respaldar la conservación del ímpetu y de la energía. Luego en el Capítulo 2 se describen las ecuaciones de Dirac y sus Lagrangeanas, para una partícula libre y su antipartícula. Y con el fin de asegurar que estas ecuaciones describen correctamente partículas relativistas, se prueba la transformación de Lorentz en la representación espinorial. En el Capítulo 3 se estudian los neutrinos en una base de sabor que se transforma a una base de masa vía una matriz de mezcla, y se analiza la Lagrangeana de Dirac para una partícula masiva.

Luego en el Capítulo 4 se describe el proceso de detectar neutrinos que da pie a las oscilaciones entre sabores, y luego se calcula la probabilidad de transición de que un neutrino electrónico sea visto como muónico en función de la longitud medida desde la fuente emisora de neutrinos hasta el detector  $L$ , esto es  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , y la probabilidad de que un neutrino electrónico sea visto como el mismo,  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ . Por último se anexan las conclusiones donde se discuten los resultados obtenidos.

Es importante acotar que en los Capítulos 2, 3 y 4 se usa el sistemas de unidades



naturales donde

$$\hbar = 1, c = 1, \quad (1)$$

debido a que simplifica la estructura de las ecuaciones ya que elimina constantes de proporcionalidad, y como resultado la longitud y el tiempo se miden en las mismas unidades. El uso de este sistema también trae como ventaja que se puede llevar al sistema de unidades que se desee, introduciendo los valores para  $\hbar$  y  $c$  en dicho sistema.

# Capítulo 1

## Decaimiento $\beta$

En el decaimiento  $\beta^-$  un neutrón se desintegra en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico. En el presente Capítulo se muestra como la conservación de la energía en el decaimiento  $\beta$  permite predecir la existencia del neutrino. Esto se hace mediante un tratamiento clásico, ya que en experimentos para decaimientos radiactivos, se sabe que los detectores usados para medir la energía de movimiento de los electrones son diseñados para calcular dicha energía considerando las propiedades corpusculares de los electrones, por lo que se le da un tratamiento de partículas clásicas. El concepto de función de onda se usará en el Capítulo 4 donde se hacen cálculos de probabilidad.

### 1.1. Energía remanente en el decaimiento $\beta^-$

En el decaimiento  $\beta^-$  un neutrón decae en un protón y un electrón.

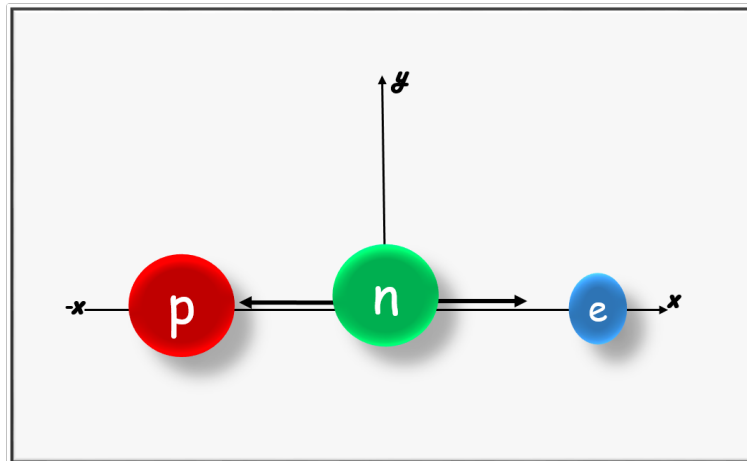


Figura 1.1:  $n \rightarrow p^+ + e^-$

Teniendo en cuenta que inicialmente el neutrón está en reposo, y usando la Ley de conservación del ímpetu se tiene

$$\vec{0} = \vec{P}_e + \vec{P}_p \rightarrow \vec{P}_e = -\vec{P}_p, \quad (1.1)$$

el momento lineal del electrón y el protón tienen igual magnitud, pero sentido contrario.

Usando la Ley de conservación de la energía, se tiene

$$E_n = E_e + E_p \quad (1.2)$$

donde  $E_n$  es la energía del neutrón que se encuentra en reposo,  $E_e$  es la del electrón y  $E_p$  es la energía del protón resultante en el decaimiento. Elevando al cuadrado (1.2) y considerando el desarrollo del término  $(E_e E_p)^2$ , resulta

$$2E_e^2 E_p^2 = E_n^4 + E_e^4 + E_p^4 - 2E_n^2 E_e^2 - 2E_n^2 E_p^2 . \quad (1.3)$$

Usando

$$|\vec{P}_e| = |\vec{P}_p| = P ,$$

y las ecuaciones correspondientes para las energías relativistas del neutrón en reposo, el protón y el electrón resultante, esto es

$$E_n^2 = m_n^2 c^2 , \quad (1.4)$$

$$E_p^2 = P^2 c^2 + m_p^2 c^4 , \quad (1.5)$$

$$E_e^2 = P^2 c^2 + m_e^2 c^4 , \quad (1.6)$$

sustituyendo (1.4), (1.5) y (1.6) en (1.3) se tiene

$$2(P^2 c^2 + m_e^2 c^4)(P^2 c^2 + m_p^2 c^4) = m_n^4 c^4 + (P^2 c^2 + m_e^2 c^4)^4 + (P^2 c^2 + m_p^2 c^4)^4 - 2m_n^2 (P^2 c^2 + m_e^2 c^4) - 2m_n^2 (P^2 c^2 + m_p^2 c^4) , \quad (1.7)$$

simplificando

$$2m_e^2 m_p^2 c^2 = m_n^4 c^2 + m_e^4 c^2 + m_p^4 c^2 - 4m_n^2 P^2 - 2m_n^2 m_e^2 c^2 - 2m_n^2 m_p^2 c^2 , \quad (1.8)$$

la expresión para  $P^2$  es

$$P^2 = \frac{c^2}{4m_n^2} (m_n^4 + m_e^4 + m_p^4 - 2m_n^2 m_e^2 - 2m_n^2 m_p^2) . \quad (1.9)$$

Sustituyendo en (1.6) resulta

$$\begin{aligned} E_e^2 &= P^2 c^2 + m_e^2 c^4 , \\ &= \frac{c^4}{4m_n^2} (m_n^4 + m_e^4 + m_p^4 - 2m_n^2 m_e^2 - 2m_n^2 m_p^2) + m_e^2 c^4 , \\ &= \frac{c^4}{4m_n^2} (m_n^4 + m_e^4 + m_p^4 + 2m_n^2 m_e^2 - 2m_n^2 m_p^2) , \\ &= \frac{c^4}{4m_n^2} (m_n^2 + m_e^2 - m_p^2)^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía del electrón es

$$E_e = \left[ \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n} \right] c^2 . \quad (1.10)$$

Ahora la energía de movimiento,<sup>1</sup> es

$$K_e = E_e - m_e c^2 = \left[ \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n} - m_e \right] c^2 , \quad (1.11)$$

considerando las masas  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ ,  $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ , y  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ , dadas por [10] en (1.11) resulta

$$K_e = \left[ \frac{(1,6749 \cdot 10^{-27} \text{kg})^2 + (9,1094 \cdot 10^{-31} \text{kg})^2 - (1,6726 \cdot 10^{-27} \text{kg})^2}{2(1,6749 \cdot 10^{-27} \text{kg})} - 9,1094 \cdot 10^{-31} \text{kg} \right] 3 \cdot 10^8 \text{m/s} , \quad (1.12)$$

es decir,

$$K_e = 1,2472 \cdot 10^{-13} \text{J} \frac{1 \text{Mev}}{1,602 \cdot 10^{-13} \text{J}} = 0,78 \text{Mev} ,$$

Por tanto todos los electrones que se emiten en el decaimiento de un neutrón libre, salen con una energía cinética de  $0,78 \text{Mev}$ .

Un evento equivalente al anterior, pero que se repite con más regularidad en la naturaleza, es el de núcleos inestables, como por ejemplo, un núcleo de Bismuto, Figura 1.13, que decae a su estado base, uno de Polonio.

Sea el número atómico<sup>2</sup> del Bismuto  $Z = 83$  y el número másico<sup>3</sup>, tanto para el Bismuto y el Polonio,  $A = 210$ , se tiene



Usando conservación de la energía

<sup>1</sup>la energía cinética relativista del electrón es

$$E = mc^2 , \quad \text{con} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde  $m_0$  es la masa en reposo de la partícula que se quiere describir. Ahora reescribiendo  $m$  resulta

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

para partículas con  $v \ll c$  se tiene la expansión binomial

$$m = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

por lo tanto

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} \longrightarrow E = m_0 c^2 + K$$

y para el electrón en cuestión se tiene que  $m_0 = m_e$ , y  $K = K_e$ .

<sup>2</sup>El número atómico  $Z$  es el número total de protones que contiene el núcleo de un átomo.

<sup>3</sup>El número másico  $A$  es la suma del número de protones y de neutrones del núcleo de un átomo.

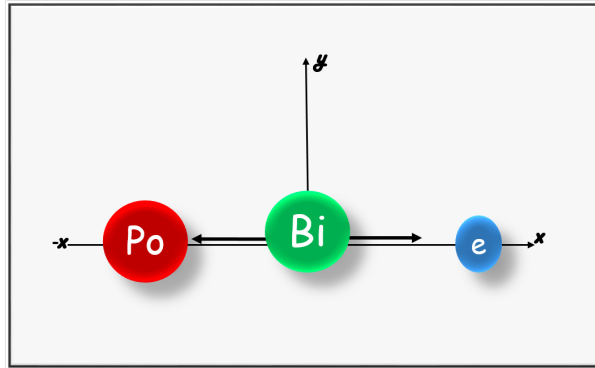


Figura 1.2: Decaimiento del Bismuto en Polonio

$$E_{n1} = E_e + E_{n2} , \quad (1.14)$$

donde  $E_{n1}$  es la energía asociada a la masa en reposo del núcleo de Bismuto, asumiendo que está inicialmente en reposo.  $E_e$  es la energía total del electrón que se reparte entre la energía asociada a su masa y a su movimiento y  $E_{n2}$  es la energía asociada a la masa del núcleo de Polonio mas su energía cinética, esto es

$$E_{n1} = m_{Z,A}c^2 , \quad (1.15)$$

$$E_e = K_e + m_e c^2 , \quad (1.16)$$

$$E_{n2} = K_2 + m_{Z+1,A}c^2 . \quad (1.17)$$

Sustituyendo en (1.14) se tiene

$$m_{Z,A}c^2 = K_e + m_e c^2 + K_2 + m_{Z+1,A}c^2 . \quad (1.18)$$

Ahora definiendo

$$Q \equiv K_e + K_2 , \quad (1.19)$$

se tiene que

$$Q = [m_{Z,A} - (m_{Z+1,A} + m_e)]c^2 , \quad (1.20)$$

es la energía disponible para el movimiento de las partículas que surgen después del decaimiento y que viene de la diferencia entre la energía asociada a la masa en reposo del núcleo de bismuto antes del decaimiento y la energía asociada a la masa tanto del núcleo de Polonio como la del electrón después del decaimiento.

De la ecuación (1.20) se observa que la energía cinética de los electrones no pueden superar la energía disponible en el decaimiento,  $K_e < Q$  y puesto que los núcleos son mas masivos que los electrones, prácticamente no llevan energía cinética,  $K_2 \ll K_e$ . Entonces los electrones se llevan toda la energía disponible en el decaimiento en forma de energía cinética y por lo tanto  $K_e \sim Q$ .

Para obtener las masas de los núcleos en términos de las masas atómicas  $M$ , la cual es la masa del átomo y es encontrada mucho más frecuente en las bibliografías que la masa  $m$

de los núcleos, es necesario restar  $Z$  masas electrónicas que es la masa que corresponde a los electrones del átomo y así obtener solo la masa del núcleo, en unidades  $u$ <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} m_{Z,A} &= M_{Z,A} - Zm_e = 209,984096u - (83)5,485798 \cdot 10^{-4}u = 209,938563 u , \\ m_{Z+1,A} &= M_{Z+1,A} - (Z+1)m_e = 209,982848u - (83 + 1)5,485798 \cdot 10^{-4}u = 209,936767 u . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Sustituyendo en (1.20) resulta

$$Q = [209,938563u - (209,936767u + 5,485798 \cdot 10^{-4}u)]931,50000Mev/u , \quad (1.22)$$

resolviendo

$$Q \sim 1,16Mev .$$

Este resultado de  $Q$  se hará uso más adelante para compararlo con la energía cinética de los electrones.

Ahora considérese la energía total de los electrones emitidos que puede calcularse a partir de (1.10), ya que el sistema  $n \rightarrow p^+ + e^-$  es equivalente al del Bismuto debido a que inicialmente se tiene un neutrón que decae a dos partículas y en el decaimiento  $\beta$  para el Bismuto lo propio, por lo que preserva las mismas condiciones y ecuaciones de conservación esto es

$$E_e = \left[ \frac{m_{Z,A}^2 + m_e^2 - [m_{Z+1,A}^2]}{2m_{Z,A}} \right] c^2 . \quad (1.23)$$

Sustituyendo las masas de los núcleos y del electrón se tiene

$$E_e = \left[ \frac{(209,938563u)^2 + (5,485798 \cdot 10^{-4}u)^2 - (209,936767u)^2}{2 \cdot 209,938563u} \right] 931,5 \frac{Mev}{u} , \quad (1.24)$$

esto es

$$E_e \sim 1,66Mev ,$$

y la energía cinética del electrón es

$$K_e = E_e - m_e c^2 = 1,66Mev - 0,5Mev = 1,16Mev \quad (1.25)$$

lo que sugiere que los electrones se emiten con un valor constante de  $1,16Mev$  y comparando con  $Q$  se observa que los electrones se llevan toda la energía disponible (1.22) del decaimiento  $\beta$  del Bismuto, en forma de energía cinética y por la ecuación (1.19) el núcleo de Polonio resultante queda en reposo.

Para ilustrar la energía calculada, considérese una muestra de Bismuto con decaimiento  $\beta$  y a cierta distancia un detector que mide la energía cinética de los electrones emitidos, entonces, para una data asociada a veinte electrones es de esperar un gráfico como el de la Figura 1.3.

---

<sup>4</sup> $u$  es la unidad de masa atómica unificada ampliamente usada para expresar la masa de los átomos y equivale a  $1u = 1,660538921 \cdot 10^{-27}kg$

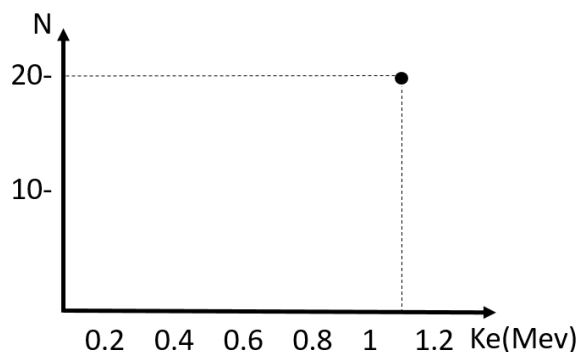


Figura 1.3: Gráfica artesanal donde se muestra la distribución energética esperada para 20 electrones emitidos en el decaimiento  $\beta$  del Bismuto.

De la Figura 1.3 se puede concluir que los veinte electrones que se emiten en el decaimiento  $\beta$  del Bismuto salen con la misma energía cinética de  $1,16\text{MeV}$ .

Ahora supónganse que la curva experimental obtenida para los veinte electrones emitidos del decaimiento  $\beta$  del Bismuto es la mostrada en la Figura 1.4. Esta corresponde a un perfil real [11] que ha sido editado con fines didácticos para ilustrar la distribución energética que ocurre experimentalmente en veinte electrones emitidos. De esta gráfica se observa que siete electrones se emiten con energía de  $0,1\text{MeV}$ , cinco con  $0,25\text{MeV}$ , cuatro con  $0,3\text{MeV}$ , tres electrones corresponden a  $0,4\text{MeV}$  y un electrón se emite con energía cinética de  $0,65\text{MeV}$ .

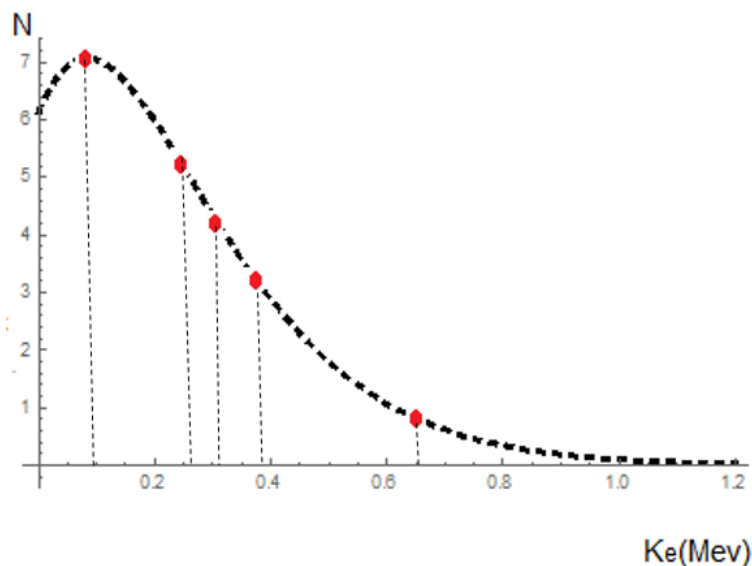


Figura 1.4: Espectro de energía cinética para 20 electrones emitidos en el decaimiento  $\beta$  del Bismuto.

Ahora de este nuevo gráfico se observa

1. Los electrones se emiten con diferentes valores para la energía cinética.
2. La mayor densidad de electrones emitidos son a energías bajas en comparación a la esperada en Figura 1.3
3. Los electrones emitidos no superan la cota máxima de energía cinética, como era de esperar, es decir ningún electrón supera la energía disponible en el decaimiento.

## 1.2. Predicción de la existencia de Neutrino

Comparando la gráfica de la predicción teórica para la energía cinética de los electrones, Figura 1.3, donde todos salen con una energía constante y la que se obtiene midiendo “experimentalmente”, Figura 1.4, se refleja una diferencia notable. En la gráfica “experimental” se emiten electrones con menor energía cinética a la disponible para el movimiento, por lo que falta energía del decaimiento que esta “sobrando”, y debido a esta diferencia entre la predicción teórica y el resultado experimental, se deben cuestionar las premisas consideradas en el análisis teórico. Esto es

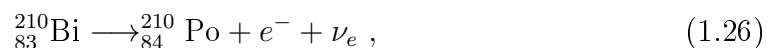
1. Conservación del impulso lineal: Tomando en cuenta que este tipo de decaimiento cumple con todas las características de una colisión inversa, y considerando que en toda colisión relativista y no relativista el impulso lineal se conserva, resulta una premisa muy sólida para sugerir que no se conserve el ímpetu en este caso.
2. Conservación de la energía relativista en el decaimiento: Se cumple en todos los fenómenos relativistas conocidos, y por ende no hay razón alguna para cuestionar su validez en este fenómeno.
3. El núcleo decae en dos partículas, el nuevo núcleo y un electrón: Esta es la premisa mal argumentada por descarte y se concluye que debe existir otra partícula.

En consecuencia la presencia de una nueva partícula que no ha sido considerada en el decaimiento puede explicar la energía que esta “sobrando” en el proceso. Esta partícula debe tener las siguientes características:

1. La carga de la nueva partícula debe ser nula, ya que en el proceso de decaimiento  $\beta$  del Bismuto, la carga esta compensada. Inicialmente se tiene un neutrón dentro del núcleo que decae a un protón y un electrón. En términos de las cargas en unidades de Coulombs ( $C$ ) para el Bismuto, el Polonio y el electrón, es

$$1,328 \cdot 10^{-19}C = 1,344 \cdot 10^{-19}C - 1,6 \cdot 10^{-19}C .$$

2. La masa en reposo de la partícula debe ser nula, o muy pequeña, debido a que si se calcula de nuevo la energía disponible en el decaimiento  $Q$ , pero ahora tomando en cuenta esta nueva partícula a quien se le denominará  $\nu_e$  con masa  $m_{\nu_e}$ , se tiene





y usando la ecuación (1.20)

$$Q = [m_{Z,A} - (m_{Z+1,A} + m_e + m_{\nu_e})]c^2, \quad (1.27)$$

resulta

$$m_{\nu_e}c^2 = [M_{Z,A} - M_{Z+1,A}] - Q, \quad (1.28)$$

y usando los datos de (1.22) se tiene

$$m_{\nu_e}c^2 = 1,16Mev - Q. \quad (1.29)$$

Ahora bien, experimentalmente el decaimiento  $\beta$  se muestra como algunos electrones se emiten con toda la energía disponible [11], esto es  $K_e = Q = 1,16Mev$  que sustituyendo en (1.29) se tiene

$$m_{\nu_e}c^2 = 1,16Mev - 1,16Mev = 0 \longrightarrow m_{\nu_e} = 0 \quad (1.30)$$

Concluyéndose de esta forma que la masa de esta nueva partícula debe ser nula.

# Capítulo 2

## Campo Espinorial

En el Capítulo 1, mediante el estudio del decaimiento  $\beta$ , se demostró que los neutrinos son partículas de carga y masa nula, sin embargo, realizan un fenómeno de oscilación cuántica entre sabores, lo cual es propio de partículas con masas, esto se describirá más adelante haciendo uso de la ecuación de Dirac. En tal sentido en este capítulo se estudia de forma general la ecuación de Dirac para un fermión masivo y las propiedades relativistas y de calibre de esta teoría.

### 2.1. Representaciones de Lorentz

La dinámica de un fermión viene dada por la ecuación de Dirac, para conocer como transforma este campo bajo Lorentz, es necesario estudiar las representaciones de Lorentz como sigue.

Sea un evento representado por dos sistemas de referencia  $S(t, x, y, z)$  y  $S'(t', x', y', z')$  como se ilustra en la figura

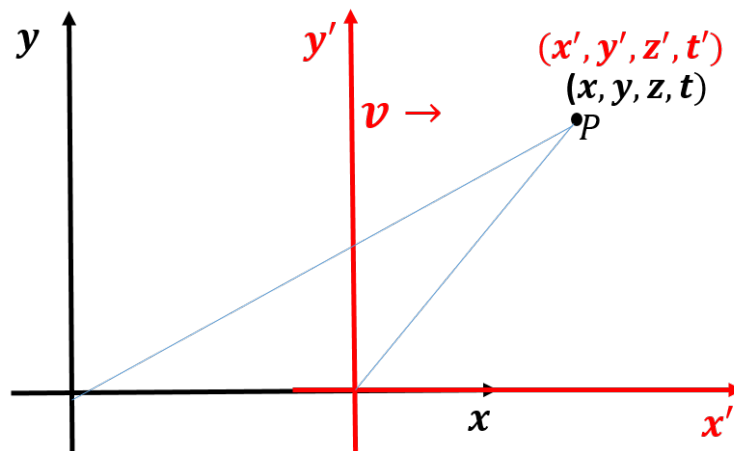


Figura 2.1: Evento en sistemas de referencia S y S'

donde el segundo se mueve a una velocidad  $v$  respecto al primero. Si dichos eventos están conectados causalmente para todo  $v < c$ , entonces

$$t' = \frac{t - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.1)$$

$$x' = \frac{x - tv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.2)$$

$$y' = y, \quad (2.3)$$

$$z' = z, \quad (2.4)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Estas transformaciones son conocidas como las transformaciones de Lorentz y juntas forman el grupo de Lorentz que deja invariante las distancias en el espacio de Minkowski. Es decir si se tienen las siguientes coordenadas de la Figura 2.1 para el sistema de referencia  $S$  resulta

$$S^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.5)$$

y para  $S'$  es

$$S'^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (2.6)$$

Sustituyendo las relaciones (2.1-2.6) se tiene

$$\begin{aligned} S'^2 &= -c^2 \left( \frac{t - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + \left( \frac{x - tv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2, \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} [c^2(-t^2 - x^2v^2/c^4 + 2txv/c^2) + (x^2 + t^2v^2 - 2txv)] + y^2 + z^2, \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} [-c^2t^2(1 - v^2/c^2) + x^2(1 - v^2/c^2)] + y^2 + z^2, \\ &= -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

En lo que sigue se replantean las relaciones anteriores en notación tensorial, debido a la simplicidad que ofrece esta notación. Por ejemplo el convenio de suma Einstein aplica sumatorias sobre índices repetidos, es decir

$$x' = \sum_{\mu} u_{\mu\nu} x_{\mu} \longrightarrow x' = u_{\mu\nu} x_{\mu}$$

para ello se debe escribir primero en notación matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  y  $\beta = v/c$  y luego usando la notación de componentes

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (2.8)$$

con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $x^{\mu} \equiv (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$  y

$$\Lambda = [\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz que genera la traslación relativista o boost de Lorentz.

Las matrices  $\Lambda$  forman un grupo de Lie [12], denominado grupo de Lorentz, y admite representación exponencial en términos del parámetro y el generador de grupo, esto es

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu}, \quad (2.9)$$

siendo  $\omega$  el parámetro del grupo y  $\mathbf{J}^{\alpha\beta}$  el generador del grupo, que satisface lo siguiente

$$[\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\alpha} \mathbf{J}^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} \mathbf{J}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta} \mathbf{J}^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta} \mathbf{J}^{\nu\alpha}), \quad (2.10)$$

denominada álgebra de Lie del grupo de Lorentz.

Un campo es una función de las coordenadas con propiedades de transformación bien definidas bajo el grupo de Lorentz. En general, un campo  $\phi(x)$  transforma

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') \equiv D(\Lambda)\phi(x), \quad \text{con} \quad D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{J}^{\mu\nu}}, \quad (2.11)$$

Donde  $\mathbb{J}$  son los generadores que satisfacen (2.10), es decir

$$[\mathbb{J}^{\mu\nu}, \mathbb{J}^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\alpha} \mathbb{J}^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} \mathbb{J}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta} \mathbb{J}^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta} \mathbb{J}^{\nu\alpha}). \quad (2.12)$$

Los generadores que satisfacen la relación (2.12) se clasifican según la representación del campo asociado como sigue

### 1. Campos Escalares

El campo no cambia bajo transformaciones de Lorentz, es decir

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (2.13)$$

con

$$D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{L}^{\mu\nu}}. \quad (2.14)$$

En este tipo de representación el generador es  $\mathbb{L}^{\alpha\beta}$  que satisface (2.12), se define como

$$\mathbb{L}^{\alpha\beta} = x^\alpha \mathbb{P}^\beta - x^\beta \mathbb{P}^\alpha \quad \text{donde} \quad \mathbb{P}^\nu = -i\partial^\nu. \quad (2.15)$$

Un ejemplo de campo escalar, es el campo de Higgs [13] [14].

### 2. Campos Vectoriales

En esta representación el campo que transforma es de carácter vectorial y lleva a otro campo de la misma naturaleza, esto es

$$A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu, \quad (2.16)$$

la transformación es

$$D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}^{\alpha\beta}}, \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{J}^{\alpha\beta}$  el generador que satisface (2.12) y se viene dado por

$$(\mathbf{J}^{\alpha\beta})_{\nu}^{\sigma} \equiv (\mathbf{J}^{\alpha\beta})_{\nu}^{\sigma} + \delta_{\nu}^{\sigma} \mathbb{L}^{\alpha\beta} . \quad (2.18)$$

Un ejemplo de campo vectorial invariante de Lorentz es el campo electromagnético de Maxwell, ver Apéndice B.

### 3. Campo Espinorial

En la representación espinorial, el campo a transformar es una matriz columna y se conoce como espinor, esto es

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Que transforma de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\psi}'(x') = \Lambda_{1/2} \boldsymbol{\psi}(x), \quad \text{con} \quad D(\Lambda) = \Lambda_{1/2} = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathbb{S}^{\mu\nu}}, \quad (2.20)$$

donde  $\mathbb{S}^{\mu\nu}$  es el generador del grupo y se define como

$$\mathbb{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\boldsymbol{\gamma}^{\mu}, \boldsymbol{\gamma}^{\nu}], \quad (2.21)$$

donde  $\boldsymbol{\gamma}^{\mu}$  son las matrices de dimensión  $4 \times 4$  definidas por el álgebra de Clifford [15]

$$\{\boldsymbol{\gamma}^{\mu}, \boldsymbol{\gamma}^{\nu}\} = \boldsymbol{\gamma}^{\mu} \boldsymbol{\gamma}^{\nu} + \boldsymbol{\gamma}^{\nu} \boldsymbol{\gamma}^{\mu} = -2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad (2.22)$$

y el álgebra de Lorentz

$$[\mathbb{S}^{\mu\nu}, \mathbb{S}^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\alpha} \mathbb{S}^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} \mathbb{S}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta} \mathbb{S}^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta} \mathbb{S}^{\nu\alpha}). \quad (2.23)$$

Un ejemplo de campo que transforme en la representación espinorial es el campo de Dirac  $\boldsymbol{\psi}$ , también conocido como espinor de Dirac, el cual transforma bajo (2.20).

Existe otro campo que también transforma bajo dicha representación, esto es

$$\boldsymbol{\psi}^c \longrightarrow (\boldsymbol{\psi}^c)' = \Lambda_{1/2} \boldsymbol{\psi}^c \quad \boldsymbol{\psi}^c \equiv C \boldsymbol{\psi}^*, \quad (2.24)$$

y  $C$  es una matriz  $4 \times 4$  que satisface las siguientes propiedades [15]

$$C^{\dagger} C = 1, \quad C^{\dagger} \boldsymbol{\gamma}^{\mu} C = -(\boldsymbol{\gamma}^{\mu})^*,$$

este campo se conoce como espinor de carga conjugada.

De esta forma se concluye que los neutrinos por ser matrices, transforman bajo Lorentz en la representación espinorial.

En lo que sigue se mostrará la densidad lagrangiana de Dirac, que es la que describe correctamente los fermiones.

## 2.2. Lagrangiano de Dirac

Para un campo espinorial libre, sin interacción, de masa  $m$  se postula la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi; \partial\bar{\psi}, \partial\psi] = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.25)$$

y para el espinor de carga conjugada,

$$\mathcal{L}_c[\bar{\psi}^c, \psi^c; \partial\bar{\psi}^c, \partial\psi^c] = i\bar{\psi}^c\gamma^\mu\partial_\mu\psi^c - m\bar{\psi}^c\psi^c, \quad (2.26)$$

los cuales describen partículas elementales de espín 1/2 llamadas fermiones, donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \quad (2.27)$$

es el adjunto de Dirac, y

$$\bar{\psi}^c = \psi^{c\dagger}\gamma^0, \quad (2.28)$$

el adjunto del espinor de carga conjugada, el término  $\partial_\mu$  se define como

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}; \nabla \right), \quad (2.29)$$

y  $\gamma^\mu$  son las matrices definidas en (2.22) que pueden pertenecer a tres representaciones según el tipo de espinor, es decir pueden ser matrices de la representación de Dirac, de Majorana de Weyl.

Presentado el lagrangiano de Dirac en lo que sigue se probará la invariancia de Lorentz en la teoría para garantizar que la ecuación describa correctamente partículas relativistas.

## 2.3. Invariancia de Lorentz en la teoría de Dirac

La teoría de Dirac describe la evolución del estado cuántico de una partícula o antipartícula relativista de masa  $m$  que se propaga libremente, es la versión relativista de la ecuación de Schrodinger [16]. En tal sentido para evaluar la covariancia de la teoría considérese a (2.25) transformada bajo Lorentz

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial'_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi', \quad (2.30)$$

donde  $\psi$  transforman bajo la representación espinorial del grupo de Lorentz

$$\psi'(x') = \Lambda_{1/2}\psi(x), \quad (2.31)$$

el adjunto (2.27) transforma como sigue usando el transpuesto de Dirac, y (2.31) se tiene

$$(\psi^\dagger)' = (\psi')^\dagger, \quad \psi'^\dagger = \psi^\dagger\Lambda_{1/2}^\dagger, \quad (2.32)$$

usando (2.31) con

$$\Lambda_{1/2}^\dagger = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{S}^{\mu\nu\dagger}} = \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{S}^{\mu\nu\dagger} + \dots \quad (2.33)$$

La transpuesta conjugada de la transformación, (2.33), puede ser desarrollada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^{\mu\nu\dagger} &= -\frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}], \\
&= -\frac{i}{4}[\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0, \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0], \\
&= \frac{i}{4}\gamma^0[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\gamma^0, \\
&= \gamma^0\mathbb{S}^{\mu\nu}\gamma^0,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad de las matrices gamma

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \tag{2.35}$$

Así con (2.37) y (2.35) en (2.33) se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1/2}^\dagger &= \gamma^0 \left( \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{S}^{\mu\nu} + \dots \right), \\
&= \gamma^0 e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{S}^{\mu\nu}} \gamma^0, \\
&= \gamma^0 \Lambda_{1/2}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Por tanto con (2.36) en (2.32) resulta

$$\psi'^{\dagger} = (\psi^\dagger \gamma^0) \Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^0, \tag{2.37}$$

multiplicando  $\gamma^0$  por la derecha para identificar (2.27), se obtiene la transformación del espinor adjunto de Dirac

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \Lambda_{1/2}^{-1}. \tag{2.38}$$

Ahora se puede evaluar la teoría, sustituyendo (2.38) y (2.31) en (2.30) resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i(\bar{\psi} \Lambda_{1/2}^{-1}) \gamma^\mu (\Lambda_{1/2}^\nu \partial_\nu) (\Lambda_{1/2} \psi) - m(\bar{\psi} \Lambda_{1/2}^{-1}) (\Lambda_{1/2} \psi), \\
&= i\bar{\psi} (\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2}) \Lambda_{1/2}^\nu \partial_\nu \psi - m(\bar{\psi} \Lambda_{1/2}^{-1}) (\Lambda_{1/2} \psi), \\
&= i\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - m\bar{\psi} \psi = \mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

En consecuencia la teoría de Dirac es invariante de Lorentz, lo que asegura que describe correctamente partículas en el régimen relativista y considerando que los neutrinos son partículas relativistas, este resultado sugiere que es correcta la ecuación de Dirac para describir dichas partículas.

Ahora bien para el espinor de carga conjugada considerese la transformada de (2.26), esto es

$$\mathcal{L}'_c = i(\bar{\psi}^c)' \gamma^\mu \partial'_\mu (\psi^c)' - m(\bar{\psi}^c)' (\psi^c)'. \tag{2.40}$$

que usando (2.24) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_c &= i\bar{\psi}^c (\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2}) \Lambda_{1/2}^\nu \partial_\nu \psi^c - m(\bar{\psi}^c \Lambda_{1/2}^{-1}) (\Lambda_{1/2} \psi^c), \\
&= i\bar{\psi}^c \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi^c - m\bar{\psi}^c \psi^c = \mathcal{L}_c,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

en consecuencia el espinor de carga conjugada también es invariante de Lorentz y por lo tanto describe partículas de forma correcta en el régimen relativista. En lo que sigue se estudiará otro tipo de simetría que presenta la teoría de Dirac, la simetría bajo U(1).

## 2.4. Invariancia local bajo U(1)

Para estudiar de forma general la teoría de Dirac, es conveniente analizar el caso donde los fermiones interactúan con el campo electromagnético, la forma de verificar si sucede tal interacción es comprobando la invariancia local bajo el grupo U(1) de la densidad lagrangeana de Dirac

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' . \quad (2.42)$$

El campo transforma bajo U(1) de la siguiente manera

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-iq\theta}\psi \quad , \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iq\theta} , \quad (2.43)$$

donde  $q$  es el generador asociado al grupo Abelian U(1) y  $\theta$  es el parámetro de dicho grupo. Sustituyendo (2.43) en (2.42) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}e^{iq\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-iq\theta}\psi , \\ &= \bar{\psi}e^{iq\theta}\{i\gamma^\mu[-iqe^{-iq\theta}(\partial_\mu\theta) + e^{-iq\theta}\partial_\mu] - me^{-iq\theta}\}\psi \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu(\partial_\mu\theta) - m]\psi , \\ &= \mathcal{L} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\theta) . \end{aligned} \quad (2.44)$$

En consecuencia el lagrangiano de Dirac no es invariante bajo transformaciones locales U(1).

Para lograr la invariancia local bajo U(1) se utiliza el principio de gauge, el cual consiste en introducir nuevos campos en el Lagrangiano de tal manera que cancelen los términos que rompen la invariancia de éste.

En el grupo U(1) se introduce el campo vectorial  $A_\mu$  que transforma como

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta , \quad (2.45)$$

que puede eliminar la parte que sobra del lagrangiano que no es invariante, y la forma de introducir el campo  $A_\mu$  es definiendo la derivada covariante a través del acoplamiento mínimo

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu . \quad (2.46)$$

Por lo que la lagrangiana de Dirac queda redefinida como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi , \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi , \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu . \end{aligned} \quad (2.47)$$



Probando la invariancia bajo U(1) de (2.47) usando (2.45) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' - q\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'A'_\mu, \\
&= \bar{\psi}e^{iq\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-iq\theta}\psi - q\bar{\psi}e^{iq\theta}\gamma^\mu e^{-iq\theta}\psi(A_\mu + \partial_\mu\theta), \\
&= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\theta) - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\theta), \\
&= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

que es idéntico al lagrangiano (2.47) y por lo tanto se concluye que la teoría de Dirac queda invariante bajo transformaciones de calibre vía el acoplamiento minimal que introduce el campo  $A_\mu$  conocido como campo Electromagnético de Maxwell, ver Apéndice B

Para el caso del espinor de carga conjugada, y la simetría U(1) se tiene

$$\mathcal{L}'_c = (\bar{\psi}^c)'(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)(\psi^c)', \tag{2.49}$$

el campo transforma

$$\psi^c \longrightarrow (\psi^c)' = e^{iq\theta}\psi^c, \quad \bar{\psi}^c \longrightarrow (\bar{\psi}^c)' = \bar{\psi}^c e^{-iq\theta}. \tag{2.50}$$

Sustituyendo (2.50) en (2.49) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_c &= \bar{\psi}^c e^{-iq\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\theta}\psi^c, \\
&= \bar{\psi}^c e^{-iq\theta}\{i\gamma^\mu[iqe^{iq\theta}(\partial_\mu\theta) + e^{iq\theta}\partial_\mu] - me^{iq\theta}\}\psi^c, \\
&= \mathcal{L}_c - q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c(\partial_\mu\theta),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

lo que indica que la teoría no es invariante local bajo U(1). Por lo tanto, se procede igual que en la lagrangiana de Dirac e introducir el campo de Maxwell a través de la derivada covariante para  $\psi^c$

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu. \tag{2.52}$$

Agregando (2.52) en la densidad lagrangiana para el espinor de carga conjugada, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_c &= \bar{\psi}^c[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\psi^c, \\
&= \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi^c, \\
&= \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c + q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c A_\mu.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Transformando bajo calibre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_c &= \bar{\psi}^c e^{-iq\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\theta}\psi^c + q\bar{\psi}^c e^{-iq\theta}\gamma^\mu e^{iq\theta}\psi^c(A_\mu + \partial_\mu\theta), \\
&= \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c - q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c(\partial_\mu\theta) + q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c A_\mu + q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c(\partial_\mu\theta), \\
&= \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c + q\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c A_\mu.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

La lagrangeana (2.53) es invariante bajo U(1) vía el acoplamiento mínimo que introduce el campo vectorial  $A_\mu$ .

Comparando la ecuación (2.47)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

con la ecuación (2.53)

$$\mathcal{L}_c = \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c - (-q)\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c A_\mu ,$$

se puede observar que la diferencia entre ambas ecuaciones es el signo de la carga y por lo tanto se dice que una ecuación describe una partícula  $\psi$  y la otra la antipartícula correspondiente  $\psi^c$ .

Para describir correctamente los neutrinos, es necesario considerar el caso donde las cargas de las partículas sean neutras,  $q = 0$ , debido a que los neutrinos no tienen carga las ecuaciones (2.47) y (2.53) quedan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi , \quad (2.55)$$

$$\mathcal{L}_c = \bar{\psi}^c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c , \quad (2.56)$$

donde la lagrangeana de la partícula y su correspondiente antipartícula son formalmente idénticas, es decir no se presenta distinción entre (2.55) y (2.56). Además se tiene que las lagrangeanas ahora se encuentran desacopladas del campo electromagnético, como era de esperar debido a que describen partículas y antipartículas neutras. En este tipo de partículas que se identifican como iguales, se pueden presentar los siguientes casos

- Si  $\psi = \psi^c$ , la partícula es igual a su antipartícula y se dice que el espinor es de Majorana [15].
- Si  $\psi \neq \psi^c$ , la partícula es diferente de su antipartícula y se dice que el espinor es de Dirac.

En lo que sigue se asumirá que los espinores son de Dirac.

# Capítulo 3

## Base de sabor y base de masa

Los neutrinos electrónico, muónico y tauónico, Figura 1, que pertenecen a las familias leptónicas, se les denomina neutrinos de sabor. Estos, se entienden como una combinación lineal de otros neutrinos que se denominan de masa. En este Capítulo se discute la matriz de transformación que relaciona a los neutrinos de sabor con los neutrinos de masa, y se usa la Lagrangeana de Dirac de partículas masivas para describir los estados del neutrino de masa.

### 3.1. Matriz de mezcla

Cada familia leptónica, esta compuesta por dos quarks y dos leptones, por ejemplo en la primera familia se encuentran los quarks *up* (u) y *down* (d) junto con el lepton electrón y se asocia a esta familia con el neutrino electrónico  $\psi_e$

La segunda generación se compone de los quarks *charm* (c) y *strange* (s) asociados a los leptones muón y neutrino muónico  $\psi_\mu$  y la tercera generación, se compone de los quarks *top* (t) y *bottom* (b) junto con el lepton tau y neutrino tauónico  $\psi_\tau$ . Para fines prácticos en lo que sigue se describen solo dos tipos de neutrinos, el electrónico y el muónico.

Los neutrinos son partículas elementales, y como tal no se puede representar uno como combinación del otro, esto quiere decir que son linealmente independientes, lo que sugiere que entre ellos forman una base discreta, semejante a la cartesiana  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , a los neutrinos electrónico y muónico se le llamara base de sabor. Al igual que cualquier base se puede representar como combinación lineal de otro tipo de base, a la que se le llamara base de masas, así como se pasa de la base cartesiana a la polar. Para discutir la transformación entre bases considere lo siguiente.

Sea un punto P, en un espacio plano bidimensional, y sea un sistema de coordenadas cartesianas dado por Figura 3.1. Donde los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  representan la base para los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente. Entonces, las coordenadas del punto P vienen dadas por  $(x, y)$ .

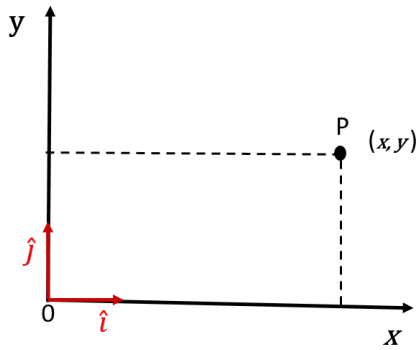


Figura 3.1: Coordenadas de un punto P en un espacio plano bidimensional.

Dentro de este plano cartesiano, también se puede definir un sistema de coordenadas polares del punto P, dadas por la distancia  $r$  al centro de coordenadas y el ángulo  $\theta$  del vector con el eje  $x$ , donde ahora los versores  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  es la base del sistema de coordenadas polar. De la Figura 3.2 se tiene, las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas con las polares de la siguiente forma

$$x = r \cos \theta , \quad (3.1)$$

$$y = r \sin \theta , \quad (3.2)$$

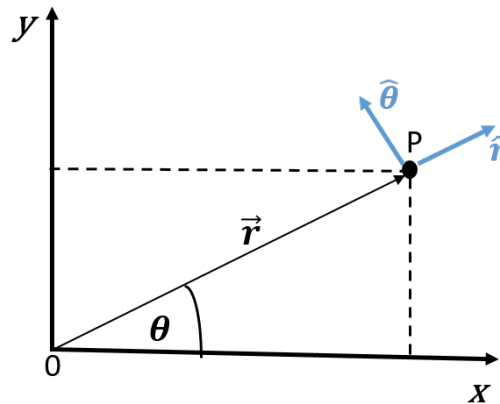


Figura 3.2: Representación de coordenadas polares

y las correspondientes ecuaciones inversas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad (3.3)$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) . \quad (3.4)$$

Para representar los vectores base del sistema polar en términos de los vectores unitarios cartesianos se tiene

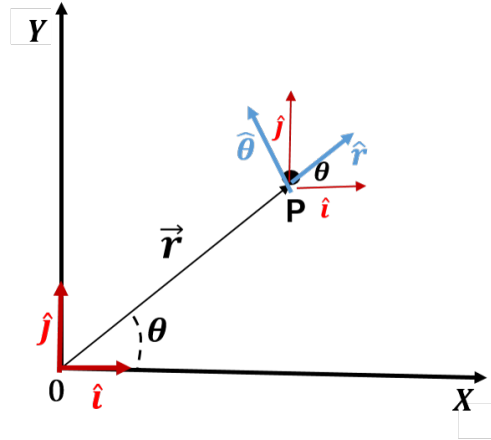


Figura 3.3: Representación de los vectores unitarios cartesianos y polares

de donde se deduce lo siguiente

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (3.5)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad (3.6)$$

De este sistema de ecuaciones resulta la siguiente matriz de transformación de las bases del sistema cartesiano al sistema polar,

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Esta matriz será usada en la proxima sección para representar un sistema de rotación en otro tipo de bases.

## 3.2. Neutrinos de masa

Ahora bien, los neutrinos son espinores que se describen por la Lagrangiana de Dirac, y para el neutrino de masa se tiene

$$\mathcal{L} = i\bar{\chi}\Gamma^\mu\partial_\mu\chi - \bar{\chi}M\chi, \quad (3.8)$$

donde el campo

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

es el neutrino, con  $\chi_1, \chi_2$  los estados de masa. El adjunto es

$$\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1 \quad \bar{\chi}_2], \quad (3.10)$$

y  $\Gamma^\mu$  y  $M$  son matrices  $8 \times 8$

$$\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbb{I}_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbb{I}_{4 \times 4} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

La Lagrangeana (3.8) describe una partícula que se mueve libremente bajo autointeracción de segundo orden. Ahora expandiendola para ver la dinámica de los estados de masa se tiene

$$\mathcal{L} = i\bar{\chi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \chi_1 - \bar{\chi}_1 m_1 \chi_1 + i\bar{\chi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \chi_2 - \bar{\chi}_2 m_2 \chi_2, \quad (3.12)$$

de donde se observa que describe dos partículas masivas que se mueven libremente. Note que al ser equivalente esta Lagrangeana a la Lagrangeana (3.8), se tiene que  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son la misma partícula. Estos estados son matrices que dependen del espacio y del tiempo. Es decir considerando un estado arbitrario  $\chi_a$  de masa  $m_a$  que se propaga libremente, la Lagrangeana que lo describe es

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^2 (i\bar{\chi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \chi_a - \bar{\chi}_a m_a \chi_a), \quad (3.13)$$

usando la ecuación de Euler-Lagrange respecto de  $\bar{\chi}_a$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\chi}_a} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{\chi}_a)}, \quad (3.14)$$

se tiene

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \chi_a - m_a \chi_a = 0, \quad (3.15)$$

la ecuación de Dirac, en el sistema de unidades naturales.

Considerando la factorización

$$\chi_a(x, t) = \varphi_a(t) \psi_a(x), \quad (3.16)$$

donde  $\varphi_a(t)$  es un escalar y  $\psi_a(x)$  es un vector columna, se tiene

$$i\gamma^0 \partial_t [\varphi_a(t) \psi_a(x)] + \gamma^i \partial_i [\varphi_a(t) \psi_a(x)] - m_a \varphi_a(t) \psi_a(x) = 0, \quad (3.17)$$

distribuyendo

$$i\gamma^0 \psi_a(x) \partial_t \varphi_a + \gamma^i \varphi_a(t) \partial_i \psi_a(x) - m \varphi_a(t) \psi_a(x) = 0. \quad (3.18)$$

Multiplicando por la izquierda a  $\gamma^0$

$$i\psi_a(x) \partial_t \varphi_a(t) + \gamma^0 \gamma^i \varphi_a(t) \partial_i \psi_a(x) - m_1 \varphi_a(t) \gamma^0 \psi_a(x) = 0, \quad (3.19)$$

ahora multiplicando por  $1/\varphi_a(t)$  se tiene

$$i\psi_a(x) \frac{\partial_t \varphi_a(t)}{\varphi_a(t)} = m \gamma^0 \psi_a(x) - \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi_a(x). \quad (3.20)$$

De esta ecuación se observa que en la parte izquierda tiene dependencia espacial y temporal y en la parte derecha solo espacial, lo que sugiere que por consistencia, la parte temporal de la izquierda debe ser igual a una constante. Es decir,

$$\frac{i\partial_t\varphi_a(t)}{\varphi_a(t)} = \alpha_a . \quad (3.21)$$

Rearreglando

$$i\partial_t\varphi_a(t) = \alpha_a\varphi_a , \quad (3.22)$$

y la solución a esta ecuación es

$$\varphi_a(t) = e^{-i\alpha_a t} , \quad (3.23)$$

seguidamente, por primera cuantización se tiene

$$i\partial_t \longrightarrow E_a \quad (3.24)$$

y sustituyendo (3.23) y (3.24) en (3.22) resulta

$$E_a = \alpha_a , \quad (3.25)$$

por lo que  $\alpha$  representa la energía del neutrino  $\chi_a$  y este se representa como sigue

$$\chi_a(x, t) = e^{-iE_a t}\psi_a(x) . \quad (3.26)$$

Esta ecuación se usa para representar los estados del neutrino masivo  $\chi_1$  y  $\chi_2$ , esto es

$$\chi_1(x, t) = e^{-iE_1 t}\psi_1(x) , \quad (3.27)$$

y

$$\chi_2(x, t) = e^{-iE_2 t}\psi_2(x) . \quad (3.28)$$

donde  $E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2}$  y  $E_2 = \sqrt{p^2 + m_2^2}$  en el sistema de unidades naturales, y  $p$  es el momento de los neutrinos masivos 1 y 2 debido a que es la misma partícula que se esta moviendo con la misma velocidad.

Ahora supónganse que los neutrinos de sabor se representan en la base de masas cómo una combinación lineal de estas, y supóngase que la relación de transformación entre los neutrinos de sabor  $\psi_e$  y  $\psi_\mu$  con la base de masa, viene dada por la matriz de mezcla deducida en (3.7), esto es

$$\begin{bmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} , \quad (3.29)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de mezcla.

De esta forma se pueden expresar los neutrinos electrónicos y mónicos en función de los neutrinos masivos, y para un tiempo  $t = 0$  se tiene

$$\psi_e(x, 0) = \nu_e(x) = \cos \theta\psi_1(x) + \sin \theta\psi_2(x) , \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\psi}_\mu(x, 0) = \boldsymbol{\nu}_\mu(x) = -\sin\theta\boldsymbol{\psi}_1(x) + \cos\theta\boldsymbol{\psi}_2(x) . \quad (3.31)$$

Y para un tiempo posterior, usando (3.26), el neutrino electrónico viene dado por

$$\boldsymbol{\psi}_e(x, t) = \cos\theta\boldsymbol{\psi}_1(x)e^{-iE_1t} + \cos\theta\boldsymbol{\psi}_2(x)e^{-iE_2t} , \quad (3.32)$$

y el muónico por

$$\boldsymbol{\psi}_\mu(x, t) = -\sin\theta\boldsymbol{\psi}_1(x)e^{-iE_1t} + \cos\theta\boldsymbol{\psi}_2(x)e^{-iE_2t} , \quad (3.33)$$



# Capítulo 4

## Probabilidades de Transición

En el Capítulo 1 se realizaron cálculos para el decaimiento  $\beta$  usando la mecánica clásica, entendiendo este fenómeno como un evento entre partículas que se comportan como tal frente a los detectores de este experimento. Sin embargo en este Capítulo se estudia la capacidad que tienen los neutrinos para cambiar de sabor, y este fenómeno no sucede en la física clásica, por lo que amerita un tratamiento cuántico donde la partícula se entiende como un campo de materia. En lo que sigue se calculará la probabilidad de oscilación entre neutrinos de diferentes sabores.

### 4.1. El Escenario

Considérese el escenario de la Figura 4.1, donde un neutrino electrónico, que al tiempo  $t = 0$  se denota como  $\nu_e$  y luego en un tiempo posterior será  $\psi_e$ , se genera en una fuente de neutrinos y se desplaza hasta llegar a un detector de neutrinos que se encuentra a una distancia  $L$ , dentro de un reactor. Este desplazamiento es unidimensional, debido a que los neutrinos, no tienen carga, y su masa se considera nula, por lo que no hay interacciones que puedan desviar su trayectoria

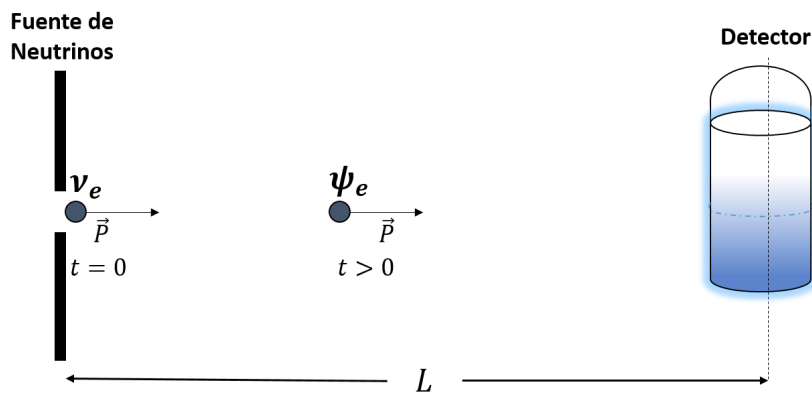


Figura 4.1: Diagrama de un neutrino electrónico que se desplaza desde una fuente de neutrinos hasta un detector que se encuentra a una distancia  $L$ .

Luego de que el neutrino llega al reactor el proceso de detectarlo es como el que se ilustra en la Figura 4.2. Los neutrinos que llegan interactúan con un neutrón del agua que se encuentra dentro del reactor, y por la interacción débil, el neutrino se convierte en un electrón y el neutrón en un protón, mediante un bozón  $W$ . El electrón que se emite en este proceso se mueve más rápido que la luz en el medio y debido a esto refleja un fenómeno conocido como radiación de Cherenkov. La cual se puede medir mediante unos dispositivos denominados tubos fotomultiplicadores para saber el tipo de neutrino, su dirección y su energía [6].

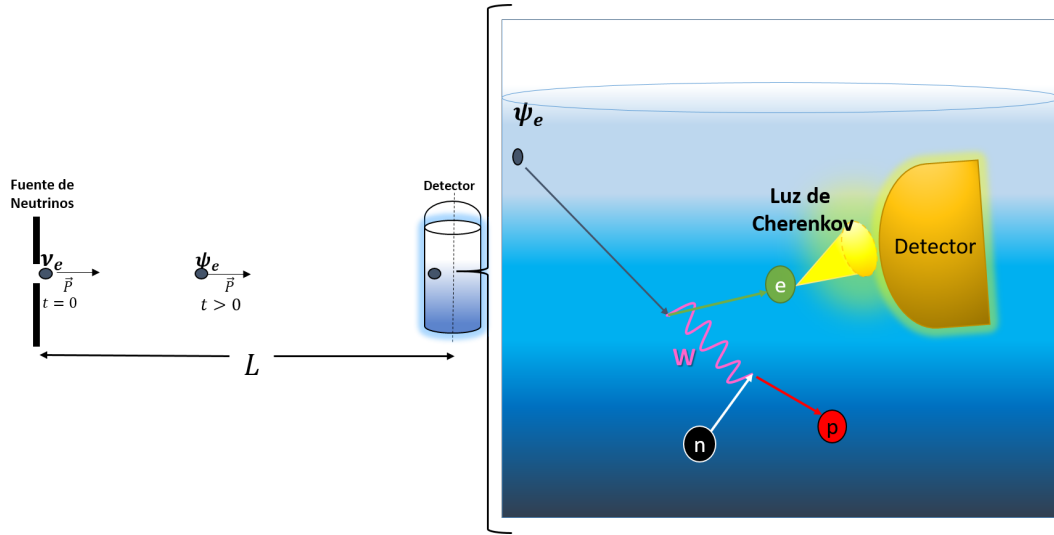


Figura 4.2: Detección de un neutrino electrónico mediante radiación de Cherenkov.

Ahora bien, en este tipo de reactores se reciben neutrinos de sabor por ejemplo electrónico, mucho menos de los esperados [9]. La explicación a esta aparente desaparición de algunos neutrinos, es la oscilación cuántica entre sabores, es decir un neutrino de sabor al viajar cierta distancia puede cambiar a un neutrino de otro sabor, Figura 4.3.

Por simplicidad, en este trabajo se estudiarán las oscilaciones cuánticas entre dos sabores de neutrinos específicamente los neutrinos electrónico y muónico. Para estudios en relación con las oscilaciones entre los tres sabores de neutrinos, vease [1].

#### 4.1.1. Probabilidad de Oscilación $\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu)$

A continuación, se calcula la probabilidad de transición de que ocurra lo que se ilustra en la Figura 4.3, es decir que un neutrino electrónico que se desplaza  $\psi_e$  sea observado como un neutrino muónico  $\nu_\mu$ , esto es,

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \left| \int \nu_\mu^\dagger(x) \psi_e(x, t) dx \right|^2. \quad (4.1)$$

Usando

$$\nu_\mu^\dagger(x) = -\psi_1^\dagger(x) \sin \theta + \psi_2^\dagger(x) \cos \theta, \quad (4.2)$$

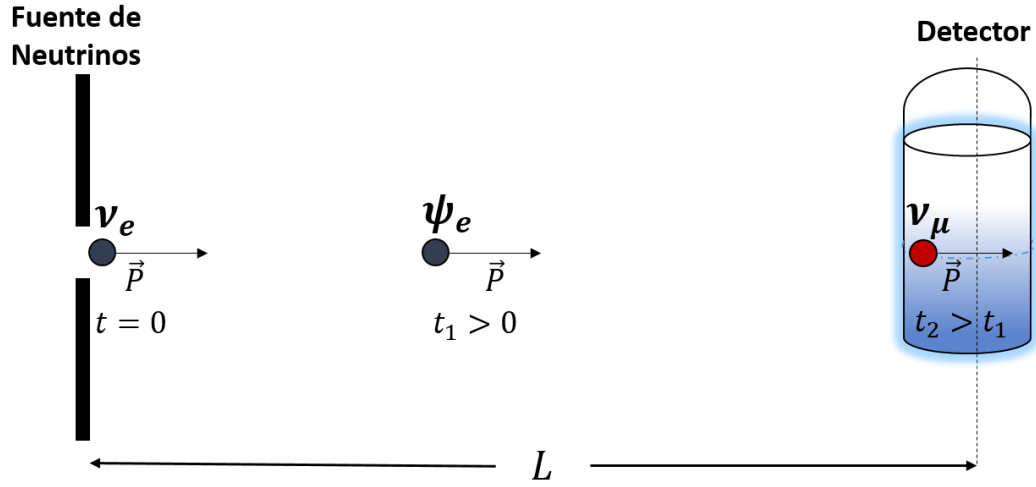


Figura 4.3: Oscilación de un neutrino electrónico a uno muónico.

y sustituyendo esta ecuación y la ecuación (3.33) para conseguir la amplitud de probabilidad, resulta

$$\begin{aligned}
 \int \nu_{\mu}^{\dagger}(x) \psi_e(x, t) dx &= \int [-\psi_1^{\dagger}(x) \sin \theta + \psi_2^{\dagger}(x) \cos \theta] [\cos \theta \psi_1(x) e^{-iE_1 t} + \sin \theta \psi_2(x) e^{-iE_2 t}] dx, \\
 &= -\cos \theta \sin \theta e^{-iE_1 t} \int \psi_1^{\dagger}(x) \psi_1(x) dx \\
 &\quad + \cos^2 \theta e^{-iE_1 t} \int \psi_1^{\dagger}(x) \psi_2(x) dx - \sin^2 \theta e^{-iE_2 t} \int \psi_2^{\dagger}(x) \psi_1(x) dx \\
 &\quad + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t} \int \psi_2^{\dagger}(x) \psi_2(x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

debido a que los fermiones  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son bases cumplen con las condiciones de ortonormalidad

$$\int \psi_i(x) \psi_j(x) = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2,$$

y la amplitud de probabilidad es

$$\int \nu_{\mu}^{\dagger}(x) \psi_e(x) dx = -\cos \theta \sin \theta e^{-iE_1 t} + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t}. \tag{4.4}$$

Sustituyendo en la probabilidad (4.1) resulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_{\mu}) &= \left| -\cos \theta \sin \theta e^{-iE_1 t} + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t} \right|^2, \\
 &= (-\cos \theta \sin \theta e^{-iE_1 t} + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t})(-\cos \theta \sin \theta e^{-iE_1 t} + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t}), \\
 &= 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta (e^{i(E_1 - E_2)t} + e^{-i(E_1 - E_2)t}), \\
 &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta [1 - \cos(E_1 t - E_2 t)], \\
 &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{E_1 - E_2}{2} t \right).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para neutrinos relativistas  $p \gg m$  se aproxima la energía de cada uno mediante una expansión binomial<sup>1</sup>, esto es

$$E_j = (p^2 + m_j^2)^{1/2} \simeq E_\nu + \frac{m_j^2}{2E_\nu}, \quad j = 1, 2, \quad (4.7)$$

donde se ha definido  $p \equiv E_\nu$  debido a que la energía que se mide en los neutrinos de sabor  $E_\nu$  representa la energía de movimiento de los neutrinos despreciando la energía asociada a la masa en reposo.

La diferencia entre la energía del neutrino 1 y 2 es

$$E_1 - E_2 = \left( E_\nu + \frac{m_1^2}{2E_\nu} \right) - \left( E_\nu + \frac{m_2^2}{2E_\nu} \right) = \frac{\Delta m^2}{2E_\nu}, \quad \text{donde } \Delta m = m_1 - m_2. \quad (4.8)$$

Sustituyendo en (4.5) se tiene

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) t. \quad (4.9)$$

Ahora bien, los neutrinos son partículas relativistas que viajan con velocidad  $v \sim c$  constante, debido a que no interaccionan con la materia, y por lo tanto la ecuación de velocidad es

$$v = \frac{x}{t}$$

con  $x = L$  y  $v = c$  se tiene

$$c = \frac{L}{t}$$

y como se esta haciendo uso del sistema de unidades naturales,  $c = 1$ , y resulta  $t = L$ , siendo  $L$  la distancia de la fuente de neutrinos al detector,

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L. \quad (4.10)$$

#### 4.1.2. Probabilidad de Oscilación $\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e)$

Ahora se ilustra en la Figura 4.4 la detección de un neutrino electrónico que llega al detector como el mismo.

La probabilidad de que un neutrino electrónico  $\psi_e$  sea observado como el mismo  $\nu_e$ , viene dada por

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) = \left| \int \nu_e^\dagger(x) \psi_e(x, t) dx \right|^2, \quad (4.11)$$

<sup>1</sup>La expansión Binomial para la energía del neutrino es

$$p \left( 1 + \frac{m_j^2}{p^2} \right)^{1/2} = p \left( 1 + \frac{m_j^2}{2p^2} - \frac{m_j^4}{8p^4} + \dots \right) \quad (4.6)$$

y como en este caso los neutrinos son relativista y la masa es muy pequeña,  $p \gg m_j$ , se desprecian los términos de cuarto orden

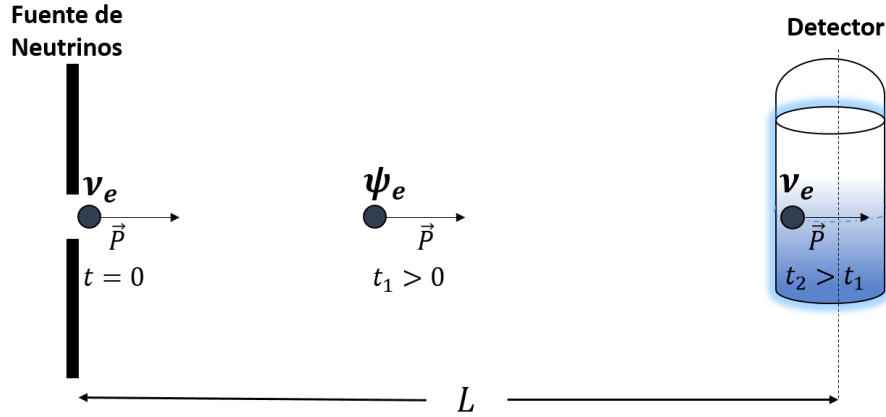


Figura 4.4: Detección de un neutrino electrónico

luego usando las ecuaciones (4.2) y (3.32) para conseguir la amplitud de probabilidad se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \nu_e^\dagger(x) \psi_e(x, t) dx &= \int [\psi_1^\dagger(x) \cos \theta + \psi_2^\dagger(x) \sin \theta] [\psi_1(x) \cos \theta e^{-iE_1 t} + \psi_2(x) \sin \theta e^{-iE_2 t}] dx, \\
 &= \cos^2 \theta e^{-iE_1 t} \int \psi_1^\dagger \psi_1 dx + \cos \theta \sin \theta e^{-iE_2 t} \int \psi_1^\dagger \psi_2 dx \\
 &\quad + \sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} \int \psi_2^\dagger(x) \psi_1(x) dx \\
 &\quad + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t} \int \psi_2^\dagger(x) \psi_2(x) dx, \\
 &= \cos^2 \theta e^{-iE_1 t / \hbar} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t / \hbar}, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las condiciones de ortonormalidad de los fermiones.

Tomando el valor absoluto al cuadrado para calcular la probabilidad

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) &= |\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t}|^2, \\
 &= (\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t})(\cos^2 \theta e^{iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{iE_2 t}), \\
 &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta [e^{-it(E_1 - E_2)/\hbar} + e^{it(E_1 - E_2)}], \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} + \frac{\sin^2 2\theta}{2} \cos[(E_1 - E_2)t]. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Usando (4.8)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) &= 1 - \left[ \frac{\sin^2 2\theta}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\Delta m^2}{2p} \right) t \right) \right] \\
 &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4p} \right) t \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

y haciendo los cambios antes explicados,  $p = E_\nu$  y  $t = L$  se tiene

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L. \tag{4.15}$$

Esta ecuación y la ecuación (4.10) están expresadas en unidades naturales, y para describir la probabilidad en función de  $L$  es conveniente usar unidades de longitud más familiares como por ejemplo en kilómetros, por lo que la probabilidad de oscilación queda <sup>2</sup>

$$\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \quad (4.16)$$

donde se ha definido el parámetro  $\lambda_0$  para una longitud de oscilación de un período completo

$$\lambda_0 \equiv \frac{4\pi E_\nu \hbar c}{\Delta m^2 c^4}. \quad (4.17)$$

Para neutrinos típicos producidos en reactores, se han medido los siguientes valores para la energía y diferencia de masa [1]  $\Delta m^2 c^4 = 10^{-12} \text{MeV}$ ,  $E_\nu = 4 \text{MeV}$ , y usando los valores  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{MeV}\cdot\text{s}$  y  $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ , se tiene una longitud de oscilación

$$\lambda_0 = \frac{4\pi \cdot 4 \text{MeV} \cdot 6,6 \cdot 10^{-22} \text{MeV}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{10^{-12} \text{MeV}} = 100 \text{ km}.$$

Esta longitud de oscilación,  $\lambda_0$ , representa una longitud crítica para estudiar el término sinusoidal en la ecuación (4.16). Se presentan tres casos posibles:

1. Si  $L \ll \lambda_0/\pi \rightarrow \pi L/\lambda_0 \ll 1$ . Expandiendo <sup>3</sup> en torno a 0, el punto en el cual interesa estudiar la función. Se tiene

$$\sin \frac{\pi L}{\lambda_0} \simeq \sin 0 + \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 0 \right) \cos 0 = \frac{\pi L}{\lambda_0}.$$

Para este caso, el término sinusoidal tiende a cero y la probabilidad en la ecuación es

$$\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2(0) = 1. \quad (4.18)$$

Es decir, no hay probabilidad para ver oscilaciones en distancias  $L$  mucho menores a  $100 \text{ km}/\pi$ .

2. Si  $L \sim \lambda_0/\pi \rightarrow \pi L/\lambda_0 \sim 1$ , expandiendo e torno a 1

$$\sin \frac{\pi L}{\lambda_0} \simeq \sin(1) + \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \cos(1), \quad (4.19)$$

<sup>2</sup>El término oscilante es adimensional, si se realiza un cambio en el sistema de unidades, por ejemplo al MKS, el nuevo término oscilante también debe ser adimensional, por lo que los número apropiados para  $\hbar$  y  $c$  son

$$\left( \frac{\Delta m^2 c^4 L}{4E_\nu \hbar c} \right) \text{ en unidades } \left( \frac{\text{kg}^2 \text{ m}^4/\text{s}^4 \text{ m}}{\text{J J}\cdot\text{s m/s}} \right) \rightarrow \left( \frac{\text{kg}^2 \text{ m}^4/\text{s}^4 \text{ m}}{\text{kg m}^2/\text{s}^2 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 \text{ m/s}} \right)$$

<sup>3</sup>Haciendo uso del desarrollo en serie de Taylor para una función  $f$  en torno a  $x_0$  como

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

y la probabilidad para este caso es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) &= 1 - \sin^2 2\theta \left[ \sin 1 + \cos 1 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \right]^2, & (4.20) \\
 &= 1 - \sin^2(2\theta) \left[ \sin^2(1) + 2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \sin(1) \cos(1) \right], \\
 &= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(1) - \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \sin^2 2\theta \sin(2), \\
 &= \frac{-\pi L}{\lambda_0} \sin^2(2\theta) \sin(2) + 1 + \sin^2 2\theta [-\sin^2(2\theta) + \sin(2)] & (4.21)
 \end{aligned}$$

donde se ha despreciado el término cuadrático para el argumento  $\pi L/\lambda_0$ . Seguidamente, haciendo  $b = 1 + \sin^2(2\theta)[- \sin^2(2\theta) + \sin(2)]$ , y  $m = \pi/\lambda_0 \sin^2(2\theta) \sin(2)$  los cuales son constantes, se tiene

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) = -mL + b, \quad (4.22)$$

lo que sugiere una recta decreciente en torno a la distancia  $L$  para valores cercanos a  $L \sim 100 \text{ km}/\pi$

3. Para  $L \gg 100 \text{ km}/\pi \rightarrow \pi L/\lambda_0 \gg 1$ . La probabilidad puede tomar cualquier valor dentro del rango de oscilación de la función periódica.

La figura 4.5 muestra una gráfica de la ecuación (4.16) con  $\theta = 32^\circ$

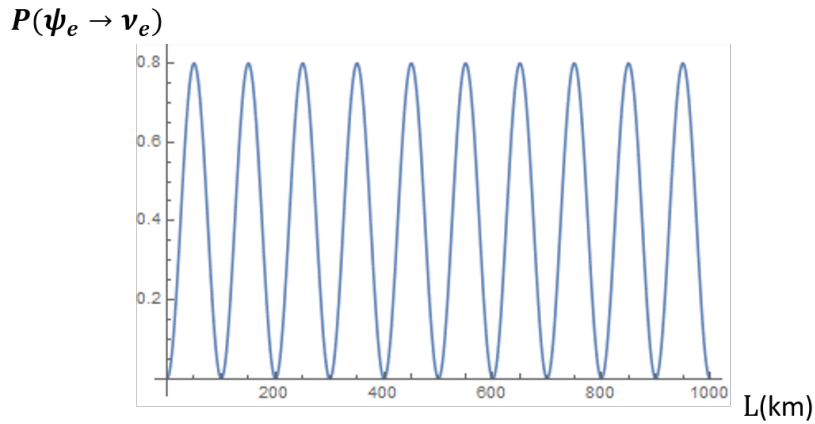


Figura 4.5: Gráfica de la probabilidad de oscilación  $P(\psi_e \longrightarrow \nu_e)$  en función de la longitud  $L$  medida desde el origen de la fuente de neutrinos al detector.

Ahora bien analizando la gráfica de  $\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e)$  de la Figura 4.5

1. La amplitud de la función periódica en la probabilidad de oscilación de los neutrinos electrónicos está determinada por el ángulo de mezcla y para este caso  $\theta = 32^\circ$  y  $\sin^2 2\theta = 0,8$  se observa en la gráfica que el rango de oscilación va de 0,2 a 1.
2. Para obtener los máximos y mínimos valores que toma la función de la probabilidad de oscilación dependiente de  $L$  se extrema la función

$$P(L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \quad (4.23)$$

$$P'(L) = \frac{-\sin^2 2\theta \pi}{\lambda_0} \sin \left( \frac{2\pi L}{\lambda_0} \right), \quad (4.24)$$

Los extremos de esta función para valores de  $\lambda_0 = 100$  km y  $\theta = 32^\circ$  son

$$P'(L) = \frac{-0,8\pi}{100} \sin \left( \frac{\pi L}{50 \text{ km}} \right) = 0 \iff L = 0 \text{ km}, 50 \text{ km} \dots$$

la primera derivada se anula en  $L = 0$  km, 50 km, 100 km.... Sustituyendo estos valores de  $L$  en la segunda derivada

$$P''(L) = \frac{-2 \sin^2 2\theta}{\lambda_0^2} \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda_0/2} \right) \quad (4.25)$$

con  $\lambda_0 = 100$  km y  $\theta = 32^\circ$  resulta

$$P''(L) = \frac{-1,6\pi^2}{10000} \cos \left( \frac{\pi L}{50 \text{ km}} \right),$$

se tiene

$$\begin{aligned} P''(0) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos \left( \frac{\pi 0 \text{ km}}{50 \text{ km}} \right) = -1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(50) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos \left( \frac{\pi 50 \text{ km}}{50 \text{ km}} \right) = 1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(100) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos \left( \frac{\pi 100 \text{ km}}{50 \text{ km}} \right) = -1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(150) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos \left( \frac{\pi 150 \text{ km}}{50 \text{ km}} \right) = 1,6x10^{-3} / \text{km}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para valores de  $L = 0$  km, 100 km, 200 km, ... la segunda derivada de la función es positiva, y representan los mayores valores que la función puede tomar, es decir son los máximos de la función y en la gráfica se observan como las máximas probabilidades de encontrar la partícula  $\nu_e$ .

Ahora para valores de  $L = 50$  km, 150 km, 250 km ... la segunda derivada de la función es negativa, y la función toma los menores valores, es decir muestra los mínimos valores de probabilidad de encontrar a  $\nu_e$  en tales casos.



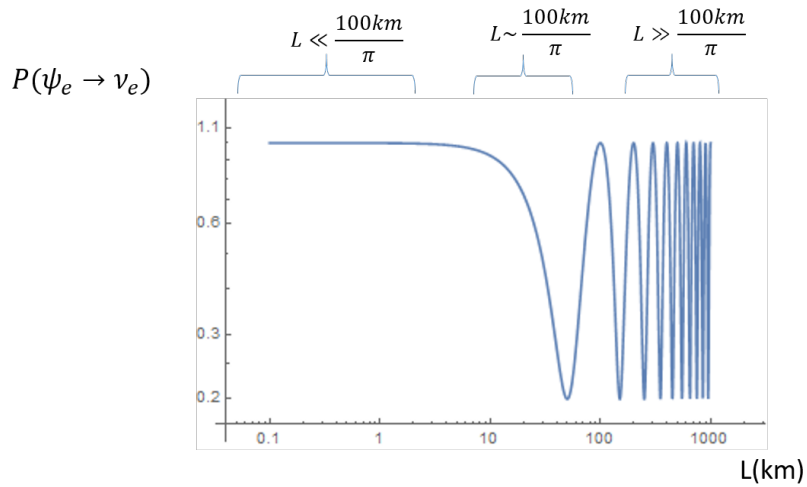


Figura 4.6: Gráfica logarítmica de la probabilidad de oscilación  $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$

De la Figura 4.5 no es posible observar los casos considerados previamente para cuando  $L \ll 100\text{km}/\pi$  y  $L \sim 100\text{km}/\pi$ , debido a que el rango de valores para  $L$  es muy amplio, es conveniente entonces graficar en escala logarítmica para visualizar los tres casos.

En la Figura 4.6 es posible visualizar los tres casos discutidos previamente, esto es

1.  $L \ll 100 \text{ km}/\pi$  el detector se encuentra muy cerca de la fuente y las oscilaciones no tienen tiempo para, desarrollarse.
2.  $L \sim 100 \text{ km}/\pi$  comienzan a observarse las oscilaciones,
3.  $L \gg 100 \text{ km}/\pi$  varias oscilaciones han ocurrido entre la fuente y el detector.

Ahora bien, para hacer una comparación con los resultados que se obtienen en la gráfica de la Figura 4.6 y resultados experimentales, se tiene la gráfica de la Figura 4.7 de [1].

De la gráfica 4.7, se observa que todos los experimentos exceptuando los de KamLAND, la distancia entre la fuente de neutrinos y el detector es menor que 1 km y no se observan oscilaciones, lo que sugiere que estos resultados concuerdan con la predicción teórica de la ecuación (4.15), la cual muestra que para distancias entre la fuente y el detector menores que  $100 \text{ km}/\pi$  el efecto de oscilación no es detectable. Por otra parte las mediciones hechas en KanLAND con  $L = 180 \text{ km} = 18 \cdot 10^4 \text{ m}$  muestran la existencia de oscilaciones de neutrinos, en consistencia con la predicción teórica para valores de  $L \gg 100 \text{ km}/\pi$ .

Ahora bien, para graficar la probabilidad de oscilación de que un neutrino electrónico sea observado como un neutrino muónico, es decir la gráfica de  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , se introduce el mismo cambio de unidades en el término oscilante

$$\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right). \quad (4.27)$$

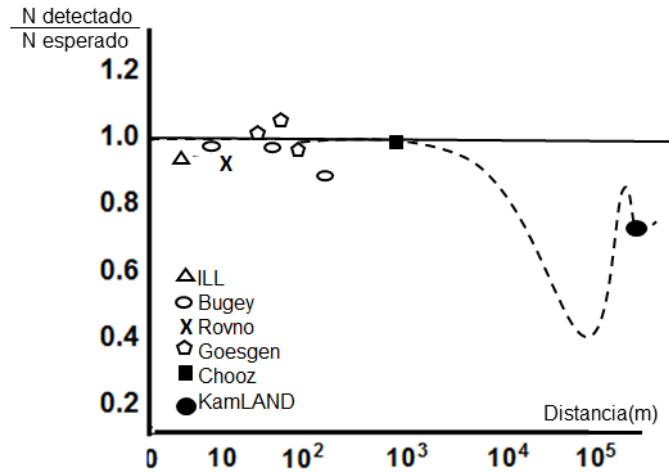


Figura 4.7: Gráfica de resultados experimentales por diversos estudios en reactores. [2], [1]

Usando  $\lambda_0 = 100$  km y el parámetro  $\theta = 32^\circ$  se tiene

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = 0,8 \sin^2 \left( \frac{\pi L}{100 \text{ km}} \right). \quad (4.28)$$

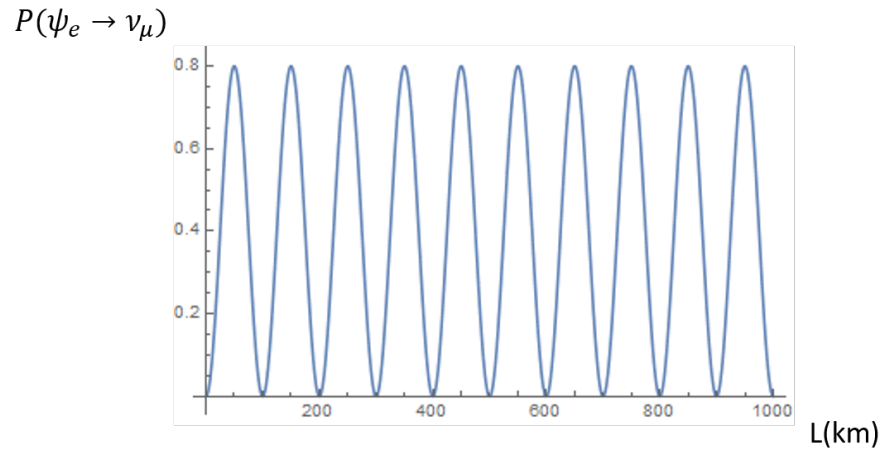


Figura 4.8: Gráfica de la probabilidad de oscilación  $P(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu)$  en función de  $L$ .

De la gráfica 4.8, los mínimos y máximos para la probabilidad de ver neutrinos electrónicos en función de  $L$  son

$$\begin{aligned} P(L) &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \\ P'(L) &= \frac{\sin^2 2\theta \pi}{\lambda_0} \sin \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

Los extremos de esta función para valores de  $\lambda_0 = 100$  km y  $\theta = 32^\circ$  son

$$P'(L) = \frac{0,8\pi}{100} \sin\left(\frac{\pi L}{50 \text{ km}}\right) = 0 \longrightarrow L = 0 \text{ km}, 50 \text{ km} \dots$$

Sustituyendo estos valores de  $L$  en la segunda derivada

$$P''(L) = \frac{2 \sin^2 2\theta}{\lambda_0^2} \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda_0/2}\right) \quad (4.30)$$

con  $\lambda_0 = 100$  km y  $\theta = 32^\circ$  resulta

$$P''(L) = \frac{1,6\pi^2}{10000} \cos\left(\frac{\pi L}{50 \text{ km}}\right),$$

se tiene

$$\begin{aligned} P''(0) &= \frac{1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos\left(\frac{\pi 0 \text{ km}}{50 \text{ km}}\right) = -1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(50) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos\left(\frac{\pi 50 \text{ km}}{50 \text{ km}}\right) = 1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(100) &= \frac{1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos\left(\frac{\pi 100 \text{ km}}{50 \text{ km}}\right) = -1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \\ P''(150) &= \frac{-1,6\pi^2}{10000 \text{ km}^2} \cos\left(\frac{\pi 150 \text{ km}}{50 \text{ km}}\right) = 1,6x10^{-3} / \text{km}^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para valores de  $L = 0$  km, 100 km, 200 km..., son los mínimos de la función y para  $L = 50$  km, 150 km, 250 km ..., la función alcanza los máximos valores de probabilidad de observar a la partícula  $\nu_\mu$

En búsqueda de observar con mas detalle los rangos menores a  $100 \text{ km}/\pi$  para  $L$ , se tiene en escala logarítmica la Figura 4.9

Nuevamente, se analiza el término sinusoidal para los casos críticos de  $L$  en torno a  $\lambda_0/\pi$

1. Si  $L \ll 100 \text{ km}/\pi \longrightarrow \pi L/\lambda_0 \ll 1$ . Expandiendo en torno a 0, se tiene

$$\sin \frac{\pi L}{\lambda_0} \simeq \sin 0 + \left(\frac{\pi L}{\lambda_0} - 0\right) \cos 0 = \frac{\pi L}{\lambda_0}.$$

Para este caso, el término sinusoidal tiende a cero y la probabilidad en la ecuación es

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2(0) = 0. \quad (4.32)$$

Es decir, no hay probabilidad para ver oscilaciones en distancias  $L$  mucho menores a 100 km. El experimento se encuentra muy cerca de la fuente y las oscilaciones no tienen tiempo para desarrollarse.

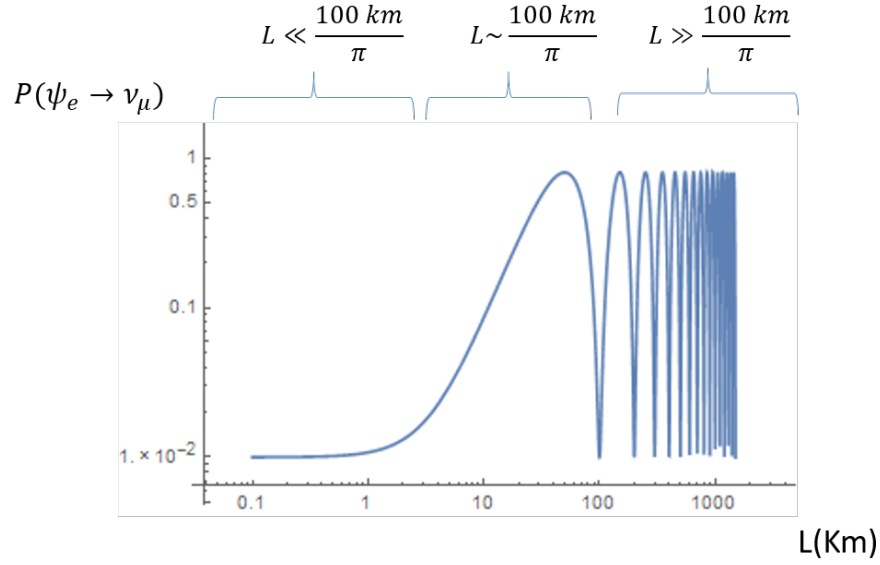


Figura 4.9: Gráfica logarítmica de la probabilidad de oscilación  $P(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu)$

2.  $L \sim 100/\pi \longrightarrow \pi L/\lambda_0 \sim 1$ . Se expande la función en serie de Taylor en torno a  $x_0 = 1$  y se tiene

$$\sin \frac{\pi L}{\lambda_0} \simeq \sin(1) + \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \cos(1) ,$$

y la probabilidad para este caso es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) &= 1 - \sin^2 2\theta \left[ \sin 1 + \cos 1 \left( \frac{L\pi}{\lambda_0} - 1 \right) \right]^2 , \\ &= \sin^2(2\theta) \left[ \sin^2(1) + 2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \sin(1) \cos(1) \right] , \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2(1) + \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} - 1 \right) \sin^2 2\theta \sin(2) , \\ &= \frac{\pi L}{\lambda_0} \sin^2(2\theta) \sin(2) + \sin^2 2\theta [\sin^2(2\theta) - \sin(2)] , \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde se han despreciado el término cuadrático para el argumento  $\pi L/\lambda_0$ . Luego haciendo  $b = \sin^2(2\theta) [\sin^2(2\theta) - \sin(2)]$ , y  $m = \pi/\lambda_0 \sin^2(2\theta) \sin(2)$  los cuales son constantes, se tiene

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = mL + b , \quad (4.34)$$

y el término sinusoidal sugiere una recta creciente en torno a los valores cercanos a  $100 \text{ km}/\pi$  para  $L$ . Es decir comienzan las oscilaciones.

3.  $L \gg 100\text{km}/\pi \longrightarrow L/\lambda_0 \gg 1$ , el término sinusoidal puede tomar cualquier valor entre 0 y 0,8. Para este caso varias oscilaciones han ocurrido entre la fuente y el detector.

Para visualizar tanto probabilidad de ver al neutrino electrónico como el mismo, y la probabilidad de transición de observarlo como muónico, en una misma gráfica, se tiene la Figura 4.10 en escala logarítmica, donde se observa que para distancias de  $L$  menores a  $100 \text{ km}/\pi$  la probabilidad de ver al neutrino electrónico como el mismo es segura, gráfica azul, y la probabilidad de verlo como neutrino muónico es nula, gráfica amarilla.

Sin embargo después de que el neutrino electrónico recorre una distancia cercana a  $100 \text{ km}/\pi$ , como indica la Figura 4.10, este empieza a oscilar y se observa que mientras en la gráfica azul el neutrino electrónico deja de verse como el mismo, en la amarilla se comienza a observar como muónico, coincidiendo los mínimos de  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e)$  con los máximos de la probabilidad  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , es decir, cuando es segura la probabilidad de ver al neutrino electrónico como muónico, es nula la de verlo como electrónico como era de esperar.

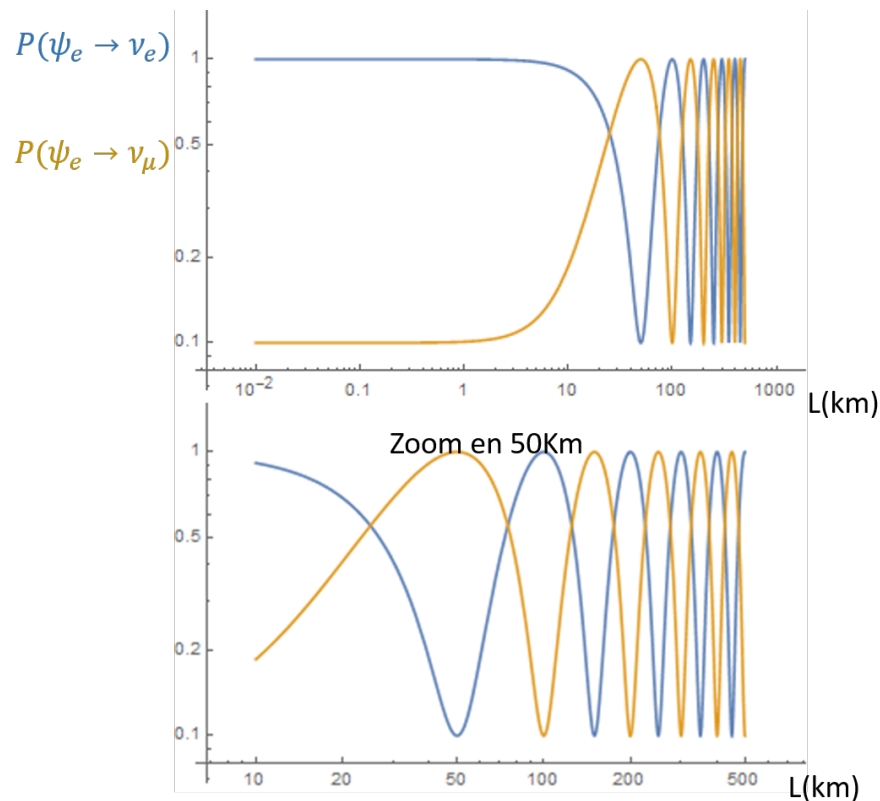


Figura 4.10: Gráfica logarítmica de las probabilidades de transición  $P(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ , en amarillo, y  $P(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , en azul, en función de  $L$ .

El zoom en la región de  $50 \text{ km}$ , se muestra para observar con más precisión las coincidencias de los picos máximos y mínimos de cada gráfica de probabilidad.

Por último, se tiene que las masas de los neutrinos en particular electrónico y muónico no son nulas, debido a que experimentalmente las oscilaciones de neutrinos están actualmente corroboradas y esto implica que las ecuaciones de probabilidad calculadas en este capítulo tanto

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L, \quad (4.35)$$

como

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L, \quad (4.36)$$

no pueden ser nulas por lo que el termino sinusoidal tampoco lo es, es decir

$$\sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) \neq 0$$

a su vez, esto sugiere que al mantener energía de movimiento los neutrinos, la diferencia de masa del argumento es distinta de cero  $\Delta m = m_1 - m_2 \neq 0$ , indicando que al menos una de estas masas no puede ser cero.

# Conclusiones

Para el estudio de las propiedades corpusculares y ondulatorias de una partícula subatómica, se tiene que los aspectos corpusculares de las partículas se miden mejor cuando se estudia su emisión o absorción, mientras que los aspectos ondulatorios se miden mejor cuando se estudia su comportamiento al moverse a través de un sistema [11]. En este trabajo se estudió ambos comportamientos de los neutrinos mediante el análisis de diferentes fenómenos.

Para el comportamiento corpuscular del neutrino se calculó la energía disponible para los electrones que se emiten en el decaimiento  $\beta$ , mediante un tratamiento clásico. Demostrando que sin tomar en cuenta el neutrino en esta desintegración resulta constante la energía esperada en los electrones, pero experimentalmente esto no es lo que ocurre, por lo que se planteó la presencia del neutrino en el decaimiento  $\beta$ , para compensar la energía que “sobra” como energía de movimiento del neutrino.

Por otro lado se analizó el comportamiento ondulatorio de los neutrinos, a través de oscilaciones cuánticas entre sabores. Por simplicidad práctica solo se consideraron los sabores electrónico y muónico. Para estudiar este fenómeno, se calculó la probabilidad de transición de que un neutrino electrónico  $\psi_e$  que se desplaza, sea visto como un neutrino muónico  $\nu_\mu$ , esto es

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \quad (4.37)$$

y la probabilidad de oscilación en que un neutrino electrónico  $\psi_e$  que se desplaza, sea visto como el mismo es

$$\mathcal{P}(\psi_e \longrightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi L}{\lambda_0} \right), \quad (4.38)$$

donde  $L$  es la longitud medida desde la fuente de neutrinos al detector, y  $\lambda_0$ , es la longitud de oscilación que se define como

$$\lambda_0 \equiv \frac{4\pi E_\nu \hbar c}{\Delta m^2 c^4}$$

Este parámetro, es una longitud crítica en las ecuación (4.37) y (4.38), debido a que permite identificar tres casos

1. Para  $\pi L/\lambda_0 \ll 1 \longrightarrow \sin(\pi L/\lambda_0) = \pi L/\lambda_0$  el término sinusoidal tiende a cero y la probabilidad de oscilación tiende a 1, es decir no se visualizan oscilaciones para longitudes mucho menores a  $\lambda_0$ .
2. Para  $\pi L \sim \lambda_0 \longrightarrow \pi L/\lambda_0 \sim 1$  las oscilaciones comienzan a desarrollarse.

3. Para  $\pi L \gg \lambda_0 \rightarrow \pi L/\lambda_0 \gg 1$  el término sinusoidal puede tomar cualquier valor entre el rango de oscilación de la función, es decir se observan oscilaciones.

Las gráficas logarítmicas obtenidas para las ecuaciones de probabilidad de oscilación (4.37) y (4.38) se ilustran en la Figura 4.11 y muestran que para neutrinos producidos en reactores, la longitud a los detectores  $L$  debe ser mayor a  $100 \text{ km}/\pi$ . Es decir para valores de  $L$  menores a  $100 \text{ km}/\pi$  la probabilidad de ver al neutrino electrónico como el mismo es segura, gráfica azul, y la probabilidad de verlo como neutrino muónico es nula, gráfica amarilla. También se observa que los mínimos de  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$  coinciden con los máximos de  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ , comprobando que mientras la probabilidad de ver al neutrino electrónico como el mismo es nula, la de verlo como muónico es segura. Luego comparando estos resultados con gráficas experimentales de [2] se obtuvo coincidencias en ambos resultados, indicando que las oscilaciones sólo se detectan, para  $L$  mayor a  $100 \text{ km}/\pi$ .

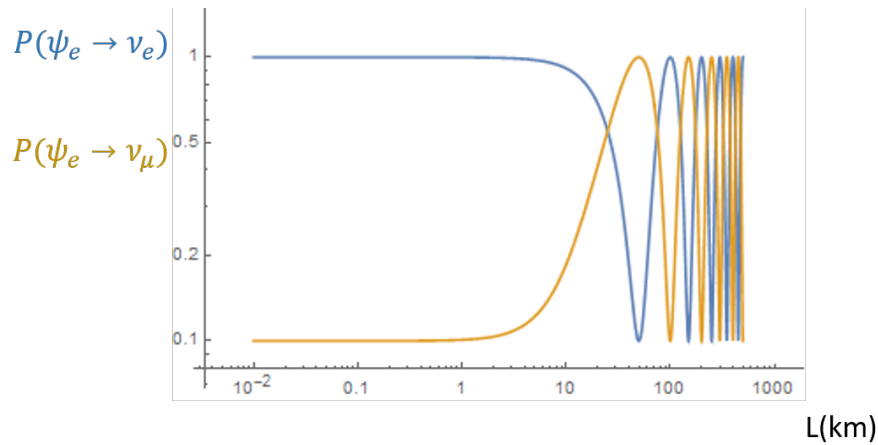


Figura 4.11: Gráfica de las probabilidades de transición  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu)$ , en amarillo, y  $\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e)$ , en azul, en función de  $L$ .

Ahora bien, note que las ecuaciones (4.37) y (4.38) se pueden reescribir como sigue

$$\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{P}(\psi_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \right) L, \quad (4.40)$$

donde el argumento del término sinusoidal tiene una una diferencia de masa  $\Delta m = m_1 - m_2$  siendo  $m_1$  y  $m_2$  la masa de los estados  $\psi_1$  y  $\psi_2$  respectivamente en la base de masas. Esto implica que para que los neutrinos oscilen  $\Delta m = m_1 - m_2 \neq 0$ , las masas deben ser diferentes, es decir  $m_1 \neq m_2$ , esto supone que al menos una de las masas no es cero.



---

De hecho, actualmente se tiene que las cota para los valores de las masas d los neutrinos son para el neutrino electrónico  $m_{\nu_e} < 2,05eV$  [17], para el neutrino muónico  $m_{\nu_{\mu}} < 0,17Mev$  [18] y para el neutrino tauónico es  $m_{\nu_{\tau}} < 18,2Mev$  [19].

# Apéndice A

## Densidad de probabilidad en la ecuación de Dirac

Para describir una partícula cuántica no relativista se debe usar una ecuación deducida de la primera cuantización [16]

$$E \longrightarrow i\partial_t \quad , \quad P_j \longrightarrow -i\partial_j \quad , \quad (\text{A.1})$$

luego de la energía clásica del fenómeno, se obtiene el análogo cuántico para una partícula libre de masa  $m$ ,

$$E = \frac{P_j P_j}{2m} \longrightarrow i\partial_t = -\frac{1}{2m} \partial_j \partial_j \quad (\text{A.2})$$

se logra

$$i\partial_t \psi(x, t) = \frac{1}{2m} \partial_j \partial_j \psi(x, t) \quad , \quad (\text{A.3})$$

la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. Para asegurar que esta ecuación describa correctamente las partículas cuánticas, la densidad de probabilidad debe ser positiva, en este sentido usamos la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \partial_i j_i = 0 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Para visualizar esta forma en la ecuación de Schrödinger multiplicamos a  $\psi$  por la izquierda

$$\psi^* (i\partial_t \psi - \frac{1}{2m} \partial_i^2 \psi) = 0 \quad , \quad (\text{A.5})$$

y a su conjugado se multiplica a la izquierda por  $\psi$

$$\psi (-i\partial_t \psi^* - \frac{1}{2m} \partial_i^2 \psi^*) = 0 \quad , \quad (\text{A.6})$$

restando (A.5) y (A.6)

$$i\psi^* \partial_t \psi + i\psi \partial_t \psi^* - \psi^* \frac{\partial_i \partial_j}{2m} \psi + \psi \frac{\partial_i \partial_j}{2m} \psi^* = 0 \quad , \quad (\text{A.7})$$

de donde se obtiene

$$\partial_t(\psi^*\psi) + \frac{1}{2m}\partial_i(\psi\partial_i\psi^* - \psi^*\partial_i\psi) . \quad (\text{A.8})$$

De esta ecuación se puede identificar la densidad de probabilidad como

$$\rho = \psi^*\psi , \quad (\text{A.9})$$

concluyendo que  $\rho > 0$ .

Generalización: Toda versión relativista de la ecuación de Schrödinger debe ser compatible con  $\rho > 0$ .

Para obtener la versión relativista de la ecuación de Schrödinger se sugiere usar ahora la ecuación relativista de la energía. Aplicando primera cuantización

$$E \longrightarrow i\partial_t \quad , \quad P_j \longrightarrow -i\partial_j ,$$

a la versión relativista de la Energía:

$$E^2 = P_j P_j + m^2 , \quad (\text{A.10})$$

se obtiene

$$-\partial_t^2\psi = -\partial_i\partial_i\psi + m^2\psi ,$$

$$(\partial_t^2 - \partial_i\partial_i + m^2)\psi = 0 \quad (\text{A.11})$$

la Ecuación de Klein-Gordon, que del mismo modo que en la ecuación de Schrödinger debe tener densidad de probabilidad positiva, para verificarlo usamos la ecuación de continuidad.

$$\partial_t\rho + \partial_i j_i = 0 , \quad (\text{A.12})$$

multiplicando la ecuación de K-G a la izquierda por  $\psi^*$

$$\psi^*(\partial_t^2\psi - \partial_i\partial_i\psi + m^2\psi) = 0 , \quad (\text{A.13})$$

y a su conjugado se multiplica a la izquierda por  $\psi$

$$\psi(\partial_t^2\psi^* - \partial_i\partial_i\psi^* + m^2\psi^*) = 0 , \quad (\text{A.14})$$

restando (A.13) y (A.14)

$$\partial_t(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) + \partial_i(\psi^*\partial^i\psi - \psi\partial^i\psi^*) = 0 ,$$

identificando la densidad de probabilidad

$$\rho = \psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^* , \quad (\text{A.15})$$

no es definida positiva, lo que sugiere que la ecuación de Klein-Gordon no describe correctamente las partículas cuánticas relativistas, ya que la interpretación física de las soluciones

de estas ecuaciones están basadas en la posibilidad de definir una densidad de probabilidad positiva, de lo contrario no tiene sentido físico.

La propuesta es construir una ecuación relativista compatible con una densidad de probabilidad positiva.

Para ello:

- La ecuación debe ser lineal en el tiempo y por lo tanto también en las coordenadas.
- Los componentes de  $\psi$  deben satisfacer la ecuación de Klein-Gordon

Partiendo de la energía relativista se debe construir una ecuación lineal para la misma, es decir, se debe poder lograr reescribir

$$E^2 = P^2 + m^2 = (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m) \longrightarrow E = \alpha_i P_i + \beta m ,$$

desarrollando

$$\begin{aligned} (\alpha_i P_i + \beta m)^2 &= (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m) , & (A.16) \\ (\alpha_i P_i + \beta m)^2 &= \alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_i \beta P_i m + \beta \alpha_j m P_j + \beta^2 m^2 , \\ (\alpha_i P_i + \beta m)^2 &= \alpha_i^2 P_i^2 + \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j P_i P_j + \frac{1}{2} \alpha_j \alpha_i P_j P_i + \{\alpha_i, \beta\} |_{i \neq j} m P_i + \beta^2 m^2 , \\ (\alpha_i P_i + \beta m)^2 &= \alpha_i^2 P_i^2 + \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} |_{i \neq j} P_i P_j + \{\alpha_i, \beta\} |_{i \neq j} m P_i + \beta^2 m^2 , \end{aligned}$$

para que la factorización exista

$$P^2 + m^2 = \alpha_i^2 P_i^2 + \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} |_{i \neq j} P_i P_j + \{\alpha_i, \beta\} |_{i \neq j} m P_i + \beta^2 m^2 ,$$

se debe cumplir

$$\alpha_i^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} |_{i \neq j} = 0, \quad \{\alpha_i, \beta\} |_{i \neq j} = 0.$$

- Introduciendo la notación  $\gamma^\mu$ , se define

$$\gamma^0 \equiv \beta , \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha_i , \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

- Se tiene

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I} \quad (A.17)$$

Donde  $\gamma^\mu$  son matrices NxN con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  que satisfacen el algebra de Clifford Y  $\eta^{\mu\nu} = [1, -1, -1, -1]$  es la métrica de Minkowsky

Usando

$$E = (\alpha_i P_i + \beta m) ,$$

a primera Cuantización

$$E \longrightarrow i\partial_t \quad , \quad P_j \longrightarrow -i\partial_j ,$$

se tiene

$$i\partial_t \psi = (-\alpha_i i\partial_j + \beta m)\psi , \quad (\text{A.18})$$

multiplicando ambos lados por  $\beta$

$$i\beta\partial_t \psi = (-\beta\alpha_i i\partial_j + \beta^2 m)\psi ,$$

usando  $\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i)$  se tiene

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_t \psi &= (-i\gamma^i \partial_i + m)\psi , \\ (i\gamma^0 \partial_t + \gamma^i \partial_i - m)\psi &= 0 , \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

es la ecuación de Dirac y por lo tanto  $\psi$  debe ser un vector columna de dimensión N:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

Para identificar la densidad de probabilidad:

- Considere la ecuación de continuidad, usando la ecuación de Dirac y su transpuesto conjugado

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi &= i\gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + \gamma^0 m \psi \\ -i\partial_t \psi^\dagger &= i\partial_i \psi^\dagger \gamma^i \gamma^0 + m \psi^\dagger \gamma^0 \end{aligned}$$

- multiplicando la ecuación de Dirac a la izquierda por  $\psi^\dagger$

$$i\psi^\dagger \partial_t \psi = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + \gamma^0 m \psi^\dagger \psi \quad (\text{A.20})$$

- luego multiplicando al conjugado de Dirac a la derecha por  $\psi$

$$-i(\partial_t \psi^\dagger) \psi = i\partial_i \psi^\dagger \gamma^i \gamma^0 \psi + m \psi^\dagger \gamma^0 \psi \quad (\text{A.21})$$

- restando este par de ecuaciones, se obtiene

$$i[\psi^\dagger \partial_t \psi + (\partial_t \psi^\dagger) \psi] = -i[\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + (\partial_i \psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^i \psi] \quad (\text{A.22})$$

Con la ecuación de continuidad podemos identificar la densidad de probabilidad

$$\partial_t \rho + \partial_i j_i = 0 ,$$

de (A.22) se tiene

$$\partial_t(\psi^\dagger \psi) + \partial_i(\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi) = 0 ,$$

identificando

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \dots \psi_N^* \psi_N , \quad (\text{A.23})$$

$\rho > 0$  por construcción. Y por lo tanto la ecuación de Dirac es la que describe correctamente partículas cuánticas en el ámbito relativista.

# Apéndice B

## Campo de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío vienen dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}, \quad (\text{B.1})$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{B.2})$$

en términos de los potenciales escalar,  $\phi$ , y vectorial,  $\vec{A}$ , los campos tienen la forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (\text{B.3})$$

Asumiendo  $A^\mu \equiv (A^0 = \phi, A^i = \vec{A})$ , se tiene

$$E^i = -\partial_t A^i - \partial^i A^0 = -F^{0i}, \quad y \quad B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}, \quad (\text{B.4})$$

en consecuencia

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{B.5})$$

y

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}, \quad (\text{B.6})$$

son las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial y  $A_\mu$  es el campo electromagnético o campo de Maxwell.

Considérese ahora la Lagrangiana de Maxwell

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.7})$$

con

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{B.8})$$

es invariante de Lorentz bajo la transformación

$$A'_\mu = \Lambda_\mu^\nu A_\nu$$

y también transforma bajo el grupo U(1) local mediante

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad (\text{B.9})$$

generando

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} (\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \theta - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \theta) \\ &\times (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\alpha \partial_\beta \theta - \partial_\beta A_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha \theta) = \mathcal{L} \end{aligned}$$

y  $A_\mu$  es el campo de calibre.



# Bibliografía

- [1] Jean Basdevant, Jean L. y Dalibard. *The Quantum Mechanics Solver*. 2005.
- [2] K. Eguchi et al. First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance. *Phys. Rev. Lett.*, 90:021802, 2003.
- [3] Cassini A. La invención del neutrino: un análisis epistemológico. *scientiæ zudia, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 11-39*, 2012.
- [4] Palash B. Pal. Dirac, Majorana and Weyl fermions. *Am. J. Phys.*, 79:485–498, 2011.
- [5] J. Beringer et al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys. Rev.*, D86:010001, 2012.
- [6] Díaz J. Conexión causal. (2001), disponible en <https://conexioncausal.wordpress.com/2015/03/21/como-atrapar-un-neutrino/>.
- [7] A. B. McDonald. Evidence for neutrino oscillations. I. Solar and reactor neutrinos. *Nucl. Phys.*, A751:53–66, 2005.
- [8] T. Kajita and P. Lipari. Atmospheric neutrinos and neutrino oscillations. *Comptes Rendus Physique*, 6:739–748, 2005.
- [9] Evgeny K. Akhmedov. Neutrino physics. In *Particle physics. Proceedings, Summer School, Trieste, Italy, June 21-July 9, 1999*, pages 103–164, 1999.
- [10] C. Rod. Hyperphysics (© c. r. nave). (2000), disponible en <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/pertab/po.html#c1>.
- [11] Robert J Eisberg, Robert M. y Resnick. *Física Cuántica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas*. 2012.
- [12] Wu-Ki Tung. *GROUP THEORY IN PHYSICS*. 2005.
- [13] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:1–29, 2012.
- [14] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:30–61, 2012.
- [15] Tong David. *Quantum Field Theory*. 2007.

- 
- [16] F. Gross. *Relativistic quantum mechanics and field theory*. 1993.
- [17] V. N. Aseev et al. Measurement of the electron antineutrino mass in tritium beta decay in the Troitsk nu-mass experiment. *Phys. Atom. Nucl.*, 75:464–478, 2012. [Yad. Fiz.75,500(2012)].
- [18] K. Assamagan et al. Upper limit of the muon-neutrino mass and charged pion mass from momentum analysis of a surface muon beam. *Phys. Rev.*, D53:6065–6077, 1996.
- [19] R. Barate et al. An Upper limit on the tau-neutrino mass from three-prong and five-prong tau decays. *Eur. Phys. J.*, C2:395–406, 1998.