Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado

Cuerpos estrellados en espacios de Banach

Autora: Lcda. Gladymar Francys Del Moral Bracho

Tutora: Dra. Yenny Rangel

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister en ciencias,
Mención Matemáticas

Barquisimeto, Octubre 2012

Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado

Cuerpos estrellados en espacios de Banach

AUTORA: Lcda. Gladymar Francys Del Moral Bracho

TUTORA: Dra. Yenny Rangel

Barquisimeto, Octubre 2012

RESUMEN

Estudiamos el tamaño de los conjuntos de gradientes de la funciones mesetas en los espacios de Hilbert y la pregunta referente a cuan pequeño puede ser el conjunto de hiperplanos tangentes de un cuerpo estrellado acotado y diferenciable en l_2.

También estudiamos la exitencia de una función meseta diferenciable de clase C^1 Lipschitz en l_2 cuyo cono generado por sus conjuntos de gradientes tienen interior vacío para ello usamos un resultado bastante importante como lo es la falla del teorema de Rolle en espacios de dimensión infinita.

Para finalizar construimos cuerpos estrellados tales que sus conos generados por hiperplanos tangentes a estos tienen interior vacío.

Palabras Claves: función meseta, cuerpos estrellados, cono de gradientes, cono de hiperplanos tangentes.

Dedicatoria:

A mis padres y demás familiares, a ustedes dedico este trabajo.

Agradecimientos:

- Primeramente a Dios, por darme el entendimiento y paciencia necesaria para sobrellevar cada día las adversidades que se me presentaron durante el desenvolvimiento de esta especialización y realización del presente trabajo.
- A mis padres por su apoyo incondicional en todo momento, los amo.
- A mis hermanos su apoyo siempre es y será valorado.
- A mis abuelitos y en especial a ti chancha yo se que desde el cielo me das tu bendición y estas orgullosa de mi como yo de ti.
- A mis tios (as), primos(as) por su apoyo y cariño.
- A mi tutora **Dra. Yenny Rangel**, por guiarme en todo momento, por tenderme la mano cuando mas la necesite, por compartir sus conocimentos y por sobre todo tenerme tanta paciencia y creer en mi.
- A Luiggy, Nelson, Octalis, Marco, Manuel, Dexy, Nestor, Eduard N y David, mis compañeros de maestría, nunca olvidare su apoyo brindado.
- A el profesor **Edgar Guedez** por su apoyo y palabras de aliento cuando más las necesite.
- A **Karmela Lozada** † por su valiosa colaboración, no olvido las tantas veces en que me ayudo con algún inconveniente con latex. Dios la bendiga siempre.

- A mi amigo **Henry Rodríguez** por su apoyo incondicional y sus palabras sabias en el mejor momento.

- A los profesores **Neptali Romero**, **Ebner Pineda**,**Wilmer Colmenarez** por su contribución en mi formación académica.

Índice general

Introducción **1**

1. Conjunto de gradientes de una función meseta **3**

1.1. Derivación en espacios normados 3

1.2. Funciones meseta y la falla del teorema de Rolle 12

1.3. Resultado principal 17

2. Cuerpos estrellados en l_2 **35**

2.1. Nociones básicas 35

2.2. Resultado Principal sobre cuerpos estrellados 47

Bibliografía **54**

Introducción

Funciones meseta diferenciables y cuerpos estrellados son objetos que surgen naturalmente en análisis funcional no lineal y además sus propiedades geométricas valen la pena ser estudiadas. Sin embargo, preguntas muy naturales acerca de hiperplanos tangentes de tales objetos permanecieron sin ser plantedas o respondidas a nivel de los espacios de Hilbert, hasta muy recientemente.

Motivados en esto nuestro estudio es analizar el tamaño de los conjuntos de gradientes de las funciones meseta (esto es una función con soporte no vacío y acotado) en los espacios de Hilbert l_2 y la pregunta relacionada de cuan pequeño puede ser el conjunto de hiperplanos tangentes de un cuerpo estrellado acotado y diferenciable en l_2.
Es necesario mencionar que uno de los hechos considerados en este estudio es la falla del teorema de Rolle en espacios de Banach de dimensión infinita que posean una función meseta de clase C^1 (Lipschitz) que valga cero fuera de un abierto acotado y no tenga derivada cero en ningún punto del abierto, mostrando así mismo un ejemplo que exhibe dicha falla. Este hecho tiene interesantes consecuencias en la pregunta acerca del mínimo tamaño del conjunto de hiperplanos tangentes, en otras palabras, el cono

generado por sus conjuntos de gradientes el cual es denotado por

$$C(b) = \{\lambda b'(x) : x \in X, \lambda \geqslant 0\}$$

(ver sección 1·2 Capítulo 1).

También estudiamos la existencia de una función meseta (Lipschitz) diferenciable de clase C^1 en l_2 tal que el cono generado por sus conjuntos de gradientes tiene interior vacío; esto se logra al aproximar uniformemente la norma usual del espacio de Hilbert l_2 por funciones de Lipschitz diferenciables de clase C^1 en l_2 (ver sección 1·3 Capítulo 1).

Finalmente, construimos cuerpos estrellados y diferenciables de clase C^1 en l_2, tales que el cono generado por sus hiperplanos tangentes tiene interior vacío (ver Capítulo 2).

Capítulo 1

Conjunto de gradientes de una función meseta

1.1. Derivación en espacios normados

Recordemos que la derivabilidad de una función real f en un punto a de $\mathbb{R}$ queda determinada por la existencia del límite $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; sin embargo esta igualdad carece de sentido si analizamos funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. De hecho, decimos que una función f de este tipo es diferenciable en el punto a de $\mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que, $\lim_{x\to a} \dfrac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$. Notemos que para lograr una noción más general fue necesario expresar la definición inicial considerando las respectivas normas y la existencia de una aplicación lineal determinada. A pesar de que esta extensión de derivada es bastante cómoda nos limita a trabajar en espacios vectoriales de dimensión finita, dependiendo así de el sistema de coordenadas y la base que se fije. Debido a estas limitantes se hace necesario ampliar aún más dicha definición quedando como casos particulares las ya conocidas. Motivados con la idea de crear una nueva teoría aparecen los trabajos realizados por R.Gâteaux y M. Fréchet.

Gâteaux por su parte dió la primera definición de diferenciabilidad de gran importancia en este nuevo análisis y además desarrolló su concepto de derivada (derivada direccional). Mientras que Fréchet fué quien extendió el concepto de diferenciabilidad a los espacios normados ampliando la noción de derivada dada por Gâteaux y demostrando que su definición conserva las propiedades esenciales de la definición del Análisis clásico.

Definición 1 Sean E y F espacios normados (ambos reales o ambos complejos), X un subconjunto abierto de E y $f : X \to F$ una aplicación dada. Decimos que f tiene una derivada en un punto $a \in X$ en la dirección de $h \in E$ si el límite $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ existe. En este caso, designamos a este límite por $D_h f(a)$ y lo llamamos *derivada direccional* (o derivada Gâteaux) de f en a en la dirección de h. Destaquemos que $D_h f(a) \in F$.

Denotemos con $L(E,F)$ al espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

Definición 2 Sean E y F espacios normados, X un subconjunto abierto de E y $f : X \to F$ una aplicación dada. Decimos que f es *diferenciable* en el sentido Fréchet en un punto a de X si existe una aplicación $Df(a)$ en $L(E,F)$ tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

De forma equivalente, $f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + r(x)$ donde r es una función definida alrededor de a, excepto en a tal que $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$ y $r(a) = 0$. Llamamos a la aplicación $Df(a) : E \to F$ la derivada (o derivada total, o derivada Fréchet) de f en a.

Observaciones

1. Si $f : X \subset E \to F$ es diferenciable en $a \in X$, entonces su derivada es única.

2. Decimos que f es diferenciable en X si es diferenciable en todo punto de X. En este caso, llamamos a la aplicación $Df : E \to L(E, F)$ la aplicación derivada de f. Si además Df es una aplicación continua decimos que f es continuamente diferenciable (o de clase C^1). Además, podemos suponer al espacio $L(E, F)$, un espacio normado fijada una conveniente norma. De este modo, tiene sentido considerar la posibilidad de que Df sea diferenciable en $X \subset E$. Procediendo inductivamente definimos,

$$D^n f = D(D^{n-1} f) : X \subset E \to L^n(E, F) = L(E, L^{n-1}(E, F)).$$

   Si $D^n f$ existe y es continua, decimos que f es de clase C^n, y si esto vale para todo n, entonces f es de clase C^∞. Además, llamamos a $D^n f(a)$ la derivada n- ésima de f en el punto $a \in X$.

La siguiente proposición da una relación entre derivadas direccionales (vectores) y derivadas (aplicaciones lineales).

PROPOSICIÓN 1 *Sean E, F espacios normados $X \subset E$ un subconjunto abierto y $f : X \to F$. Dado $a \in X$, si f es diferenciable en a entonces f es derivable en a en toda dirección $h \in E$ y $D_h f(a) = Df(a)h$.*

Observación: El recíproco de esta proposición es falso, es decir, no es cierto que la existencia de todas las derivadas direccionales $D_h f(a)$ de una aplicación f en un punto a implica la diferenciabilidad de f en a.
El contraejemplo más común de este hecho se obtiene considerando aplicaciones homogéneas.

En general, los resultados que a continuación daremos se demuestran de forma equivalente a sus análogos en el cálculo de varias variables, ver [Ma].

PROPOSICIÓN 2 *Sean E, F espacios normados, y $X \subset E$ un subconjunto abierto. Si la aplicación $f : X \to F$ es diferenciable en $a \in E$, entonces existe una constante $c > \|Df(a)\|$ y un número $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(a)\| \leqslant c\|x - a\|$ cuando $\|x - a\| < \delta$ (condición local de Lipschitz).*

Observación. Como consecuencia de la proposición 2, toda aplicación diferenciable es continua.

PROPOSICIÓN 3 *(Carácter local de la diferenciabilidad) Sean E, F espacios normados y $X \subset E$ un subconjunto abierto y $f : X \to F$ diferenciable en X. Si $U \subset X$ es un* *subconjunto abierto entonces la restricción $f|_U$ es diferenciable en U y*

$$D(f|_U)(a) = Df(a)$$

para todo $a \in U$.

Proposición 4 *Sean E y F espacios normados, $X \subset E$ un subconjunto abierto, $a \in X$ y $f : X \to F$.*

1. *Si $f \in L(E, F)$ entonces f es diferenciable para todo a en X y $Df(a) = f$.*

2. *Si f es una aplicación constante en E entonces f es diferenciable y $Df(a) = 0$, $\forall a \in E$ (aplicación nula).*

Proposición 5 *Sean E_1, E_2 y F espacios normados y X_1 y X_2 subconjuntos abiertos de E_1 y E_2 respectivamente. Si $f : E_1 \times E_2 \to F$ es una aplicación bilineal entonces f es diferenciable para todo $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ y*

$$Df(a)x = f(x_1, a_2) + f(a_1, x_2)$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Proposición 6 *Sean E, F_1, F_2 espacios normados y $X \subset E$ un subconjunto abierto. Sean $f_1 : X \to F_1$, $f_2 : X \to F_2$ dadas y $f = f_1, f_2 : X \to F_1 \times F_2$ definida por $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in F_1 \times F_2$ para $x \in X$. Entonces f es diferenciable en $a \in X$ si y solo si f_1 y f_2 son diferenciables en a. Además $Df(a) = (Df_1(a), Df_2(a))$, esto es, $Df(a)x = (Df_1(a)x, Df_2(a)x)$ para todo $x \in E$.*

PROPOSICIÓN 7 *(Regla de la cadena) Sean E, F, G espacios normados y X, Y subconjuntos abiertos de E y F respectivamente. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to G$. Si f es diferenciable en $a \in X$ y g es diferenciable en $f(a) \in Y$, entonces la aplicación compuesta $g \circ f : X \to G$ es diferenciable en $a \in X$ y*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

PROPOSICIÓN 8 *(Regla del producto) Sean E, F_1, F_2 y G espacios normados, X, Y_1 y Y_2 subconjuntos abiertos de E, F_1, F_2 respectivamente. Sean*

$$f_1 : X \to F_1 \text{ y } f_2 : X \to F_2$$

diferenciables en $a \in X$, y $g : Y_1 \times Y_2 \to G$ bilineal. Entonces la aplicación

$$g(f_1, f_2) = g \circ (f_1, f_2) : X \to G$$

es diferenciable en $a \in X$ y

$$Dg(f_1, f_2)(a)x = g(Df_1(a)x, f_2(a)) + g(f_1(a), Df_2(a)x).$$

PROPOSICIÓN 9 *Sean E, F espacios normados y $X \subset E$ un subconjunto abierto. Sean $f : X \to F$ y $g : X \to F$ ambas diferenciables en el punto $a \in X$.*

1. *La aplicación $f + g : X \to F$ es diferenciable en $a \in X$ y*

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

2. *Si* $h : X \to \mathbb{R}$ *entonces la aplicación* $hf : X \to F$ *definida por*

$$hf(x) = h(x)f(x)$$

es diferenciable en $a \in X$ *y* $D(hf)(a) = Dh(a)f(a) + h(a)Df(a)$.

Proposición 10 *Sean* E, F *espacios normados;* X, Y *subconjuntos abiertos de* E *y* F *respectivamente y* $f : X \to Y$ *un homeomorfismo. Si* f *es diferenciable en* $a \in X$ *entonces* f^{-1} *es diferenciable en* $b = f(a)$ *si y sólo si* $Df(a)$ *es un isomorfismo lineal acotado, en cuyo caso* $Df^{-1}(b) = (Df(a))^{-1}$

Proposición 11 *Sean* E, F *espacios normados,* $X \subset E$ *un subconjunto abierto y convexo,* $f : X \to F$ *una aplicación diferenciable en* X. *Si existe una constante* $c > 0$ *tal que,* $c \geqslant \|Df(x)\|$ *para todo* $x \in X$, *entonces* $\|f(y) - f(x)\| \leqslant c\|x - y\|$ *para todo* $x, y \in X$ *(Condición global de Lipschitz).*

Proposición 12 *Sean* E, F *espacios normados,* $X \subset E$ *un subconjunto abierto y conexo, y* $f : X \to F$ *una aplicación diferenciable. Si* $Df(x) = 0$ *en* X *entonces* f *es constante en* X.

Teorema 13 *(Teorema del Valor Medio de Lagrange) Sea* f *una función real de variable real tal que:*

1. f *es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$

2. *f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Debido a la importancia de los siguientes resultados tomamos en consideración sus respectivas pruebas tomando en cuenta algunas definiciones usadas en ellas.

Definición 3 Definimos segmento de recta de extremos x e y, denotado por $[x, y]$ al conjunto $[x, y] = \{z \in X : \ z = (1-t)x + ty, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Teorema 14 *(Igualdad del Valor Medio) Sean E un espacio normado, $X \subset E$ un subconjunto abierto, $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable en X y $x, y \in X$ tales que $[x, y] \subset X$. Entonces existe $z \in [x, y]$ tal que $f(y) - f(x) = Df(z)(y - x)$.*

Demostración. *Consideremos la aplicación $g : U \subset \mathbb{R} \to E$ tal que*

$$g(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y$$

y el subconjunto $U = \{\lambda \in \mathbb{R} : (1-\lambda)x + \lambda y \in X\}$. De las proposiciones 4 parte 1) y 9 también parte 1) obtenemos que g es diferenciable y

$$Dg(\lambda) = Dg((1-\lambda)x) + Dg(\lambda y) = Dg(x - \lambda x) + Dg(\lambda y) = -x + y = y - x \quad (1.1)$$

Consideremos $h(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda y)$, entonces h es diferenciable y

$$\begin{aligned} Dh(\lambda) &= Df((1-\lambda)x + \lambda y)D(\lambda) \\ &= Df\underbrace{((1-\lambda)x + \lambda y)}_{z}(y - x) \qquad \textit{(por 1.1)} \end{aligned}$$

Ahora, aplicando a h el Teorema del Valor Medio para una función real de variable real en el intervalo $[0,1]$, obtenemos que existe $\lambda \in [0,1] \subset U$ tal que

$$h(1) - h(0) = Dh(\lambda), \text{ esto es, } f(y) - f(x) = Df(z)(y-x) \text{ con } z \in [x,y]$$

$\blacksquare$

Para la demostración del siguiente teorema es necesario recordar que si F es un espacio normado, su espacio dual denotado como F^* es el conjunto formado por todos los funcionales lineales acotados sobre F.

Teorema 15 *(Desigualdad del Valor Medio) Sean E, F espacios normados, $X \subset E$ un subconjunto abierto, $f : X \to F$ una aplicación diferenciable en X y $x, y \in X$ tales que $[x,y] \subset X$. Entonces,*

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \sup_{z\in[x,y]} \|Df(z)\| \cdot \|y-x\|$$

Demostración. *Tomemos una aplicación arbitraria ψ en el espacio dual de F y consideremos la aplicación $g(t) = \psi(f((1-t)x + ty))$ definida para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Por la proposición 4, ψ es diferenciable y $D_\psi(b) = \psi$ para $b \in F$. Entonces por la proposición 7, g es diferenciable y*

$$Dg(t) = \psi(Df((1-t)x + ty)(y-x)) \tag{1.2}$$

Luego aplicando el Teorema del Valor Medio para una función real de variable real a g en $[0,1]$ tenemos que

$$g(1) - g(0) = Dg(\theta)(1-0), \text{ para algún } \theta \text{ con } 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

(θ depende de ψ, ya que $Dg(t) = D\psi(f(t))Df(t)$).

Entonces, de esta última igualdad y de (1.2) tenemos

$$\psi(f(y) - f(x)) = \psi(Df((1-\theta)x + \theta y)(y-x)), \tag{1.3}$$

y esto vale para cualquier $\psi \in F^*$. Ahora, deducimos de (1.3) que:

$$\begin{aligned} |\psi(f(y) - f(x))| &\leqslant \|\psi\| \cdot \|Df((1-\theta)x + \theta y)\| \cdot \|y-x\| \\ &\leqslant \|\psi\| \cdot \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1} \|Df((1-\theta)x + \theta y)\| \cdot \|y-x\| \end{aligned} \tag{1.4}$$

1. *Si $f(y) = f(x)$ inmediato*

2. *Supongamos que $f(y) \neq f(x)$ por teorema de Hahn-Banach*

$$\exists \phi \in F^* : \|\phi\| = 1 \wedge \phi(w) = \|w\|, \quad \text{para } w = f(y) - f(x)$$

y sabiendo que $\phi(f(y) - f(x)) = \|\phi\| \cdot \|f(y) - f(x)\|$, de (1.4) se deduce que

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \sup_{z\in[x,y]} \|Df(z)\| \cdot \|y-x\|.$$

■

1.2. Funciones meseta y la falla del teorema de Rolle

Definición 4 Sea X un espacio de Banach. Se dice que $b : X \to \mathbb{R}$ es una función meseta si es diferenciable tiene soporte no vacío y acotado.

Observación. Sea b una función meseta. Denotaremos el cono generado por sus conjuntos de gradientes por $C(b) = \{\lambda b'(x) : x \in X,\ \lambda \geqslant 0\}$.

El teorema de Rolle en espacios de dimensión finita dice que para todo subconjunto abierto acotado $U \subset \mathbb{R}$ y para toda función continua $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en U y constante en ∂U, existe un punto $x \in U$ tal que $f'(x) = 0$. Desafortunadamente, el teorema de Rolle no es válido en espacios de dimensión infinita. Fué S.A Shkarin ver [Sh2] el primero en mostrar la falla del teorema de Rolle en espacios superreflexivos de dimensión infinita y en espacios reflexivos los cuales tienen normas continuas. La clase de espacios para los cuales falla el teorema de Rolle son considerablemente ampliadas en [AGJ]. Hasta ahora en muchos espacios de Banach de dimensión infinita el teorema de Rolle es falso o trivial, dependiendo de las propiedades de continuidad de norma consideradas en el espacio. Azagra, Gómez y Jiménez demostraron en [AGJ], que el torema de Rolle falla en un espacio de Banach de dimensión infinita si y solo si el espacio tiene una función meseta de clase C^1.

De cualquier manera, ninguno de estos resultados citados arriba caracterizan los espacios para los cuales el teorema de Rolle falla. En efecto, construir ejemplos sobre esto bastante difícil en espacios que no son separables, ni de norma continua. Así R. Haydon demostró [Ha], que estos espacios de Banach con función meseta continua posee normas no equivalentes. Además es natural exigir que la meseta continua la cual no satisface el teorema de Rolle sea Lipschitz siempre que la meseta obtenida sea continua Lipschitz en el espacio considerado, y este requerimiento hace del problema más delicado.

Es bien conocido el teorema de Rolle de funciones reales de variable real, veamos a continuación una generalizacion de este a espacios de dimensión finita.

Teorema 16 *(Teorema de Rolle para espacios de dimensión finita) Para todo subconjunto abierto y acotado $X \subset \mathbb{R}^n$ y para toda función continua $f : \overline{X} \to \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en X y constante en su frontera ∂X, existe un punto $x \in X$ tal que $Df(x) = 0$ (Observar que si $n = 1$ tenemos el enunciado clásico).*

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo Si H es un espacio de Hilbert real entonces la aplicación $f(x) = \|x\|^2$ es diferenciable en H. En efecto, observemos que para todo $a \in H$ se verifica

$$\|x\|^2 - \|a\|^2 = 2\langle x - a, a\rangle + \|x - a\|^2,$$

pero esto es equivalente a escribir

$$f(x) - f(a) = L_a(x - a) + r(x),$$

donde $L_a x = 2\langle x, a\rangle$, es una aplicación lineal y continua de H en $\mathbb{R}$ y $r(x) = \|x - a\|^2$ es tal que $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$ y $r(a) = 0$. Luego, $Df(a) = L_a$.

Ejemplo Sean E un espacio normado, $X \subset E$ un subconjunto abierto y $g : X \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable en X tal que $g(a) \neq 0$ para todo $a \in X$. Sea $Y = \mathbb{R} - \{0\}$ y consideremos la función $h : Y \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \dfrac{1}{t}$. Sabemos que h es diferenciable en Y y $D_h(t) = -\dfrac{1}{t^2}$. Además como $g(X) \subset Y$, deducimos de la proposición 7 que la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ es diferenciable en X y $Df(a)x = -\dfrac{Dg(a)x}{[g(a)]^2}$ para todo $a \in X$ y $x \in E$.

El siguiente ejemplo nos da una muestra de como falla el teorema de Rolle en funciones con dominio en espacios de Banach de dimensión infinita.

Ejemplo Consideremos el operador $S : l_2 \to l_2$ definido por $S_x = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$ donde $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$. Sea $F : l_2 \to l_2$ la aplicación definida por

$$F(x) = (\frac{1}{2} - \|x\|^2)e_1 + S_x$$

donde $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ y consideremos la aplicación $f : l_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - F(x)\|^2}.$$

F no tiene puntos fijos, en efecto,

$$\begin{aligned}
F(x) &= (\frac{1}{2} - \|x\|^2)e_1 + S_x \\
&= (\frac{1}{2} - \|x\|^2)(1, 0, 0, 0, ...) + (0, x_1, x_2, x_3, ...) \\
&= (\frac{1}{2} - \|x\|^2, 0, 0, ...) + (0, x_1, x_2, x_3, ...) \\
&= (\frac{1}{2} - \|x\|^2, x_1, x_2, x_3, ...)
\end{aligned}$$

Esto prueba que F no tiene puntos fijos, luego f es continua en l_2. Además $f(x) = 0$ para todo $x \in \partial U$, donde U es la bola abierta unitaria de l_2. Aplicando convenientemente los ejemplos 1 y 2 junto con las proposiciones 4, 7 y 9 obtenemos que f es diferenciable en l_2. Entonces, en U, f satisface las hipótesis del teorema de Rolle; no obstante, se puede probar que $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in U$.(vea [Fe1])

Consideremos a continuación el siguiente resultado, el cual generaliza la falla del teorema de Rolle a espacios de Banach de dimensión infinita y cuya demostración puede verse en [AJ1], para ello tendremos en cuenta la siguiente definición

Definición 5 Un conjunto A se dice *contractible* si la aplicación identidad $i : A \to A$ es homotópicamente nula.

Teorema 17 *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces son equivalentes:*

1. *Existe una aplicación continuamente diferenciable, suave y no nula,*

$$g : X \subset E \to \mathbb{R},$$

   donde X es un subconjunto abierto, tal que

$$sop(g) = \overline{\{x \in E : g(x) \neq 0\}} \quad \textit{es acotado.}$$

2. *Existe un conjunto abierto, acotado y contractible $A \subset E$ y una aplicación continuamente diferenciable $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ tal que f es suave, $f \equiv 0$ en ∂A, pero $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ (el Teorema de Rolle falla en A).*

1.3. Resultado principal

El teorema 20 y su corolario son los resultados centrales de este capítulo. Dicho corolario garantiza la existencia de funciones Lipschitz en l_2 donde el cono de sus conjuntos de gradientes tiene interior vacío. El teorema por su parte es la clave para la construcción de un cuerpo estrellado diferenciable y acotado cuyo cono de hiperplanos tangentes tiene interior vacío el cual es resultado central del capítulo 2.

Para la demostración de este teorema usaremos el teorema 18 cuya prueba puede verse en [Sh1] donde la falla del teorema de Rolle juega un papel fundamental y el teorema 19 su demostración se encuentra en [BaN].

Teorema 18 *Existe un difeomorfismo φ de clase C^∞ de l_2 en $l_2 \setminus \{0\}$ tal que todas las derivadas $\varphi^{(n)}$ son uniformemente continuas en l_2, y $\varphi(x) = x$ para $\|x\| \geqslant 1$.*

Teorema 19 *Sea X un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita. Entonces X es congruente con l_2.*

Teorema 20 *Denotemos por $\|\cdot\|$ la norma usual hilbertiana de l_2. Entonces, existen funciones $f_\varepsilon : l_2 \to (0, \infty)$; con $0 < \varepsilon < 1$ de clase C^1 las cuales son Lipschitz en conjuntos acotados y tienen derivadas Lipschitz, tal que:*

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \|x\|^2$ *uniformemente en l_2;*

2. $\lim_{\varepsilon \to 0} f'_\varepsilon(x) = 2x$ *uniformemente en l_2;*

3. $\operatorname{int} C(f_\varepsilon) = \emptyset$, *y* $f'_\varepsilon(x) \neq 0$ *para todo* $x \in l_2,\ 0 < \varepsilon < 1$, *donde* $C(f_\varepsilon)$ *es el cono generado por los conjuntos de gradientes de las* f_ε.

Demostración. *Por el teorema 18 consideremos los difeomorfismos* $\varphi_\varepsilon : l_2 \to l_2 \setminus \{0\}$, *definidos por*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \text{donde } \ 0 < \varepsilon < 1$$

y la función $U \equiv U_\varepsilon : l_2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $U(x) = \varepsilon^2 + \|\varphi 0_\varepsilon(x)\|^2$. *Entonces* U *satisface las siguientes propiedades:*

1. U *es de clase* C^∞

2. $\|x\|^2 \leqslant U(x) \leqslant 2\varepsilon^2 + \|x\|^2$ *y* $\varepsilon^2 \leqslant U(x)$, *para cada* $x \in l_2$

3. $U(x) = \varepsilon^2 + \|x\|^2$, *para cada* $x \in l_2,\ \|x\| \geqslant \varepsilon$

4. $U'(x) \neq 0$ *para cada* $x \in l_2$

5. U *es Lipschitz en un conjunto acotado y* U' *es Lipschitz.*

En efecto;

1. U *es de clase* C^∞ *pues* φ_ε *lo es por el teorema 18*

2. *Por un lado, de las definiciones de* U, φ, *y por el teorema 18*

$$\begin{aligned} U(x) &= \varepsilon^2 + \|\varphi_\varepsilon(x)\|^2 \\ &= \varepsilon^2 + \|\varepsilon\varphi(\frac{x}{\varepsilon})\|^2 \\ &= \varepsilon^2 + \|\varepsilon\frac{x}{\varepsilon}\|^2 \\ &= \varepsilon^2 + \|x\|^2 \\ &\leqslant 2\varepsilon^2 + \|x\|^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

   Por otro,

$$U(x) = \varepsilon^2 + \|x\|^2 \Rightarrow U(x) \geqslant \|x\|^2, si\|x\| \geqslant \varepsilon \tag{1.6}$$

   Similarmente,

$$U(x) = \varepsilon^2 + \|x\|^2 \Rightarrow U(x) \geqslant \varepsilon^2, \forall x \in l_2 \tag{1.7}$$

   Luego de (1.5), (1.6) y (1.7)

$$\|x\|^2 \leqslant U(x) \leqslant 2\varepsilon^2 + \|x\|^2 \ y \ \varepsilon^2 \leqslant U(x) \ para \ cada \ x \in l_2 \tag{1.8}$$

3. *Es inmediata de 2. y* $\|x\| \geqslant \varepsilon$ *pues* $\varphi_\varepsilon(x) \in l_2 \setminus \{0\}$ *(por teorema 18)*

4. *Dado que* $U(x) = \varepsilon^2 + \|x\|^2$ *para cada* $x \in l_2$ *y* $\|x\| \geqslant \varepsilon > 0$ *(por 1.7), se tiene que* $U'(x) = L_x \in L(l_2, \mathbb{R}) = l_2^*$ *donde* $L_x(y) = 2\langle y, x\rangle = \langle y, 2x\rangle$*para todo* $y \in l_2$ *y como* $\|x\| > \varepsilon$ *obtenemos que* $U'(x) \neq 0,$ *para todo*$x \in l_2$.

5. *Veamos que U es Lipschitz en un conjunto acotado.*

$$Sean\ x, y \in B,\ B \subset l_2\ acotado,\ esto\ es\ \exists A > 0 : \|x\| \leqslant\ A\ para\ todo\ x\ en\ B \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
|U(x) - U(y)| &= |(\varepsilon^2 + \|x\|^2) - (\varepsilon^2 + \|y\|^2)| (por\ prop\ 3\ en\ U) \\
&= |\varepsilon^2 + \|x\|^2 - \varepsilon^2 - \|y\|^2| \\
&= |\|x\|^2 - \|y\|^2| \\
&= |\|x\| + \|y\|| \cdot |\|x\| - \|y\|| \\
&\leqslant 2A|\|x\| - \|y\|| \qquad\qquad (por\ 1.9) \\
&\leqslant 2A\|x - y\|
\end{aligned}$$

Por tanto, U es Lipschitz en conjuntos acotados.

Veamos ahora que U' es Lipschitz

$$\begin{aligned}
\|U'(x) - U'(y)\| &= L_x - L_y \\
&= \sup_{\|z\|=1} |L_x(z) - L_y(z)| \\
&= \sup_{\|z\|=1} |\langle z, 2x\rangle - \langle z, 2y\rangle| \\
&= \sup_{\|z\|=1} |\langle z, 2x - 2y\rangle| \\
&\leqslant \sup_{\|z\|=1} (\|z\|\|2x - 2y\|) = \|2x - 2y\| \sup_{\|z\|=1} \|z\| \\
&= \|2(x - y)\| = 2\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, U' es Lipschitz.

Ahora, definamos las funciones $U_n : l_2 \to \mathbb{R}$ *por* $U_n(x) = \frac{1}{2^{2n}}U(2^n x)$, *siempre que* $x \in l_2$.

Por otro lado, definamos $(\sum_2 l_2, \|\cdot\|_1)$ *donde*

$$\sum_2 l_2 = \{x = (x_n)_{n\geqslant 0} : x_n \in l_2 \ y \ \|x\|_1 = (\sum_n \|x_n\|^2)^{1/2} < \infty\}$$

Como $(\sum_2 l_2, \|\cdot\|_1)$ *es separable (vea [Fe1]) y la norma proviene de un producto interno, podemos concluir que* $(\sum_2 l_2, \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Hilbert separable y por tanto congruente con* l_2. *Así identificamos a* $\sum_2 l_2$ *con la suma infinita*

$$\sum_2 l_2 = l_2 \oplus_2 l_2 \oplus_2 l_2 \oplus ...$$

donde un elemento $x = (x_n)$ *pertenece a* $\sum_2 l_2$ *si y solo si* x_n *está en* l_2 *y* $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, *siendo* $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$.

Entonces definimos la función $f \equiv f_\varepsilon : \sum_2 l_2 \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = \sum_n U_n(x_n)$, *donde* $x = (x_n)_n$.

Primero note que f *está bien definida. En efecto, sea* $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$,

$$\begin{aligned} 0 < f(x) &= \sum_n U_n(x_n) \\ &= \sum_n \frac{1}{2^{2n}} U(2^n x_n) \ (por\ def\ de\ U) \\ &\leqslant \sum_n \frac{1}{2^{2n}} (2\varepsilon^2 + \|2^n x_n\|^2) \ (por\ prop\ 2\ en\ U.) \\ &= \sum_n (\frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \frac{\|2^n x_n\|^2}{2^{2n}}) \\ &= \sum_n (\frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \frac{2^{2n}\|x_n\|^2}{2^{2n}}) \\ &= \sum_n (\frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \|x_n\|^2) < \infty, ya\ que\ (x_n) \in \sum_2 l_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por tanto, f está bien definida.

Antes de continuar hallemos U_n'. Dado que $U_n(x) = \frac{1}{2^{2n}}U(2^n x)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} U_n'(x) &= \frac{1}{2^{2n}}U'(2^n x).(2^n x)' \\ &= \frac{1}{2^{2n}}U'(2^n x)2^n \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 2^n}U'(2^n x)2^n \\ &= \frac{1}{2^n}U'(2^n x) \qquad (1.11) \end{aligned}$$

Ahora, si U' tiene una constante de Lipschitz M entonces U_n' es también Lipschitz con constante de Lipschitz M. En efecto, para cada $x, y \in l_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|U_n'(x) - U_n'(y)\| &= \frac{1}{2^n}\|U'(2^n x) - U'(2^n y)\| \qquad \textit{(por 1.11)} \\ &\leqslant M\|x - y\| \ \textit{(por prop 5 en U.)} \qquad (1.12) \end{aligned}$$

Esto implica que, si $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$, los funcionales $U_n'(x_n) \in l_2$ y satisfacen que

$$(U_n'(x_n))_n \in (\sum_2 l_2)^* \equiv \sum_2 l_2.$$

En efecto, sabemos que $\|U_n'(x_n) - U_n'(0)\| \leqslant M\|x_n\|$, así obtenemos

$$\sum_n \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|^2 \leqslant M^2 \sum_n \|x_n\|^2 < \infty, \qquad (1.13)$$

puesto que $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$*, luego,*

$$\begin{aligned}
\|U_n'(x_n) - U_n'(0)\| &\leqslant \|U_n'(x_n)\| + \|U_n'(0)\| \text{ (por desigualdad triangular)} \\
-\|U_n'(x_n)\| &\leqslant \|U_n'(0)\| - \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\| \\
\|U_n'(x_n)\|^2 &\leqslant (\|U_n'(0)\| - \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|)^2 \\
\|U_n'(x_n)\|^2 &\leqslant \|U_n'(0)\|^2 - 2\|U_n'(0)\|\|U_n'(x_n) - U_n'(0)\| + \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|^2 \\
&< \|U_n'(0)\|^2 + \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|^2
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_n \|U_n'(x_n)\|^2 \leqslant \sum_n \|U_n'(0)\|^2 + \sum_n \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|^2 \tag{1.14}$$

Pero, $\sum_n \|U_n'(x_n) - U_n'(0)\|^2 < \infty$ *(por 1.13), faltaría ver que* $\sum_n \|U_n'(0)\|^2 < \infty$
Para ello es suficiente observar que

$$U_n'(0) = \frac{1}{2^{2n}} 2^n U'(0) = \frac{1}{2^n} U'(0).$$

Por tanto, $\sum_n \|U_n'(0)\|^2 < \infty$.

Así, en (1.14) $\sum_n \|U_n'(x_n)\|^2 < \infty$*. Con esto hemos probado que* $U_n'(x_n) \in l_2$.

Luego,$(U_n'(x_n))_n \in \sum_2 l_2$.

De esto, $(U_n'(0)) = (\frac{1}{2^n} U'(0)) \in \sum_2 l_2$*, y entonces obtenemos que* $T(x) \equiv (U_n'(x_n))$ *también pertenece a* $\sum_2 l_2$.

Consideremos ahora probar que f *es diferenciable de clase* C^1*. Para cada* $x = (x_n)$ *y*

$h = (h_n)$ *en* $\sum_2 l_2$*, podemos estimar*

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x) - T(x)(h)| &\leqslant \sum_n |U_n(x_n + h_n) - U_n(x_n) - U_n'(x_n)(h_n)| \\
&\leqslant \sum_n |U_n'(x_n + t_n h_n)(h_n) - U_n'(x_n)(h_n)| (0 \leqslant t_n \leqslant 1) \\
&\leqslant M \sum_n \|h_n t_n\| \qquad (U' \text{es Lipschitz}) \\
&\leqslant M \sum_n \|h_n\| \qquad (0 \leqslant t_n \leqslant 1) \\
&\leqslant M \sum_n \|h_n\|^2 \qquad (\text{pues } \|h_n\| \leqslant \|h_n\|^2) \\
&= M\|h\|^2 \qquad (\text{ya que} \sum_n \|x_n\|^2 = \|x\|^2)
\end{aligned}$$

Por tanto, f *es Fréchet diferenciable y* $f'(x) = T(x)$*.*

Además, f' *es Lipschitz, esto es,*

$$\begin{aligned}
\|f'(x) - f'(y)\|^2 &= \|\sum_n U_n'(x_n) - \sum_n U_n'(y_n)\|^2 \quad (\text{por def } def) \\
&\leqslant \sum_n \|U_n'(x_n) - U'(y_n)\|^2 \\
&\leqslant M^2 \sum_n \|x_n - y_n\|^2 \quad (\text{pues } U_n' es Lipschitz) \\
&= M^2\|x - y\|^2. \quad (\text{ya que} \quad \sum_n \|x_n\|^2 = \|x\|^2)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant M\|x - y\|.$$

Luego, f' *es Lipschitz. Esto implica en particular, que* f *es Lipschitz en conjuntos acotados (ver [KR]).*

Veamos que $f \equiv f_\varepsilon$ *se aproxima uniformemente a* $\|\cdot\|^2$ *cuando* ε *tiende a cero. Con lo* *que para cada* $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$*, tenemos que*

$$\text{máx}\{\frac{2}{3}\varepsilon^2, \|x\|^2\} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \|x\|^2, \tag{1.15}$$

En efecto, por un lado,

$$\begin{aligned}
0 < f(x) &\leqslant \sum_n (\frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \|x_n\|^2) \quad (\textit{por la desigualdad}(1\cdot 10)) \\
&= \sum_n \frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \sum_n \|x_n\|^2 \\
&= \sum_n \frac{2\varepsilon^2}{2^{2n}} + \|x\|^2 \quad (\textit{ya que} \sum_n \|x_n\|^2 = \|x\|^2) \\
&= 2\varepsilon^2 \sum_n \frac{1}{2^{2n}} + \|x\|^2 \\
&= 2\varepsilon^2 \sum_n \frac{1}{4^n} + \|x\|^2 \\
&= 2\varepsilon^2 \sum_n (\frac{1}{4})(\frac{1}{4})^{n-1} + \|x\|^2 \\
&= \frac{2\varepsilon^2}{3} + \|x\|^2 \quad (\textit{pues} \sum_n (\frac{1}{4})(\frac{1}{4})^{n-1} \to \frac{1}{3})
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Por otro lado, por la propiedad 2 en la definicion de U *se tiene*

$$\text{máx}\{\frac{2}{3}\varepsilon^2, \|x\|^2\} \leqslant f(x) \tag{1.17}$$

Por tanto de (1·15) y (1.17) se tiene (1.15).

También de (1.15) obtenemos que

$$0 \leqslant f(x) - \|x\|^2 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2. \tag{1.18}$$

Para obtener funciones las cuales se aproximan uniformemente a la norma en l_2, consideramos $\psi \equiv \psi_\varepsilon = \sqrt{f_\varepsilon}$. Por a las desigualdades (1.15) y (1.18) tenemos que:

$$0 \leqslant \psi - \|x\| \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3(\psi + \|x\|)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon, \text{para cada } x \in \sum_2 l_2. \tag{1.19}$$

En efecto;

Por un lado, Por propiedad (1.18) $f(x) - \|x\|^2 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2$, pero como $\psi \equiv \psi_\varepsilon = \sqrt{f_\varepsilon}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \psi^2(x) - \|x\|^2 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2 \quad &\Rightarrow \quad (\psi(x) - \|x\|)(\psi(x) + \|x\|) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2 \\ &\Rightarrow \quad \psi(x) - \|x\| \leqslant \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{(\psi(x) + \|x\|)} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por otro,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x) - \|x\|^2 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{0} \leqslant \sqrt{f(x) - \|x\|^2} \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^2} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{f(x)} - \sqrt{\|x\|^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \psi(x) - \|x\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

y también,

$$\psi(x) - \|x\| \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3(\psi(x) + \|x\|)} \quad \Rightarrow \quad \psi(x) + \|x\| \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3(\psi(x) - \|x\|)}, (por(1 \cdot 20))$$

y de (1·21),

$$\frac{1}{\psi(x) - \|x\|} \leqslant \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\varepsilon}. \tag{1.22}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\psi(x)+\|x\| &\leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3}\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\varepsilon} \quad (\textit{por } (1\cdot 22))\\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

por tanto, $\dfrac{1}{\psi(x)+\|x\|} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{2\varepsilon^2}{3(\psi(x)+\|x\|)} &\leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3}\frac{3}{\varepsilon\sqrt{3}\sqrt{2}} \quad (\textit{por la desigualdad anterior})\\ &= \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}},\end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{2\varepsilon^2}{3(\psi(x)+\|x\|)} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}, \tag{1.23}$$

por tanto de (1·20) y (1·23) se tiene que

$$0 \leqslant \psi - \|x\| \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{3(\psi+\|x\|)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon, \text{para cada } x \in \sum_2 l_2.$$

Veamos que ψ' *es acotada. Por las desigualdades (1.12) y (1·18) para cada* $x \in \sum_2 l_2$, *se tiene lo siguiente:*

$$\|\psi'(x)\| = \frac{\|f'(x)\|}{2\psi(x)} \leqslant \frac{\|f'(x)-f'(0)\|}{2\psi(x)} + \frac{\|f'(0)\|}{2\psi(x)} \leqslant \frac{M}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}.\|f'(0)\|$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\|\psi'(x)\| &= \|(\sqrt{f(x)})'\| \quad (\textit{pues } \psi = \sqrt{f_\varepsilon})\\ &= \|\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\| = \frac{\|f'(x)\|}{2\psi(x)}, \quad (\textit{como } \psi = \sqrt{f} > 0, \psi > 0)\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\|f'(x)\|}{2\psi(x)} &= \frac{\|f'(x)\| - \|f'(0)\| + \|f'(0)\|}{2\psi(x)} \\
&\leqslant \frac{\|f'(x) - f'(0)\|}{2\psi(x)} + \frac{\|f'(0)\|}{2\psi(x)} \\
&\leqslant \frac{M\|x\|}{2\psi(x)} + \frac{\|f'(0)\|}{2\psi(x)} \quad (\textit{ya que} f' \textit{es Lipschitz}).
\end{aligned}$$

Ahora, acotemos $\dfrac{\|x\|}{\psi(x)}$*, para ello usemos (1.18), así*

$$\begin{aligned}
f(x) - \|x\|^2 \geqslant 0 &\Rightarrow \sqrt{f(x) - \|x\|^2} \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{\|x\|^2} \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \psi(x) - \|x\| \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \psi(x) \geqslant \|x\| \\
&\Rightarrow \frac{\psi(x)}{\psi(x)} \geqslant \frac{\|x\|}{\psi(x)}, \psi(x) > 0 \\
&\Rightarrow 1 \geqslant \frac{\|x\|}{\psi(x)},
\end{aligned}$$

por tanto, $\dfrac{\|x\|}{\psi(x)} \leqslant 1$.

Para acotar $\dfrac{1}{\psi(x)}$*, basta notar que* $\psi(x) \equiv \psi_\varepsilon(x) = \sqrt{f_{\varepsilon(x)}} > 0$*, por tanto* $\psi(x) \geqslant 1$ *con lo cual* $\dfrac{1}{\psi(x)} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$

Finalmente,

$$\|\psi'(x)\| = \frac{\|f'(x)\|}{2\psi(x)} \leqslant \frac{M}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}\|f'(0)\|.$$

Por tanto, $\psi'(x)$ *es acotada. Consecuentemente,* ψ *es Lipschitz con constante de Lipschitz digamos* N.

De manera similar, obtenemos que ψ' *es Lipschitz, por tanto para cada* $x, y \in \sum_2 l_2$, *y sabiendo que*

$$\|\psi'(x)\| = \frac{\|f'(x)\|}{2\psi(x)}, \tag{1.24}$$

tenemos que

$$\|\psi'(x) - \psi'(y)\| \leqslant \frac{\sqrt{3}M}{2\varepsilon}\|x - y\| + \frac{\sqrt{3}N^2}{\varepsilon}\|x - y\|$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\psi'(x) - \psi'(y)\| &= \|\frac{f'(x)}{2\psi(x)} - \frac{f'(y)}{2\psi(y)}\| \quad (por(1 \cdot 24)) \\
&= \|\frac{f'(x) - f'(y)}{2\psi(x)} + \frac{f'(y)}{2}(\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\psi(y)})\| \\
&\leqslant \|\frac{f'(x) - f'(y)}{2\psi(x)}\| + \|\frac{f'(y)}{2}(\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\psi(y)})\| \\
&= \frac{1}{2}\frac{\|f'(x) - f'(y)\|}{\psi(x)} + \frac{\|f'(y)\|}{2}\|\frac{\psi(y) - \psi(x)}{\psi(x)\psi(y)}\| \\
&= \frac{1}{2}\frac{\|f'(x) - f'(y)\|}{\psi(x)} + \frac{\|\psi(y) - \psi(x)\|}{\psi(x)}\frac{\|f'(y)\|}{2\psi(y)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\frac{M}{\psi(x)}\|x - y\| + \frac{N}{\psi(x)}\frac{\|f'(y)\|}{2\psi(y)}\|x - y\| \;\; (f' y\ \psi\ son\ Lipschitz)
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente $\dfrac{1}{\psi(x)} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\varepsilon}$ *y de manera similar se acota* $\dfrac{\|f'(y)\|}{2\psi(x)}$ *por tanto,*

$$\|\psi'(x) - \psi'(y)\| \leqslant \frac{\sqrt{3}M}{2\varepsilon}\|x - y\| + \frac{\sqrt{3}N^2}{\varepsilon}\|x - y\|$$

Veamos ahora que las derivadas de f_ε *se aproximan uniformemente a la derivada de* $\|\cdot\|^2$ *cuando* ε *tiende a cero. Sigamos alguna notación usada arriba, tomemos* $0 < \delta < 1$

y consideremos,

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{2 + M + 2\|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\|} < \frac{\delta}{2},$$

asociamos la aplicación $f_\varepsilon(x) \equiv f(x) = \sum_n U_n(x_n)$, *donde* $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$. *Verifiquemos las siguientes propiedades a usar*

$$U_n(x_n) = \frac{\varepsilon^2}{2^{2n}} + \|x_n\|^2 \text{ para todo } x_n \in l_2 \text{ con } \|x\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}; \tag{1.25}$$

y

$$U_n'(0) = \frac{1}{2^n} 2\varepsilon\|\varphi(0)\|\varphi'(0), \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

En efecto, por un lado, Por propiedad la (3) en la definición de U, *y por definición de* $U_n(x)$, *para todo* $x \in l_2, \|x\| \geqslant \varepsilon$ *tenemos,*

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{1}{2^{2n}} U(2^n x^n) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} (\varepsilon^2 + \|2^n x^n\|^2) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} (\varepsilon^2 + 2^n \|x^n\|^2). \end{aligned}$$

Por tanto, $U_n(x) = \dfrac{\varepsilon^2}{2^{2n}} + \|x_n\|^2$, *para todo* $x_n \in l_2$ *y* $\|x_n\| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

Por otro lado, Sabemos que $U_n'(x) = \dfrac{1}{2^n} U'(2^n x)$ *así, por definición de* U *tenemos,*

$$\begin{aligned} U_n'(x) &= \frac{1}{2^n} (\varepsilon^2 + \|\varphi_\varepsilon(2^n x)\|^2)' \\ &= \frac{1}{2^n} 2\|\varphi_\varepsilon(2^n x)\|\varphi_\varepsilon'(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^n} 2\|\varepsilon\varphi_\varepsilon(2^n x)\|\varphi_\varepsilon'(2^n x) \quad \text{(por def de } \varphi_\varepsilon') \\ &= \frac{1}{2^n} 2\varepsilon\|\varphi_\varepsilon(2^n x)\|\varphi_\varepsilon'(2^n x) \end{aligned}$$

Luego,

$$U'_n(0) = \frac{1}{2^n} 2\varepsilon \|\varphi(0)\| \varphi'(0) \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Ahora, dado $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$*, definimos* $D = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}\}$*, y verificamos que*

$$\|f'(x) - 2x\| \leqslant \varepsilon(M + 2 + 2\|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\|) \leqslant \delta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|f'(x) - 2x\| &= \|\sum_n U'_n(x_n) - \sum_n 2x_n\| \quad (\textit{por } f' \textit{y que } x \in \sum_2 l_2) \\
&= \|\sum_n (U'_n(x_n) - 2x_n)\| \\
&= (\sum_n \|U'_n(x_n) - 2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_D \|U'_n(x_n) - 2x_n\|^2 + \sum_{D^c} \|U'_n(x_n) - 2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_D \|U'_n(x_n) - 2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\textit{por propiedad}(1 \cdot 25)) \\
&= (\sum_D \|U'_n(x_n) + U'_n(0) - U'_n(0) - 2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (\sum_D \|U'_n(x_n) - U'_n(0)\|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_D \|U'_n(0)\|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_D \|2x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant M(\sum_D \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_D \|\frac{1}{2^n} 2\varepsilon \|\varphi(0)\| \varphi'(0)\|^2)^{\frac{1}{2}}) + 2(\sum_D \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant M(\sum_D \|\frac{\varepsilon}{2^n}\|^2)^{\frac{1}{2}} + (2^2\varepsilon^2 \|\varphi(0)\|^2 \|\varphi'(0)\|^2 \sum_D \|\frac{1}{2^n}\|^2)^{\frac{1}{2}} + 2(\sum_D \|\frac{\varepsilon}{2^n}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= M\varepsilon(\sum_D \frac{1}{2^n}) + 2\varepsilon \|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\|(\sum_D \frac{1}{2^n}) + 2\varepsilon(\sum_D \frac{1}{2^n}) \\
&= M(\sum_D (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}) + 2\varepsilon \|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\|(\sum_D (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}) + 2\varepsilon(\sum_D (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= M\varepsilon + 2\varepsilon\|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\| + 2\varepsilon \quad (pues \sum_D (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1} \to 1) \\ &= \varepsilon(M + 2\|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\| + 2) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f'_\varepsilon(x) - 2x\| \leqslant \varepsilon(M + 2 + 2\|\varphi(0)\|\|\varphi'(0)\|) \leqslant \delta. \tag{1.27}$$

Esto muestra que $\lim_{\varepsilon\to 0} f'_\varepsilon(x) = 2x$ *uniformemente en* l_2.

Finalmente, veamos $\operatorname{int} C(f_\varepsilon) = \emptyset$. *Para esto es suficiente mostrar que el conjunto*

$$\{\lambda f'(x) = \lambda(U'_n(x)) : x = (x_n) \in \sum_2 l_2, \lambda > 0\}$$

está contenido en $Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$, *el cual tiene interior vacío en* $\sum_2 l_2$.

En efecto,

Por definición sabemos que $U_n(x) = \dfrac{1}{2^{2n}} U(2^n x)$, *y por cálculos anteriores también sabemos que*

$$U'_n(x_n) = \frac{1}{2^{2n}} U'_n(2^n x^n),$$

la cual es distinta de cero por la propiedad (4) en la definición de U $\forall x \in l_2$, *y además* $(U'_n(x_n)) \in \sum_2 l_2$, *consecuentemente,*

$$(U'_n(x_n)) \in Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

por tanto,

$$\{\lambda f'(x) = \lambda(U'_n(x)) : x = (x_n) \in \sum_2 l_2, \lambda > 0\} \subset Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Veamos ahora que $\operatorname{int} Z = \emptyset$ *en* $\sum_2 l_2$*. Para ello, razonemos por reducción al absurdo. Sea* $z = (z_n) \in Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ *y sea* $r > 0$*, y consideremos para cada* $k \in \mathbb{N}$*, el punto truncado* $x^k = (z_1, z_2, ..., z_k, 0, 0, 0, ...)$ *(es decir, dejamos las* k *primeras coordenadas de* z *igual y las otras las sustituimos por cero). Esta sucesión estará eventualmente en la bola de centro* z *y radio* $r > 0$ *a partir de un* k *suficientemente grande, esto es,* $d(z, x^k) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$*. Es decir,*

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{int}\{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\} \quad &\Rightarrow \quad \exists r > 0 : B(z, r) \\ &\subset \quad Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

como r *es arbitario, hemos probado que*

$$\forall\ r > 0, B(z, r) \text{no esta contenida en } Z = \{z = (z_n) \in \sum_2 l_2 : z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $\operatorname{int} Z = \emptyset$*. Luego,*

$$\operatorname{int}\{\lambda f'(x) = \lambda(U_n'(x)) : x = (x_n) \in \sum_2 l_2, \lambda > 0\} = \emptyset.$$

$\blacksquare$

Corolario 1 *Existe una función meseta Lipschitz* b *de clase* C^1 *en* l_2 *(con derivada Lipschitz) satisfaciendo que el cono* $C(b)$ *generado por sus conjuntos de gradientes tienen interior vacío, y* $b'(x) \neq 0$ *para todo* x *en el interior de su soporte.*

Demostración. Consideremos una función $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, de clase C^∞ con $\theta'(t) < 0$ para $t \in (0, 1)$ y $sop\theta = (0, 1]$. Entonces, podemos definir una función meseta requerida *como la siguiente compuesta*

$$b(x) = \theta(f(x)).$$

En efecto, por un lado, $0 < f(0) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon^2 < 1$ *esto por desigualdad 1.18 y además* $b(0) > 0$ *ya que*

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_n U_n(0) \\ &= \sum_n \frac{1}{2^{2n}} U(0) \\ &= \sum_n \frac{1}{2^{2n}} \varepsilon^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{3}, \quad (\textit{pues} \sum_n \frac{1}{2^{2n}} \to \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

con lo que $\theta(0) > 0$ *y por ende* $b(0) > 0$.

Por otro, $f(x) \geqslant \|x\|^2 \geqslant 1$, *siempre que* $\|x\| \geqslant 1$ *esto por la propiedad* (2) *en la definición de* U, *y por tanto* $b(x) = 0$ *para* $\|x\| \geqslant 1$ *(falla del teorema de rolle).*

Luego, la función meseta b *es claramente Lipschitz con derivada Lipschitz ya que* θ, θ' *y* f' *son Lipschitz y* f *es Lipschitz en un conjunto acotado. Así, por teorema 20 parte* (3) *se tiene que el cono* $C(b)$ *generado por los conjuntos de gradientes de* b *tiene interior vacío y* $b'(x) \neq 0$ *para todo* x *en el interior de su soporte.*

■

Capítulo 2

Cuerpos estrellados en l_2

El concepto de cuerpo estrellado en un espacio de Banach es esencial a lo largo de este capítulo, en este sentido la siguiente sección está dedicada a los cuerpos estrellados y a sus propiedades elementales.

2.1. Nociones básicas

Comencemos con las definiciones de rayo en un espacio vectorial y de cuerpo estrellado en un espacio de Banach.

Definición 6 Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Para cualesquiera puntos distintos $\{a, x\} \in X$, el rayo de origen $a \in X$dirigido por el vector $x - a \in X$ es el conjunto

$$\{a + \lambda(x - a) \in X : \lambda \geqslant 0\},$$

al que se representa por $\text{Rayo}(a, x)$.

DEFINICIÓN 7 Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto cerrado de X. Se dice que A es un cuerpo estrellado con respecto a un punto $a \in X$ cuando se verifican las condiciones siguientes:

1. $a \in \mathrm{int}(A)$
2. Para $x \in X$, $Rayo(a, x) \cap \partial A$ consta a lo sumo de un elemento.

Tal punto $a \in \mathrm{int}(A)$ se le llama un centro de A.

Observación. Por medio de traslaciones podemos asumir, que dado un cuerpo estrellado, su centro es el origen del espacio de Banach.

DEFINICIÓN 8 Sean X un espacio de Banach y $A \subset X$ un cuerpo estrellado con centro $a \in X$. Se define el cono característico de A relativo al centro $a \in X$ como

$$cc(A) = \{x \in X : \ a + r(x - a) \in A \text{ para todo } r > 0\},$$

y el funcional de Minkowski de A relativo al centro $a \in X$ como

$$\mu_{A,a}(x) = \mu_A(x) = \text{ínf}\{t > 0 : \ x - a \in t(-a + A)\} \text{ para todo } x \in X$$

Observaciones

1. Dado que el punto a pertenece al interior del cuerpo estrellado A, para cada $x \in X$ existe $t > 0$ tal que $x - a \in (-a + A)$. Por tanto, el funcional de Minkowski de un cuerpo estrellado está bien definido.

2. Ha de advertirse que $\mu_A(x) = \mu_{-a+A}(x-a)$ para todo $x \in X$. Es decir, μ_A es invariante por traslaciones.

3. Es evidente que si A es la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces A es un cuerpo estrellado con centro $0 \in X$, y el funcional de Minkowski μ_A coincide con la $\|\cdot\|$.

Probemos a continuación algunas propiedades que tienen los funcionales de Minkowski de los cuerpos estrellados

Lema 1 *Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$ un cuerpo estrellado con centro $a \in X$. El funcional de Minkowski $\mu_A : X \to [0, +\infty)$ es una función continua tal que $\mu_A(a + rx) = r\mu_A(a + x)$ para todo $r \geqslant 0$ y $x \in X$. Además*

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in X : \ \mu_A(x) < 1\}, \ A = \{x \in X : \ \mu_A(x) \leqslant 1\}$$

y por tanto, $\partial A = \mu_A^{-1}(1)$.

Demostración. *Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = 0$. De la definición de cuerpo estrellado se infieren las propiedades siguientes:*

1. $z \in A \Rightarrow \{\lambda z : \ 0 \leqslant \lambda < 1\} \subset \operatorname{int} A$

2. $z \in \partial A \Rightarrow \{\lambda z : \ \lambda > 1\} \subset X \backslash A$

Probemos, en primer lugar, que el funcional μ_A es continuo.

<u>Caso 1:</u>

Sea $x \in X$ fijo tal que $\mu_A(x) = 0$, así,

$$0 = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\}$$

entonces por definición de infimo tenemos que dado $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\varepsilon}{2} \in \{t > 0 : x \in tA\}$$

Por tanto, $x \in \frac{\varepsilon}{2}A$. Luego,

$$\begin{aligned} x \in \frac{\varepsilon}{2}A \quad &\Rightarrow \quad \exists\ y \in A \text{ tal que } x = \frac{\varepsilon}{2}y \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{2}{\varepsilon}x, \end{aligned}$$

por tanto, $\frac{2}{\varepsilon}x \in A$.

Ahora, no olvidando las propiedades 1) y 2), obtenemos que $\varepsilon^{-1}x \in \text{int}(A)$, en efecto,

$$\frac{2}{\varepsilon}x \in A \Rightarrow \{\lambda(\frac{2}{\varepsilon}x) : 0 \leqslant \lambda < 1\} \subset \text{int}(A),$$

en particular, para $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{\varepsilon}) \in \text{int}(A) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}x \in \text{int}(A),$$

por tanto,

$$\varepsilon^{-1}x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } B(\varepsilon^{-1}x, \delta) \subset A$$

Luego,

$$z \in B(\varepsilon^{-1}x, \delta) \Leftrightarrow \|z - \varepsilon^{-1}x\| \leqslant \delta,$$

con lo que existe $\delta > 0$ tal que $\|z - x\| \leqslant \delta$, esto es,

$$\begin{aligned}\|z - x\| \leqslant \delta \quad &\Rightarrow \quad z \in B(x, \delta)\\ &\Rightarrow \quad \varepsilon^{-1} z \in B(\varepsilon^{-1} x, \delta) \subset A\\ &\Rightarrow \quad \varepsilon^{-1} z \in A.\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} z \in A \quad &\Rightarrow \quad z \in \varepsilon A\\ &\Rightarrow \quad \varepsilon \in \{t > 0 : z \in tA\}\\ &\Rightarrow \quad \text{ínf}\{t > 0 : z \in tA\} \leqslant \varepsilon \textit{ (por def de infimo)}\\ &\Rightarrow \quad \mu_A(z) \leqslant \varepsilon \textit{ (por def de } \mu_A).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\mu_A(z) - \mu_A(x)| = \mu_A(x) \leqslant \varepsilon$$

Luego,

$$\text{existe } \delta > 0 \textit{ tal que } \|z - x\| \leqslant \delta \Rightarrow |\mu_A(z) - \mu_A(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Con lo que, μ_A es continuo en x

<u>Caso 2:</u>

Supongamos que $\mu_A > 0$, es fácil ver que

$$\frac{x}{\mu_A(x)} \in \partial A \Leftrightarrow x \in \mu_A(x) \partial A$$

Por tanto, para cada $\varepsilon \in (0, \mu_A(x))$, se tiene que:

$$\frac{x}{\mu_A(x)+\varepsilon} \in \operatorname{int}(A) \qquad y \qquad \frac{x}{\mu_A(x)-\varepsilon} \in X \backslash A$$

En efecto, por un lado, sabemos que

$$\mu_A(x) = \operatorname{ínf}\{t > 0 : x \in tA\} > 0,$$

luego,

$$\begin{aligned} x \in (\mu_A(x)+\varepsilon)A &\Leftrightarrow \exists\, y \in A : x = (\mu_A(x)+\varepsilon)y \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\mu_A(x)+\varepsilon} \in A, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{x}{\mu_A(x)+\varepsilon} \in \operatorname{int}(A),$$

y por otro lado,

Por definición $\mu_A(x) = \operatorname{ínf}\{t > 0 : x \in tA\} > 0$, así,

$$\begin{aligned} x \in (\mu_A(x)-\varepsilon)A &\Leftrightarrow \exists\, y \in A : x = (\mu_A(x)-\varepsilon)y \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\mu_A(x)-\varepsilon} \in X \setminus A, \end{aligned}$$

por tanto, $\frac{x}{\mu_A(x)-\varepsilon} \in X \setminus A$.

Luego, existe $\delta' > 0$ tal que si $\|z - x\| < \delta'$,entonces

$$z \in (\mu_A(x)+\varepsilon)\operatorname{int}(A) \qquad y \qquad z \in (\mu_A(x)-\varepsilon)X \backslash A,$$

de donde $|\mu_A(z) - \mu_A(x)| \leqslant \varepsilon$*, por lo que* μ_A *es una aplicación continua.*

Probemos ahora, que μ_A *es un funcional positivamente homogéneo. Fijemos un vector* $x \in X$*. Como el origen es un punto interior de* A *entonces* $\inf\{t > 0 : 0 \in tA\} = 0$*, y por tanto* $\mu_A(0) = 0$*, con lo que,*

$$\mu_A(0x) = \mu_A(0) \quad = \quad 0 = 0\mu_A(x),$$

Además, si $r > 0$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\mu_A(rx) &= \frac{1}{r}\inf\{\lambda > 0 : \ rx \in \lambda A\} \\
&= \inf\{\frac{\lambda}{r} : \ \lambda > 0 \ , \ x \in \frac{\lambda}{r}A\} \\
&= \inf\{\frac{\lambda}{r} > 0 : \ x \in \frac{\lambda}{r}A\} \\
&= \inf\{t > 0 : \ x \in tA\} \\
&= \mu_A(x), \qquad t = \frac{\lambda}{r}.
\end{aligned}$$

De acá $\mu_A(rx) = r\mu_A(x)$*. Así el funcional* μ_A *es homogéneamente positivo.*

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
x \in cc(A) &\Leftrightarrow \ rx \in A, \text{para } \ todo\ r > 0 \quad (a = 0) \\
&\Leftrightarrow \ x \in \frac{1}{r}A, \text{para } \ todo\ r > 0 \\
&\Leftrightarrow \ \mu_A(x) \leqslant \frac{1}{r}, \text{para } \ todo\ r > 0 \quad (por\ def\ de\ infimo) \\
&\Leftrightarrow \ \mu_A(x) = 0
\end{aligned}$$

Caractericemos a continuación $\mathrm{int}(A)$, *a partir de la definición de* μ_A, *es decir, probemos que*

$$\mathrm{int}(A) \;=\; \{x \in X : \;\mu_A(x) < 1\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{int}(A) \;&\Rightarrow\; x \in tA, \quad \textit{con} \quad 0 < t < 1 \\ &\Rightarrow\; \mu_A(x) < 1, \quad (\textit{por definición de } \;\mu_A) \\ &\Rightarrow\; x \in \{x \in X : \;\mu_A(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $x \in X$ *tal que* $\mu_A(x) < 1$. *En este caso existe* $\delta < 1$ *de modo que* $x \in \lambda A$, *o equivalentemente* $\lambda^{-1}x \in A$, *de lo cual se deduce que* $x \in \mathrm{int}(A)$. *En efecto,*

Sea $x \in X$ *fijo tal que* $\mu_A(x) < 1$. *Sea* $\varepsilon > 0$, *así,*

$$\text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\} < 1$$

entonces por definición de infimo tenemos que

$$\lambda \in \{t > 0 : x \in tA\}$$

Por tanto, $x \in \lambda A$ *(por definición del conjunto anterior) y de la propiedad* 1 *se deduce que* $x \in \mathrm{int}(A)$.

Finalmente, veamos que $A = \{x \in X : \;\mu_A(x) \leqslant 1\}$ *y que* $\partial A = \mu_A^{-1}(1)$. *Solo queda verificar que* $A = \{x \in X : \;\mu_A(x) \leqslant 1\}$ *pues en este caso es trivial inferir que*

$\partial A = \mu_A^{-1}(1)$. *Como* μ_A *es una aplicación positivamente homogénea y continua se tiene que*

$$\{x \in X : \ \mu_A(x) \leqslant 1\} \ = \ \overline{\{x \in X : \ \mu_A(x) < 1\}} = \overline{int(A)} \subset \overline{A} = A.$$

Pero para cada $x \in A$ *tenemos que*

$$1 \ \in \ \{\lambda > 0 : \ x \in \lambda A\},$$

y por ende, que $\mu_A(x) \leqslant 1$. *Con esto se concluye que*

$$A = \{x \in X : \ \mu_A(x) \leqslant 1\}.$$

■

A continuación veamos las condiciones que debe verificar una función con valores reales y dominio en un espacio de Banach, para que defina un cuerpo estrellado.

Lema 2 *Sean* X *un espacio de Banach y* a_0 *un punto del espacio* X. *Si una función* $\psi : X \to [0, \infty)$ *es continua y satisface* $\psi(a_0 + \lambda x) = \lambda\psi(a_0 + x)$ *para todo* $\lambda \geqslant 0$, *entonces* $A_\psi := \{x \in X : \ \psi(x) \leqslant 1\}$ *es un cuerpo estrellado con centro* $a_0 \in X$. *Además se verifica que* ψ *es el funcional de Minkowski de* A_ψ.

Demostración. *Supongamos sin pérdida de generalidad que* $a_0 = 0$ *y que* ψ *no es la función nula (si lo fuese, se tendría que* $A_\psi = X$, *que es trivialmente un cuerpo estrellado con centro* $0 \in X$ *y cono caracteristico todo el espacio X). Como la aplicación* $\psi : X \to [0, \infty)$ *es continua, resulta obvio que* A_ψ *es un subconjunto cerrado de* X, *y* *que* a_0 *pertenece al interior de* A_ψ*. Dado que la función* ψ *es positivamente homogénea, se deduce que*

$$\partial A_\psi = \{x \in X : \ \psi(x) = 1\}.$$

En efecto;

$$\psi(a_0 + \lambda x) = \lambda \psi(a_0 + x), \ \ \forall \lambda \geqslant 0,$$

pero $a_0 = 0$ *con lo que,* $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x), \ \ \forall \lambda \geqslant 0$*, luego;*

$$\partial A_\psi = \{x \in X : \ \psi(x) = 1\}, \ \ con \ \ \lambda = 1 \tag{2.1}$$

Demostremos ahora que A_ψ *es estrellado. Consideremos dos vectores* x *e* y *en un mismo rayo respecto al origen y situados ambos en* ∂A_ψ*. Por estar en el mismo rayo, existe* $\lambda > 0$ *tal que* $y = \lambda x$*. En efecto,*

$$\begin{aligned} \{x, y\} \subset \partial A_\psi \ \ &\Rightarrow \ \ 1 = \psi(x) = \psi(y) \quad (por\ (2 \cdot 1)) \\ &\Rightarrow \ \ 1 = \psi(\lambda x) = \lambda \psi(x) \quad (\psi\ es\ positiv.\ homo) \\ &= \ \ 1 = \lambda \qquad\qquad\qquad (pues\ \psi(x) = 1), \end{aligned}$$

luego $x = y$*. De este modo queda demostrado que* A_ψ *es un cuerpo estrellado.*

Verifiquemos por último, que el funcional de Minkowski de A_ψ *es* ψ*. En efecto,* *Por definición, para cada $x \in X$ se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\mu_{A_\psi}(x) &= \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda A_\psi\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \ \frac{1}{\lambda} x \in A_\psi\}, \ (\textit{pues } \lambda > 0) \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \ \psi(\frac{x}{\lambda}) \leqslant 1\}, \ (\textit{por def. de } A_\psi) \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \ \frac{1}{\lambda}\psi(x) \leqslant 1\}, \ (\textit{pues } \psi \textit{ es positiv. homo}) \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \ \psi(x) \leqslant \lambda\}, \\
&= \psi(x), \qquad\qquad (\textit{por def. de ínfimo.})
\end{aligned}
$$

■

Lema 3 *Sean X un espacio de Banach, $n \in N$ y a_0 un punto del espacio X. Si una función $\psi : X \to \mathbb{R}$ es continua y satisface $\psi(a_0 + \lambda x) = \lambda^n \psi(a_0 + x)$ para todo $\lambda \geqslant 0$, entonces $A_\psi := \{x \in X : \ \psi(x) \leqslant 1\}$ es un cuerpo estrellado con centro $a_0 \in X$. Además, si la función ψ es no negativa, entonces el funcional de Minkowski de A_ψ es la aplicación $\psi^{\frac{1}{n}}$.*

Demostración. *En esta prueba siguen siendo válidos todos los razonamientos de la* *demostración del lema anterior. Faltaría solo verificar que $\mu_{A_\psi}(x) = \psi^{\frac{1}{n}}(x)$. En efecto,*

$$
\begin{aligned}
\mu_{A_\psi}(x) &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda A_\psi\} \\
&= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \frac{1}{\lambda}x \in A_\psi\} \\
&= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \psi(\frac{\lambda}{x}) \leqslant 1\} \qquad (\textit{por } def A_\psi) \\
&= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \frac{1}{\lambda^n}\psi(x) \leqslant 1\} \qquad (\textit{ya que } A_\psi \textit{ es postiv.homo.}) \\
&= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \psi(x) \leqslant \lambda^{n\frac{1}{n}}\} \\
&= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \psi^{\frac{1}{n}}(x) \leqslant \lambda\} \qquad (\textit{Pues } \psi \textit{ es no negativa}) \\
&= \psi^{\frac{1}{n}}(x), \qquad (\textit{por def. de ínfimo})
\end{aligned}
$$

■

Dado que los cuerpos estrellados sustituyen en cierta forma a las bolas definidas por normas, entonces es necesario determinar que cuerpos estrellados ocuparán el puesto de las normas diferenciables. Tales cuerpos son los que denominamos de la clase C^p de diferenciabilidad, donde $p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ es el grado de diferenciabilidad. Debido a esto consideramos la siguiente definición:

Definición 9 Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$ un cuerpo estrellado. Dado $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se dice que A es de la clase C^p cuando su funcional de Minkowski μ_A es diferenciable de la clase C^p en el conjunto

$$X \setminus cc(A) = X \setminus \mu_A^{-1}(0).$$

Además convendremos en que todo cuerpo estrellado A es de la clase C^0, lo que corresponde al hecho de que el funcional de Minkowski de cualquier cuerpo estrellado es continuo, esto es, de la clase C^0.

Consideremos también la siguiente definición

Definición 10 Sean X un espacio de Banach y $A \subset X$ un cuerpo estrellado con centro $a \in X$. Se dice que A es de Lipschitz (respecto al punto $a \in X$) si $\mu_A(x) = \mu_{A,a}(x)$ es una función de Lipschitz en X.

2.2. Resultado Principal sobre cuerpos estrellados

El resultado fundamental de esta sección es el Teorema 22 el cual responde completamente la pregunta de cuan pequeõ, puede ser $C(A)$ en el espacio de Hilbert donde, el cono de hiperplanos tangentes a A se define como:

$$C(A) = \{x^* \in l_2 : x + \mathrm{ker}x^* \text{ es tangente a } \partial A \text{ en algún punto } x \in \partial A\},$$

y además,

$$C(A) = C(\mu_A) := \{\lambda \mu'_A(x) : x \in X, x \neq 0, \lambda \geqslant 0\}.$$

Consideremos el siguiente teorema el cual será usado en la demostración del teorema 22

Teorema 21 *(Teorema de la aplicación implícita) Sean E, F, G espacios de Banach, $X \subset E \times F$ un subconjunto abierto y $f : X \to G$ continuamente diferenciable. Sea*

$(a,b) \in X$ *tal que* $f(a,b) = 0$ *y la derivada parcial* $D_2 f(a,b) : F \to G$ *es un isomorfismo. Entonces existe un entorno abierto* U_0 *de* a *en* E *tal que, para todo entorno abierto y conexo* U *de* a*, contenido en* U_0*, existe una única aplicación continua* $g : U \to F$ *tal que* $g(a) = b$*,* $(x, g(x)) \in X$ *y* $f(x, g(x)) = 0$ *para cualquier* $x \in U$*. Además* g *es continuamente diferenciable en* U *y su derivada está definida por*

$$Dg(x) = -(D_2 f(x, g(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, g(x))).$$

Sin más preámbulo tenemos:

Teorema 22 *Existen cuerpos estrellados acotados diferenciables de clase* C^1 *Lipschitz* A_ε *en* l_2*,* $0 < \varepsilon < 1$*, tal que:*

1. *Sus funcionales de Minskowki* μ_{A_ε} *se aproximan uniformemente a la norma usual en conjuntos acotados, esto es,* $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{A_\varepsilon} = \| \cdot \|$ *uniformemente en conjuntos acotados de* l_2*; y*

2. *Los conos de gradientes* $C(A_\varepsilon)$ *generados por los conjuntos de gradientes de* μ_{A_ε} *tienen interior vacío en* l_2*.*

Demostración. *Usemos alguna notación como en la prueba del teorema 20. Tomemos* $0 < \delta < 1$ *y consideremos, para*

$$0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2 + M + 2\|\varphi(0)\| \|\varphi'(0)\|} < \frac{\delta}{2},$$

la aplicación asociada $f_\varepsilon \equiv f(x) = \sum_n U_n(x_n)$, *donde* $x = (x_n) \in \sum_2 l_2$. *Ahora definamos* A_ε *como el primer conjunto de nivel de* f, *es decir,*

$$A_\varepsilon \equiv A = \{x \in l_2 : f(x) \leqslant 1\}.$$

Claramente A *es un conjunto cerrado con frontera* $\partial A = \{x \in l_2 : f(x) = 1\}$, *y por la desigualdad (1.18) tenemos la inclusión* $(1-\varepsilon)B \subset A \subset B$, *donde* B *denota la bola unitaria de* l_2. *En efecto,*

$$\begin{aligned} x \in (1-\varepsilon)B &\Rightarrow (1-\varepsilon)\|x - 0\| \leqslant 1 \\ &\Rightarrow (1-\varepsilon)\|x\| \leqslant 1 \\ &\Rightarrow (1-\varepsilon)\sqrt{f(x)} \leqslant 1 \\ &\Rightarrow (1-\varepsilon)^2 f(x) \leqslant 1 \\ &\Rightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \leqslant 1 \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Por tanto, $(1-\varepsilon)B \subset A$. *Por otro lado,*

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow f(x) \leqslant 1 \\ &\Rightarrow \|x\| \leqslant 1 \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Con lo que, $A \subset B$. *Esto prueba 1.*

Para probar que A *es un cuerpo estrellado (con respecto a cero) debemos tener en* *mente el hecho de que f'_ε se aproxima a la derivada de $\|\cdot\|^2$; en particular usaremos la desigualdad (1.27). Razonemos por absurdo y supongamos que existe un elemento de norma uno en $\sum_2 l_2$ y $\lambda, v > 0,\ \lambda \neq v$ satisfaciendo*

$$f(\lambda x) = f(vx) = 1,$$

entonces existe $\tau \in (\lambda, v)$ tal que $0 = f(\lambda x) - f(vx) = f'(\tau x)(x)(\lambda - v)$. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda x) - f(vx)(ya\ que\ f(\lambda x) = f(\lambda v) = 1) \\ &= f'(\tau x)(x)(\lambda - v) \quad (por\ def\ de\ derivada\ Frechet\ y\ t \in (\lambda, v)) \end{aligned}$$

Así, tomando la explicación de la desigualdad (1.27) y el hecho de que $\tau > 1 - \varepsilon$ se tiene que

$$0 = f'(\tau x)(x) = \langle 2\tau x, x\rangle + \langle f'(\tau x) - 2\tau x, x\rangle \geqslant 2\tau - \delta > 2 - 2\delta > 0 \qquad (2.2)$$

lo cual es una contradicción. Luego A es un cuerpo estrellado por lema 2.

Veamos ahora que el funcional de Minkowski μ_A es diferenciable de clase C^1. Consideremos el funcional continuo de clase C^1

$$F : (\sum_2 l_2 \setminus \frac{1}{2}B_1) \times (\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R},$$

dado por $F(x,t) = f(\frac{x}{t})$.

El funcional μ_A satisface la ecuación implícita $F(x, \mu_A(x)) = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} F(x, \mu_A(x)) &= f(\frac{x}{\mu_A(x)}) \\ &= 1 \ (\textit{pues } \frac{x}{\mu_A(x)} \in \partial A) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(x, \mu_A(x)) = \frac{\partial f}{\partial t}(\frac{x}{\mu_A(x)}) &= \langle -\frac{1}{\mu_A^2} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \\ &= -\frac{1}{\mu_A^2(x)}\langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \\ &= -\frac{1}{\mu_A^2(x)}\langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) + \frac{2x}{\mu_A(x)} - \frac{2x}{\mu_A(x)}, x\rangle \\ &= -\frac{1}{\mu_A^2(x)}[\langle \frac{2x}{\mu_A(x)}, x\rangle + \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{2x}{\mu_A(x)}, x\rangle] \\ &= -\frac{1}{\mu_A^2(x)}[\frac{2}{\mu_A}\langle x, x\rangle + \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{2x}{\mu_A(x)}, x\rangle] \\ &\leqslant -\frac{\|x\|}{\mu_A^2(x)}(\frac{2\|x\|}{\mu_A(x)} - \delta). \ (por(2 \cdot 2)) \end{aligned}$$

Y dado que, $1 - \frac{\delta}{2} < 1 - \varepsilon \leqslant \|\frac{x}{\mu_A(x)}\| \leqslant 1$, *concluimos que*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, \mu_A(x)) \leqslant -\frac{\|x\|}{\mu_A^2(x)}(2 - 2\delta) < 0 \tag{2.3}$$

Así, por el teorema de la función implícita, se sigue que la aplicación μ_A es continua de clase C^1.

Lo siguiente en probar es que μ_A' es acotado en $\sum_2 l_2 \setminus \{0\}$, y además μ_A es Lipschitz.

Derivamos la ecuación implícita $f(\frac{x}{\mu_A(x)}) = 1$ y obtenemos

$$0 = \frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{1}{\mu_A^2(x)} \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \mu_A'(x). \tag{2.4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
0 &= [\frac{\mu_A(x)x' - x\mu_A'(x)}{\mu_A^2(x)}] f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) \\
&= [\frac{\mu_A(x)x'}{\mu_A^2(x)} - \frac{x\mu_A'(x)}{\mu_A^2(x)}] f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) \\
&= [\frac{1}{\mu_A(x)} - \frac{x\mu_A'(x)}{\mu_A^2(x)}] f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) \\
&= \frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) \frac{x\mu_A'(x)}{\mu_A^2(x)} \\
&= \frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{1}{\mu_A^2(x)} (f'(\frac{x}{\mu_A(x)})x) \mu_A'(x) \\
&= \frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{1}{\mu_A^2(x)} \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \mu_A'(x)
\end{aligned}$$

Ahora demostremos que μ_A' es acotado en el conjunto $\{x \in \sum_2 l_2 : \mu_A(x) = 1\}$. Como $\mu_A'(\lambda x) = \mu_A'(x)$, cuando $\lambda > 0$ por la ecuación (2.4) obtenemos que

$$\mu_A'(x) = \frac{f'(x)}{\langle f'(x), x\rangle}, \text{además } \mu_A(x) = 1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) - \frac{1}{\mu_A^2(x)} \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \mu_A'(x) \\
&\Rightarrow -\frac{1}{\mu_A^2(x)} \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle \mu_A'(x) = -\frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)}) \\
&\Rightarrow \mu_A'(x) = \frac{-\frac{1}{\mu_A(x)} f'(\frac{x}{\mu_A(x)})}{-\frac{1}{\mu_A^2(x)} \langle f'(\frac{x}{\mu_A(x)}), x\rangle} \\
&\Rightarrow \mu_A'(x) = \frac{f'(x)}{\langle f'(x), x\rangle}, \ (\textit{siempre que } \mu_A(x) = 1)
\end{aligned}$$

De la desigualdad (2.3) se sigue que $\langle f'(x), x\rangle \geqslant \|x\|(2-2\delta) \geqslant (1-\varepsilon)(2-2\delta)$ *para* $\mu_A(x) = 1$, *y esto implica* $\|\mu_A'(x)\| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(2-2\delta)^{-1}\|f'(x)\|$, *lo cual prueba la parte* 1.

Finalmente note que la ecuación (2.4) implica la inclusión de el cono $C(\mu_A) \subseteq C(f)$, *en efecto, sabemos que*

$$\begin{aligned} C(\mu_A) &= \{\lambda\mu_A'(x) : x \in X, x \neq 0, \lambda \geqslant 0\} \\ &= \{\frac{\lambda}{\langle f'(x), x\rangle} f'(x) : x \in X, x \neq, \lambda \geqslant 0\} \quad (\textit{para } \mu_A(x) = 1) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x \in C(\mu_A) &\Rightarrow x = \frac{\lambda}{\langle f'(x), x\rangle} f'(x) \\ &\Rightarrow x = Af'(x), \quad (\textit{con } A = \frac{\lambda}{\langle f'(x), x\rangle} \geqslant 0) \\ &\Rightarrow x \in C(f) \end{aligned}$$

Por tanto $C(\mu_A) \subseteq C(f)$. *Y como* $C(f)$ *tiene interior vacío, igual sucede con* $C(\mu_A)$. *Luego, como* $C(\mu_A) = C(A)$ *se tiene que* $\operatorname{int} C(A) = \emptyset$ *en* l_2. ■

Bibliografía

[A1] Azagra, D. *Diffeomorphisms between spheres and hyperplanos in infinite-dimensional Banach space,* Studia Math. 125 (1997), 179-186.

[A2] Azagra, D. *Smooth negligibility and Subdifferential Calculus in Banach spaces whith applications,* doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid, 1997.

[AGJ] Azagra, D., Gómez, J. & Jaramillo, J.A. *Rolle's theorem and negligibility of points in infinite-dimensional Banach spaces,* J.Math. Anal. Apll. 213 (1997), 487-495.

[AJ1] Azagra, D. & Jiménez-Sevilla, M. *The failure of Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces.* J. Funct. Anal. 182 (2001), 207-226.

[AJ2] Azagra, D. & Jiménez-Sevilla, M. *On the size of the sets of gradients of smooth functions and starlike bodies in Hilbert space.* Bull. Soc. Math. France 130 (2002), 337-347.

[AJ3] AZAGRA, D. & JIMÉNEZ-SEVILLA, M. *Geometrical and topological properties of bumps and starlike bodies in Banach spaces.* Extracta Math. 17 no.2 (2002), 151-200.

[AD1] AZAGRA, D. & DOBROWOLSKI, T. *On the topological classification of starlike bodies in Banach spaces.* Topology and its Applications 132 (2003), 221-234.

[AD2] AZAGRA, D. & DOBROWOLSKI, T. *Smooth negligibility of compact sets in infinite-dimensional Banach spaces whith applications,* Math. Ann. 312 (1998), 445-463.

[AM] AZAGRA, D. & MONTESINOS, A. *Starlike bodies and deleting diffeomorphisms in Banach spaces.* Extracta Math. 19 (2004), no. 2, 171-213.

[BaN] BACHMAN, G. & NARICI, L. *Functional Analysis.* Academic Press New York, (1996)

[Co] CONWAY, J.B. *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[Di] DIEUDONNÉ, J. *Foundations of modern analysis.* Academic Press, New York, 1969.

[Fe1] FERRER, J. *Rolle's theorem fails in* l^2. American Mathematical Monthly, 103 (1996), 161-165.

[Fe2] FERRER, J. *On Rolle's theorem in spaces of infinite dimension.* Indian Journal of Mathematics, 42 (2000), 21-36.

[Ha] HAYDON, R.G. *A Counterexample to several questions about scattered compact spaces, Bull* London, Math.Soc. 22 (1990), 261-268.

[KR] ROSS, K.A. *Elementary Analysis: The Theory of Calculus.* Springer- Verlag New York, inc (1980)

[Ma] RODRÍGUEZ, P.M. *Derivación en espacios normados.* Unión Matemática Argentina.

[Sh1] SHKARIN, S.A. *On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces.* translation from Matematicheskie Zametki, vol. 51, no.3, pp. 128-136, March, 1992

[Sh2] SHKARIN, S.A. *On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces.* Mat. Zametki 51 (1992), 128-126