

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Programa de Maestría en Ciencias



Fluctuaciones invariantes de calibre de branas escalares
no abelianas

Autor: Rafael Chavez
Tutor: Rommel Guerrero

Trabajo Especial de Grado presentado ante la Ilustre Universidad Centroccidental
“Lisandro Alvarado” como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum
en Ciencias, mención Física-Matemática.

Barquisimeto, junio 2016

En cinco dimensiones se obtiene tres soluciones tipo *kink* auto-gravitante con simetría $SO(10)$ las cuales asintóticamente inducen el rompimiento de $SO(10)$ a $SU(5)$. Estas soluciones se distinguen por el grupo que se realiza sobre cada *kink*: $SO(10)$ para el primer escenario y $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$ y $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$ para el segundo y tercer escenario respectivamente. Los tres escenarios son perturbados introduciendo pequeñas excitaciones sobre la métrica y el campo escalar; en particular, las perturbaciones métricas son parametrizadas en términos de modos tensoriales, vectoriales y escalares. Todos estos modos, así como también las fluctuaciones del campo escalar, son rescritos como variables invariantes de calibre. Con respecto al modo tensorial y vectorial, desde un punto de vista de un observador cuatro dimensional, se obtiene que, mientras la gravedad está localizada los gravifotones son libres de propagarse por todo el espacio tiempo. Por otro lado, en correspondencia con el grupo de simetría sobre cada solución, para las fluctuaciones escalares se obtiene modos no masivos localizados tanto en dirección de los generadores rotos como a lo largo de algunos generadores que no lo están.

Resumen	I
Índice general	II
Índice de figuras	IV
Introducción	1
1. Paredes de Dominio y Fluctuaciones Invariantes de Calibres	3
1.1. Paredes de dominio y Densidad de energía	3
1.2. Deducción de las ecuaciones para la perturbación	5
1.3. Parametrización de las fluctuaciones	8
1.4. Transformaciones de calibre	9
1.4.1. Transformaciones infinitesimales de coordenadas	9
1.4.2. Variables invariantes de calibre	10
1.5. Desacoplamiento de las fluctuaciones	11
1.5.1. Modo Tensorial	12
1.5.2. Modo Vectorial	13
1.5.3. Modo Escalar Γ y Θ	14
1.5.4. Modo Escalar χ	15
2. El <i>kink</i> en $SU(5)$	16
2.1. El <i>kink</i> auto-gravitante	16
2.1.1. Ecuaciones Para Los Coeficientes	17
2.2. Análisis de Fluctuaciones en $SU(5)$	20
2.3. Transformaciones infinitesimales y variables invariantes de calibre	22
2.3.1. Modo Tensorial en $SU(5)$	24
2.3.2. Modo Vectorial en $SU(5)$	24
2.3.3. Modos Escalares Γ y Θ en $SU(5)$	25
2.3.4. Modo escalar χ en $SU(5)$	26

3. El <i>kink</i> en $SO(10)$	30
3.1. El <i>kink</i> auto-gravitante en $SO(10)$	30
3.1.1. Ecuaciones de movimiento	31
3.1.2. Soluciones Pared de Dominio	32
3.2. Análisis de fluctuaciones en $SO(10)$	36
3.3. Transformaciones infinitesimales y variables invariantes de calibre	38
3.3.1. Modo tensorial en $SO(10)$	39
3.3.2. Modo vectorial en $SO(10)$	40
3.3.3. Modo escalar Γ y Θ en $SO(10)$	40
3.3.4. Modo escalar χ en $SO(10)$	41
 Discusión y Conclusiones	 48
 A. Deducciones de las ecuaciones	 I
A.1. Relación \tilde{R}_{ab} en función de R_{ab}	I
A.2. Cálculo del lado izquierdo de \tilde{R}_{ab}	II
A.3. Cálculo del lado derecho de \tilde{R}_{ab}	III
A.4. Deducción de la ecuación del campo escalar	IV
A.5. Variables infinitesimales y de calibre	V
A.5.1. Libertad de calibre de la métrica perturbada	V
A.5.2. deducción de transformaciones infinitesimales	VI
A.6. Ecuación del modo escalar χ	VI
 B. Cálculos en $SU(5)$	 VIII
B.1. Cálculo del lado derecho de \tilde{R}_{ab} para simetría $SU(5) \times Z_2$	VIII
B.2. Redefinición de Generadores de $SU(5)$	IX
 C. Redefinición de los generadores de $SO(10)$	 XI
 Bibliografía	 XIII

1.1. Potencial $V(\phi)$	4
1.2. Perfil tipo <i>Kink</i>	4
1.3. Densidad de energía	5
1.4. Densidad de energía en azul y potencial en rojo	6
1.5. Potencial V_{qm1}	13
1.6. Potencial V_{qm2}	14
1.7. Potencial V_{qm3}	15
2.1. Potencial V_P	27
2.2. Potencial V_q	27
2.4. Potenciales $V_{9,10,23}$ y $V_{17,18,24}$	29
3.1. Potencial (3.113) y Potencial (3.114)	42
3.2. Potencial (3.113) y Potencial (3.114)	43
3.4. Potenciales $q = 4, 5, 42, 43$	44
3.5. Potencial $q = 44, 45$	45
3.6. Potenciales $q = 2, \dots, 5, 42, 43, 2s$	45
3.7. Potencial $q = 2n1$	46

En las teorías con dimensiones adicionales, el modelo de Randall y Sundrum [1] considera el Universo como una 3-brana embebida en un espacio-tiempo Anti de Sitter 5-dimensional. Esta brana puede ser obtenida como límite de pared fina de una solución pared de dominio al sistema Einstein campo escalar, la cual debe interpolar asintóticamente entre dos mínimos de un potencial de autointeracción con rompimiento espontáneo de simetría. Ocurre que sobre estos escenario el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales queda confinado en cuatro dimensiones en correspondencia con el potencial de interacción gravitacional estándar.

Con intension de mostrar una teoría general descrita por una pared de dominio como modelo de Universo, que garantice la localización de modos no masivos sobre la pared los cuales pueden recrear gravedad newtoniana sobre la misma; es sabido que diferentes modelo en la literatura han sido planteado por ejemplo [2] y también [3] esté último cabe resaltar que el campo posee estructura internad dada por una simetría no abeliana. Siempre considerando una pared de dominio como solución al sistema Einstein campo escalar se propone buscar de dicha simetría no abeliana donde [4] muestra un procedimiento y análisis para la simetría no abeliana $SU(5)$ la cual detallaremos mas adelante, motivados con dicha propuesta acá es posible hacer una extension al grupo de simetría no abeliano $SO(10)$ obteniendo resultados interesantes los cuales se discuten en el ultimo capitulo.

En el primera capítulo, se desarrolla con detalles todo el procedimiento para obtener la ecuaciones linealizadas del sistema Einstein campo escalar. Para ello se considera el procedimiento mostrado en [5] junto con la parametrización de las fluctuaciones de la métrica en términos de modos tensoriales, vectoriales y escalares. Estos modos así como las excitaciones del campo escalar son rescritos como variables invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas [6] y como un resultado se obtiene que únicamente las fluctuaciones tensoriales transversa y sin traza resultan localizadas en cuatro dimensiones reproduction los resultados obtenidos por [3].

En el segundo capítulo, se considera también el sistema acoplado Einstein-campo escalar en cinco dimensiones pero en este caso el campo está en la representación adjunta de $SU(5)$. Aquí se genera una solución que asintóticamente interpola entre dos vacíos del potencial donde $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Esta solución y análisis de estabilidad perturbativa (esto ultimo en correspondencia con [6]) fueron reportadas en las Refs. [2] y [4] respectivamente; y además de ser un escenario donde la gravedad está localizada, es una configuración donde se obtiene estados escalares no masivos confinados a lo largo de los generadores rotos asociados al grupo residual sobre el *kink* esto con intención de comprender y reproducir los resultados reportados en [4].

En el tercer capítulo, el cual guarda semejanza con el segundo capítulo, reportamos la extensión a espacio-tiempo curvo de las tres soluciones tipo *kink* obtenidas en [7] donde la simetría no abeliana está en correspondencia con el grupo $SO(10)$. Cada una de estas configuraciones asintóticamente produce el rompimiento de $SO(10)$ a $SU(5)$; no obstante dentro de cada *kink* la simetría residual es diferente, mientras para el primero $SO(10)$ se preserva para el segundo y el tercero respectivamente

se obtiene $SO(6) \times U(2) \times U(1)$ y $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$. En contraste con el *kink* en $SU(5)$, en estos escenarios, además de encontrar estados escalares localizados en la dirección de los generadores rotos también se encuentran estados escalares atrapados a lo largo de las bases que se preservan.

CAPÍTULO 1

PAREDES DE DOMINIO Y FLUCTUACIONES INVARIANTES DE CALIBRES

En este capítulo se definiera formalmente una solución pared de dominio al sistema Einstein-campo escalar en ausencia de curvatura como primer modelo a analizar asociado a un potencial de autointeracción con simetría Z_2 . Así de manera general se realiza el procedimiento para determinar las ecuaciones linealizadas de las perturbaciones en torno a soluciones exactas del sistema Einstein-Campo escalar. Luego se propone una parametrización general como se expone en [8] de modo que, después de establecer transformaciones infinitesimales para las componentes de la parametrización se definen un conjunto de variables invariantes de calibre como en [6] que permite desacoplar las ecuaciones linealizadas en los distintos modos Tensoriales, Vectoriales y Escalares, tal que es posible determinar la localización o no localización de los mismas sobre la pared.

1.1. Paredes de dominio y Densidad de energía

Considere L la lagrangiana de un espacio tiempo plano 5-dimensional definida a partir de un campo escalar en la dimension adicional, esto es

$$L = -\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - V(\phi), \quad (1.1)$$

con $a, b = 0, \dots, 4$ donde $V(\phi)$ es un potencial de autointeracción el cual viene dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{\alpha^2}{\lambda} \right)^2, \quad (1.2)$$

este potencial goza de simetría Z_2 ($\phi \rightarrow -\phi$) la cual es importante pues permite considerar la existencia de lo que se definirá como una solución pared de dominio. Por otra parte es posible determinar los mínimos o valores de expectación del campo asociado a este potencial los cuales se obtienen por el siguiente criterio

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \phi_0 \rangle_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\lambda}}, \quad (1.3)$$

se puede apreciar en la Figura 1.1 que el potencial tiene una forma de sombrero mexicano que permite ver explícitamente la simetría antes mencionada.

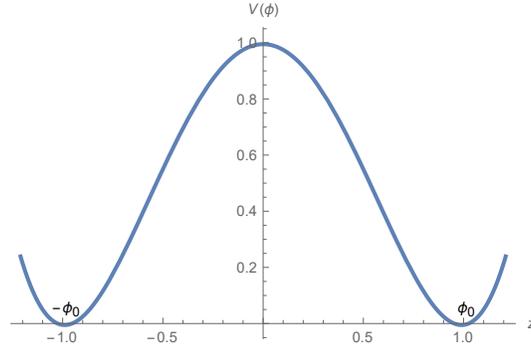


Figura 1.1: Potencial $V(\phi)$

Ahora bien, es de interés determinar la ecuación de movimiento que proviene de (1.1) ya que con la misma se puede encontrar una solución pared de dominio. La ecuación de movimiento viene dada por

$$\partial_4^2 \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.4)$$

tiene por solución

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\lambda}} \tanh\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}}\right), \quad (1.5)$$

está obedece un comportamiento que se denominara perfil tipo *Kink* y diremos que es una solución pared de dominio puesto que asintóticamente interpola entre los mínimos del potencial es decir

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \phi(r) = \langle \phi_0 \rangle_{\pm} \quad (1.6)$$

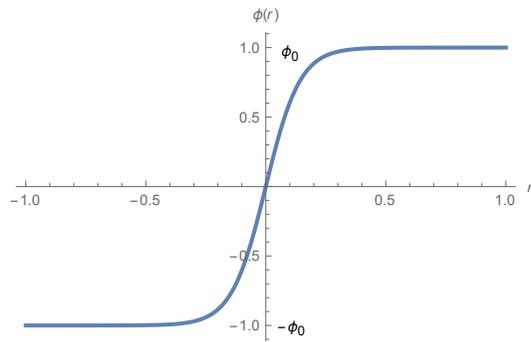


Figura 1.2: Perfil tipo *Kink*

ahora, para corroborar la existencia de la pared se debe calcular la componente $-T_0^0(\phi) = \rho(\phi)$ del tensor energía impulso la cual es la densidad de energía está puede ser calculada a partir de la expresión

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi + \eta_{ab} L \quad (1.7)$$

gráficamente en (1.3) se muestra que existe una alta concentración de energía en $r = 0$, además cuando $r = \pm\infty$ se puede verifica que la curvatura es nula, del mismo modo sobre la pared es posible detectar un modo no masivo localizado asociado al potencial gravitacional newtoniano y

modos masivos propagándose libre mente si el espesor de la pared se hace infinitesimal se convierte en una brana recuperando el modelo planteado en [1] para describir nuestro Universo. Así pues una brana es el limite de pared de domino.

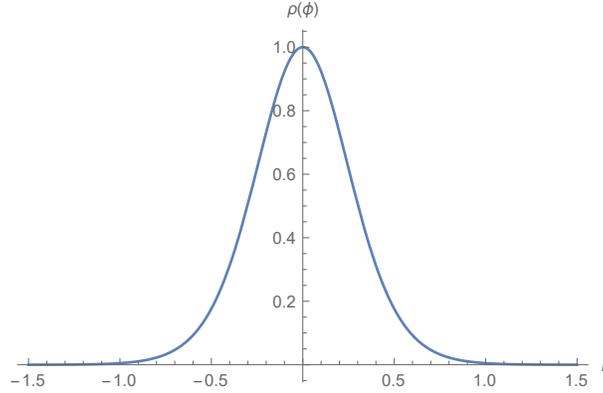


Figura 1.3: Densidad de energía

1.2. Deducción de las ecuaciones para la perturbación

Ahora considere un escenario con curvatura dado por la acción del sistema Einstein campo escalar en cinco dimensiones

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - V(\phi) \right], \quad (1.8)$$

con $a, b = 0, \dots, 4$ de donde se obtiene las siguientes ecuaciones de movimiento

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi + V(\phi) \right), \quad (1.9)$$

y

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.10)$$

tal que g_{ab} y ϕ son soluciones exacta, como se está interesado en representar una pared de dominio, para dado el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2, \quad (1.11)$$

conocido como coordenadas de longitud propia, donde los índice en griegos ($\mu, \nu, \beta, ..$) toman los valores $0, \dots, 3$ y r denota la coordenada de la dimensión adicional. Con este elemento de línea en las ecuaciones de Einstein (1.9), (1.10) se obtienen

$$V(\phi) = - \left(6A'^2 + \frac{3}{2}A'' \right), \quad (1.12)$$

y

$$\phi'^2 = -3A'', \quad (1.13)$$

donde las variables primada, es decir, con ' denota que son diferenciadas respecto de la coordenada adicional r , así mismo para ϕ como en el caso plano esto es

$$\phi = \phi_v \tanh(kr), \quad \text{con} \quad \phi_v = v, \quad (1.14)$$

con

$$A = \frac{-v^2}{9} \left[2 \ln(\cosh(kr)) + \frac{1}{2} \tanh^2(kr) \right], \quad (1.15)$$

se verifica que (1.13) se satisface; también reemplazando (1.15) en (1.12) se tiene

$$V(\phi) = \frac{k^2 \phi_v^2}{2} \left[\left(1 - \left(\frac{\phi}{\phi_v} \right)^2 \right)^2 - \frac{4}{3} \phi^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_v} \right)^2 \right)^2 \right], \quad (1.16)$$

también es posible determinar la densidad de energía $\rho(\phi)$ a partir de la expresión

$$\rho(\phi) = - (3A'' + 6A'^2), \quad (1.17)$$

gráficamente se verifican los comportamientos de (1.16) y (1.17) respectivamente

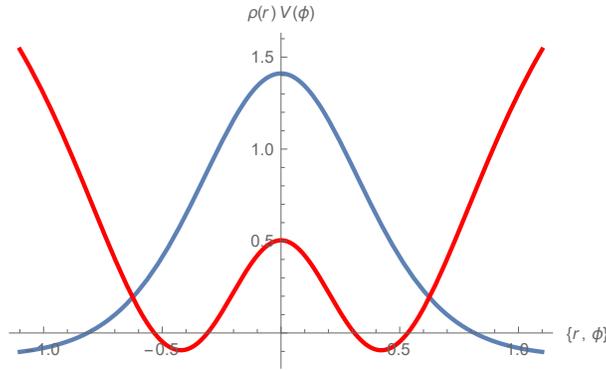


Figura 1.4: Densidad de energía en azul y potencial en rojo

nuevamente en $r = 0$ se ve una alta concentración de energía y en $r \rightarrow \pm\infty$ podemos notar que tiende a un valor constante negativo que coincide con los mínimos del potencial al que posteriormente asociaremos a la constante cosmológica estos resultados se verifican en [9].

Con intension de determinar la propagación de la interacción gravitacional a lo largo de la coordenada adicional ser realizan fluctuaciones gravitacionales y del campo escalar para determinar las mismas. Así se considera una familia de soluciones para el sistema (1.9) y (1.10) \tilde{g}_{ab} , $\tilde{\phi}$ a saber, estas dependen diferencialmente de un parámetro λ , además son solución al sistema (1.9)-(1.10), entonces, para $\lambda \ll 1$ se tiene

$$\tilde{g}_{ab}(\lambda) \approx g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \tilde{\phi}(\lambda) \approx \phi + \lambda \varphi, \quad (1.18)$$

donde h_{ab} y φ son las perturbaciones de la métrica y del campo escalar, respectivamente. Al escribir la ecuación de Einstein en la forma Ricci utilizando la métrica perturbada, se tiene

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{T}, \quad (1.19)$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}^{ab}\tilde{T}_{ab}$, con

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^d \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right), \quad (1.20)$$

y

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \frac{dV(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} = 0. \quad (1.21)$$

Las ecuaciones de Einstein en principio no son triviales de resolver, con interés en encontrar una solución exacta para las perturbaciones h_{ab} y φ , se diferencia respecto de λ las ecuaciones (1.19)-(1.21) y luego se evalúa $\lambda = 0$. Por otra parte, es posible establecer una relación entre el tensor de Riemann para la métrica perturbada y la métrica sin perturbar dada por

$$\tilde{R}_{abc}{}^f w_f = R_{abc}{}^f w_f + 2\nabla_{[b} \tilde{C}_{a]c}^f w_f + 2\tilde{C}_{[ac}^d \tilde{C}_{b]d}^f w_f, \quad (1.22)$$

para mayor información del cálculo ver (A.1). Haciendo la contracción en el segundo y cuarto término se obtiene la relación entre el tensor de Ricci perturbado y el Ricci sin perturbar, esto es

$$\tilde{R}_{ac} = g^b{}_f \tilde{R}_{abc}{}^f = R_{ac} - 2\nabla_{[a} \tilde{C}_{b]c}^b + 2\tilde{C}_{[ac}^d \tilde{C}_{b]d}^b. \quad (1.23)$$

Ahora cambiando $c \leftrightarrow b$, y diferenciando el lado izquierdo de (1.19) respecto de λ se obtiene como resultado

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \square h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{dc}) + \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} + R^d{}_{(a}{}^f{}_{b)} h_{fd} + R^d{}_{(a}{}^f{}_{d)} h_{b)f}, \quad (1.24)$$

para ver más información de este cálculo ver (A.2). De manera similar se procede para el lado derecho de (1.19) y se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{T} \right] \Big|_{\lambda=0} &= 2\nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi + \frac{D-5}{6} h_{ab} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - \frac{D-5}{6} g_{ab} h^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi \\ &+ \frac{D-5}{6} g_{ab} g^{cd} \nabla_c \varphi \nabla_d \phi + \frac{D-3}{3} h_{ab} V(\phi) + \frac{D-3}{3} g_{ab} \frac{d}{d\lambda} V(\phi) \varphi, \end{aligned} \quad (1.25)$$

si se desea más detalle sobre el cálculo ver (A.3). Ahora bien, reescribiendo (1.19) en términos de (1.24) y (1.25) donde $D = 5$ así, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \square h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{dc}) + \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} + R^d{}_{(a}{}^f{}_{b)} h_{fd} + R^d{}_{(a}{}^f{}_{d)} h_{b)f} \\ = 2\nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi + \frac{2}{3} h_{ab} V(\phi) + \frac{2}{3} g_{ab} \frac{dV(\phi)}{d\lambda} \varphi, \end{aligned} \quad (1.26)$$

de manera similar se procede con (1.21) el cual resulta

$$-h^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - \frac{1}{2} (g^{ab} g^{fc} [\nabla_a h_{cb} + \nabla_b h_{ca} - \nabla_c h_{ab}] \nabla_f \phi) + g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi = \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \varphi, \quad (1.27)$$

más información del cálculo ver (A.4). Note que tanto la ecuación linealizada de las fluctuaciones como la ecuación linealizada del campo escalar se obtiene de manera general, es decir, sin dependencia alguna de una forma particular del tensor métrica g_{ab} , ni tampoco del tensor métrico perturbado h_{ab} ver [5], que trataremos con minucioso detalle en la siguiente sección.

1.3. Parametrización de las fluctuaciones

El tensor métrico perturbado, es decir, h_{ab} puede ser descrito de modo tal que contiene modos Tensoriales, Vectoriales y Escalares [8]. Así pues considere la siguiente parametrización

$$h_{ab} = e^{2A} \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}E & e^{-A}(D_{\mu} + \partial_{\mu}C) \\ e^{-A}(D_{\mu} + \partial_{\mu}C) & e^{-2A}2\omega \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

para la cual se tiene un sector trasverso y sin traza, $h_{\mu\nu}^{TT}$ esto es

$$g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad \partial^{\mu}h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (1.29)$$

y los vectores f_{μ} y D_{μ} con divergencia nula,

$$g^{\mu\nu}\partial_{\nu}f_{\mu} = 0 \quad g^{\mu\nu}\partial_{\nu}D_{\mu} = 0. \quad (1.30)$$

Cabe destacar que h_{ab} es un tensor métrico simétrico con traza nula, el cual tiene 15 grados de libertad, sin embargo, contando por simple inspección los grados de libertad de los campos involucrados en el mismo suman 22, por tal razón se imponen las condiciones (1.29) y (1.30) para descartar esos 7 grados de libertad excedentes.

Luego de reemplazar (1.11), (1.28) en (1.26) y (1.27) se tiene un conjunto de ecuaciones, que representan

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} & (-e^{-2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta} - \partial_r^2 - 4A'\partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} \\ & + \partial_{(\mu} [3A'e^{-A}D_{\nu)} + e^{-A}D'_{\nu)} - 4A'f'_{\nu)} - f''_{\nu)}] \\ & - \eta_{\mu\nu} [e^{-2A}\partial^{\beta}\partial_{\beta}(\psi + e^{2A}A'E' - e^A A'C) + \psi'' + 8A'\psi'] \\ & + \eta_{\mu\nu} [8A'^2\omega + A'\omega' + 2A''\omega] \\ & + \partial_{\mu}\partial_{\nu} [-e^{-2A}(2\psi + \omega) - E'' - 4A'E' + e^{-A}C' + 3A'e^{-A}C] \\ & = \frac{2}{3} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \varphi \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2}\partial^{\beta}\partial_{\beta}(e^{-A}D_{\mu} - f'_{\mu}) + \partial_{\mu}(3A'\omega - 3\psi' - \phi'\varphi) = 0, \quad (1.32)$$

Sector Escalar

$$\begin{aligned} & -\partial^{\beta}\partial_{\beta}(e^{-2A}\omega + E'' + 2A'E' - A'e^{-A}C - e^{-A}C') - 4\psi'' - 8A'\psi' \\ & + 4A'\omega' + 2A''\omega + 8A'^2\omega - 2\phi'\phi' - \frac{2}{3} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Se procede de manera similar con la ecuación de las fluctuaciones del campo escalar (1.27) teniendo

$$\begin{aligned} & e^{-2A}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}(\varphi - e^A\phi'C + e^{2A}E'\phi') - 2(\phi'' + 4A'\phi')\omega - \phi'\omega' \\ & + 4\phi'\psi' + \varphi'' + 4A'\varphi' - \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.4. Transformaciones de calibre

Es fácil ver que en las ecuaciones (1.31-1.34) se encuentran acopladas las fluctuaciones de la métrica y las fluctuaciones del campo que genera la pared. La intención de esta sección es mostrar un método para modificar estas ecuaciones y llevarlas a una forma mas sencillas de manipular, para ello se definirán variables que son invariantes bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas las cuales representan el mismo fenómenos físico para cada uno de los campos involucrados en la parametrización.

1.4.1. Transformaciones infinitesimales de coordenadas

Dadas las perturbaciones h_{ab} y \bar{h}_{ab} , estas representan la misma perturbación física si y solo si difieren por un difeomorfismo infinitesimal de la métrica, esto es si

$$\bar{x}^a = x^a + \epsilon^a. \quad (1.35)$$

Entonces la perturbación de la métrica sigue la siguiente libertad de calibre

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - 2\nabla_{(a}\epsilon_{b)}, \quad (1.36)$$

ver (A.5.1). Dada la métrica (1.11), el campo vectorial ϵ_a puede ser descrito de forma explícita como sigue

$$\epsilon_a = (e^{2A}\epsilon_\mu, \epsilon_r), \quad (1.37)$$

donde el vector ϵ_μ puede ser expresado en función de la derivada de un escalar y un vector transverso como a continuación

$$\epsilon_\mu = \partial_\mu \epsilon + \xi_\mu, \quad \partial^\mu \xi_\mu = 0. \quad (1.38)$$

De conformidad con (1.36) todos los campos involucrados en el mismo transforman infinitesimalmente como veremos a continuación. El sector cuatro dimensional de \bar{h}_{ab} si se hace $g^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu}$ es posible chequear que los campos E y ψ transforman de la siguiente manera

$$\bar{\psi} = \psi - A'\epsilon_r, \quad (1.39)$$

$$\bar{E} = E - \epsilon. \quad (1.40)$$

En relación al campo f_μ se realiza $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}$ resultando

$$\bar{f}_\mu = f_\mu - \xi_\mu. \quad (1.41)$$

Con referencia al sector vectorial del tensor h_{ab} para el cual se tiene

$$\bar{C} = C - e^A \epsilon' - e^{-A} \epsilon_r, \quad (1.42)$$

$$\bar{D}_\mu = D_\mu - e^A \xi'_\mu. \quad (1.43)$$

Finalmente si analiza el sector escalar de h_{ab} resulta

$$\bar{\omega} = \omega - \epsilon'_r. \quad (1.44)$$

Por otro lado, la transformación asociada a la perturbación del campo que genera la pared φ es

$$\bar{\varphi} = \varphi - \phi'\epsilon_r. \quad (1.45)$$

De acuerdo a lo anterior, reemplazando (1.39)-(1.45) en (1.36) se obtiene

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (1.46)$$

Para ver más detalles (A.5.2)

1.4.2. Variables invariantes de calibre

A continuación se define un conjunto de variables invariantes de calibre a partir de las transformaciones de los campos vectoriales y escalares mostrado en el conjunto de ecuaciones (1.39) hasta (1.45). Así pues, se define la variable vectorial por

$$\bar{V}_\mu = \bar{D}_\mu - e^A \bar{f}'_\mu. \quad (1.47)$$

Continuado se define las variables escalares dadas por

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A' (e^{2A} \bar{E}' - e^A \bar{C}'), \quad (1.48)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\omega} - e^A \bar{C}' + e^{2A} \bar{E}'' - A' e^A \bar{C} + 2A' e^{2A} \bar{E}', \quad (1.49)$$

y también una variable invariante de calibre asociada a las fluctuaciones del campo que genera la pared dada por

$$\bar{\chi} = \bar{\varphi} + \phi' (e^{2A} \bar{E} - e^A \bar{C}). \quad (1.50)$$

Además se define una variable auxiliar dada por

$$\bar{\Omega} = e^{2A} \bar{E} - e^A \bar{C}, \quad (1.51)$$

de modo que las variables (1.48)-(1.50) se pueden redefinir

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A' \bar{\Omega}, \quad (1.52)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\omega} + \bar{\Omega}', \quad (1.53)$$

$$\bar{\chi} = \bar{\varphi} + \phi' \bar{\Omega}. \quad (1.54)$$

Ahora bien, este nuevo conjunto de variables son invariantes de calibre, es decir,

$$\bar{\Gamma} = \Gamma, \quad \bar{\Theta} = \Theta, \quad \bar{V}_\mu = V_\mu \quad \text{y} \quad \bar{\chi} = \chi, \quad (1.55)$$

por otro lado, reemplazando (1.47), (1.52)-(1.54) en las ecuaciones (1.31)-(1.34) se tiene

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} & (-e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta - \partial_r^2 - 4A' \partial_r) \bar{h}_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A} \partial_{(\mu} (3A' + \partial_r) \bar{V}_{\nu)} \\ & + \partial_\mu \partial_\nu [-e^{-2A} (\bar{\Theta} + 2\bar{\Gamma} - 2A' \bar{\Omega}' - \bar{\Omega}') - \bar{E}'' - 4A' \bar{E}' + e^{-A} (\bar{C}' + 3A' \bar{C})] \\ & \eta_{\mu\nu} [-e^{-2} \partial^\beta \partial_\beta \bar{\Gamma} - (\bar{\Gamma} - (A' \bar{\Omega}))'' - 8A' (\bar{\Gamma} - A' \bar{\Omega})'] \\ & \eta_{\mu\nu} [(8A'^2 + 2A'') (\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') + A' (\bar{\Theta} - \bar{\Omega})'] = \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} (\bar{\chi} - \phi' \bar{\Omega}) \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} e^{-A} \partial^\beta \partial_\beta \bar{V}_\mu + \partial_\mu [-3(\bar{\Gamma} - (A' \bar{\Omega}))' + 3A' (\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') - \phi' (\bar{\chi} - \phi' \bar{\Omega})] = 0, \quad (1.57)$$

Sector Escalar

$$\begin{aligned}
 & -e^{-2A}\partial_b\partial^\beta\bar{\Theta} - 4(\bar{\Gamma} - (A'\bar{\Omega}))'' - 8A'(\bar{\Gamma} - (A'\bar{\Omega}))' + 4A'(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}')' \\
 & + (2A'' + 8A'^2)(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') - 2\phi'(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega}) - \frac{2}{3}\frac{dV(\phi)}{d\phi}(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega}) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

De acuerdo con (1.34) en término de las variables invariantes de calibre resulta

$$\begin{aligned}
 & e^{-2A}\partial^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - 2(\phi'' + 4A'\phi')(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}') - \phi'(\bar{\Theta} - \bar{\Omega}')' + 4\phi(\bar{\Gamma} - (A'\bar{\Omega}))' \\
 & + (\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega})'' + 4A'(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega})' - \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}(\bar{\chi} - \phi'\bar{\Omega}) = 0,
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

1.5. Desacoplamiento de las fluctuaciones

Se puede reducir aun mas las ecuaciones en los distintos modos Tensorial, Vectorial y Escalares de la fijación de calibre que se hará en esta sección. Recordando que la fijación de calibre permite eliminar grados de libertad no físicos, es decir, en nuestro caso de los 15 grados de libertad para los campos involucrados existen unos que no dan información física de la gravitación para mayor detalle ver [6], se elige

$$\bar{E} = 0, \quad \bar{C} = 0, \quad \bar{f}_\mu = 0, \tag{1.60}$$

así los parámetros de la transformación de calibre son fijados de la siguiente manera

$$E = \epsilon, \quad \epsilon_r = e^A(C - e^A E'), \quad f_\mu = \xi_\mu. \tag{1.61}$$

Luego de imponer (1.60), es directo que $\bar{\Omega} = 0$, todo los términos en las ecuaciones que contengan $\bar{\Omega}$ y todas las derivadas son nulas. usando (1.55) se tiene

Sector Tensorial

$$\begin{aligned}
 & (-e^{2A}\partial^\beta\partial_\beta - \partial_r^2 - 4A'\partial_r)h_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A}\partial_{(\mu}(3A' + \partial_r)V_{\nu)} - e^{-A}\partial_\mu\partial_\nu(\Theta + 2\Gamma) \\
 & + \eta_{\mu\nu}[-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\Gamma + \Gamma'' - 8A'\Gamma' + (8A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta'] - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\frac{dV(\phi)}{d\phi}\chi = 0,
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2}e^{-A}\partial^\beta\partial_\beta V_\mu + \partial_\mu(3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'\chi) = 0, \tag{1.63}$$

Sector Escalar

$$-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\Theta - 4\Gamma'' - 8A'\Gamma' + 4A'\Theta' + 2(A'' + 4A'^2)\Theta - 2\phi\chi - \frac{2}{3}\frac{dV(\phi)}{d\phi}\chi = 0, \tag{1.64}$$

y la ecuación para el campo escalar toma la forma

$$e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\chi - 2(\phi'' + 4A'\phi')\Theta - \phi'\Theta' + 4\phi'\Gamma' + 4A'\chi' + \chi'' - \chi\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = 0. \tag{1.65}$$

A continuación, es conveniente reescribir las ecuaciones (1.62)-(1.65) en nuevas coordenadas llamadas conformes, para ello se realiza el siguiente cambio

$$z = \int e^{-A} dr, \quad (1.66)$$

con este nuevo cambio de coordenadas la métrica (1.11), se modifica de modo que el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (1.67)$$

Entonces, las ecuaciones de las fluctuaciones son tal que en las coordenadas conformes pueden ser expresadas como sigue

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} & (-\partial^\beta \partial_\beta - 3A' \partial_z - \partial_z^2) h_{\mu\nu}^{TT} + \partial_{(\mu} (\partial_z + 3A') V_{\nu)} - \partial_\mu \partial_\nu (2\Gamma + \Theta) \\ & + \eta_{\mu\nu} (-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - 7A' \Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'') \Theta + A' \Theta') - \frac{2}{3} e^{2A} \chi \eta_{\mu\nu} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \end{aligned} \quad (1.68)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} \partial^\beta \partial_\beta V_\mu + \partial_\mu (3A' \Theta - 3\Gamma' - \phi' \chi) = 0, \quad (1.69)$$

Sector Escalar

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Theta + 4A' \Theta' - 4A' \Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi' \chi' + (6A'^2 + 2A'') \Theta - \frac{2}{3} e^{2A} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.70)$$

la ecuación para el campo escalar

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi - 2(\phi'' + 3A' \phi') \Theta - \phi' \Theta' + 4\phi' \Gamma' + 3A' \chi' + \chi'' - e^{2A} \chi \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} = 0. \quad (1.71)$$

Ahora, se procede a desacoplar las ecuaciones (1.68)-(1.71) de las fluctuaciones en los distintos modos Tensorial, Vectorial y Escalares, la deducción de los mismo, junto con su respectivo análisis se muestran a continuación donde son obtenidos de manera directa a excepción de (1.71) la cual posee un trato diferente.

1.5.1. Modo Tensorial

En relación a (1.68) se impone

$$(-\partial^\beta \partial_\beta - 3A' \partial_z - \partial_z^2) h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (1.72)$$

para la cual se propone la siguiente separación de variables

$$h_{\mu\nu}^{TT} = h(x) e^{-\frac{3}{2}A(z)} \psi_{\mu\nu}(z). \quad (1.73)$$

Así la ecuación (1.72) puede ser escrita como una ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{qm1})\psi_{\mu\nu} = \sigma^2\psi_{\mu\nu}, \quad (1.74)$$

con

$$V_{qm1} = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'', \quad (1.75)$$

donde se ha asumido $\partial^\beta\partial_\beta h(x) = \sigma^2 h(x)$. Ahora si A es como (1.15) se tiene

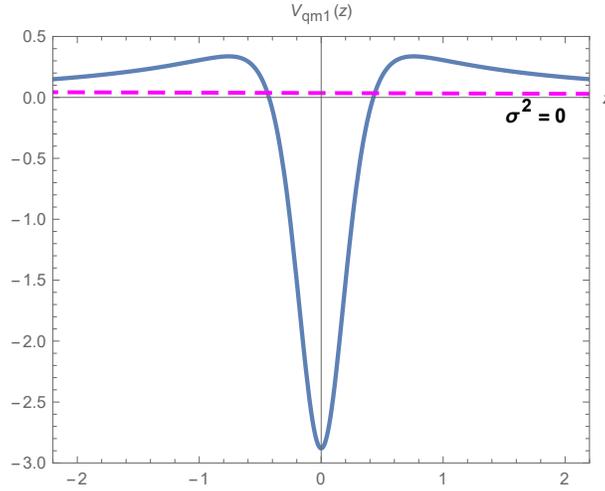


Figura 1.5: Potencial V_{qm1}

para el cual en el pozo de potencial en torno a $z = 0$, se obtiene un modo no masivo asociado a un auto estado $\sigma^2 = 0$ localizado; mientras que los modos masivos asociados a estados de energía $\sigma^2 > 0$ se propagan libremente, como es de esperar para un observador cuatro dimensional solo los modos no masivos son los que definen gravedad newtoniana.

1.5.2. Modo Vectorial

Ahora bien estudiando las ecuaciones (1.68) y (1.69) se puede obtener las ecuaciones del modo vectorial

$$\partial_{(\mu}(\partial_z + 3A')V_{\nu)} = 0, \quad y \quad \partial^\beta\partial_\beta V_\mu = 0, \quad (1.76)$$

para la cual la primera ecuación es la de interés pues es la que contiene información a lo largo de la coordenada adicional, está tiene por separación de variable

$$V_\mu(x, z) = e^{-3A(z)}V_\mu(x), \quad (1.77)$$

recuerde que

$$A = \frac{-v^2}{9} \left[2 \ln(\cosh(kr)) + \frac{1}{2} \tanh^2(kr) \right], \quad (1.78)$$

donde la parte asociada a la coordenada adicional de inmediato se identifica que no es normalizable por tanto no esta localizado.

1.5.3. Modo Escalar Γ y Θ

Para desacoplar la ecuación del modo escalar consideraremos imponer los siguientes vínculos

$$2\Gamma + \Theta = 0, \quad \text{y} \quad 3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'\chi = 0, \quad (1.79)$$

del remanente escalar de la ecuación (1.68), es decir

$$(-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - 7A'\Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta') = \frac{2}{3}e^{2A}\chi \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (1.80)$$

y (1.70) en conjunto con los vínculos (1.79) se construye la siguiente ecuación

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - \Gamma'' - (3A' - 2\frac{\phi''}{\phi'})\Gamma' - 4(A'' - A'\frac{\phi''}{\phi'})\Gamma = 0. \quad (1.81)$$

Haciendo la siguiente separación de variable

$$\Gamma = h(x)e^{-\frac{3}{2}A(z)}\phi(z)'\psi_{e1}(z), \quad (1.82)$$

es posible reescribir (1.81) en una ecuación tipo Schrödinger como sigue

$$(-\partial_z^2 + V_{qm2})\psi_{e1}(z) = \sigma^2\psi_{e1}(z), \quad (1.83)$$

con

$$V_{qm2} = A'\frac{\phi''}{\phi'} - \frac{5}{2}A'' + \frac{9}{4}A' - \frac{\phi'''}{\phi'} + 2(\frac{\phi''}{\phi'})^2, \quad (1.84)$$

donde $\partial^\beta \partial_\beta h(x) = \sigma^2 h(x)$. Ahora si A es como antes analizaremos (1.84)

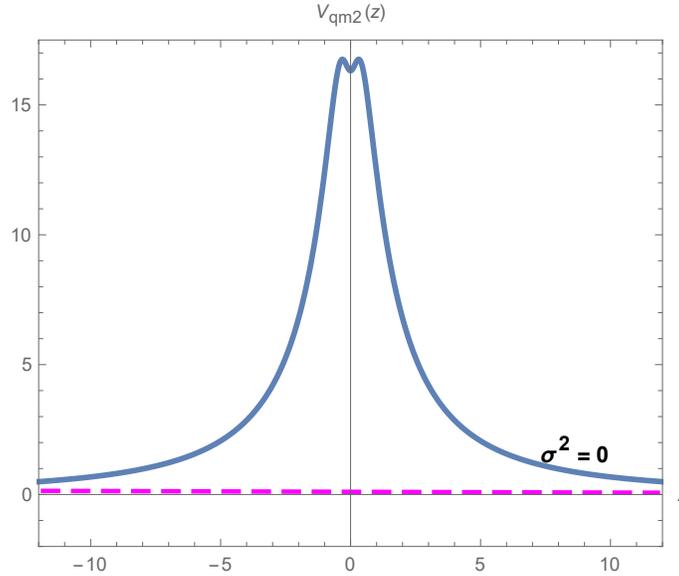


Figura 1.6: Potencial V_{qm2}

del gráfico se puede apreciar que un modo no masivo asociado al estado $\sigma^2 = 0$, tiene menor energía que la del potencial a lo largo de la coordenada adicional por lo tanto no es posible localizarlo; mientras que los modos masivos asociado a $\sigma^2 > 0$, se propagan libremente haciendo efecto túnel porque satisfacer una ecuación tipo Schrödinger a lo largo de la coordenada adicional no están localizados.

1.5.4. Modo Escalar χ

Estudiaremos la ecuación para el campo escalar como otro modo escalar diferente del anterior sin embargo se utilizan los vínculos (1.79). Considerando la ecuación (1.71), es posible modificar la misma, como una ecuación tipo Schrödinger para la cual se plantea la siguiente separación de variables cambio

$$P = h(x)e^{-\frac{3}{2}A(z)} \left(\chi - \frac{\phi'}{A'} \Gamma \right), \quad (1.85)$$

esta es

$$\left[-\partial_z^2 + \partial_z \left(\frac{Z'}{Z} \right) + \left(\frac{Z'}{Z} \right)^2 + \partial^\beta \partial_\beta \right] P = 0, \quad (1.86)$$

que luego es posible expresar esta de forma mas compacta como

$$(-\partial_z^2 + V_{qm3})P(z) = \sigma^2 P(z), \quad (1.87)$$

este cálculo tiene una deducción la cual es detallada en (A.6). Ahora retomando el problema se tiene que

$$V_{qm3} = \frac{9}{4}A'^2 + 3A' \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{3}{2}A'' + \frac{\phi'''}{\phi'} - 2 \frac{\phi'' A''}{\phi' A'} - \frac{A'''}{A'} + 2 \left(\frac{A''}{A'} \right)^2, \quad (1.88)$$

donde $\partial^\beta \partial_\beta h(x) = \sigma^2 h(x)$ y $Z = e^{\frac{3}{2}A(z)} \frac{\phi'}{A'}$, ahora si A es como (1.15) se tiene

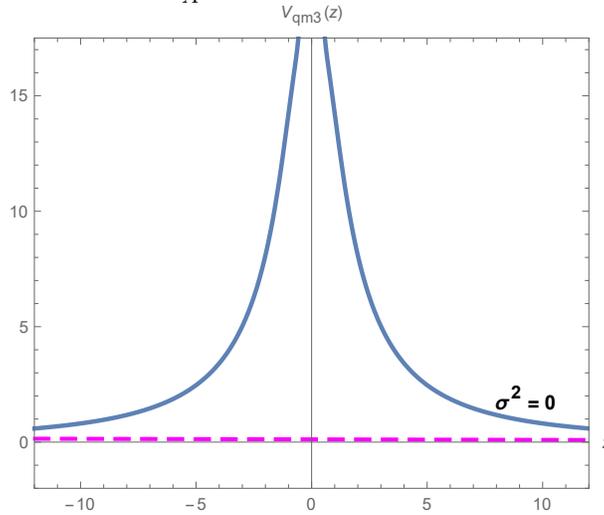


Figura 1.7: Potencial V_{qm3}

al igual que el **Modo Escalar** Γ aquí ocurre algo similar, es decir, para un modo no masivo asociado a un auto estado $\sigma^2 = 0$ tiene energía menor que la del potencial por lo cual no es posible localizarlo; para modos masivos asociados a auto estados $\sigma^2 > 0$ tiene un comportamiento de libre a lo largo de la coordenada adicional y realizando efecto túnel sobre la barrera de potencial.

En este capítulo se analiza la localización de los modos de las fluctuaciones gravitacionales de un escenario determinado por un *kink* no abeliano el cual asintóticamente induce el rompimiento de simetría $SU(5) \times Z_2 \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Para generar el escenario se considera un campo en la representación adjunta de $SU(5)$ sobre una teoría cinco dimensional con gravitación y potencial de autointeracción de sexto orden con simetría de reflexión.

2.1. El kink auto-gravitante

Considere una teoría en $(4 + 1)$ -dimensiones definida por la siguiente lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \text{Tr}(\partial_m \Phi \partial^m \Phi) - V(\Phi) \right], \quad (2.1)$$

donde ϕ es un campo que transforma en la representación adjunta de $SU(5)$, esto es

$$\Phi \rightarrow U \Phi U^\dagger \quad \text{con} \quad U \in SU(5) \quad U = \exp\{i\omega_q \mathbf{T}^q\}, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{T}^q , con $q = 1, \dots, 24$. Son los generadores de $SU(5)$, ω_q es un parámetro continuo y además se impone

$$Z_2 : \Phi \rightarrow -\Phi, \quad Z_2 \notin SU(5). \quad (2.3)$$

ya que es necesaria para considerar una la existencia de una solución pared de domino al sistema Einstein-campo escalar dado por

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 2 \text{Tr}(\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi) - g_{ab} (g^{cd} \text{Tr}(\nabla_c \Phi \nabla_d \Phi) - V(\Phi)), \quad (2.4)$$

y

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi_q = \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}, \quad \Phi = \phi_q \mathbf{T}^q, \quad (2.5)$$

el potencial es

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & -m^2 \text{Tr}(\phi^2) + h(\text{Tr}(\phi^2))^2 + \lambda \text{Tr}(\phi^4) \\ & + \alpha (\text{Tr}(\phi^2))^3 + \beta (\text{Tr}(\phi^3))^2 + \gamma \text{Tr}(\phi^4) \text{Tr}(\phi^2) + V_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

el cual es de sexto orden carece de términos con potencias impares, adecuado para encontrar soluciones tipo pared de dominio producto de una ruptura de simetría; V_0 será ajustado en correspondencia con la constante cosmológica cinco-dimensional del escenario.

Es conocido que existen tres posibles valores de expectación en el vacío (vev) del campo [10] estos son, el trivial,

$$\Phi_{0A} \sim \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), \quad (2.7)$$

y

$$\Phi_{0B} \sim \text{diag}(1, 1, 1, 1 - 4), \quad (2.8)$$

los cuales rompe espontáneamente $SU(5)$ a las simetrías

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1), \quad (2.9)$$

y

$$SU(4) \times U(1), \quad (2.10)$$

para (2.7) y (2.8) respectivamente. Sin embargo, se esta interesado solo en el vev del campo asociado a (2.7) ya que su rompimiento de simetría es la del modelos estándar; de ahora en adelante se referirá como Φ_0 a (vev) asociado a este. Se debe satisfacer

$$\Phi_0(r = -\infty) = -U\Phi_0(r = +\infty)U^{-1}, \quad (2.11)$$

pues se aspira a una solución tipo pared de dominio o “*kink*” que asintóticamente ($r \rightarrow \pm\infty$), interpolé entre diferentes embebimientos de (2.9) en $SU(5)$, esto último por (2.11) sugiere permutación y cambio de signo sobre los elementos de la diagonal de el vev del campo para efectos de cálculos es indiferente pero de simetría es relevante como veremos mas adelante.

2.1.1. Ecuaciones Para Los Coeficientes

Se propone una expansión del campo en términos de los generadores diagonales de $SU(5)$

$$\Phi = a(r)\mathbf{T}^3 + b(r)\mathbf{T}^8 + c(r)\mathbf{T}^{23} + d(r)\mathbf{T}^{24}, \quad (2.12)$$

la cual por lo antes mencionado con la condición (2.11) debe satisfacer las siguientes condiciones de borde, es decir

$$\Phi_0(r = +\infty) = v\sqrt{\frac{3}{5}}\text{diag}(2, -3, 2, 2, -3) = v\left[\sqrt{15}(\mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^{23}) + (\mathbf{T}^{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}^8)\right], \quad (2.13)$$

y

$$\Phi_0(r = -\infty) = v\sqrt{\frac{3}{5}}\text{diag}(3, -2, -2, 3, -2) = v\left[\sqrt{15}(\mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^{23}) - (\mathbf{T}^{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}^8)\right], \quad (2.14)$$

donde

$$\mathbf{T}^3 = \frac{1}{2}\text{diag}(1, -1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{T}^{23} = \frac{1}{2}\text{diag}(0, 0, 0, 1, -1), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{T}^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{diag}(1, 1, -2, 0, 0), \quad \mathbf{T}^{24} = \frac{1}{2\sqrt{15}}\text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)^1. \quad (2.16)$$

estos son los únicos generadores diagonales de grupo $SU(5)$ el campo es descrito en termino de estos pues el (vev) es diagonal.

Ecuaciones de Movimiento

Considere la métrica en coordenadas de longitud propia con simetría plano paralela

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (2.17)$$

si se reemplaza (2.12) en el sistema (2.4-2.5) resulta

$$3A'' = -(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2), \quad (2.18)$$

y

$$\frac{3}{2}A'' + 6A'^2 = -V(\Phi), \quad (2.19)$$

con

$$A = -\frac{v^2}{9} \left[2 \ln \cosh(kr) + \frac{1}{2} \tanh^2(kr) \right]. \quad (2.20)$$

Además, las ecuaciones de movimiento para cada coeficiente son

$$a'' + 4A'a' = \frac{\partial V}{\partial a}, \quad b'' + 4A'b' = \frac{\partial V}{\partial b}, \quad (2.21)$$

$$c'' + 4A'c' = \frac{\partial V}{\partial c}, \quad d'' + 4A'd' = \frac{\partial V}{\partial d}, \quad (2.22)$$

podría pensarse que las ecuaciones (2.21)-(2.22) son iguales, sin embargo no lo es, tienen un trato especial cada una de ellas como se vera continuación al determinar los coeficientes a, b, c y d asociados al campo (2.12), compatible con las condiciones de borde (2.13) y (2.14).

Imponiendo las siguientes condiciones

$$a = c \quad y \quad b = -\sqrt{5}d, \quad (2.23)$$

esto es motivado por la estructura de (2.13) y (2.14), de tal forma que el sistemas (2.21-2.22) se reduce a

$$\begin{aligned} a'' + 4A'a' = & -\frac{a}{20} [20m^2 - 6(20h + 3\lambda)d^2 - 9(60\alpha - 18\beta + 19\gamma)d^4] \\ & + \frac{a^3}{10} [5(4h + \lambda) + 3(60\alpha + 9\beta + 11\gamma)d^2] \\ & + 3\frac{a^5}{4}(4\alpha + \gamma), \end{aligned} \quad (2.24)$$

y

$$\begin{aligned} d'' + 4A'd' = & -\frac{d}{20} [20m^2 - 2(20h + 3\lambda)a^2 - (60\alpha + 9\beta + 11\gamma)a^4] \\ & + 3\frac{d^3}{10} [20h + 13\lambda + (60\lambda - 18\beta + 19\gamma)] \\ & + 27\frac{d^5}{20}(20\alpha + 9\beta + 13\gamma). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para desacoplar estas ecuaciones en termino de a y d es necesario relacionar los siguientes parámetros

$$h = -\frac{3\lambda}{20}, \quad \alpha = -\frac{41\gamma}{180}, \quad \beta = \frac{8\gamma}{27}. \quad (2.26)$$

Luego el sistema (2.24) y (2.25) se reduce

$$a'' + 4A'a' = -m^2a + \frac{\lambda}{5}a^3 + \frac{\gamma}{15}a^5, \quad a(r = \pm\infty) = v\sqrt{15}, \quad (2.27)$$

y

$$d'' + 4A'd' = -m^2d + 3\lambda d^3 + 15\gamma d^5, \quad d(r = \pm\infty) = \pm v, \quad (2.28)$$

donde las condiciones de bordes respectiva a cada ecuación proviene de las condiciones de borde (2.13) y (2.14), así se tienen por solución

$$a = v\sqrt{15}, \quad y \quad d = v \tanh(kr), \quad (2.29)$$

Por tanto, el *kink* no abeliano autogravitante es

$$\Phi = v \left[\sqrt{15}(\mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^{23}) + \tanh(kr)(\mathbf{T}^{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}^8) \right], \quad (2.30)$$

el cual interpola asintóticamente entre dos espacio tiempo Anti-de Sitter (AdS_5) gracias al teorema de Nambu-Goldstone que reza lo siguiente

Teorema 2.1 Por cada generador que no aniquila el vacío, se tiene un boson de Nambu-Goldstone con masa cero.

- representación Adjunta: $[T^j, \langle \phi \rangle] \neq 0$.

se verifica gracias al conmutador la simetría residual la siguiente manera:

En $r \rightarrow \pm\infty$ se tiene

$$SU(5) \times Z_2 \rightarrow \frac{SU(3)_\pm \times SU(2)_\pm \times U(1)_\pm}{Z_3 \times Z_2}. \quad (2.31)$$

esto se verifica gracias a un nuevo conjunto de generadores los cuales detallaremos mas adelante, no obstante para chequear esta simetría son

$\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5, \mathbf{R}^8, \mathbf{R}^9, \mathbf{R}^{10}, \mathbf{R}^{13}, \mathbf{T}^{14}, \mathbf{R}^{17}, \mathbf{R}^{18}, \mathbf{R}^{23}, \mathbf{R}^{24}$.

En $r = 0$ resulta

$$SU(5) \times Z_2 \rightarrow \frac{SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)}{Z_3 \times Z_2}, \quad (2.32)$$

esta simetría se puede chequear haciendo el conmutador con los generadores

$\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^8, \mathbf{T}^9, \mathbf{T}^{10}, \mathbf{T}^{17}, \mathbf{T}^{18}, \mathbf{T}^{23}, \mathbf{T}^{24}$.

La simetría (2.31) es de esperar puesto que el vacío asociado a (2.7) es con quien se construyo el campo (2.30), sin embargo no se obtiene la misma simetría sobre la pared sino que se obtiene (2.32) la cual no es la del modelo estándar no existe manera de proveer esta simetría antes. Por otro lado es posible determinar los parámetros

$$v = \frac{1}{2\sqrt{5}} \sqrt{-\left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{45}{2}\right)}, \quad k = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{\gamma \left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{45}{2}\right)} \quad (2.33)$$

y

$$m = \frac{3}{8\sqrt{5}} \sqrt{-\gamma \left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{45}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{\gamma} - \frac{15}{2}\right)}, \quad (2.34)$$

con

$$\lambda > 0, \quad \gamma < 0, \quad \frac{\lambda}{\gamma} < -\frac{45}{2}, \quad (2.35)$$

el cual es el espacio de parámetros donde el *kink* no abeliano es real. El valor de V_0 es fijado de la siguiente manera, considere (2.23) junto con (2.26) y (2.33)-(2.34) en (2.6) tal que el potencial se descompone como $V = V_d + V_a + V_0$, entonces, si se impone $V_a + V_0 = 0$ se tiene

$$V_0 = -\frac{3}{80}\gamma \left(\frac{45}{4} - \frac{\lambda}{\gamma} \right) \left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{45}{2} \right)^2, \quad (2.36)$$

como $V(r = \pm\infty) = \Lambda$, se fija

$$\Lambda = -\frac{1}{5}V_0. \quad (2.37)$$

corroborando que el campo interpola asintóticamente entre dos espacio tiempo Anti-de Sitter (AdS_5) como antes se menciona.

2.2. Análisis de Fluctuaciones en $SU(5)$

A continuación y de manera similar al capítulo anterior se hace una análisis de fluctuaciones del campo y la métrica.

Partiendo del sistema Einstein-campo escalar asociado a una métrica y campo perturbado, \tilde{g}_{ab} y $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi}_q \mathbf{T}^q$ se tiene

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T}, \quad \tilde{T} = \tilde{g}_{ab}\tilde{T}^{ab}, \quad (2.38)$$

con

$$\tilde{T}_{ab} = 2\text{Tr} \left[\nabla_a \tilde{\Phi} \nabla_b \tilde{\Phi} \right] - \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} \text{Tr} [\nabla_c \tilde{\Phi} \nabla_d \tilde{\Phi}] + V(\tilde{\Phi}) \right), \quad (2.39)$$

y

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi}_q = \frac{dV(\tilde{\Phi})}{d\tilde{\phi}_q}, \quad (2.40)$$

donde \tilde{g}_{ab} y $\tilde{\Phi}$ depende diferencialmente de un parámetro λ . Entonces para $\lambda \ll 1$ se tiene

$$\tilde{g}_{ab}(\lambda) \approx g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \tilde{\Phi} \approx (\phi_q + \lambda \varphi_q) \mathbf{T}^q, \quad (2.41)$$

donde nuevamente h_{ab} y φ_q son las perturbaciones de la métrica y del campo escalar, respectivamente. Así pues, las ecuaciones linealizadas de la perturbaciones

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\nabla_d h_{ab} + R^c{}_{(ab)}{}^d h_{cd} + R^c{}_{(a}h_{b)c} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b(g^{cd}h_{cd}) + \nabla_{(a}\nabla^c h_{b)c} \\ & = 4\text{Tr}[\nabla_{(a}\tilde{\Phi}\nabla_{b)}\varphi] + \frac{2}{3}h_{ab}V(\Phi) + \frac{2}{3}g_{ab}\left(\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}\right)\varphi_q, \end{aligned} \quad (2.42)$$

y

$$-h_{ab}\nabla_a\nabla_b\phi_q - \frac{1}{2}g^{ab}g^{cd}(\nabla_a h_{bd} + \nabla_b h_{ad} - \nabla_d h_{ab})\nabla_c\phi_q + g^{ab}\nabla_a\nabla_b\varphi_q = \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q}\varphi_p, \quad (2.43)$$

los detalles para determinar el lado derecho de (2.42) se puede apreciar en (B.1). Para obtener (2.43) se partir (2.40) se considera el siguiente desarrollo de taylor

$$V(\tilde{\Phi}) = V(\Phi) + \lambda \frac{dV(\Phi)}{d\phi_p} \varphi_p \Rightarrow \frac{dV(\tilde{\Phi})}{d\phi_q} = \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} + \lambda \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} \varphi_p. \quad (2.44)$$

Antes de continuar con el desacoplamiento de las ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones (2.42) y (2.43), es de interés mostrar de manera explícita los términos

$$\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \quad \text{y} \quad \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q}. \quad (2.45)$$

Considerando (2.6) resulta

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} &= [-2m^2 + 4h\text{Tr}[\Phi^2] + 6\alpha(\text{Tr}[\Phi^2])^2 + 2\gamma\text{Tr}[\Phi^4]] \text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi] \\ &+ 6\beta\text{Tr}[\Phi^3]\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi^2] + 4(\lambda + \lambda\text{Tr}[\Phi^2])\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi^3], \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} &= (-2m^2 + 4h\text{Tr}[\Phi^2] + 6\alpha(\text{Tr}[\Phi^2])^2 + 2\gamma\text{Tr}[\Phi^4]) \text{Tr}[\mathbf{T}^p\mathbf{T}^q] + 6\beta [3\text{Tr}[\mathbf{T}^p\Phi^2]\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi^2] \\ &+ \text{Tr}[\Phi^3] (\text{Tr}[\mathbf{T}^q\mathbf{T}^p\Phi] + \text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi\mathbf{T}^p])] + 4(\lambda + \gamma\text{Tr}[\Phi^2]) (\text{Tr}[\mathbf{T}^p\mathbf{T}^q\Phi^2] \\ &+ \text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi\mathbf{T}^p\Phi] + \text{Tr}[\mathbf{T}^q\mathbf{T}^p\Phi^2]) + 8(h + 3\alpha\text{Tr}[\Phi^2])\text{Tr}[\mathbf{T}^p\Phi]\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi] \\ &+ 8\gamma (\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi^3]\text{Tr}[\mathbf{T}^p\Phi] + \text{Tr}[\mathbf{T}^p\Phi^3]\text{Tr}[\mathbf{T}^q\Phi]). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nótese que (2.47) para un grupo de generadores de $SU(5)$ que se definirán posteriormente tiene la particularidad de que está ultima expresión satisface los siguiente, para $p \neq q$, se tiene,

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0. \quad (2.48)$$

Ahora, considere la parametrización de h_{ab} dada por

$$h_{ab} = e^{2A} \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + 2\partial_\mu\partial_\nu E & e^{-A}(D_\mu + \partial_\mu C) \\ e^{-A}(D_\mu + \partial_\mu C) & e^{-2A}2\omega \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

la misma que (1.28) junto con las restricciones de los campos involucrados en la misma dadas por

$$g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (2.50)$$

y

$$g^{\mu\nu}\partial_\nu f_\mu = 0 \quad g^{\mu\nu}\partial_\nu D_\mu = 0. \quad (2.51)$$

las misma que (1.29) y (1.30), para estas consideraciones se tiene como resultado a partir de (2.42)

Sector Tensorial

$$\begin{aligned}
 & (-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta - \partial_r^2 - 4A'\partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} \\
 & + \partial_{(\mu} [3A'e^{-A}D_{\nu)} + e^{-A}D'_{\nu)} - 4A'f'_{\nu)} - f''_{\nu)}] \\
 & - \eta_{\mu\nu} [e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta(\psi + e^{2A}A'E' - e^AA'C) + \psi'' + 8A'\psi'] \\
 & + \eta_{\mu\nu} [8A'^2\omega + A'\omega' + 2A''\omega] \\
 & + \partial_\mu\partial_\nu [-e^{-2A}(2\psi + \omega) - E'' - 4A'E' + e^{-A}C' + 3A'e^{-A}C] \\
 & = \frac{2}{3} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \varphi_q \eta_{\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2}\partial^\beta\partial_\beta (e^{-A}D_\mu - f'_\mu) + \partial_\mu (3A'\omega - 3\psi' - \phi'_q\varphi_q) = 0, \tag{2.53}$$

Sector Escalar

$$\begin{aligned}
 & -\partial^\beta\partial_\beta (e^{-2A}\omega + E'' + 2A'E' - A'e^{-A}C - e^{-A}C') - 4\psi'' - 8A'\psi' \\
 & + 4A'\omega' + 2A''\omega + 8A'^2\omega - 2\phi'_q\phi'_q - \frac{2}{3} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \varphi_q = 0,
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

y de la ecuación (2.43) se tiene

$$\begin{aligned}
 & e^{-2A}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta (\varphi - e^A\phi'C + e^{2A}E'\phi') - 2(\phi'' + 4A'\phi')\omega - \phi'\omega' \\
 & + 4\phi'\psi' + \varphi'' + 4A'\varphi' - \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} \varphi_p = 0.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.3. Transformaciones infinitesimales y variables invariantes de calibre

Ahora, se desacoplan las ecuaciones (2.52)-(2.55) y para ello se define conjunto de transformaciones infinitesimales definidas por

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - 2\nabla_{(a}\epsilon_{b)}, \tag{2.56}$$

la misma que (1.36) tal que sobre los campos involucrados en la parametrización (2.49), se obtienen las igualdades

$$\bar{f}_\mu = f_\mu - \xi_\mu, \quad \bar{D}_\mu = D_\mu - e^A\xi'_\mu, \tag{2.57}$$

$$\bar{\psi} = \psi - A'\epsilon_r, \quad \bar{E} = E - \epsilon, \tag{2.58}$$

$$\bar{C} = C - e^A\epsilon' - e^{-A}\epsilon_r, \quad \bar{\omega} = \omega - \epsilon'_r, \tag{2.59}$$

similares a las obtenidas en (1.39)-(1.44) y difiere en la transformación asociada a la perturbación del campo φ_q de la siguiente manera

$$\bar{\varphi}_q = \varphi_q - \phi'_q\epsilon_r. \tag{2.60}$$

Partiendo de estas consideraciones, se definen variables invariantes de calibre como a continuación

$$\bar{V}_\mu = \bar{D}_\mu - e^A \bar{f}'_\mu. \quad (2.61)$$

y

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A' \left(e^{2A} \bar{E}' - e^A \bar{C} \right), \quad \bar{\Theta} = \bar{\omega} - e^A \bar{C}' + e^{2A} \bar{E}'' - A' e^A \bar{C} + 2A' e^{2A} \bar{E}', \quad (2.62)$$

como las definidas en las ecuaciones (1.47)-(1.49), donde se hace una distinción en la variable escalar asociada a (2.60) la cual se diferencia por

$$\bar{\chi}_q = \bar{\varphi}_q + \phi'_q \left(e^{2A} \bar{E} - e^A \bar{C} \right). \quad (2.63)$$

Luego de obtener las ecuaciones asociadas a los sectores tensoriales, vectoriales y escalares respectivos asociado a este nuevo conjunto de variables invariantes de calibre, es necesario realizar la misma fijación de calibre que en el capítulo anterior, [6]

$$\bar{E} = 0, \quad \bar{C} = 0, \quad \bar{f}_\mu = 0. \quad (2.64)$$

una forma simplificada es obtenida para los sectores tensoriales, vectoriales y escalares

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} & (-e^{2A} \partial^\beta \partial_\beta - \partial_r^2 - 4A' \partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A} \partial_{(\mu} (3A' + \partial_r) V_{\nu)} - e^{-A} \partial_\mu \partial_\nu (\Theta + 2\Gamma) \\ & + \eta_{\mu\nu} [-e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta \Gamma + \Gamma'' - 8A' \Gamma' + (8A'^2 + 2A'') \Theta + A' \Theta'] - \frac{2}{3} \chi_q \eta_{\mu\nu} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} = 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} e^{-A} \partial^\beta \partial_\beta V_\mu + \partial_\mu (3A' \Theta - 3\Gamma' - \phi' \chi) = 0, \quad (2.66)$$

Sector Escalar

$$-e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta \Theta - 4\Gamma'' - 8A' \Gamma' + 4A' \Theta' + 2(A'' + 4A'^2) \Theta - 2\phi_q \chi_q - \frac{2}{3} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \chi_q = 0, \quad (2.67)$$

y la ecuación para el campo escalar

$$e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta \chi - 2(\phi_q'' + 4A' \phi_q') \Theta - \phi_q' \Theta' + 4\phi_q' \Gamma' + 4A' \chi_q' + \chi_q'' - \chi_q \frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0, \quad (2.68)$$

similares a (1.62)-(1.65), se propone realizar el cambio de coordenadas a conformes

$$z = \int e^{-A} dr. \quad (2.69)$$

Esté nuevo cambio de coordenadas modifica la métrica (2.17), de modo que la forma

$$ds^2 = e^{2A} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (2.70)$$

Así, las ecuaciones de las fluctuaciones son tales que en las coordenadas conformes pueden ser expresadas como sigue

Sector Tensorial

$$\begin{aligned}
 & (-\partial^\beta \partial_\beta - 3A' \partial_z - \partial_z^2) h_{\mu\nu}^{TT} + \partial_{(\mu} (\partial_z + 3A') V_{\nu)} - \partial_\mu \partial_\nu (2\Gamma + \Theta) \\
 & + \eta_{\mu\nu} (-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - 7A' \Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'') \Theta + A' \Theta') - \frac{2}{3} e^{2A} \chi_q \eta_{\mu\nu} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} \partial^\beta \partial_\beta V_\mu + \partial_\mu (3A' \Theta - 3\Gamma' - \phi'_q \chi_q) = 0, \tag{2.72}$$

Sector Escalar

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Theta + 4A' \Theta' - 4A' \Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'_q \chi'_q + (6A'^2 + 2A'') \Theta - \frac{2}{3} e^{2A} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \chi_q = 0, \tag{2.73}$$

y la ecuación (2.55), la que proviene de la ecuación de movimiento del campo escalar, toma la forma

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi_q - 2(\phi''_q + 3A' \phi'_q) \Theta - \phi'_q \Theta' + 4\phi'_q \Gamma' + 3A' \chi'_q + \chi''_q - \chi_q e^{2A} \frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0. \tag{2.74}$$

Ahora, se plantea desacoplar los modos Tensorial, Vectorial y Escalares de las ecuaciones (2.71)-(2.74), su respectivo análisis se muestra a continuación.

2.3.1. Modo Tensorial en $SU(5)$

Se desacopla el sector tensorial de (2.71) y se obtiene imponiendo

$$(-\partial^\beta \partial_\beta - 3A' \partial_z - \partial_z^2) h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \tag{2.75}$$

para la cual se propone la siguiente separación de variables

$$h_{\mu\nu}^{TT} = h(x) e^{-\frac{3}{2}A(z)} \psi_{\mu\nu}(z). \tag{2.76}$$

Así la ecuación (3.96) puede ser escrita como una ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{qm1}) \psi_{\mu\nu} = \sigma^2 \psi_{\mu\nu}, \tag{2.77}$$

con

$$V_{qm1} = \frac{9}{4} A'^2 + \frac{3}{2} A'', \tag{2.78}$$

cuando se analiza (2.78) los mismos resultados que el capítulo anterior son obtenidos, es decir, un modo no masivo asociado al auto estado $\sigma^2 = 0$ localizado en un pazo de potencial entorno a $z = 0$ y modos masivos asociados a auto estados $\sigma^2 > 0$ propagándose libremente no localizados a lo largo de la coordenada adicional.

2.3.2. Modo Vectorial en $SU(5)$

Se analiza el sector vectorial de (2.71) y (2.72) arribando a

$$\partial_{(\mu} (\partial_z + 3A') V_{\nu)} = 0, \quad y \quad \partial^\beta \partial_\beta V_\mu = 0, \tag{2.79}$$

donde haciendo la separación

$$V_\mu(x, z) = e^{-3A(z)} V_\mu(x), \tag{2.80}$$

cuando se analiza el sector acorde con la coordenada adicional nuevamente tenemos que no es normalizable por tanto no esta localizado en la coordenada adicional.

2.3.3. Modos Escalares Γ y Θ en $SU(5)$

Antes de continuar el análisis de los modos escalares los cuales son obtenidos de las ecuaciones (2.73) y (2.74) es necesario redefinir el campo (2.30) en termino de nuevos generadores a partir de los anteriores, donde la segunda derivada del potencial (2.47) es diagonal, ver (B.2). Por tanto, se define

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^3 \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \mathbf{R}^8, \quad (2.81)$$

tal que el campo puede ser expresado como

$$\Phi = \sqrt{6}v \left[\sqrt{5}\mathbf{P} + \tanh(kz)\mathbf{M} \right]. \quad (2.82)$$

Para desacoplar el modo escalar asociado a la fluctuación gravitacional se considera

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - 7A'\Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta' = \frac{2}{3}\chi_q \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}, \quad (2.83)$$

y

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Theta + 4A'\Theta' - 4A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'_q \chi'_q + (6A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3}\chi_q \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}, \quad (2.84)$$

obtenidas a partir de (2.71) y (2.73) respectivamente, haciendo uso de los vínculos las variables escalares Γ , Θ y χ_q dados por

$$2\Gamma + \Theta = 0 \quad \text{y} \quad 3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'_q \chi_q = 0, \quad (2.85)$$

los cuales son obtenidos a partir de (2.71) y (2.72) respectivamente, donde la segunda expresión satisface el convenio de suma de Einstein, fijando $q = \mathbf{M}$ si se reemplaza (2.85) en (2.84) la expresión resultante se combina con (2.83) se obtiene

$$-\partial^\beta \partial_\beta \Gamma - \Gamma'' - (3A' - 2\frac{\phi''_M}{\phi'_M})\Gamma' - 4(A'' - A'\frac{\phi''_M}{\phi'_M})\Gamma = 0, \quad (2.86)$$

tal que, haciendo la separación de variable

$$\Pi(x, z) = e^{ipx}\Pi(z) \quad \text{con} \quad \Pi(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)} \frac{\Gamma(z)}{\phi'_M(z)}, \quad (2.87)$$

resulta una ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{qm22})\Pi(z) = \sigma^2\Pi(z), \quad (2.88)$$

donde

$$V_{qm22} = A'\frac{\phi''_M}{\phi'_M} - \frac{5}{2}A'' + \frac{9}{4}A' - \frac{\phi'''_M}{\phi'_M} + 2\left(\frac{\phi''_M}{\phi'_M}\right)^2, \quad (2.89)$$

analizando el potencial (2.89) se obtiene resultados similares a los del capítulo anterior para el modo Γ y Θ , recordemos que este potencial es una barrera ubicada entorno de $z = 0$ ver Figura (1.6) no es posible localizar un modo no masivo asociado a $\sigma^2 = 0$ pues la barrera de potencial tiene mas energía que este estado mientras que los modos masivos asociados a $\sigma^2 > 0$ se propagan libre mente haciendo efecto túnel sobre la barrera pues satisfacen una ecuación tipo Schrödinger.

2.3.4. Modo escalar χ en $SU(5)$

A diferencia del Modo escalar Γ y Θ , no es posible descartar el término asociado a la segunda derivada del potencial ver (2.47), pues no existe otra ecuación que involucre este término. Además es diagonal y tiene sentido desarrollar éste solo cuando $p = q$.

Ahora, considere la fluctuaciones escalares

$$\chi = \chi_q \mathbf{R}^q \quad \text{y} \quad \Xi = \Xi_q \mathbf{R}^q, \quad (2.90)$$

tal que

$$\Xi_q(x, z) = e^{ipx} \Xi_q(z) \quad \text{con} \quad \Xi_q(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)} \left(\chi_q(z) - \frac{\Gamma}{A'(z)} \phi'_q(z) \right). \quad (2.91)$$

Para la ecuación (2.74) se obtiene diferentes ecuaciones tipo Schrödinger dependiente de q las cuales se analizan a continuación.

Modo en la dirección M

Para este se obtiene los mismos resultados que el modo escalar χ del capítulo donde se obtiene un potencial

$$V_M = \frac{9}{4}A'^2 + 3A' \frac{\phi''_M}{\phi'_M} - \frac{3}{2}A'' + \frac{\phi'''_M}{\phi'_M} - 2 \frac{\phi''_M A''}{\phi'_M A'} - \frac{A'''}{A'} + 2 \left(\frac{A''}{A'} \right)^2, \quad (2.92)$$

recordemos el gráfico (1.7) no se obtiene modos no masivos localizados ya que el potencial tiene mayor energía que un estado $\sigma^2 = 0$ asociado al mismo y los modos masivo se propagan libremente haciendo efecto túnel sobre la barrera de potencial.

Modo en la dirección diferente de M

En este caso a partir de (2.84) se obtiene

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (2.93)$$

donde V_q es dado por

$$V_q = V_{qm1} + e^{2A} \frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_q^2}, \quad (2.94)$$

aquí V_{qm1} es

$$V_{qm1} = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'', \quad (2.95)$$

Ahora es de interés hacer el estudio de estos potenciales en la dirección de los 24 generadores redefinidos como se vera a continuación.

Modo en la dirección $q = \mathbf{P}$

Se sigue la misma ecuación (2.93) en el cual el potencial viene dado por

$$V_P = V_{qm1} + \frac{4}{9}k^2 (4v^2 + 9), \quad (2.96)$$

tal que se obtiene un potencial tipo barrera

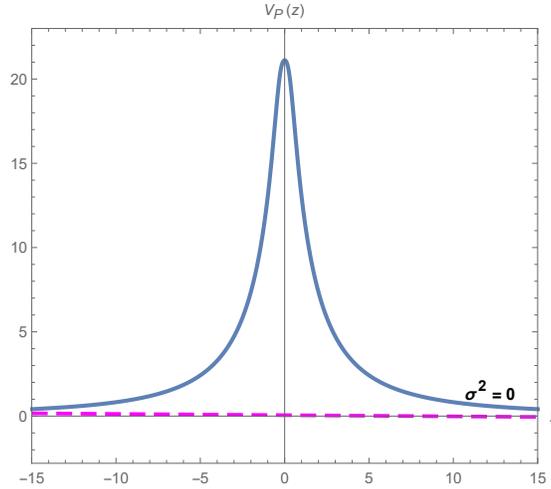


Figura 2.1: Potencial V_P

note que para un modo no masivo asociado al auto estado $\sigma^2 = 0$ no es posible localizarlo por que la energía del potencial es mayor, los modos masivos asociados a $\sigma^2 > 0$ se propagan libremente por tal razón no es posible localizarlos a lo largo de la coordenada adicional.

Modos en la dirección $q = 1, 2, 11, 12, 15, 16, 21, 22$

Al igual que el caso anterior sigue la ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \tag{2.97}$$

sin embargo el potencial es el mismo que (1.75) ya que

$$\frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_q^2} = 0. \tag{2.98}$$

luego el potencial V_q es Como en el caso de modo Tensorial es posible localizar un modo no masivo

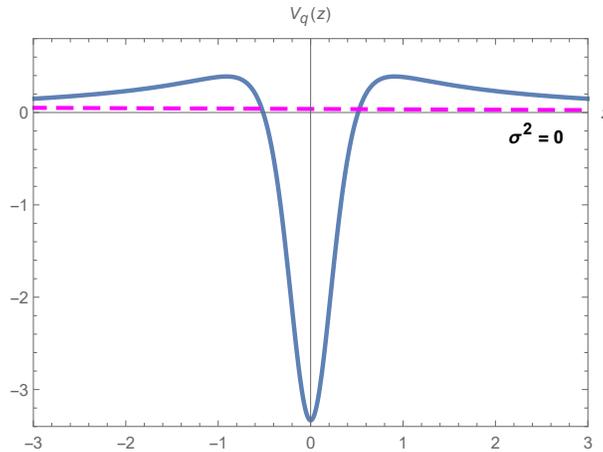


Figura 2.2: Potencial V_q

por cada generador asociado al auto estado $\sigma = 0$ entorno a $z = 0$ ya que en esa zona el potencial es menor que la energía que cada modo respectivo, no obstante por cada generador los modos masivos respectivos asociados a auto estados $\sigma > 0$ se propagan libremente a lo largo de la coordenada adicional.

Modos en la dirección $q = 4, 5, 13, 14$ y $q = 6, 7, 19, 20$

Nuevamente para todos estos generadores se satisfacen la ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (2.99)$$

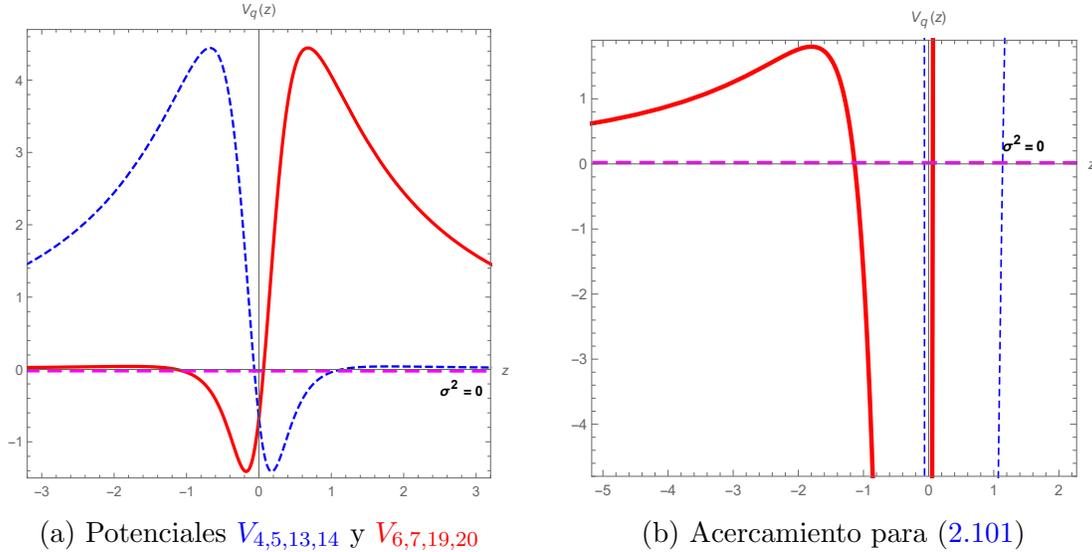
los potenciales asociados a estos generadores vienen dados como

$$V_{4,5,13,14} = V_{qm1} + \frac{1}{9} k^2 \tanh(kz) (\tanh(kz) + 1) \operatorname{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (2.100)$$

y

$$V_{6,7,19,20} = V_{qm1} + \frac{1}{9} k^2 (\tanh(kz) - 1) \tanh(kz) \operatorname{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (2.101)$$

con gráficos



En el gráfico asociado a (2.3a) se exhiben ambos potenciales los cuales tienen el mismo comportamiento, así que el siguiente análisis es válido para ambos, tanto para el potencial asociado a (2.100) como (2.101) se puede apreciar por el acercamiento del gráfico (2.3b) que es posible determinar un modo no masivo asociado a un auto estado $\sigma^2 = 0$ localizado entorno a $z = 0$ mientras que los modos masivos asociados a auto estado $\sigma^2 > 0$ se propagan libremente y por tanto no es posible localizarlos a lo largo de la dimensión adicional este compartimiento es válido para los generadores $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5, \mathbf{R}^{13}, \mathbf{R}^{14}$ y los generadores $\mathbf{R}^6, \mathbf{R}^7, \mathbf{R}^{19}, \mathbf{R}^{20}$.

Modo en la dirección $q = 9, 10, 23$ y $q = 17, 18, 24$

Para todos estos generadores se satisface la ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (2.102)$$

donde los potenciales asociados a estos generadores son

$$V_{9,10,23} = V_{qm1} + \frac{2}{9} k^2 (\tanh(kz) (2v^2 (\tanh(kz) - 3) \tanh(kz) + 2v^2 - 27) + 5 (2v^2 + 9)), \quad (2.103)$$

y

$$V_{17,18,24} = V_{qm1} + \frac{2}{9} k^2 (5 (2v^2 + 9) - \tanh(kz) (2v^2 \tanh(kz) (\tanh(kz) + 3) + 2v^2 - 27)), \quad (2.104)$$

gráficamente se tiene para ambos potenciales (2.103) y (2.104), se tiene el siguiente análisis, dado

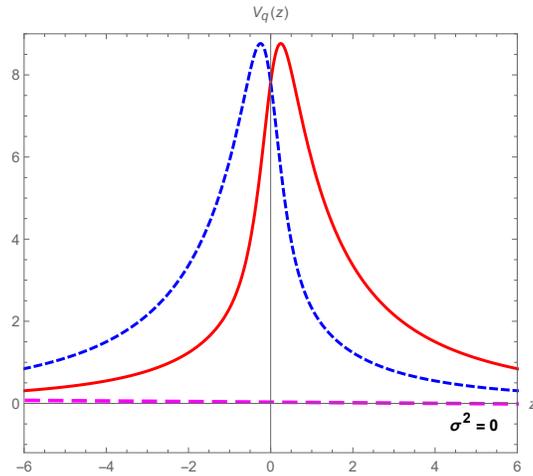


Figura 2.4: Potenciales $V_{9,10,23}$ y $V_{17,18,24}$

que es una barrera de potencial entorno a $z = 0$ por cada generador se considera un modo no masivo asociado al auto estado $\sigma^2 = 0$ el cual no puede ser localizado a lo largo de la coordenada adicional ya que tiene menor energía que la energía del potencial; los modos masivos respectivos a cada generador no son localizados ya que se propagan libremente haciendo efecto túnel por satisfacen una ecuación tipo Schrödinger esto es válido tanto para los generadores $\mathbf{R}^9, \mathbf{R}^{10}, \mathbf{R}^{23}$ como para los generadores $\mathbf{R}^{17}, \mathbf{R}^{18}, \mathbf{R}^{24}$.

En este capítulo se analiza la localización de los modos de las fluctuaciones gravitacionales de tres escenarios determinados cada uno de ellos por *kink* no abeliano los cuales asintóticamente inducen el rompimiento de simetría $SO(10) \rightarrow SU(5)$. Sin embargo, difieren en la simetría residual sobre cada una de las paredes. Para generar cada uno de los escenarios se considera una teoría cinco dimensional con gravitación con un campo escalar en la representación adjunta de $SO(10)$ y un potencial de sexto orden invariante bajo simetría de reflexión.

3.1. El *kink* auto-gravitante en $SO(10)$

Considere ahora una teoría en $(4 + 1)$ -dimensiones definida por la siguiente lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\text{Tr}(\partial_m \Phi \partial^m \Phi) - V(\Phi) \right] \quad (3.1)$$

donde Φ es un campo que transforma en la representación adjunta de $SO(10)$, es decir,

$$\Phi \rightarrow \mathbf{O}\Phi\mathbf{O}^T, \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{O} \in SO(10)$ y estos pueden ser expresado en su forma exponencial como

$$\mathbf{O} = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha_{ij}\mathbf{L}_{ij}\right), \quad i, j = 1, \dots, 10, \quad (3.3)$$

con α_{ij} y \mathbf{L}_{ij} los parámetros y los generadores del grupo respectivamente. En particular para los generadores se tiene

$$(\mathbf{L}_{ij})_{sl} = \delta_{il}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jl}, \quad \text{con } s, l = 1, \dots, 10. \quad (3.4)$$

Ahora, considere el potencial

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & \frac{m^2}{2}\text{Tr}(\Phi^2) + \frac{h}{4}(\text{Tr}(\Phi^2))^2 + \frac{\lambda}{2}\text{Tr}(\Phi^4) \\ & + \frac{\alpha}{6}(\text{Tr}(\Phi^2))^3 + \frac{\mu}{6}(\text{Tr}(\Phi^6)) + \frac{\gamma}{6}\text{Tr}(\Phi^4)\text{Tr}(\Phi^2) + V_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

el cual es simétrico bajo simetría de reflexión, $\Phi \rightarrow -\Phi$, ya que carece de términos impares. Por tanto las soluciones tipo *kink* para (3.1) son factibles. Para detalles sobre simetría de reflexión y el grupo $SO(10)$ ver [7].

Por otro lado, es conocido que del artículo de [10] y del caso plano planteado por [7] que para $\lambda > 0$ el vev del campo está determinado por

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \text{diag}(\pm\boldsymbol{\kappa}, \pm\boldsymbol{\kappa}, \pm\boldsymbol{\kappa}, \pm\boldsymbol{\kappa}, \pm\boldsymbol{\kappa}), \quad (3.6)$$

donde

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

el cual induce un rompimiento espontáneo de la simetría $SO(10)$ a $SU(5)$, ver [10], también se debe satisfacer la siguiente condición

$$\Phi(r = -\infty) = -\mathbf{O}\Phi(r = +\infty)\mathbf{O}^T, \quad (3.8)$$

esta induce combinaciones de signos sobre las entradas, es decir, $-\boldsymbol{\kappa} \rightarrow +\boldsymbol{\kappa}$. Estudiando todas las posibles combinaciones de signos en las entradas de (3.6) surgen dos clases cada una contiene 3 miembros a saber

$$\text{Clase 1: } (\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}), \quad (\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \quad (\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \quad (3.9)$$

y

$$\text{Clase 2: } (-\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \quad (-\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}), \quad (-\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (3.10)$$

Cada miembro de las clases está conectado por una transformación de $SO(10)$, es decir representa el mismo fenómeno físico; a su vez cada clase se relaciona por simetría de reflexión.

Ahora sin pérdida de generalidad se escoge una combinación para las condiciones de borde que interpolé entre el vev del campo.

$$\Phi(r = -\infty) = \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \text{diag}(-\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \quad (3.11)$$

y

$$\Phi(r = +\infty) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \text{diag}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}), \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \text{diag}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \text{diag}(\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}, -\boldsymbol{\kappa}), \end{cases} \quad (3.12)$$

Nótese que cualquier otra combinación en los elementos de las clases es equivalente a esta.

3.1.1. Ecuaciones de movimiento

Dada la siguiente descomposición del campo no-abeliano

$$\Phi = \text{diag}(\phi_1\boldsymbol{\kappa}, \phi_2\boldsymbol{\kappa}, \phi_3\boldsymbol{\kappa}, \phi_4\boldsymbol{\kappa}, \phi_5\boldsymbol{\kappa}), \quad (3.13)$$

la cual es sugerida por la estructura de (3.6) y considere la métrica en coordenadas de longitud propia

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (3.14)$$

con

$$A = -\frac{v^2}{9} \left[2 \ln \cosh(kr) + \frac{1}{2} \tanh^2(kr) \right], \quad (3.15)$$

como solución al sistema Einstein-campo escalar

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = T_{ab}, \quad (3.16)$$

donde

$$T_{ab} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi) + g_{ab} \left(\frac{1}{4} \text{Tr} (\nabla_c \Phi \nabla^c \Phi) - V(\phi) \right), \quad (3.17)$$

y

$$\nabla_c \nabla^c \phi_{ij} = \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_{ij}}, \quad \Phi = \phi_{ij} \mathbf{L}_{ij}. \quad (3.18)$$

Reemplazando el elemento de línea (3.14) en el sistema (3.16-3.18) se tiene

$$3A'' = -\sum_{i=1}^5 \phi_i^2, \quad (3.19)$$

junto con

$$\frac{3}{2} A'' + 6A'^2 = -V(\Phi), \quad (3.20)$$

por otro lado, de la ecuación para el campo (3.18), si se usa el potencial (3.5) resulta

$$\begin{aligned} \phi_i'' + 4A'\phi_i' &= -2 \left(m^2 - 2h \sum_{j=1}^5 \phi_j^2 \right) \phi_i + \frac{4\gamma}{3} \left(2\phi_i^2 \sum_{j=1}^5 \phi_j^2 - \sum_{j=1}^5 \phi_j^4 \right) \phi_i \\ &\quad - 8\alpha \left(\sum_{j=1}^5 \phi_j^2 \right)^2 \phi_i + 2\lambda\phi_i^3 + 2\mu\phi_i^5, \quad \text{con } i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para desacoplar las ecuaciones (3.21) es necesario hacer la siguiente fijación de parámetros

$$h = 0, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad (3.22)$$

tal que (3.21) se simplifica a

$$\phi_i'' + 4A'\phi_i' = -2m^2\phi_i + 2\lambda\phi_i^3 + 2\mu\phi_i^5. \quad (3.23)$$

Esta ecuación es similar a (2.28); En este caso como se vera a continuación existen tres soluciones tipo *kink* diferentes entre sí; que deben satisfacer las condiciones (3.11) y (3.12).

3.1.2. Soluciones Pared de Dominio

En relación con el problema (3.23) como se debe satisfacer las condiciones (3.11) y (3.12), se obtiene tres soluciones tipo *kink* que para $r \rightarrow \pm\infty$ induce el patron de simetría $SO(10) \rightarrow SU(5)$. Veamos con detalles una de ellas.

El *kink* Simétrico

Esta solución se obtiene de considerar las condiciones de borde

$$\Phi(r = -\infty) = v \text{diag}(-\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa), \quad \text{y} \quad \Phi(r = +\infty) = v \text{diag}(\kappa, \kappa, \kappa, \kappa, \kappa), \quad (3.24)$$

junto con el campo (3.13). Así pues se obtiene como solución

$$\Phi_a = \sqrt{5}v \tanh(kr) \mathbf{M}_a, \quad (3.25)$$

donde \mathbf{M}_a es un nuevo generador definido en términos de los generadores de Cartan del grupo

$$\mathbf{M}_a = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{L}_{1,2} + \mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}). \quad (3.26)$$

El *kink* Asimétrico

Esta solución se obtiene de considerar las condiciones de borde

$$\Phi(r = -\infty) = v \text{diag}(-\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa), \quad \text{y} \quad \Phi(r = +\infty) = v \text{diag}(\kappa, \kappa, \kappa, -\kappa, -\kappa), \quad (3.27)$$

junto con el campo (3.13). Teniendo como solución

$$\Phi_b = \sqrt{3}v \tanh(kr) \mathbf{M}_b - \sqrt{2}v \mathbf{P}_b, \quad (3.28)$$

donde \mathbf{M}_b y \mathbf{P}_b son generadores definidos a partir de los generadores de Cartan como sigue

$$\mathbf{M}_b = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{L}_{1,2} + \mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6}), \quad \mathbf{P}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}). \quad (3.29)$$

El *kink* Superasimétrico

Como ultima solución se obtiene de considerar las condiciones de borde

$$\Phi(r = -\infty) = v \text{diag}(-\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa), \quad \text{y} \quad \Phi(r = +\infty) = v \text{diag}(\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa, -\kappa), \quad (3.30)$$

junto con el campo (3.13). Así resulta

$$\Phi_c = v \tanh(kr) \mathbf{M}_c - 2v \mathbf{P}_c, \quad (3.31)$$

donde \mathbf{M}_c y \mathbf{P}_c son generadores definidos a partir de los generadores de Cartan

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{L}_{1,2}, \quad \mathbf{P}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}). \quad (3.32)$$

Ahora, para determinar la simetría sobre la pared en cada escenario, es conveniente entrar en una base para el grupo $SO(10)$ compatible con $\mathbf{M}_{a,b,c}$ y $\mathbf{P}_{b,c}$. Afortunadamente tales conjuntos de generadores comparten 40 elementos, ver el Apéndice (C); y se diferencian en los cinco primeros de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_a^1 = \mathbf{M}_a, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{T}_a^2 = \frac{1}{\sqrt{20}}(-4\mathbf{L}_{1,2} + \mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.34)$$

$$\mathbf{T}_a^3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-3\mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.35)$$

$$\mathbf{T}_a^4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.36)$$

$$\mathbf{T}_a^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}) \quad (3.37)$$

para el escenario simétrico;

$$\mathbf{T}_b^1 = \mathbf{M}_a, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{T}_b^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\mathbf{L}_{1,2} + \mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6}), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{T}_b^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,4} - \mathbf{L}_{5,6}), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T}_b^4 = \mathbf{P}_b, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{T}_b^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{7,8} - \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.42)$$

para el escenario asimétrico y

$$\mathbf{T}_c^1 = \mathbf{M}_c \quad (3.43)$$

$$\mathbf{T}_c^2 = \mathbf{P}_c \quad (3.44)$$

$$\mathbf{T}_c^3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-3\mathbf{L}_{3,4} + \mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{T}_c^4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\mathbf{L}_{5,6} + \mathbf{L}_{7,8} + \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{T}_c^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{7,8} - \mathbf{L}_{9,10}), \quad (3.47)$$

para el escenario superasimétrico.

Ahora gracias al teorema de Nambu-Goldstone que reza lo siguiente

Teorema 3.1 Por cada generador que no aniquila el vacío, se tiene un boson de Nambu-Goldstone con masa cero.

- representación Adjunta: $[T^j, \langle \phi \rangle] \neq 0$.

se verifica gracias al conmutador la simetría residual sobre cada escenario:

El Escenario Simétrico

En relación con el escenario simétrico, todos los generadores conmuta trivialmente con el campo en $r = 0$. Por tanto la simetría $SO(10)$ se preserva. No obstante en $r \rightarrow \pm\infty$ la simetría resulta

$$SO(10) \rightarrow SU(5), \quad (3.48)$$

puesto que el vev del campo asociado gracias al mapa mostrado en [7]. Para los otros dos escenarios la situación es mas interesante.

El Escenario Asimétrico

En relación al escenario asimétrico, 19 generadores aniquilan el campo en $r = 0$; los 15 de $SO(6)$, 3 de $SO(3)_L$ isomorfo a $SU(2)_L$ y 1 uno de $SO(3)_R$ isomorfo $SU(2)_R$. De manera explícita ellos son: $\mathbf{T}_b^1, \mathbf{T}_b^2, \mathbf{T}_b^3, \mathbf{T}^6, \dots, \mathbf{T}^9, \mathbf{T}^{14}, \dots, \mathbf{T}^{17}, \mathbf{T}^{22}, \mathbf{T}^{23}, \mathbf{T}^{28}, \mathbf{T}^{29}; \mathbf{T}_b^5, \mathbf{T}^{42}, \mathbf{T}^{43}$ y \mathbf{T}_b^4 respectivamente. No obstante en $r \rightarrow \pm\infty$ la simetría resulta

$$SO(10) \rightarrow SU(5), \quad (3.49)$$

en $r = 0$

$$SO(6) \times SU(2)_L \times U(1)_{\mathbf{P}_b}, \quad (3.50)$$

El Escenario Superasimétrico

En el escenario superAsimétrico, 17 generadores aniquilan el campo en $r = 0$; los 15 de $SO(6)$ isomorfo a $SU(4)$, el único asociado a $SO(2)$ \mathbf{T}_c^1 y \mathbf{P}_c . Para el grupo $SO(6) \sim SU(4)$ los generadores son $\mathbf{T}_c^3, \dots, \mathbf{T}_c^5, \mathbf{T}^{22}, \mathbf{T}^{24}, \mathbf{T}^{26}, \mathbf{T}^{28}, \mathbf{T}^{30}, \mathbf{T}^{32}, \mathbf{T}^{34}, \mathbf{T}^{36}, \mathbf{T}^{38}, \mathbf{T}^{40}, \mathbf{T}^{42}$ y \mathbf{T}^{43} . No obstante en $r \rightarrow \pm\infty$ la simetría resulta

$$SO(10) \rightarrow SU(5), \quad (3.51)$$

y en $r = 0$

$$SU(4) \times SO(2) \times U(1)_{\mathbf{P}_c}. \quad (3.52)$$

Por otro lado, y para cerrar esta sección si se reemplaza cualquiera de esta soluciones (3.25), (3.28) y (3.31) en (3.23), es posible determinar

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2}}, \quad k = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2} \right)}, \quad (3.53)$$

y

$$m = \frac{\sqrt{3}}{8} \sqrt{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2} \right)}, \quad (3.54)$$

donde el espacio de parámetro es

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} > \frac{9}{2}, \quad (3.55)$$

teniendo en cuenta todos los parámetros antes mencionado si son reemplazado (3.5) haciendo un procedimiento al mencionado en el capítulo anterior es posible determinar las constante cosmológica asociada a cada uno de los escenarios estas vienen dadas por

$$\Lambda_a = -\frac{5\mu}{48} \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{9}{4} \right), \quad (3.56)$$

$$\Lambda_b = -\frac{\mu}{16} \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{9}{4} \right), \quad (3.57)$$

y

$$\Lambda_c = -\frac{\mu}{48} \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{9}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{9}{4} \right). \quad (3.58)$$

lo cual corrobora que en cada escenario los *Kinks* interpola asintóticamente entre dos espacio tiempo Anti-de Sitter (AdS_5).

3.2. Análisis de fluctuaciones en $SO(10)$

Considere el sistema Einstein campo escalar perturbado

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T}, \quad \tilde{T} = \tilde{g}_{ab}\tilde{T}^{ab}, \quad (3.59)$$

con

$$\tilde{T}_{ab} = 2\text{Tr} \left[\nabla_a \tilde{\Phi} \nabla_b \tilde{\Phi} \right] - \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} \text{Tr} [\nabla_c \tilde{\Phi} \nabla_d \tilde{\Phi}] + V(\tilde{\Phi}) \right), \quad (3.60)$$

y

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi}_q = \frac{dV(\tilde{\Phi})}{d\tilde{\phi}_q}, \quad (3.61)$$

de forma explícita

$$\tilde{g}_{ab}(\lambda) \approx g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \tilde{\Phi} \approx (\phi_q + \lambda \varphi_q) \mathbf{T}^q, \quad \lambda \ll 1 \quad (3.62)$$

donde h_{ab} y φ_q son las perturbaciones de la métrica y del campo escalar, respectivamente. Así pues se tiene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\nabla_d h_{ab} + R^c{}_{(ab)}{}^d h_{cd} + R^c{}_{(a}h_{b)c} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b(g^{cd}h_{cd}) + \nabla_{(a}\nabla^c h_{b)c} \\ & = 4\text{Tr}[\nabla_{(a}\Phi\nabla_{b)}\varphi] + \frac{2}{3}h_{ab}V(\Phi) + \frac{2}{3}g_{ab}\left(\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}\right)\varphi_q, \end{aligned} \quad (3.63)$$

y

$$-h_{ab}\nabla_a\nabla_b\phi_q - \frac{1}{2}g^{ab}g^{cd}(\nabla_a h_{bd} + \nabla_b h_{ad} - \nabla_d h_{ab})\nabla_c\phi_q + g^{ab}\nabla_a\nabla_b\varphi_q = \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q}\varphi_p. \quad (3.64)$$

$$(3.65)$$

Antes de continuar con el desacoplamiento de las ecuaciones (3.63) y (3.64), se muestra de manera explícita el término asociado a

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} &= 2m^2 \text{Tr}[\mathbf{T}^p \mathbf{T}^q] + \lambda \left(\text{Tr}[\mathbf{T}^p \mathbf{T}^q \Phi^2] + \text{Tr}[\mathbf{T}^p \Phi \mathbf{T}^q \Phi] + \text{Tr}[\mathbf{T}^p \Phi^2 \mathbf{T}^q] \right) \\ &+ \mu \left(\text{Tr}[\mathbf{T}^p \mathbf{T}^q \Phi^4] + \text{Tr}[\mathbf{T}^p \Phi \mathbf{T}^q \Phi^3] + \text{Tr}[\mathbf{T}^p \Phi^2 \mathbf{T}^q \Phi^2] + [\mathbf{T}^p \Phi^4 \mathbf{T}^q] \right), \end{aligned} \quad (3.66)$$

(3.66) tiene la particularidad para cualquiera de las bases de $SO(10)$ señalada en la sección anterior que satisface para

$$p \neq q \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0. \quad (3.67)$$

Ahora, considere la parametrización de h_{ab} dada por

$$h_{ab} = e^{2A} \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu} f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + 2\partial_\mu \partial_\nu E & e^{-A}(D_\mu + \partial_\mu C) \\ e^{-A}(D_\mu + \partial_\mu C) & e^{-2A}2\omega \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

para la cual se tiene un sector trasverso y sin traza, $h_{\mu\nu}^{TT}$ esto es

$$g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (3.69)$$

y los vectores f_μ y D_μ con divergencia nula,

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu f_\mu = 0 \quad g^{\mu\nu} \partial_\nu D_\mu = 0. \quad (3.70)$$

así se tiene como resultado partiendo de (3.63)

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} &(-e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta - \partial_r^2 - 4A' \partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} \\ &+ \partial_{(\mu} [3A' e^{-A} D_{\nu)} + e^{-A} D'_{\nu)} - 4A' f'_{\nu)} - f''_{\nu)} \\ &- \eta_{\mu\nu} [e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta (\psi + e^{2A} A' E' - e^A A' C) + \psi'' + 8A' \psi'] \\ &+ \eta_{\mu\nu} [8A'^2 \omega + A' \omega' + 2A'' \omega] \\ &+ \partial_\mu \partial_\nu [-e^{-2A} (2\psi + \omega) - E'' - 4A' E' + e^{-A} C' + 3A' e^{-A} C] \\ &= \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \varphi_q, \end{aligned} \quad (3.71)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} \partial^\beta \partial_\beta (e^{-A} D_\mu - f'_\mu) + \partial_\mu (3A' \omega - 3\psi' - \phi'_q \varphi_q) = 0, \quad (3.72)$$

Sector Escalar

$$\begin{aligned} &-\partial^\beta \partial_\beta (e^{-2A} \omega + E'' + 2A' E' - A' e^{-A} C - e^{-A} C') - 4\psi'' - 8A' \psi' \\ &+ 4A' \omega' + 2A'' \omega + 8A'^2 \omega - 2\phi'_q \phi'_q - \frac{2}{3} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} \varphi_q = 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

y de la ecuación (3.64) se tiene

$$\begin{aligned} &e^{-2A} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta (\varphi_q - e^A \phi'_q C + e^{2A} E' \phi'_q) - 2(\phi''_q + 4A' \phi'_q) \omega - \phi'_q \omega' \\ &+ 4\phi'_q \psi' + \varphi''_q + 4A' \varphi'_q = \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} \varphi_p. \end{aligned} \quad (3.74)$$

3.3. Transformaciones infinitesimales y variables invariantes de calibre

Se desacoplan las ecuaciones (3.71)-(3.74) para ello se define un conjunto de transformaciones infinitesimales dadas por

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - 2\nabla_{(a}\epsilon_{b)}, \quad (3.75)$$

tal que sobre los campos involucrados en la parametrización (3.68), se obtienen las igualdades

$$\bar{f}_\mu = f_\mu - \xi_\mu, \quad \bar{D}_\mu = D_\mu - e^A \xi'_\mu, \quad (3.76)$$

$$\bar{\psi} = \psi - A' \epsilon_r, \quad \bar{E} = E - \epsilon, \quad (3.77)$$

$$\bar{C} = C - e^A \epsilon' - e^{-A} \epsilon_r, \quad \bar{\omega} = \omega - \epsilon'_r, \quad (3.78)$$

al igual que en el capítulo anterior solo la perturbación asociada al campo φ_q la cual está definida por

$$\bar{\varphi}_q = \varphi_q - \phi'_q \epsilon_r. \quad (3.79)$$

Se procede a definir un conjunto de variables invariantes de calibres dadas por

$$\bar{V}_\mu = \bar{D}_\mu - e^A \bar{f}'_\mu. \quad (3.80)$$

y

$$\bar{\Gamma} = \bar{\psi} + A' (e^{2A} \bar{E}' - e^A \bar{C}), \quad \bar{\Theta} = \bar{\omega} - e^A \bar{C}' + e^{2A} \bar{E}'' - A' e^A \bar{C} + 2A' e^{2A} \bar{E}', \quad (3.81)$$

donde para la variable escalar asociada a (3.79) la definicion viene dada por

$$\bar{\chi}_q = \bar{\varphi}_q + \phi'_q (e^{2A} \bar{E} - e^A \bar{C}). \quad (3.82)$$

Con la misma motivación que en los capítulos previos se realiza la fijación de calibre

$$\bar{E} = 0, \quad \bar{C} = 0, \quad \bar{f}_\mu = 0, \quad (3.83)$$

luego de esto se obtiene

Sector Tensorial

$$\begin{aligned} & (-e^{2A} \partial^\beta \partial_\beta - \partial_r^2 - 4A' \partial_r) h_{\mu\nu}^{TT} + e^{-A} \partial_{(\mu} (3A' + \partial_r) V_{\nu)} - e^{-A} \partial_\mu \partial_\nu (\Theta + 2\Gamma) \\ & + \eta_{\mu\nu} [-e^{-2A} \partial^\beta \partial_\beta \Gamma + \Gamma'' - 8A' \Gamma' + (8A'^2 + 2A'') \Theta + A' \Theta'] - \frac{2}{3} \chi_q \eta_{\mu\nu} \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} = 0, \end{aligned} \quad (3.84)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2} e^{-A} \partial^\beta \partial_\beta V_\mu + \partial_\mu (3A' \Theta - 3\Gamma' - \phi' \chi) = 0, \quad (3.85)$$

Sector Escalar

$$-e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\Theta - 4\Gamma'' - 8A'\Gamma' + 4A'\Theta' + 2(A'' + 4A'^2)\Theta - 2\phi_q\chi_q - \frac{2}{3}\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}\chi_q = 0, \quad (3.86)$$

y la ecuación para el campo escalar

$$e^{-2A}\partial^\beta\partial_\beta\chi - 2(\phi_q'' + 4A'\phi_q')\Theta - \phi_q'\Theta' + 4\phi_q'\Gamma' + 4A'\chi_q' + \chi_q'' - \chi_q\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0. \quad (3.87)$$

Se realiza el cambio de coordenadas a conformes

$$z = \int e^{-A} dr, \quad (3.88)$$

lo cual cambia el elemento de línea de la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (3.89)$$

Así las ecuaciones (3.84)-(3.87) se simplifican como

$$\begin{aligned} & (-\partial^\beta\partial_\beta - 3A'\partial_z - \partial_z^2)h_{\mu\nu}^{TT} + \partial_\mu(\partial_z + 3A')V_\nu - \partial_\mu\partial_\nu(2\Gamma + \Theta) \\ & + \eta_{\mu\nu}(-\partial^\beta\partial_\beta\Gamma - 7A'\Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta') - \frac{2}{3}e^{2A}\chi_q\eta_{\mu\nu}\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q} = 0, \end{aligned} \quad (3.90)$$

Sector Vectorial

$$-\frac{1}{2}\partial^\beta\partial_\beta V_\mu + \partial_\mu(3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi_q'\chi_q) = 0, \quad (3.91)$$

Sector Escalar

$$-\partial^\beta\partial_\beta\Theta + 4A'\Theta' - 4A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi_q'\chi_q' + (6A'^2 + 2A'')\Theta - \frac{2}{3}e^{2A}\frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}\chi_q = 0, \quad (3.92)$$

y la ecuación (2.55), la que proviene de la ecuación de movimiento del campo escalar, toma la forma

$$\partial^\beta\partial_\beta\chi_q - 2(\phi_q'' + 3A'\phi_q')\Theta - \phi_q'\Theta' + 4\phi_q'\Gamma' + 3A'\chi_q' + \chi_q'' - \chi_q e^{2A}\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q} = 0. \quad (3.93)$$

se plantea desacoplar los modos Tensorial, Vectorial y Escalares de las ecuaciones (2.71)-(2.74), su respectivo análisis se muestra a continuación.

3.3.1. Modo tensorial en $SO(10)$

Se desacopla el sector tensorial de (3.90) y se obtiene imponiendo

$$(-\partial^\beta\partial_\beta - 3A'\partial_z - \partial_z^2)h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (3.94)$$

para la cual se propone la siguiente separación de variables

$$h_{\mu\nu}^{TT} = h(x)e^{-\frac{3}{2}A(z)}\psi_{\mu\nu}(z). \quad (3.95)$$

Así la ecuación (3.94) puede ser escrita como una ecuación tipo Schrödinger

$$(-\partial_z^2 + V_{qm1})\psi_{\mu\nu} = \sigma^2\psi_{\mu\nu}, \quad (3.96)$$

con

$$V_{qm1} = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'', \quad (3.97)$$

cuando se analiza (3.97) se obtiene, un modo no masivo asociado al auto estado $\sigma^2 = 0$ localizado en un pazo de potencial entorno a $z = 0$ y modos masivos asociados a auto estados $\sigma^2 > 0$ propagándose libremente no localizados a lo largo de la coordenada adicional.

3.3.2. Modo vectorial en $SO(10)$

Se desacoplan de la ecuaciones (3.90) y (3.91) imponiendo

$$\partial_{(\mu}(\partial_z + 3A')V_{\nu)} = 0, \quad y \quad \partial^\beta\partial_\beta V_\mu = 0, \quad (3.98)$$

donde haciendo la separación

$$V_\mu(x, z) = e^{-3A(z)}V_\mu(x), \quad (3.99)$$

analizando (3.98) en la coordenada adicional tenemos que no es normalizable por tanto no esta localizado en la coordenada adicional.

3.3.3. Modo escalar Γ y Θ en $SO(10)$

Para desacoplar el modo escalar asociado a la fluctuación gravitacional se considera

$$-\partial^\beta\partial_\beta\Gamma - 7A'\Gamma' + \Gamma'' + (6A'^2 + 2A'')\Theta + A'\Theta' = \frac{2}{3}\chi_q \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}, \quad (3.100)$$

y

$$-\partial^\beta\partial_\beta\Theta + 4A'\Theta' - 4A'\Gamma' - 4\Gamma'' - 2\phi'_q\chi'_q + (6A'^2 + 2A'')\Theta = \frac{2}{3}\chi_q \frac{dV(\Phi)}{d\phi_q}, \quad (3.101)$$

obtenidas a partir de (3.90) y (3.92) respectivamente, para simplificar se hace uso de los vínculos entre las variables escalares Γ , Θ y χ_q dados por

$$2\Gamma + \Theta = 0 \quad y \quad 3A'\Theta - 3\Gamma' - \phi'_q\chi_q = 0, \quad (3.102)$$

obtenidos (3.90) y (3.91) respectivamente, es necesarios para simplificar fijar $q = \mathbf{M}$ tal que reemplazando (3.102) en (3.101) y combinando con (3.100) se tiene

$$-\partial^\beta\partial_\beta\Gamma - \Gamma'' - (3A' - 2\frac{\phi''_M}{\phi'_M})\Gamma' - 4(A'' - A'\frac{\phi''_M}{\phi'_M})\Gamma = 0, \quad (3.103)$$

haciendo la separación de variable

$$\Pi(x, z) = e^{ipx}\Pi(z) \quad \text{con} \quad \Pi(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)} \frac{\Gamma(z)}{\phi'_M(z)}, \quad (3.104)$$

se obtiene una ecuación tipo Schrödinger como (2.88) y donde el potencial viene dado por

$$V_{qm22} = A' \frac{\phi_M''}{\phi_M'} - \frac{5}{2} A'' + \frac{9}{4} A' - \frac{\phi_M'''}{\phi_M'} + 2 \left(\frac{\phi_M''}{\phi_M'} \right)^2, \quad (3.105)$$

esta es una barrera de potencial ubicada entorno de $z = 0$ ver Figura (1.6) no es posible localizar un modo no masivo asociado a $\sigma^2 = 0$ y sabemos que los modos masivos se propagan libremente a lo largo de la coordenada adicional.

Sin embargo resultados interesantes se muestran a continuación para el modo escalar χ .

3.3.4. Modo escalar χ en $SO(10)$

Considere la ecuación

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi_q - 2(\phi_q'' + 3A' \phi_q') \Theta - \phi_q' \Theta' + 4\phi_q' \Gamma' + 3A' \chi_q' + \chi_q'' = \chi_q e^{2A} \frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_p d\phi_q}. \quad (3.106)$$

El lado derecho de esta expresión no puede ser simplificado, así pues los resultados obtenidos dependen de la expresión dada por (3.66). Dados

$$\chi = \chi_q \mathbf{T}^q \quad \text{y} \quad \Xi = \Xi_q \mathbf{T}^q \quad (3.107)$$

de modo que se definen la siguiente separación de variable

$$\Xi_q(x, z) = e^{ipx} \Xi_q(z), \quad \text{con} \quad \Xi_q(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)} \left(\chi_q(z) - \frac{\Gamma}{A'(z)} \phi_q'(z) \right), \quad (3.108)$$

se obtiene diferentes ecuaciones tipo Schrödinger dependiente de q .

Para $q = M$ resulta el potencial

$$V_M = \frac{9}{4} A'^2 + 3A' \frac{\phi_M''}{\phi_M'} - \frac{3}{2} A'' + \frac{\phi_M'''}{\phi_M'} - 2 \frac{\phi_M'' A''}{\phi_M' A'} - \frac{A'''}{A'} + 2 \left(\frac{A''}{A'} \right)^2, \quad (3.109)$$

para este potencial recordemos el gráfico (1.7) no se obtiene modos no masivos localizados ya que la barrera de potencial es de energía mayor que la de un estado $\sigma^2 = 0$ y los modos masivos se propagan libremente realizando efecto túnel pues satisfacen una ecuación tipo Schrödinger.

Ahora para analizaremos el caso $q \neq M$ todos los resultados que se presentaran a continuación satisfacen la siguiente ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (3.110)$$

donde

$$V_q = \frac{9}{4} A'^2 + \frac{3}{2} A'' + e^{2A} \frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_q^2}, \quad (3.111)$$

con A dada por

$$A = -\frac{v^2}{9} \left[2 \ln \cosh(kr) + \frac{1}{2} \tanh^2(kr) \right]. \quad (3.112)$$

Ahora se analizara (3.111) para los escenarios (3.25), (3.28) y (3.31)

kink Simétrico

Este escenario es asociado a la solución (3.25) satisface la ecuación (3.110). Si $q \neq M_a$ entonces para el segundo miembro de (3.111) resulta para $q = 2, \dots, 6, 2n, 43$

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = \frac{-2}{9}k^2 (10v^2 \tanh^4(kz) - 3(8v^2 + 9) \tanh^2(kz) + 6v^2 + 9), \quad (3.113)$$

y para $q = 2n - 11, 44, 45$

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = -\frac{1}{9}k^2 \text{sech}^4(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.114)$$

con $n = 4, \dots, 21$. Ahora se muestra el comportamiento de los potenciales V_q

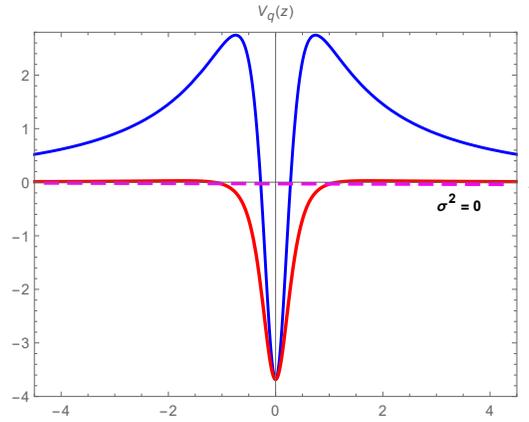


Figura 3.1: Potencial (3.113) y Potencial (3.114)

para los potenciales con segunda derivada como (3.113) y (3.114) es posible determinar un modo no masivo asociado a un auto estado ($\sigma^2 = 0$) por de cada generador, mientras que los modos masivos se propagan libremente a lo largo de la coordenada adicional.

kink Asimétrico

Este análisis está asociado a la solución (3.28). Si $q \neq M_b$, donde se obtiene seis casos. Los dos primeros para el segundo miembro de (3.111) y en dirección de los generadores $q = 2, 3, 6, 8, 14, 16, 22, 28$ resulta

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = \frac{-2}{9}k^2 (10v^2 \tanh^4(kz) - 3(8v^2 + 9) \tanh^2(kz) + 6v^2 + 9), \quad (3.115)$$

y para $q = 7, 9, 15, 17, 23, 29$

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = -\frac{1}{9}k^2 \text{sech}^4(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.116)$$

estos 14 generadores están asociados al grupo de simetría $SO(6)$ para los cuales se obtiene los siguientes comportamientos así los potenciales V_q asociado a los generadores antes mencionado

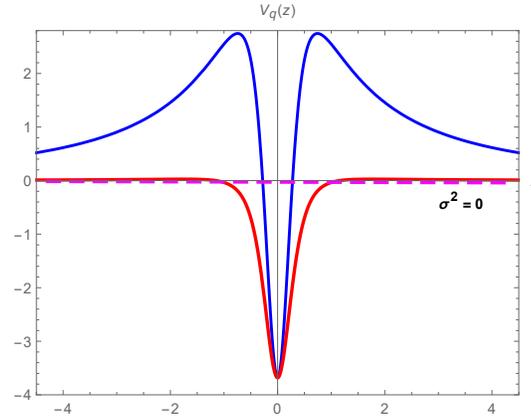


Figura 3.2: Potencial (3.113) y Potencial (3.114)

tienen el siguiente análisis, es posible determinar un modo no masivo localizado entorno a $z = 0$ por cada generador asociado a un auto estado ($\sigma^2 = 0$), los modos masivos asociados a cada generador se propagan libremente realizado efecto túnel en los sectores en los que el potencial es de mayor energía que el del estado masivo correspondiente.

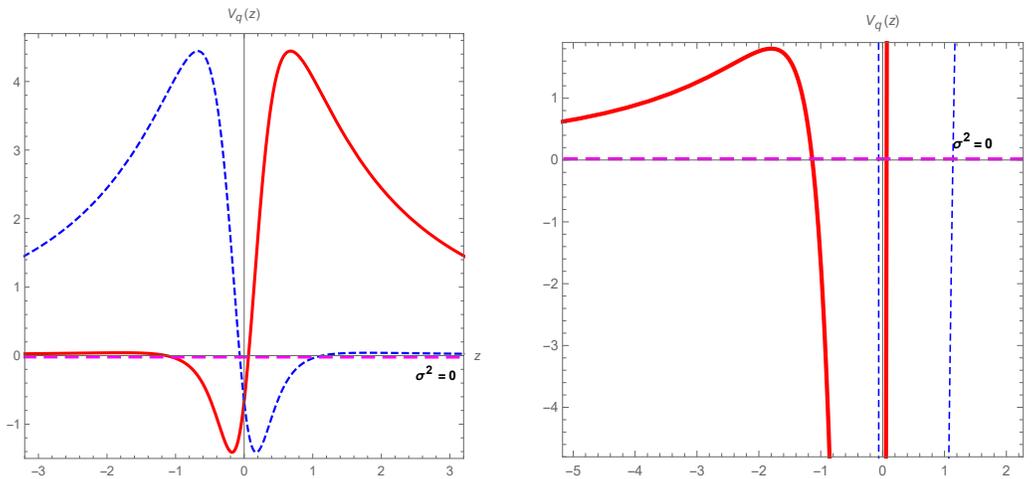
En dirección de los generadores que no aniquilan el vacío, es decir para $q = 10, 12, 18, 20, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38, 40$ se obtiene

$$V_{10,12,18,20,24,26,30,32,34,36,38,40} = V_{qm1} + \frac{1}{9}k^2(\tanh(kz) - 1) \tanh(kz)\text{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.117)$$

y para $q = 11, 13, 19, 21, 25, 31, 33, 35, 37, 39, 41$ resulta

$$V_{11,13,19,21,25,31,33,35,37,39,41} = V_{qm1} + \frac{1}{9}k^2 \tanh(kz)(\tanh(kz) + 1)\text{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.118)$$

los cuales tiene el siguiente comportamiento



(a) Potenciales $V_{10,12,18,\dots}$ y $V_{11,13,19,\dots}$

(b) Acercamiento para (3.118)

El siguiente análisis de resultado es valido tanto para (3.117) como para (3.118), en el gráfico (3.3b) es una acercamiento para determinar el comportamiento del potencial (??) donde se puede apreciar que es posible localizar un modo no masivo asociado a un auto estado ($\sigma^2 = 0$) en torno a $z = 0$, mientras que los modos masivos no es posible determinarlos a lo largo de la coordenada adicional pues se propagan libremente y realizando efecto túnel con parte de la barrera de potencial pues satisfacen la ecuación tipo de Schrödinger.

Por otro lado, en relación a los generadores asociados con las simetrías $SO(3)_L \sim SU(2)_L$ y $U(1)_{\mathbf{P}_b}$, es decir, $q = 5, 42, 43$ y $q = 4$ se satisface la ecuación (3.110) donde la segunda derivada asociada al potencial (3.111) viene dado por

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = \frac{4}{9}k^2(4v^2 + 9), \quad (3.119)$$

tal que el comportamiento del potencial es

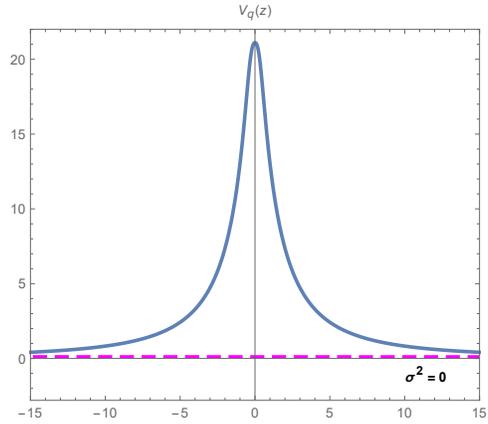


Figura 3.4: Potenciales $q = 4, 5, 42, 43$

donde se tiene una barrera de potencial para cada uno de los generadores, así no es posible localizar un modo no masivo asociado a un auto estado $\sigma^2 = 0$, los modos masivos se propagan libremente a lo largo de la coordenada adicional.

Ahora para los generadores $q = 44, 45$, los cuales satisfacen la ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (3.120)$$

donde

$$V_q = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' + e^{2A} \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2}, \quad (3.121)$$

donde se tiene que

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = 0, \quad (3.122)$$

donde tiene el siguiente comportamiento su potencial

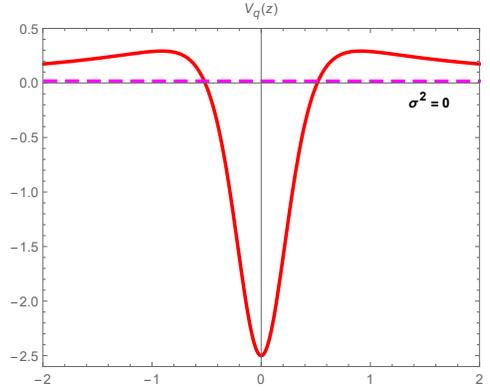


Figura 3.5: Potencial $q = 44, 45$

para este par de generadores es posible localizar un modo no masivos asociado a un auto estado ($\sigma^2 = 0$) entorno a $z = 0$, mientras que no es posible localizar a lo largo largo de la coordenada adicional los modos masivos. Es relevante resaltar que los resultados obtenidos para este escenario son muy similares a los encontrados para la simetría $SU(5)$ ver [4].

kink Supersimétrico

Este análisis está relacionado con la solución (3.31). Si $q \neq M_c$ en la cual se obtiene solo cuatro caso. Ahora tanto para los generadores $q = 2, \dots, 5, 42, 43, 2s$, asociado a la simetría $SO(6) \sim SU(4)$ como para \mathbf{P}_c asociado a la simetría $SO(2)_{\mathbf{P}_c}$ satisfacen la ecuación

$$(-\partial_z^2 + V_q) \Xi_q = \sigma^2 \Xi_q, \quad (3.123)$$

con

$$V_q = \frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' + e^{2A} \frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2}, \quad (3.124)$$

donde

$$\frac{d^2V(\Phi)}{d\phi_q^2} = \frac{4}{9}k^2(4v^2 + 9), \quad (3.125)$$

gráficamente

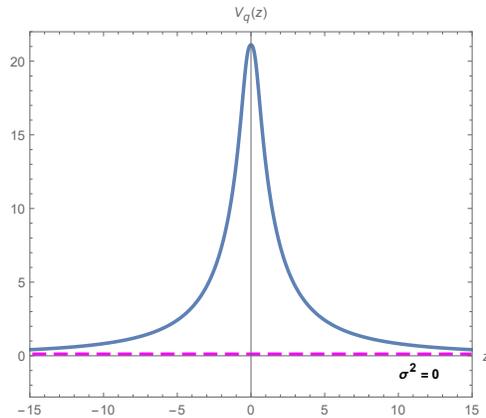


Figura 3.6: Potenciales $q = 2, \dots, 5, 42, 43, 2s$

Dado que se tiene una barrera de potencial ubicada en $z = 0$ no es posible localizar un modo no masivo asociado a ($\sigma^2 = 0$) puesto que el potencial tiene mayor energía que la asociada a este estado, de manera similar los modos masivos se propagan libremente estos tal que estos no pueden ser localizados a lo largo de la coordenada adicional.

En dirección de los generadores $q = 2n + 1$, con $n = 11, \dots, 20$ se tiene

$$\frac{d^2 V(\Phi)}{d\phi_q^2} = 0, \quad (3.126)$$

donde tiene el siguiente comportamiento su potencial

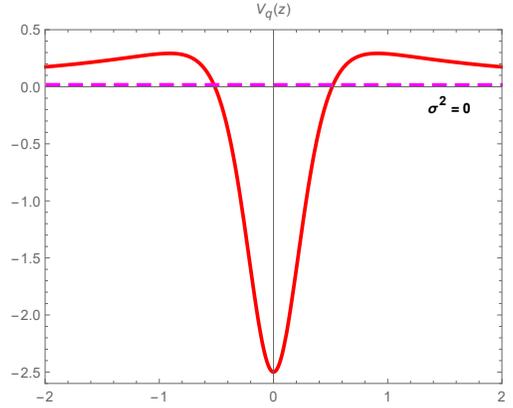


Figura 3.7: Potencial $q = 2n1$

por cada generador es posible determinar un modo no masivo asociado a auto estado ($\sigma^2 = 0$), no es posible determinar la localizar los modos masivos asociado a un auto estado ($\sigma^2 > 0$) pues se propagan libremente a lo largo de la coordenada adicional.

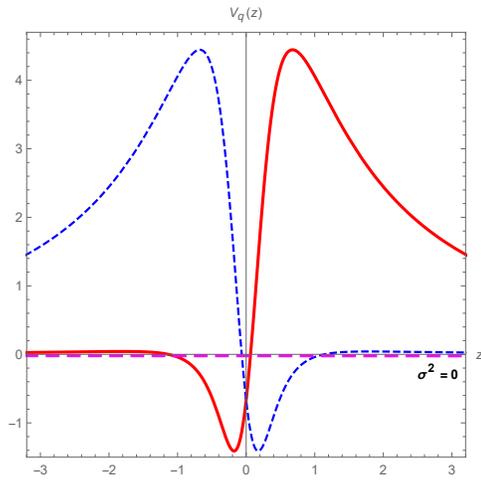
Finalmente en dirección de los generadores que no aniquilan el vacío, es decir para $q = 2n$ se obtiene para los potenciales asociados a estos generadores toma la forma

$$V_{q=2n} = V_{qm1} + \frac{1}{9}k^2(\tanh(kz) - 1) \tanh(kz)\text{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.127)$$

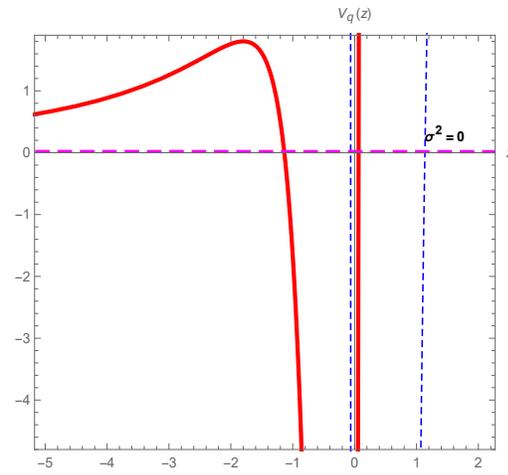
y para $q = 2n + 1$ resulta

$$V_{q=2n+1} = V_{qm1} + \frac{1}{9}k^2 \tanh(kz)(\tanh(kz) + 1)\text{sech}^2(kz) ((4v^2 + 9) \cosh(2kz) + 8v^2 + 9), \quad (3.128)$$

los cuales tiene el siguiente comportamiento



(a) Potenciales $V_{q=2n}$ y $V_{q=2n+1}$



(b) Acercamiento para (3.128)

Se puede apreciar que es posible localizar un modo no masivo asociado a un auto estado ($\sigma^2 = 0$) en torno a $z = 0$ por cada generador, mientras que los modos masivos asociados a estados ($\sigma^2 > 0$) no es posible determinarlos a lo largo de la coordenada adicional este análisis es valido tanto para (3.127) como para (3.128).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al igual que en la Ref. [4], es necesario redefinir todos los generadores del grupo $SO(10)$ de tal forma que para cada escenario se establece una base que permite determinar la simetría. Sobre cada *kink* auto-gravitante con simetría $SO(10)$ reportado en el capítulo 3, se encontraron estados escalares no masivos en la dirección de los generadores rotos. Sin embargo, también obtuvimos excitaciones de este tipo en la dirección de los generadores que no aniquilan el vacío.

Se obtienen tres escenarios. Para el primero, el escenario Simétrico, no se obtienen generadores rotos sobre el *kink* ya que no hay ruptura de $SO(10)$, se encuentran modos escalares no masivos localizados. Esto también se observa en la segunda configuración, el *kink* Asimétrico, donde el grupo residual sobre la pared es $SO(6) \times SU(2)_L \times U(1)_{\mathbf{P}_b}$. Aquí tanto los generadores asociados a $SO(6)$ como en la dirección de los generadores que no aniquilan el vacío quedan confinados en cuatro dimensiones asociado a la pared de dominio. Finalmente, para la solución Superasimétrica, la simetría residual sobre la pared es $SU(4) \times SO(2) \times U(1)_{\mathbf{P}_c}$ y sólo en la dirección de los generadores rotos se tienen excitaciones escalares normalizables.

De lo anterior notamos que, además de estados escalares confinados en la dirección de los generadores rotos, a lo largo de la base que se preservan, con la excepción de M , también se tienen estados de tipo tanto localizados como no localizados; y es un hecho que mientras los primeros quedan en la dirección de las bases del grupo $SO(N)$, los segundos están a lo largo de los generadores de $SU(N)$. La configuración Asimétrica ilustra muy bien lo que queremos decir: allí se obtienen estados escalares confinados en la dirección de las bases de $SO(6)$, modos escalares no normalizables en la direcciones de los generadores de $SU(2)_L$ y $U(1)_{\mathbf{P}_b}$ y bosones de Nambu-Goldstone atrapados en cuatro dimensiones a lo largo de los generadores rotos.

Considerando estos resultados y los reportados en la Ref. [4], la localización de bosones de Nambu-Goldstone es un efecto gravitacional esperado en estos escenarios. Por otra parte, en nuestra opinión, las propiedades del grupo $SO(N)$, a diferencia de las propiedades del grupo $SU(N)$, podrían estar favoreciendo el confinamiento de estados escalares no masivos distintos a los de Nambu-Goldstone.

A.1. Relación \tilde{R}_{ab} en función de R_{ab}

Se desea una relación entre el escalar de Ricci de la métrica perturbada \tilde{R}_{ac} y el escalar de Ricci para la métrica sin perturbar R_{ab} . Dado el tensor de Riemann

$$\tilde{R}_{abc}{}^f w_f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b w_c - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a w_c, \quad (\text{A.1})$$

donde, la definición de derivada covariante de una 1-forma que relaciona a una métrica perturbada \tilde{g}_{ab} con una sin perturbar g_{ab} es:

$$\tilde{\nabla}_p w_q = \nabla_p w_q - \tilde{C}_{pq}^f w_f, \quad (\text{A.2})$$

y \tilde{C}_{pq}^f es el símbolo de conexión entre las derivadas de las bases, reemplazando (A.2) en (A.1) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^f w_f &= \tilde{\nabla}_a \left(\nabla_b w_c - \tilde{C}_{bc}^f w_f \right) - \tilde{\nabla}_b \left(\nabla_a w_c - \tilde{C}_{ac}^f w_f \right) \\ &= \tilde{\nabla}_a \nabla_b w_c - \tilde{\nabla}_a \tilde{C}_{bc}^f - \tilde{C}_{bc}^f \tilde{\nabla}_a w_f - \tilde{\nabla}_b \nabla_a w_c + \tilde{\nabla}_b \tilde{C}_{ac}^f w_f + \tilde{C}_{ac}^f \tilde{\nabla}_b w_f, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

sabemos que la extensión de (A.2) para un tensor covariante de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son

$$\tilde{\nabla}_a T_{bc} = \nabla_a T_{bc} - \tilde{C}_{ab}^f T_{fc} - \tilde{C}_{ac}^f T_{bf} \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{\nabla}_a T_{bc}^f = \nabla_a T_{bc}^f + \tilde{C}_{ad}^f T_{bc}^d - \tilde{C}_{ab}^d T_{dc}^f - \tilde{C}_{ac}^d T_{bd}^f, \quad (\text{A.5})$$

se reemplaza lo anterior en (A.3) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^f w_f &= \left(\nabla_a \nabla_b w_c - \tilde{C}_{ab}^f \nabla_f w_c - \tilde{C}_{ac}^f \nabla_b w_f \right) - \left(\nabla_a \tilde{C}_{bc}^f + \tilde{C}_{ad}^f \tilde{C}_{bc}^d - \tilde{C}_{ab}^d \tilde{C}_{dc}^f - \tilde{C}_{ac}^d \tilde{C}_{bd}^f \right) w_f \\ &\quad - \tilde{C}_{bc}^f \left(\nabla_a w_f - \tilde{C}_{af}^g w_g \right) - \left(\nabla_b \nabla_a w_c - \tilde{C}_{ba}^f \nabla_f w_c - \tilde{C}_{bc}^f \nabla_a w_f \right) \\ &\quad + \left(\nabla_b \tilde{C}_{ac}^f + \tilde{C}_{bd}^f \tilde{C}_{ac}^d - \tilde{C}_{ba}^d \tilde{C}_{dc}^f - \tilde{C}_{bc}^d \tilde{C}_{ad}^f \right) w_f + \tilde{C}_{ac}^f \left(\nabla_b w_f - \tilde{C}_{bf}^g w_g \right), \\ \tilde{R}_{abc}{}^f w_f &= \nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c - \nabla_a \tilde{C}_{bc}^f w_f + \nabla_b \tilde{C}_{ac}^f w_f + \tilde{C}_{ac}^d \tilde{C}_{bd}^f w_f - \tilde{C}_{ad}^f \tilde{C}_{bc}^d \\ &= R_{abc}{}^f w_f + 2\nabla_{[b, \tilde{C}_{a]c}^f} w_f + 2\tilde{C}_{[ac, \tilde{C}_{b]d}^f} w_f, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde por definición se sabe que

$$R_{abc}{}^f w_f = \nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c, \quad (\text{A.7})$$

además

$$2\nabla_{[b, \tilde{C}_{a]c}^f} w_f = \nabla_b \tilde{C}_{ac}^f w_f - \nabla_a \tilde{C}_{bc}^f w_f, \quad (\text{A.8})$$

y

$$2\tilde{C}_{[ac, \tilde{C}_{b]d}^f} w_f = \tilde{C}_{ac}^d \tilde{C}_{bd}^f w_f - \tilde{C}_{ad}^f \tilde{C}_{bc}^d. \quad (\text{A.9})$$

A.2. Cálculo del lado izquierdo de \tilde{R}_{ab}

Es de interés en estudiar \tilde{R}_{ab} en la derivada respecto de λ y evaluar el resultado en $\lambda = 0$ el término, esto es

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} R_{ab} \Big|_{\lambda=0} - 2 \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_{[a, \tilde{C}_{c]b}^c} \right] \Big|_{\lambda=0} + 2 \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{C}_{a[b, \tilde{C}_{c],d}^c} \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad (\text{A.10})$$

con $\frac{d}{d\lambda} R_{ab} = 0$ ya que no tiene ningún término dependiente de λ , note que para el término $\tilde{C}_{a[b, \tilde{C}_{c],d}^c}$ se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{C}_{a[b, \tilde{C}_{c],d}^c} \right] \Big|_{\lambda=0} = \left[\frac{d}{d\lambda} \tilde{C}_{ab}^d \tilde{C}_{cd}^c + \tilde{C}_{ab}^d \frac{d}{d\lambda} \tilde{C}_{cd}^c - \frac{d}{d\lambda} \tilde{C}_{ac}^d \tilde{C}_{bd}^c - \tilde{C}_{ac}^d \frac{d}{d\lambda} \tilde{C}_{bd}^c \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad (\text{A.11})$$

donde haciendo una inspección al término \tilde{C}_{ac}^d se demuestra que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ac}^d &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{db} (\nabla_a (g_{bc} + \lambda h_{bc}) + \nabla_c (g_{ba} + \lambda h_{ba}) - \nabla_b (g_{ac} + \lambda h_{ac})) \Big|_{\lambda=0}, \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{db} [\nabla_a g_{bc} + \nabla_c g_{ba} - \nabla_b g_{ac}] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

en efecto. Ya que $\lambda = 0$ y se satisface la condición métrica, esto es

$$\nabla_b g_{ac} = \nabla_c g_{ba} = \nabla_a g_{bc} = 0, \quad (\text{A.13})$$

luego $\tilde{C}_{ac}^d \Big|_{\lambda=0} = 0$, de manera similar se muestra que

$$\tilde{C}_{cd}^c \Big|_{\lambda=0} = \tilde{C}_{ab}^d \Big|_{\lambda=0} = \tilde{C}_{bd}^c \Big|_{\lambda=0} = \tilde{C}_{ac}^d \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (\text{A.14})$$

así pues (A.10) se reduce a

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = - \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \tilde{C}_{cb}^c - \nabla_c \tilde{C}_{ab}^c \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad (\text{A.15})$$

se estudia por separado cada miembro del lado derecho se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \tilde{C}_{cb}^c \right] \Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} (\nabla_b \tilde{g}_{dc} + \nabla_c \tilde{g}_{db} - \nabla_d \tilde{g}_{bc}) \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} \nabla_a \left[\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}^{cd} (\nabla_c \tilde{g}_{db} + \nabla_b \tilde{g}_{dc} - \nabla_d \tilde{g}_{bc}) + \tilde{g}^{cd} \frac{d}{d\lambda} (\nabla_c \tilde{g}_{db} + \nabla_b \tilde{g}_{dc} - \nabla_d \tilde{g}_{bc}) \right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} \nabla_a [g^{cd} (\nabla_c h_{db} + \nabla_b h_{dc} - \nabla_d h_{cb})] \\ &= \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{dc}), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_c \tilde{C}_{ab}^c \right] \Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_c \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} (\nabla_a \tilde{g}_{db} + \nabla_b \tilde{g}_{da} - \nabla_d \tilde{g}_{ab}) \right] \Big|_{\lambda=0} \\
 &= -\frac{1}{2} \nabla_c g^{cd} \nabla_d h_{ab} + \frac{1}{2} [g^{cd} (\nabla_c \nabla_a h_{bd} + \nabla_c \nabla_b h_{ad})] \\
 &= -\frac{1}{2} \square h_{ab} + g^{cd} \nabla_c \nabla_{(a} h_{b)d},
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

luego (A.15) toma la forma

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \square h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{dc}) + g^{cd} \nabla_c \nabla_{(a} h_{b)d}, \tag{A.18}$$

esta última debe ser expresada en términos del Tensor de Riemann haciendo uso de

$$\begin{aligned}
 (\nabla_e \nabla_a - \nabla_a \nabla_e) h_{bd} &= R_{ea}{}^f{}_b h_{fd} + R_{ea}{}^f{}_d h_{bf} \\
 g^{de} \nabla_e \nabla_a h_{bd} &= g^{de} \nabla_a \nabla_e h_{bd} + g^{de} R_{ea}{}^f{}_b h_{fd} + g^{de} R_{ea}{}^f{}_d h_{bf} \\
 \nabla^d \nabla_a h_{bd} &= \nabla_a \nabla^d h_{bd} + R^d{}_{a}{}^f{}_b h_{fd} + R^d{}_{a}{}^f{}_d h_{bf},
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

y revisando el último término de (A.18) resulta

$$\begin{aligned}
 g^{cd} \nabla_c \nabla_{(a} h_{b)d} &= \frac{1}{2} (\nabla^d \nabla_a h_{bd} + \nabla^d \nabla_b h_{ad}) \\
 &= \frac{1}{2} [\nabla_a \nabla^d h_{bd} + R^d{}_{a}{}^f{}_b h_{fd} + R^d{}_{a}{}^f{}_d h_{bf}] + [\nabla_b \nabla^d h_{ad} + R^d{}_{b}{}^f{}_a h_{fd} + R^d{}_{b}{}^f{}_d h_{af}] \\
 &= \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} + R^d{}_{(a}{}^f{}_b) h_{fd} + R^d{}_{(a}{}^f{}_d) h_{bf},
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \square h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b (g^{cd} h_{dc}) + \nabla_{(a} \nabla^d h_{b)d} + R^d{}_{(a}{}^f{}_b) h_{fd} + R^d{}_{(a}{}^f{}_d) h_{bf}. \tag{A.21}$$

A.3. Cálculo del lado derecho de \tilde{R}_{ab}

Se esta interesado en analizar $\frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \Big|_{\lambda=0}$ y posteriormente se estudiara el término $-\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c \Big|_{\lambda=0}$, así pues se sabe que el tensor de energía impulso asociado a la métrica perturbada \tilde{g}_{ac} viene dado por

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab} \left(\frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \tilde{\nabla}_c \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right), \tag{A.22}$$

note que $\tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} = \nabla_a \tilde{\phi}$ por definición de derivada covariante de una 0-forma, derivando (A.22) respecto de λ y evaluando en $\lambda = 0$ se obtiene

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \nabla_a \tilde{\phi} \nabla_b \tilde{\phi} \Big|_{\lambda=0} - \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \nabla_c \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \Big|_{\lambda=0} - \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} V(\tilde{\phi}) \Big|_{\lambda=0}, \tag{A.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} \nabla_a \tilde{\phi} \nabla_b \tilde{\phi} \Big|_{\lambda=0} &= \left[\nabla_a \frac{d}{d\lambda} (\phi + \lambda\varphi) \nabla_b (\phi + \lambda\varphi) + \nabla_a (\phi + \lambda\varphi) \nabla_b \frac{d}{d\lambda} (\phi + \lambda\varphi) \right] \Big|_{\lambda=0} \\
 &= 2 \nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi,
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \nabla_c \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \nabla_c \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \right] \right|_{\lambda=0} + \tilde{g}_{ab} \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \nabla_c \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \right] \right|_{\lambda=0} \\
 &= \frac{1}{2} h_{ab} (g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} h^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + g_{ab} g^{cd} \nabla_{(c} \varphi \nabla_{d)} \phi, \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} V(\tilde{\phi}) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} V(\tilde{\phi}) \right|_{\lambda=0} + g_{ab} \left. \frac{d}{d\lambda} V(\tilde{\phi}) \right|_{\lambda=0} = h_{ab} V(\phi) + g_{ab} \frac{d}{d\lambda} V(\phi) \varphi, \tag{A.26}$$

(A.23) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \right|_{\lambda=0} &= 2 \nabla_{(a} \varphi \nabla_{b)} \phi - \frac{1}{2} h_{ab} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi + \frac{1}{2} g_{ab} h^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi \\
 &\quad - g_{ab} g^{cd} \nabla_{(c} \varphi \nabla_{d)} \phi - h_{ab} V(\phi) - g_{ab} \frac{d}{d\lambda} V(\phi) \varphi, \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

se estudia $-\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} [\tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c] \Big|_{\lambda=0}$ para ello se tiene que

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} [\tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c] \Big|_{\lambda=0} &= -\frac{1}{3} \left[\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c + \tilde{g}_{ab} \frac{d}{d\lambda} (\tilde{g}^{cd} \tilde{T}_{cd}) \right] \Big|_{\lambda=0} \\
 &= -\frac{1}{3} \left[\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c - \tilde{g}_{ab} h^{cd} \tilde{T}_{cd} + \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{cd} \right] \Big|_{\lambda=0}, \tag{A.28}
 \end{aligned}$$

en el primer término se tiene

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \tilde{T}_c^c \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{3} \left[h_{ab} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - \frac{1}{2} h_{ab} D g^{fe} \nabla_f \phi \nabla_e \phi - h_{ab} D V(\phi) \right], \tag{A.29}$$

donde $D = \text{Tr}(g^{ab} g_{ab})$ en el segundo término

$$-\frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} h^{cd} \tilde{T}_{cd} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{3} \left[g_{ab} h^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (h^{cd} g_{cd}) g^{fe} \nabla_e \phi \nabla_f \phi - g_{ab} (h^{cd} g_{cd}) V(\phi) \right], \tag{A.30}$$

el tercer y ultimo término

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{cd} \Big|_{\lambda=0} &= -\frac{1}{3} \left[2 g_{ab} g^{cd} \nabla_{(c} \varphi \nabla_{d)} \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (g^{cd} h_{cd}) g^{fe} \nabla_f \phi \nabla_e \phi - g_{ab} (g^{cd} h_{cd}) V(\phi) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{ab} D h^{fe} \nabla_f \phi \nabla_e \phi - g_{ab} D g^{fe} (\nabla_{(f} \varphi \nabla_{e)} \phi) - D g_{ab} \frac{d}{d\lambda} V(\phi) \varphi \right], \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

A.4. Dedución de la ecuación del campo escalar

De la ecuación (1.21) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \nabla_b (\phi + \lambda \varphi) &= \frac{\partial V(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} \\
 g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - g^{ab} \tilde{C}_{ab}^f \nabla_f \phi + \lambda g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi - \lambda g^{ab} \tilde{C}_{ab}^f \nabla_f \varphi - \lambda h^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi \\
 + \lambda h^{ab} \tilde{C}_{ab}^f \nabla_f \phi &= \frac{\partial V(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}}, \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - g^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{fc}[\nabla_a\tilde{g}_{cb} + \nabla_b\tilde{g}_{ca} - \nabla_c\tilde{g}_{ab}] \right) + \\
 & + \lambda g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \lambda g^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{fc}[\nabla_a\tilde{g}_{cb} + \nabla_b\tilde{g}_{ca} - \nabla_c\tilde{g}_{ab}] \right) - \\
 & - \lambda h^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + \lambda h^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{fc}[\nabla_a\tilde{g}_{cb} + \nabla_b\tilde{g}_{ca} - \nabla_c\tilde{g}_{ab}] \right) = \frac{\partial V(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}}, \quad (\text{A.33})
 \end{aligned}$$

luego diferenciando ambos lado respecto de λ en (A.33) y evaluando luego en $\lambda = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 & -g^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}h^{fc}[\nabla_ag_{cb} + \nabla_bg_{ca} - \nabla_cg_{ab}] \right) - g^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}g^{fc}[\nabla_ah_{cb} + \nabla_bh_{ca} - \nabla_ch_{ab}] \right) \\
 & - g^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}g^{fc}[\nabla_ag_{cb} + \nabla_bg_{ca} - \nabla_cg_{ab}] \right) - h^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi \\
 & + h^{ab}\nabla_f\phi \left(\frac{1}{2}g^{fc}[\nabla_ag_{cb} + \nabla_bg_{ca} - \nabla_cg_{ab}] \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial V(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} \right) \Big|_{\lambda=0}, \quad (\text{A.34})
 \end{aligned}$$

donde $\nabla_ag_{cb} = \nabla_bg_{ca} = \nabla_cg_{ab} = 0$, resulta

$$-h^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{1}{2}(g^{ab}g^{fc}[\nabla_ah_{cb} + \nabla_bh_{ca} - \nabla_ch_{ab}]\nabla_f\phi) + g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2}\phi, \quad (\text{A.35})$$

A.5. Variables infinitesimales y de calibre

A.5.1. Libertad de calibre de la métrica perturbada

Dada $\lambda_a^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^a} - \frac{\partial \epsilon^c}{\partial x^a} = \delta_a^c - \nabla_a\epsilon^c$ con $|\epsilon| \ll 1$ note lo siguiente

$$\begin{aligned}
 g'_{ab} &= \lambda_a^c \lambda_b^d g_{cd} \\
 &= (\delta_a^c - \nabla_a\epsilon^c)(\delta_b^d - \nabla_b\epsilon^d)g_{cd} \\
 &= (\delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^c\nabla_b\epsilon^d - \delta_b^d\nabla_a\epsilon^c)g_{cd} \\
 &= g_{ab} + \nabla_b\epsilon^d g_{ab} - \nabla_a\epsilon^c g_{cb}. \quad (\text{A.36})
 \end{aligned}$$

Ahora bien si $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + h_{ab}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 g'_{ab} + h'_{ab} &= g_{ab} + h_{ab} - \nabla_b\epsilon^d(g_{ad} + h_{ad}) - \nabla_a\epsilon^c(g_{cb} + h_{cb}) \\
 &\cong g_{ab} + h_{ab} - \nabla_b\epsilon_a h_{ad} - \nabla_a\epsilon_b h_{cb} \quad |h_{ab}| \ll 1 \\
 &= g_{ab} + h_{ab} - \nabla_b\epsilon_a - \nabla_a\epsilon_b, \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \nabla_b\epsilon_a - \nabla_a\epsilon_b, \quad (\text{A.38})$$

A.5.2. deducción de transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} e^{-2A} \left[e^{2A} (2\overline{h_{\mu\nu}^{TT}} + 2\partial_{(\mu}\overline{f_{\nu)}}) + 2\eta_{\mu\nu}\overline{\psi} + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}\overline{E} \right] &= \eta^{\mu\nu} e^{-2A} \{ [e^{2A} (2h_{\mu\nu}^{TT} + 2\partial_{(\mu}f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + \partial_{\mu}\partial_{\nu}E)] \\ &\quad - [\partial_{\mu}e^{2A}\epsilon_{\nu} + (A'\eta_{\mu\nu}e^{2A}\epsilon_r + \partial_{\nu}e^{2A}\epsilon_{\mu} + A'\eta_{\mu\nu}e^{2A}\epsilon_r)] \} \\ &= \eta^{\mu\nu} \{ 2\eta_{\mu\nu}(\psi - A'\epsilon_r) \} + \eta^{\mu\nu} \{ \partial_{\mu}\partial_{\nu}E - \epsilon \}, \quad (\text{A.39}) \end{aligned}$$

por comparación directa tenemos $\overline{\psi} = \psi - A'\epsilon_r$ y $\overline{E} = E - \epsilon$,

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} \left[e^{2A} (2\overline{h_{\mu\nu}^{TT}} + 2\partial_{(\mu}\overline{f_{\nu)}}) + 2\eta_{\mu\nu}\overline{\psi} + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}\overline{E} \right] &= \partial^{\mu} \{ e^{2A} (2h_{\mu\nu} + \partial_{(\mu}f_{\nu)} + 2\eta_{\mu\nu}\psi + \partial_{\mu}\partial_{\nu}E) \\ &\quad - [\partial_{\mu}(\partial_{\nu}\epsilon + \xi_{\nu}) + \partial_{\nu}(\partial_{\mu}\epsilon + \xi_{\mu}) + 2A'\eta_{\mu\nu}e^{2A}\epsilon_r] \} \\ &= \partial^{\mu} \{ e^{2A} (\partial_{\mu}f_{\nu} + \partial_{\nu}f_{\mu}) - (\partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu}) \}. \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

Nuevamente por comparación $\overline{f_{\mu}} = f_{\mu} - \xi_{\mu}$,

$$\begin{aligned} e^A (\overline{D_{\mu}} - \partial_{\mu}\overline{C}) &= e^A (D_{\mu} + \partial_{\mu}C) - \nabla_{\mu}\epsilon_r - \nabla_r(e^{2A}\epsilon_{\mu}) \\ &= e^A (D_{\mu} + \partial_{\mu}C) - \partial_{\mu}\epsilon_r - e^{2A}\partial_{\mu}\epsilon' - e^{2A}\xi'_{\mu}. \quad (\text{A.41}) \end{aligned}$$

Por comparación $\overline{C} = C - e^A\epsilon' - e^{-A}\epsilon_r$ y $\overline{D_{\mu}} = D_{\mu} - e^A\xi'_{\mu}$,

$$\begin{aligned} 2\overline{\omega} &= 2(\omega - \nabla_r\epsilon_r) \\ &= 2(\omega - \epsilon'_r), \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

teniendo $\overline{\omega} = \omega - \epsilon'_r$.

La transformación de la perturbación del campo viene dada por $\overline{\varphi} = \varphi - \epsilon^a\partial_a\phi$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} + \overline{\phi} &= \phi + \varphi - \epsilon^a\partial_a\phi \\ \text{si } \overline{\phi} = \phi &\Rightarrow \overline{\varphi} = \varphi - \epsilon^a\partial_a\phi \quad \text{si } a = r \\ &\Rightarrow \overline{\varphi} = \varphi - \phi'\epsilon_r. \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

A.6. Ecuación del modo escalar χ

A continuación se demuestra que la ecuación (1.71) puede ser transformada como una ecuación tipo Schrödinger. Procediendo en esta demostración en sentido inverso, esto es, dado

$$\left((\partial_z + \frac{Z'}{Z})(-\partial_z + \frac{Z'}{Z}) + \partial^{\beta}\partial_{\beta} \right) P = 0, \quad (\text{A.44})$$

donde $Z = e^{\frac{3}{2}A(z)} \frac{\phi'}{A'}$ note que

$$\begin{aligned} \left((\partial_z + \frac{Z'}{Z})(-\partial_z + \frac{Z'}{Z}) + \partial^{\beta}\partial_{\beta} \right) P &= (\partial_z + \frac{Z'}{Z})(\partial_z P + \frac{Z'}{Z}P) + \partial^{\beta}\partial_{\beta}P \\ &= \left(-\partial_z^2 + \partial_z(\frac{Z'}{Z}) + (\frac{Z'}{Z})^2 + \partial^{\beta}\partial_{\beta} \right) P \quad (\text{A.45}) \end{aligned}$$

reemplazando

$$P = e^{-\frac{3}{2}A(z)} \left(\chi - \frac{\phi'}{A'} \Gamma \right) \quad (\text{A.46})$$

en (A.46) considerando (A.45) se tiene

$$\begin{aligned} 0 = & \chi'' + 3A'\chi' + \partial^\beta \partial_\beta \chi - 4\frac{\phi''}{A'}\Gamma' + 2\frac{\phi'A''}{A'^2}\Gamma' - 4\left(\phi'' - \frac{A''}{A'}\phi'\right)\Gamma \\ & - \left(3A'\frac{\phi''}{\phi'} - 3A'' + \frac{\phi'''}{\phi} - 2\frac{A''\phi''}{A'\phi'} - \frac{A'''}{A'} + 2\frac{A''^2}{A'^2}\right)\chi, \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

así pues usando (1.79) en (A.47) se simplifica de la siguiente manera

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi + \chi'' + 3A'\chi' + 4\phi''\Gamma = \left(3A'\frac{\phi''}{\phi'} - 3A'' + \frac{\phi'''}{\phi'}\right)\chi, \quad (\text{A.48})$$

con (1.13) y (1.79) reemplazando en (A.48) resulta

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi + \chi'' + 3A'\chi' + 4\phi''\Gamma = \frac{\phi''}{\phi}\chi + 3A''\chi - 6A'^2\chi + A'\frac{\phi''}{\phi'} - 3A'\phi'\Gamma - 6\phi' \left(-2A'\Gamma - \frac{\phi'}{3}\chi\right), \quad (\text{A.49})$$

haciendo uso de

$$\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dV}{d\phi}\right)\frac{1}{\phi'} \quad \text{con} \quad \frac{dV}{d\phi} = e^{2A} (A'\phi'' + \phi''' + 3A''\phi' - 6A'^2\phi') \quad (\text{A.50})$$

en A.49 se obtiene

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi + \chi'' + 3A'\chi' + 4\phi''\Gamma + 3A'\phi'\Gamma + 6\phi'\Gamma' = \chi e^{2A} \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}, \quad (\text{A.51})$$

nuevamente haciendo uso de (1.79) en (A.51)

$$\partial^\beta \partial_\beta \chi - 2(\phi'' + 3A'\Phi')\Theta - \phi'\Theta' + 4\phi'\Gamma' + 3A'\chi' + \chi'' = \chi e^{2A} \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}, \quad (\text{A.52})$$

que es exactamente (1.71).

B.1. Cálculo del lado derecho de \tilde{R}_{ab} para simetría $SU(5) \times Z_2$

Considere $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi}_q \mathbf{T}^q = (\phi_q + \lambda\varphi_q) \mathbf{T}^q$ y nuevamente $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab}$ con $\lambda \ll 1$ partiendo de (2.39), tal que se reescribe

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab} &= 2\text{Tr} \left[\nabla_a \tilde{\phi}_q \mathbf{T}^q \nabla_b \tilde{\phi}_p \mathbf{T}^p \right] - \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} \text{Tr} \left[\nabla_c \tilde{\phi}_q \mathbf{T}^q \nabla_d \tilde{\phi}_p \mathbf{T}^p \right] + V(\tilde{\Phi}) \right) \\ &= 2 \left(\nabla_a (\phi_q + \lambda\varphi_q) \nabla_b (\phi_p + \lambda\varphi_p) \right) \text{Tr}[\mathbf{T}^q \mathbf{T}^p] \\ &\quad - \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} \nabla_c (\phi_q + \lambda\varphi_q) \nabla_d (\phi_p + \lambda\varphi_p) \text{Tr}[\mathbf{T}^q \mathbf{T}^p] + V(\tilde{\Phi}) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

luego considerando el desarrollo de Taylor (B.1) a orden landa λ , es decir

$$V(\tilde{\Phi}) = V(\Phi) + \lambda \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_q} \varphi_q, \quad (\text{B.2})$$

se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab} &= 2\text{Tr} [\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi] + 4\lambda \text{Tr} [\nabla_{(a} \Phi \nabla_{b)} \varphi] \\ &\quad - \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} \text{Tr} [\nabla_c \Phi \nabla_d \Phi] + 2\lambda \tilde{g}^{cd} \text{Tr} [\nabla_{(c} \Phi \nabla_{d)} \varphi] + V(\Phi) + \lambda \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_q} \varphi_q \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \tilde{T}_{cd} &= 2\text{Tr} [\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi] + 4\lambda \text{Tr} [\nabla_{(a} \Phi \nabla_{b)} \varphi] \\ &\quad + \frac{2}{3} g_{ab} V(\Phi) + \frac{2}{3} \lambda g_{ab} \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_q} \varphi_q + \frac{2}{3} \lambda h_{ab} V(\Phi). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ahora, diferenciando (B.4) respecto de λ se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \tilde{T}_{cd} \right] = 4\text{Tr} [\nabla_{(a} \Phi \nabla_{b)} \varphi] + \frac{2}{3} h_{ab} V(\Phi) + \frac{2}{3} g_{ab} \left(\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_q} \right) \varphi_q. \quad (\text{B.5})$$

B.2. Redefinición de Generadores de $SU(5)$

$$\mathbf{R}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^9 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{10} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{15} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{16} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{17} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^{18} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{19} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^{20} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^{22} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 = \frac{\mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^{23}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{R}^8 = \frac{\mathbf{T}^{24} - \sqrt{5}\mathbf{T}^8}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{R}^{23} = \frac{\frac{\mathbf{T}^8 + \sqrt{5}\mathbf{T}^{24}}{\sqrt{6}} + \frac{\mathbf{T}^3 - \mathbf{T}^{23}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{R}^{24} = \frac{\frac{\mathbf{T}^3 - \mathbf{T}^{23}}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{T}^8 + \sqrt{5}\mathbf{T}^{24}}{\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}$$

donde los \mathbf{T}^i con $i = 1, \dots, 24$ son los mismos que [11]

APÉNDICE C

REDEFINICIÓN DE LOS GENERADORES DE $SO(10)$

Dado

$$(\mathbf{L}_{ij})_{sl} = \delta_{il}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jl}, \quad \text{con } s, l = 1, \dots, 10. \quad (\text{C.1})$$

se definen

$$\mathbf{T}^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,3} + \mathbf{L}_{2,4}), \quad \mathbf{T}^7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,4} + \mathbf{L}_{2,3}), \quad \mathbf{T}^8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,5} + \mathbf{L}_{2,6}), \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{T}^9 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,6} + \mathbf{L}_{2,5}), \quad \mathbf{T}^{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,7} + \mathbf{L}_{2,8}), \quad \mathbf{T}^{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,8} + \mathbf{L}_{2,7}), \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{T}^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,9} + \mathbf{L}_{2,10}), \quad \mathbf{T}^{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,10} + \mathbf{L}_{2,4}), \quad \mathbf{T}^{14} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,4} - \mathbf{L}_{2,3}), \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{T}^{15} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,3} - \mathbf{L}_{2,4}), \quad \mathbf{T}^{16} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,6} - \mathbf{L}_{2,5}), \quad \mathbf{T}^{17} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,5} - \mathbf{L}_{2,6}), \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{T}^{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,8} - \mathbf{L}_{2,7}), \quad \mathbf{T}^{19} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,7} - \mathbf{L}_{2,8}), \quad \mathbf{T}^{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,10} - \mathbf{L}_{2,9}), \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{T}^{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{1,9} - \mathbf{L}_{2,10}), \quad \mathbf{T}^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,5} + \mathbf{L}_{4,6}), \quad \mathbf{T}^{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,6} + \mathbf{L}_{4,5}), \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{T}^{24} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,7} + \mathbf{L}_{4,8}), \quad \mathbf{T}^{25} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,8} + \mathbf{L}_{4,7}), \quad \mathbf{T}^{26} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,9} + \mathbf{L}_{4,10}), \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{T}^{27} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,10} + \mathbf{L}_{4,9}), \quad \mathbf{T}^{28} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,6} - \mathbf{L}_{4,5}), \quad \mathbf{T}^{29} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,5} - \mathbf{L}_{4,6}), \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{T}^{30} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,8} - \mathbf{L}_{4,7}), \quad \mathbf{T}^{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,7} - \mathbf{L}_{4,8}), \quad \mathbf{T}^{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,10} - \mathbf{L}_{4,9}), \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{T}^{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{3,9} - \mathbf{L}_{4,10}), \quad \mathbf{T}^{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,7} + \mathbf{L}_{6,8}), \quad \mathbf{T}^{35} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,8} + \mathbf{L}_{6,7}), \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{T}^{36} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,9} + \mathbf{L}_{6,10}), \quad \mathbf{T}^{37} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,10} + \mathbf{L}_{6,9}), \quad \mathbf{T}^{38} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,8} - \mathbf{L}_{6,7}), \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{T}^{39} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,7} - \mathbf{L}_{6,8}), \quad \mathbf{T}^{40} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,10} - \mathbf{L}_{6,9}), \quad \mathbf{T}^{41} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{5,9} - \mathbf{L}_{6,10}), \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{T}^{42} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{8,9} - \mathbf{L}_{7,10}), \quad \mathbf{T}^{43} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{8,10} + \mathbf{L}_{7,9}), \quad \mathbf{T}^{44} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{8,9} + \mathbf{L}_{7,10}), \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{T}^{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{L}_{8,10} - \mathbf{L}_{7,9}), \quad (\text{C.15})$$

- [1] Lisa Randall and Raman Sundrum. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.
- [2] Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Freddy Ramirez. Breaking the Z_2 symmetry of the Randall-Sundrum scenario and the fate of the massive modes. 2010.
- [3] Alejandra Melfo, Roger Naranjo, Nelson Pantoja, Aureliano Skirzewski, and Juan Carlos Vasquez. Self-gravitating non-abelian kinks as brane worlds. *Phys. Rev.*, D84:025015, 2011.
- [4] Nelson Pantoja and Rossana Rojas. Gravitational localization of scalar zero modes in $SU(5) \times Z_2$ branes. 2015.
- [5] Oscar Castillo-Felisola, Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Alba Ramirez. Localizing gravity on exotic thick three-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004.
- [6] Massimo Giovannini. Gauge invariant fluctuations of scalar branes. *Phys. Rev.*, D64:064023, 2001.
- [7] Edward M. Shin and Raymond R. Volkas. $O(10)$ kinks: Clash of symmetries on the brane and the gauge hierarchy problem. *Phys. Rev.*, D69:045010, 2004.
- [8] James M. Bardeen. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev.*, D22:1882–1905, 1980.
- [9] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.
- [10] Ling-Fong Li. Group Theory of the Spontaneously Broken Gauge Symmetries. *Phys. Rev.*, D9:1723–1739, 1974.
- [11] W.Greiner and B.Muller. Gauge theory of weak interactions.